

Razões e percentagens

Pág. 10

$$1. \quad 230 - 5 = 225$$

$$\frac{4}{9} \times 225 = \frac{4 \times 225}{9} = 100$$

Logo, como votaram a favor 103 deputados a afirmação é verdadeira.

$$2.1. \quad \frac{92}{103}$$

$$2.2. \quad \frac{92}{225}$$

$$2.3. \quad \frac{30}{225} = \frac{2}{15}$$

$$3. \quad \frac{103}{225} \approx 0,45777$$

Resposta: 45,78%

$$4. \quad \frac{92}{103} \approx 0,89320$$

Resposta: 89,3%

$$5. \quad \frac{5}{230} \approx 0,021739$$

A percentagem de deputados ausentes foi de 2,17%.

Logo, o jornalista não foi muito rigoroso, seria preferível dizer 2% ou 2,2%.

Pág. 12

$$1.1. \quad a) \quad \frac{30}{100} = \frac{30:10}{100:10} = \frac{3}{10}$$

$$b) \quad 2:18 = \frac{2:2}{18:2} = \frac{1}{9}$$

$$c) \quad 2,5:100 = \frac{5}{2}:100 = \frac{5}{\frac{100}{2}} = \frac{5}{200} = \frac{5:5}{200:5} = \frac{1}{40}$$

$$d) \quad \frac{0,35}{5} = \frac{\frac{7}{20}}{5} = \frac{7}{100}$$

$$1.2. \quad a) \quad \frac{1}{5} = \frac{1 \times 7}{5 \times 7} = \frac{7}{35}; \quad \frac{2}{7} = \frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{10}{35}$$

Por exemplo, $\frac{8}{35}$ é uma razão compreendida entre $\frac{1}{5}$ e

$$\frac{3}{7}.$$

$$\text{Ou, } \frac{1}{5} = 0,2; \quad \frac{2}{7} = 0,29.$$

Por exemplo, um número entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{7}$ é $0,25 = \frac{1}{4}$.

$$b) \quad \frac{2}{3} = 0,66...; \quad \frac{7}{8} = 0,875$$

Por exemplo, $0,75 = \frac{3}{4}$ é uma razão compreendida entre

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{7}{8}.$$

$$c) \quad \frac{2,5}{10} = \frac{1}{4} = 0,25; \quad \frac{5}{18} = 0,277...$$

Por exemplo, $0,26 = \frac{13}{50}$ é uma razão compreendida entre

$$\frac{2,5}{10} \text{ e } \frac{5}{18}.$$

2.1.

Palavras	Minutos
45 —	1
270 —	x

$$x = \frac{270}{45} = 6$$

Resposta: 6 minutos

$$2.2. \quad a) \quad \frac{96}{8} = 12$$

Resposta: A razão do consumo de gasolina é 12 km por litro.

b)

Litros	km
8 —	96
15 —	x

$$x = \frac{15 \times 96}{8} = 180$$

Resposta: Pode percorrer 180 km.

Pág. 14

$$3.1. \quad a) \quad 100 \times 0,15 = 15 \text{ kg}$$

$$b) \quad 12 \times 0,012 = 0,144 \text{ litros}$$

$$c) \quad 1000 \times 0,003 = 3 \text{ km}$$

$$d) \quad 10\,000 \times 1,23 = 12\,300 \text{ euros}$$

$$e) \quad 5000 \times 0,125 = 625 \text{ euros}$$

$$3.2. \quad 1000 \times 0,25 = 250; \quad 1000 - 250 = 750 \text{ euros}$$

$$\text{ou } 1000 \times 0,75 = 750 \text{ euros}$$

Posteriormente existiu uma redução de 5%, logo,

$$750 \times 0,05 = 37,5; \quad 750 - 37,5 = 712,50 \text{ euros ou}$$

$$750 \times 0,95 = 712,50 \text{ euros.}$$

Pág. 15

4.1. Seja x o número de votos que o partido A obteve nas eleições anteriores:

$$x + 0,052x = 10\,520 \Leftrightarrow 1,052x = 10\,520$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10\,520}{1,052} \Leftrightarrow x = 10\,000$$

Nas eleições anteriores o partido A obteve 10 000 votos.

4.2. Seja x o número de chamadas que a Ana fez no mês passado:

$$x - 0,15x = 102 \Leftrightarrow 0,85x = 102 \Leftrightarrow x = \frac{102}{0,85} \Leftrightarrow x = 120$$

No mês passado a Ana fez 120 chamadas.

4.3. Seja x o número de livros que o António leu no ano anterior:

$$x + 0,2x = 18 \Leftrightarrow 1,2x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18}{1,2} \Leftrightarrow x = 15$$

No ano anterior o António leu 15 livros.

4.4. Seja x o número de habitantes da cidade no ano passado:

$$x - 0,05x = 14\,250 \Leftrightarrow 0,95x = 14\,250$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14\,250}{0,95} \Leftrightarrow x = 15\,000$$

No ano passado a cidade tinha 15 000 habitantes.

Pág. 16

$$5.1. \quad 200 - 100 = 100 \text{ (variação absoluta)}$$

$$\frac{100}{100} = 1 = 100\% \left(\frac{\text{variação absoluta}}{\text{valor de referência}} \right)$$

O facto do valor de referencia ser positivo significa que o número de alunos aumentou e a percentagem de aumento é igual a 100%.

5.2. $1200 - 400 = 800$

$$400 \text{ — } 100\%$$

$$800 \text{ — } x \quad x = \frac{800 \times 100}{400} = 200\%$$

A percentagem de aumento foi de 200%.

5.3. Desvalorização: 900

$$1200 \text{ — } 100\%$$

$$900 \text{ — } x \quad x = \frac{900 \times 100}{1200} = 75\%$$

A percentagem de desvalorização foi de 75%.

5.4. $1050 - 1000 = 50$

$$1000 \text{ — } 100\%$$

$$50 \text{ — } x \quad x = \frac{50 \times 100}{1000} = 5\%$$

A percentagem de aumento foi de 5%.

5.5. $18\,000 - 17\,280 = 720$

$$18\,000 \text{ — } 100\%$$

$$720 \text{ — } x \quad x = \frac{720 \times 100}{18\,000} = 4\%$$

A percentagem de desvalorização foi de 4%.

5.6. a) $19,23 - 18,21 = 1,02$

$$19,23 \text{ — } 100\%$$

$$1,02 \text{ — } x \quad x = \frac{1,02 \times 100}{19,23} \approx 5,3\%$$

b) $2,35 - 2,09 = 0,26$

$$2,35 \text{ — } 100\%$$

$$0,26 \text{ — } x \quad x = \frac{0,26 \times 100}{2,35} \approx 11,1\%$$

Pág. 18

6.1. $\frac{560 - 360}{360} \approx 0,56 = 56\%$

O Luís enviou mais 56% de mensagens que a Ana.

6.2. a) O pão aumentou $(50 - 40) = 10$ centavos

O anel aumentou $(625 - 500) = 125$ €.

b) $\frac{10}{40} = 0,25 = 25\%$; $\frac{125}{500} = 0,25 = 25\%$

O pão e o anel aumentaram 25%.

c) Esta situação evidencia a importância do valor de referência sobre o qual incide a percentagem. Embora a percentagem obtida para as alíneas anteriores seja igual, o valor dos aumentos foi muito diferente.

6.3. a1) $\frac{2\,159\,742 - 1\,568\,168}{1\,568\,168} \approx 0,3772$ (4 c. d.)

O partido A obteve, aproximadamente, 37,72% mais votos que o partido B.

a2) $\frac{1\,568\,168 - 653\,987}{653\,987} \approx 1,3979$ (4 c. d.)

O partido B obteve, aproximadamente, 139,79% mais votos que o partido C.

a3) $\frac{653\,987 - 1\,568\,168}{1\,568\,168} \approx -0,5830$ (4 c. d.)

O partido C obteve, aproximadamente, 58,30% menos votos que o partido B.

b) Em 2009: $2\,159\,742 - 504\,965 = 1\,654\,777$

$$\frac{1\,654\,777 - 2\,159\,742}{2\,159\,742} \approx -0,2338$$
 (4 c. d.)

A percentagem de descida foi de, aproximadamente, 23%.

c) Em 2009: $1\,568\,168 + 509\,527 = 2\,077\,695$

$$\frac{2\,077\,695 - 1\,568\,168}{1\,568\,168} \approx 0,3249$$
 (4 c. d.)

A percentagem de subida foi de, aproximadamente, 32%.

d) Em 2009: $653\,987 - 60\,990 = 592\,997$

$$\frac{592\,997 - 653\,987}{653\,987} \approx -0,0933$$
 (4 c. d.)

A percentagem de descida foi de, aproximadamente, 9%.

Pág. 19

7.1. a)

$$1000 \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 115\% \quad x = \frac{1000 \times 115}{100} = 1150 \text{ €}$$

b)

$$C \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 115\% \quad x = \frac{C \times 115}{100} = 1,15C \text{ €}$$

c) $2000 \times 0,05 = 100 \text{ €}$ ou

$$2000 \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 5\% \quad x = \frac{5 \times 2000}{100} = 100 \text{ €}$$

Então:

$$100 \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 115\% \quad x = \frac{100 \times 115}{100} = 115 \text{ €}$$

7.2. a)

$$1000 \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 95\% \quad x = \frac{1000 \times 95}{100} = 950 \text{ €}$$

b)

$$C \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 95\% \quad x = \frac{C \times 95}{100} = 0,95C \text{ €}$$

c) $1000 \times 0,05 = 50 \text{ €}$ ou

$$1000 \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 5\% \quad x = \frac{5 \times 1000}{100} = 50 \text{ €}$$

Então:

$$50 \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 95\% \quad x = \frac{50 \times 95}{100} = 47,5 \text{ €}$$

Pág. 20

- 8.1. Cálculo do preço após o desconto de 15%

$$\begin{array}{l} 15\,000 \text{ — } 100\% \\ x \text{ — } 85\% \quad x = \frac{15\,000 \times 85}{100} = 12\,750 \end{array}$$

Cálculo do preço após o desconto de 3%.

$$\begin{array}{l} 12\,750 \text{ — } 100\% \\ x \text{ — } 97\% \quad x = \frac{12\,750 \times 97}{100} = 12\,367,5 \end{array}$$

O António pagou 12 367,50 € pelo carro.

8.2. $\frac{1500}{3000} = 0,5 = 50\%$

$$\frac{1500}{4500} \approx 0,3333 = 33,33\%$$

Não, a percentagem da subida de 2012 para 2013 foi de 50% e da subida de 2013 para 2014 foi de 33%.

8.3. $1500 \times 65\% = 975$

975 dos alunos são rapazes.

$$975 \times 8\% = 78$$

78 rapazes jogam futebol federado.

Pág. 22

- 9.1. Tendo em conta que a razão de investimento é de 2 : 3 e que não existem mais investidores, significa que o Manuel tem $\frac{2}{5}$ do capital ou 40% do capital.

- 9.2. Como o António investiu 60%:

$$\begin{array}{l} 15\,000 \text{ — } 60\% \\ x \text{ — } 100\% \quad x = \frac{15\,000 \times 100}{60} = 25\,000 \end{array}$$

Logo, o investimento total foi de 25 000 euros.

- 9.3. Manuel (40%): $1000 \times 0,4 = 400$ €

António (60%): $1000 \times 0,6 = 600$ €

O Manuel vai receber 400 € e o António vai receber 600 €.

10. A razão de investimento entre o Filipe e o Bruno é de 2 : 4.

Assim, o Filipe terá direito a $\frac{2}{6}$ do prémio, logo,

$$\frac{2}{6} \times 2\,700\,000 = 900\,000 \text{ €}$$

O Bruno terá direito a $\frac{4}{6}$ do prémio, assim,

$$\frac{4}{6} \times 2\,700\,000 = 1\,800\,000$$

Pela razão de investimento, 2 : 4 = 50%, o Filipe tem a receber metade do valor que recebeu o Bruno, como se verificou.

11. Um tabuleiro é composto por $8 \times 8 = 64$ posições, as peças, de cada jogador, ocupam 16 posições. Assim,
 $64 - 16 - 16 = 32$ posições livres
A razão entre o número de quadrados ocupados por peças pretas e o número de quadrados vazios é $16 : 32 = \frac{16:16}{32:16} = \frac{1}{2}$.

- 12.

$$\begin{array}{l} 9 \text{ — } 2 \\ 45 \text{ — } x \quad x = \frac{45 \times 2}{9} = 10 \end{array}$$

A Joana, no fim do mês, separou 10 garrafas de plástico.

- 13.1.

$$\begin{array}{l} 2 \text{ — } x \\ 3 \text{ — } 15 \quad x = \frac{15 \times 2}{3} = 10 \end{array}$$

Resposta: 10 alunos praticam desporto.

- 13.2. $15 + 10 = 25$. A turma tem 25 alunos

14. Percentagem de tinta para se obter a tonalidade original:

$$\begin{cases} \text{Amarela : } \frac{3}{5} = 60\% \\ \text{Azul : } \frac{2}{5} = 40\% \end{cases}$$

Usando-se 5 litros de tinta azul:

$$\begin{array}{l} 5 \text{ — } 40\% \\ x \text{ — } 60\% \quad x = \frac{60 \times 5}{40} = 7,5 \text{ litros} \end{array}$$

Resposta: Para se obter a mesma tonalidade são precisos 7,5 litros de tinta amarela.

- 15.

$$\begin{array}{l} 6 \text{ L — } 100 \text{ km} \\ x \text{ — } 250 \text{ km} \quad x = \frac{250 \times 6}{100} = 15 \text{ litros} \end{array}$$

Resposta: Numa viagem de 250 km gastará, em média, 15 litros de gasóleo.

16. $1,5 \text{ kg} = 1500 \text{ g}$

$$\begin{array}{l} 250 \text{ g — } 500 \text{ g} \\ x \text{ — } 1500 \text{ g} \quad x = \frac{1500 \times 250}{500} = 750 \text{ g} \end{array}$$

Resposta: Nessa mesma receita é necessário misturar 750 g de manteiga.

- 17.

$$\begin{array}{l} \text{Mapa (cm)} \quad \text{Realidade (cm)} \\ 1 \text{ — } 500\,000 \\ 12 \text{ — } x \\ x = \frac{12 \times 500\,000}{1} \Leftrightarrow x = 6\,000\,000 \text{ cm} \end{array}$$

Como 1 cm equivale a 10^{-5} km, $6\,000\,000 \times 10^{-5} = 60$ km.

Resposta: Na realidade as cidades distam 60 km entre si.

Pág. 23

18.1. $\frac{1}{3} \approx 0,333 \dots = 33,3\%$

18.2. $0,45 = 45\%$

18.3. $\frac{2}{5} = 0,40 = 40\%$

18.4. $0,05 = 5\%$

19.

100% — 24 h

$$15\% \text{ — } x \quad x = \frac{15 \times 24}{100} = 3,6$$

1 h — 60 min

$$0,6 \text{ h — } x \quad x = \frac{60 \times 0,6}{1} = 36 \text{ min}$$

Resposta: O Vasco passou 3 horas e 36 minutos do seu dia a estudar.

$$20. \quad \frac{2730}{4200} = \frac{13}{20} = 0,65 = 65\%$$

Resposta: Nas últimas eleições votaram 65% dos sócios.

$$21. \quad \begin{array}{l} 140 - 105 = 35 \\ 140 \text{ — } 100\% \\ 35 \text{ — } x \quad x = \frac{35 \times 100}{140} \Leftrightarrow x = 25\% \end{array}$$

Resposta: A percentagem de desconto foi de 25%

$$22. \quad \frac{630 - 600}{600} = \frac{30}{600} = \frac{1}{20} = 0,05$$

Resposta: A percentagem de aumento do vencimento da Maria foi de 5%.

$$23. \quad \begin{array}{l} 85 \times 1,15 = 97,75 \text{ €} \\ \text{ou } 85 \times 0,15 = 12,75 ; 85 + 12,75 = 97,75 \text{ €} \\ \text{O automobilista pagou 97,75 €} \end{array}$$

24.

2% — 1400

$$100\% \text{ — } x \quad x = \frac{100 \times 1400}{2} = 70\,000$$

O preço de venda da casa é de 70 000 euros.

$$25. \quad \begin{array}{l} \text{Superfície comercial A:} \\ 790 \times 0,8 = 632 \text{ euros} \\ \text{Superfície comercial B:} \\ \text{Um vez que o IVA é um imposto cobrado sobre o preço de} \\ \text{custo do equipamento, temos assim,} \\ x + (x \times 0,23) = 790 \Leftrightarrow 1,23x = 790 \Leftrightarrow x = \frac{790}{1,23} \approx 642 \text{ euros} \end{array}$$

O Diogo deve optar pela superfície comercial A.

$$26. \quad \begin{array}{l} 1150 \times 1,08 = 1242 \text{ euros; } 1242 \times 0,92 \approx 1142 \text{ euros} \\ 1142 < 1150 \end{array}$$

Resposta: Apesar da percentagem de aumento e do corte de vencimento ser igual, o corte de 8% incidiu sobre um maior montante do que o aumento salarial, o que se traduz num vencimento inferior auferido em relação a janeiro de 2014.

$$27. \quad \frac{140 - 350}{350} = -\frac{3}{5} = -0,6 = -60\%$$

O tablet do Henrique, no espaço de um ano, desvalorizou 60%.

$$28. \quad \frac{80\% - 64\%}{64\%} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Em termos relativos a percentagem de aumento foi de 25%.

Pág. 24

$$1.1. \quad 50 \text{ alunos (40\% de raparigas e 60\% de rapazes)}$$

$$50 \times 40\% = 20$$

Dos 50 alunos 20 são raparigas.

$$1.2. \quad \text{No grupo havia 60\% de rapazes.}$$

$$1.3. \quad 100\% - 50\% - 40\% = 10\%$$

50 — 100%

$$x \text{ — } 10\% \quad x = \frac{50 \times 10}{100} \Leftrightarrow x = \frac{500}{100} \Leftrightarrow x = 5$$

5 alunos tinham 14 anos.

$$2. \quad 5 \text{ jogos}$$

x — preço de custo de cada jogo

$(x + 20\% \times x)$ — preço dos jogos vendidos com 20% de lucro

$$4(x + x \times 0,2) + x = 203 \Leftrightarrow 4x + 0,8x + x = 203 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5,8x = 203 \Leftrightarrow x = 35$$

O preço de cada jogo foi de 35 €.

$$3. \quad 800 \text{ eleitores}$$

60% mulheres = 480 mulheres

320 homens

1000 eleitores

56% mulheres

$$1000 \times 0,56 = 560 \text{ mulheres}$$

$$1000 - 560 = 440 \text{ homens}$$

Dos novos eleitores $80 = (560 - 480)$ são mulheres.

$$4. \quad x \text{ — preço do computador para o lojista}$$

$(x + x \times 40\%)$ — preço de venda com 40% de lucro

Mais tarde vendeu o computador com 20% de desconto:

$$0,8(x + x \times 40\%) = x + 72 \Leftrightarrow 0,8x + 0,32x = x + 72$$

$$\Leftrightarrow 0,12x = 72 \Leftrightarrow x = \frac{72}{0,12} \Leftrightarrow x = 600$$

O preço inicial de venda foi

$$600 + 600 \times 0,4 = 600 + 240 = 840 \text{ €}$$

O preço inicial de venda do computador era de 840 €.

$$5. \quad 900 \times 80\% = 720 ; 900 \times 20\% = 180 ; 180 \times 60\% = 108$$

5.1.

900 — 100%

$$108 \text{ — } x \quad x = \frac{108 \times 100}{900} = 12\%$$

5.2.

900 — 100%

$$72 \text{ — } x \quad x = \frac{72 \times 100}{900} = 8\%$$

Pág. 25

$$6.1. \quad \text{A Ana pagou 25,80 € (com desconto de 12\%).}$$

A Inês pagou 55,90 € (com desconto de 10%).

x — 100%

$$55,90 \text{ — } 90\% \quad x = \frac{100 \times 55,90}{90} = 62,11 \text{ €}$$

A Inês teria pago 62,11 € se fizesse as compras sem desconto.

6.2.

$$62,11 \text{ — } 100\%$$

$$x \text{ — } 88\% \quad x = \frac{62,11 \times 88}{100} = 54,66 \text{ €}$$

A Inês teria pago 54,66 € se tivesse um desconto de 12%.

6.3.

$$x \text{ — } 100\%$$

$$25,80 \text{ — } 88\% \quad x = \frac{25,80 \times 100}{88} = 29,32 \text{ €}$$

Sem esta campanha promocional, a Ana teria pago 29,32 €.

6.4.

$$25,80 \text{ — } 88\%$$

$$x \text{ — } 90\% \quad x = \frac{90 \times 25,80}{88} = 26,39 \text{ €}$$

Sem o cartão de desconto, a Ana teria pago 26,39 €.

7.1. a)

$$x \text{ — } 100\%$$

$$20 \text{ — } 10\% \quad x = \frac{20 \times 100}{10} = 200$$

Na última reunião estiveram presentes 200 pais.

b) $200 + 20 = 220$

Nesta reunião estiveram presentes 220 pais.

$$7.2. \quad 12\frac{1}{2}\% = \left(12 + \frac{1}{2}\right)\% = (12 + 0,5)\% = 12,5\%$$

$$100 - 12,5 = 87,5$$

$$87,5\% \text{ — } 70$$

$$12,5\% \text{ — } x \quad x = \frac{12,5 \times 70}{87,5} = 10 \text{ €}$$

$$7.3. \quad 33\frac{1}{3}\% = \left(33 + \frac{1}{3}\right)\% = (33 + 0,33\ldots)\% = 33,33\%$$

$$180 \text{ — } 100\%$$

$$60 \text{ — } x \quad x = \frac{60 \times 100}{180} \approx 33,33$$

Sim, o Afonso leu $33\frac{1}{3}\%$ do livro.

7.4. Lista A: 600 votos

Lista B: 300 votos

Total: 900 votos

$$900 \text{ — } 100\%$$

$$600 \text{ — } x$$

$$x = \frac{600 \times 100}{900} = 66,66\ldots \Leftrightarrow x = 66 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 66\frac{2}{3}\%$$

7.5. x – número de raparigas

$$x \text{ — } 100\%$$

$$4 \text{ — } 20\% \quad x = \frac{4 \times 100}{20} = 20$$

Na visita de estudo participaram 44 estudantes, 20 raparigas e 24 rapazes.

1.1. Teoria matemática das eleições

Pág. 28

1.1. N.º total de votos:

$$35\,000 + 58\,000 + 75\,000 + 110\,000 = 278\,000$$

$$\text{Rui: } \frac{35\,000}{278\,000} \times 100 \approx 12,6\%$$

$$\text{Constança: } \frac{58\,000}{278\,000} \times 100 \approx 20,9\%$$

$$\text{Diogo: } \frac{75\,000}{278\,000} \times 100 \approx 27\%$$

$$\text{Joana: } \frac{110\,000}{278\,000} \times 100 \approx 39,6\%$$

Finalistas: Joana e Diogo

1.2. Podemos afirmar que a Joana teve uma maioria relativa dos votos. No entanto, como não alcançou mais de 50% dos votos, não podemos dizer que obteve maioria absoluta.

1.3. Apesar de a Joana ter obtido mais votos, isso não implica que seja a vencedora na final, pois os votantes poderão não ser os mesmos. Para além disso, as pessoas que votaram no Rui e na Constança (eliminados na semifinal) podem, na final, votar no Diogo, fazendo com que a Joana seja derrotada.

2. Pinto Ribeiro:

$$20 + 3 \times 45 + 5 \times 15 + 10 \times 10 = 330 \text{ votos}$$

Azevedo Carvalho:

$$50 + 3 \times 40 + 5 \times 20 + 10 \times 3 = 300 \text{ votos}$$

Costa Vieira:

$$12 + 3 \times 42 + 5 \times 30 + 10 \times 8 = 368 \text{ votos}$$

O candidato Costa Vieira foi eleito presidente do clube.

Pág. 32

1.1.

Lista	A	B	C	D	Total
N.º de votos	81	25	94	50	250
% de votos	32,4%	10%	37,6%	20%	100%

$$25 \text{ ----- } 10\%$$

$$x \text{ ----- } 100\% \quad x = \frac{25 \times 100}{10} = 250$$

1.2. Lista C, pois obteve mais votos do que qualquer uma das outras listas.

1.3. N.º de votos brancos ou nulos: $30 + 10 = 40$

$$\text{N.º total de votos válidos: } 250$$

$$\text{N.º total de votantes: } 40 + 250 = 290$$

$$\frac{40}{290} \times 100 \approx 13,79\%$$

Votos brancos ou nulos: $\approx 13,79\%$

1.4. Lista vencedora: 94 votos

$$\text{N.º total de votantes: } 290 \quad \frac{94}{290} \times 100 \approx 32,41\%$$

Aproximadamente, 32,41%.

Pág. 34

2. Exemplo: Cada votante vota no seu candidato preferido. O candidato com maior número de votos é declarado vencedor. Este sistema é anónimo, neutral e monótono.

Pág. 36

3.1. Vencedor: Lurdes

3.2. Realizava-se uma segunda volta apenas com o Carlos e a Lurdes, ganhando o que obtivesse mais votos.

Pág. 37

4.1. O algoritmo está incompleto pois não faz referência às condições para eleger o vencedor nas voltas seguintes (nem quantas voltas são necessárias).

4.2. Por exemplo:

5.º passo: Vence o candidato que obtiver maioria absoluta.

Caso isso não aconteça, repete-se a eleição apenas com os dois candidatos mais votados e ganha o que obtiver mais votos.

Pág. 40

5.1. Lista A: $180 + 150 = 330$ votos (primeiras preferências)

Lista B: 375 votos (primeiras preferências) ← vencedor

Lista C: $195 + 165 = 360$ votos (primeiras preferências)

Lista D: 225 votos (primeiras preferências)

$$\frac{375}{1290} \times 100 \approx 29\%$$

Vencedor: Lista B, com aproximadamente 29% de primeiras preferências.

5.2. Não se pode considerar inteiramente justo, pois a segunda lista com mais primeiras preferências (a Lista C) apenas tem menos 15 votos que a lista vencedora e se observarmos as segundas preferências, podemos verificar que a Lista C surge em 2.º lugar 330 vezes ($180 + 150$), enquanto que a Lista B não é segunda preferência para qualquer um dos votantes (é apenas 3.ª ou 4.ª opção).

Note-se ainda que a Lista A, com 330 votos em primeira preferência, surge em 2.º lugar para 960 votantes, o que é indicador de ser uma das alternativas mais fortes.

Conclusão: Se a disputa fosse apenas entre a Lista B e a Lista C ou entre a Lista A e a Lista B, a lista vencedora pelo método da pluralidade (a Lista B) seria derrotada em ambos os casos.

Pág. 42

6. 1.º passo

Contagem das primeiras preferências

Candidato M: 5 votos

Candidato L: $10 + 3 = 13$ votos

Candidato C: 12 votos

Não existe maioria absoluta.

2.º passo

Elimina-se o menos votado (candidato M)

N.º de votos	5	12	10	3
1.º	C	C	L	L
2.º	L	L	C	C

3.º passoCandidato C: $5 + 12 = 17$ votosCandidato L: $10 + 3 = 13$ votos

O futebolista do ano 2015 é o Cristiano Rolando (candidato C).

Pág. 447. 1.º passo: contagem das primeiras preferênciasCandidato A: $140 + 10 = 150$ votos

Candidato B: 40 votos

Candidato C: 100 votos

Candidato D: 80 votos

Total de votos: 370

- Ninguém obteve mais de 185 votos ($370 : 2$), logo, avança-se para o 2.º passo.

2.º passo: elimina-se o menos votado (candidato B)

1.º	A	C	D	D	A
2.º	C	D	C	A	D
3.º	D	A	A	C	C
Votos	140	100	80	40	10

3.º passoCandidato A: $140 + 10 = 150$ votos

Candidato C: 100 votos

Candidato D: $80 + 40 = 120$ votos

- Ninguém obtém maioria absoluta.

2.º passo (novamente): elimina-se o menos votado (candidato C)

1.º	A	D	D	D	A
2.º	D	A	A	A	D
Votos	140	100	80	40	10

3.º passo (novamente):Candidato A: $140 + 10 = 150$ votosCandidato D: $100 + 80 + 40 = 220$ votos

Vencedor: Candidato D

Pág. 46

8. 1.º e 2.º passos

Pontuação

Rita: $30 \times 3 + 20 \times 1 + 24 \times 1 + 20 \times 3 + 16 \times 2 = 226$ Sara: $30 \times 2 + 20 \times 2 + 24 \times 3 + 20 \times 1 + 16 \times 3 = 240$ Tânia: $30 \times 1 + 20 \times 3 + 24 \times 2 + 20 \times 2 + 16 \times 1 = 194$

A patinadora vencedora foi a Sara.

9. Candidato A: $1 \times 3 + 7 \times 3 + 7 \times 1 + 6 \times 1 = 37$ pontosCandidato B: $1 \times 2 + 7 \times 1 + 7 \times 3 + 6 \times 2 = 42$ pontosCandidato C: $1 \times 1 + 7 \times 2 + 7 \times 2 + 6 \times 3 = 47$ pontos

O candidato C é, de facto, o vencedor.

Pág. 4810. 1.º passo: confrontos diretos

$$\begin{array}{l|l} \text{A vs. B} & \text{A : } 170 + 110 + 30 = 310 \\ \text{(vence A)} & \text{B : } 120 + 100 + 50 = 270 \text{ (ou } 580 - 310) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{A vs. C} & \text{A : } 170 + 120 + 110 + 30 = 430 \\ \text{(vence A)} & \text{C : } 580 - 430 = 150 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{A vs. D} & \text{A : } 170 + 110 + 30 = 310 \\ \text{(vence A)} & \text{D : } 270 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{A vs. E} & \text{A : } 170 + 110 + 30 = 310 \\ \text{(vence A)} & \text{E : } 270 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{B vs. C} & \text{B : } 120 + 110 + 50 = 280 \\ \text{(vence C)} & \text{C : } 580 - 280 = 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{B vs. D} & \text{B : } 120 + 110 + 50 = 280 \\ \text{(vence D)} & \text{D : } 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{B vs. E} & \text{B : } 120 + 110 + 30 = 260 \\ \text{(vence E)} & \text{E : } 580 - 260 = 320 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{C vs. D} & \text{C : } 0 \\ \text{(vence D)} & \text{D : } 580 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{C vs. E} & \text{C : } 100 + 30 = 130 \\ \text{(vence E)} & \text{E : } 580 - 130 = 450 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{D vs. E} & \text{D : } 170 + 100 + 30 = 300 \\ \text{(vence D)} & \text{E : } 580 - 300 = 280 \end{array}$$

2.º passo:

Candidato	A	B	C	D	E
N.º de vitórias	4	0	1	3	2

O vencedor é o candidato A e é um vencedor de Condorcet.

Pág. 4911.1. a) Método *run-off standard*1.º passo: contagem das primeiras preferênciasK: 27 Y: 15 Z: $6 + 3 = 9$

X: 30 W: 18

2.º passo: eliminam-se os menos votados (Y, Z e W) e reordena-se a tabela:

	27	18	15	6	3	30
1.º	K	X	X	X	X	X
2.º	X	K	K	K	K	W

3.º passo: nova contagem

K: 27 Y: $18 + 15 + 6 + 3 + 30 = 72$

Vencedor: Candidato X

11.1. b) Método *run-off* sequencial

1.º passo: ver alínea anterior

2.º passo: elimina-se o menos votado (Z) e reordena-se a tabela:

	27	18	15	6	3	30
1.º	K	W	Y	W	X	X
2.º	Y	Y	X	Y	Y	W
3.º	X	X	W	X	K	Y
4.º	W	K	K	K	W	K

3.º passo: nova contagem

K: 27 Y: 15 (eliminado) X: $3 + 30 = 33$

W: $18 + 6 = 24$

Como ainda não existe maioria absoluta (50 votos), aplicamos novamente o 2.º passo (eliminando o candidato Y).

	27	18	15	6	3	30
1.º	K	W	X	W	X	X
2.º	X	X	W	X	K	W
3.º	W	K	K	K	W	K

Nova contagem:

K: 27 X: $15 + 3 + 30 = 48$

W: $18 + 6 = 24$ (eliminado)

Novamente o 2.º passo (eliminando o candidato W):

	27	18	15	6	3	30
1.º	K	X	X	X	X	X
2.º	X	K	K	K	K	K

Contagem:

K: 27 X: $18 + 15 + 6 + 3 + 30 = 72$

Vencedor: Candidato X

11.1. c) Método de Borda

Pontuações:

Candidato		Total
K	$27 \times 5 + 18 \times 1 + 15 \times 1 + 6 \times 1 + 3 \times 2 + 30 \times 1$	210
Y	$27 \times 4 + 18 \times 3 + 15 \times 5 + 6 \times 3 + 3 \times 3 + 30 \times 2$	324
Z	$27 \times 3 + 18 \times 4 + 15 \times 3 + 6 \times 5 + 3 \times 5 + 30 \times 3$	333
X	$27 \times 2 + 18 \times 2 + 15 \times 4 + 6 \times 2 + 3 \times 4 + 30 \times 5$	324
W	$27 \times 1 + 18 \times 5 + 15 \times 2 + 6 \times 4 + 3 \times 1 + 30 \times 4$	294

Vencedor: Candidato Z

11.1. d) 1.º passo: confrontos diretos

K vs Y
(vence Y) | K : 27
Y : $99 - 27 = 72$

K vs Z
(vence Z) | K : 27
Z : 72

K vs X
(vence X) | K : 27
X : 72

K vs. W
(vence W) | K : $27 + 3 = 30$
W : $99 - 30 = 69$

Y vs. Z
(vence Z) | Y : $27 + 15 = 42$
Z : $99 - 42 = 57$

Y vs. X
(vence Y) | Y : $27 + 18 + 15 + 6 = 66$
X : $99 - 66 = 33$

Y vs. W
(vence W) | Y : $27 + 15 + 3 = 45$
W : $99 - 45 = 54$

Z vs. X
(vence Z) | Z : $27 + 15 + 6 + 3 = 51$
X : $99 - 51 = 48$

Z vs. W
(vence Z) | Z : $27 + 15 + 6 + 3 = 51$
W : $99 - 51 = 48$

X vs. W
(vence X) | X : $27 + 15 + 3 + 30 = 75$
W : $99 - 75 = 24$

2.º passo:

Candidato	K	Y	Z	W	X
N.º de vitórias	0	2	4	2	2

Vencedor: candidato Z (e é um vencedor de Condorcet).

11.2. Com base nos resultados obtidos, podemos concluir que, dependendo do método preferencial que utilizamos, o vencedor pode ser diferente. De facto, o candidato X vence pela aplicação dos métodos *run-off* e o candidato Z vence pelos métodos de Borda e de Condorcet. Podemos ainda observar que o candidato Z é eliminado logo à primeira nos métodos *run-off*, apesar de ser vencedor segundo Borda e ser vencedor de Condorcet.

12.1. O vencedor foi a Renata.

12.2. $0,48 \times 1250 = 600$ votos (Renata)

$0,36 \times 1250 = 450$ votos (Emídio)

$0,46 \times 1250 = 575$ votos (Manuel).

N.º total de votos: $600 + 450 + 575 = 1625$

O número de votos é superior ao número de votantes, pois cada pessoa pode votar em mais do que um candidato.

13. • Calzone: $12 + 6 + 4 = 22$ votos/aprovações

• 4 Estações: $12 + 4 = 16$ votos/aprovações

• Camponesa: $10 + 4 = 14$ votos/aprovações

• Bolonhesa: 6 votos/aprovações

Pizza vencedora: Calzone (com 22 aprovações)

14.1.

	1.º andar	2.º andar	3.º andar	4.º andar
: 1	127	13	107	80
: 2	63,5	6,5	53,5	40
: 3	42,3	4,3	35,7	26,7
: 4	31,8	3,3	26,8	20
: 5	25,5	2,6	21,4	16

Andar com 127 camas: três enfermeiras

Andar com 13 camas: nenhuma enfermeira

Andar com 107 camas: três enfermeiras

Andar com 80 camas: duas enfermeiras

14.2. Teriam que ser admitidas mais 16 enfermeiras, perfazendo um total de 24.

$$\begin{array}{l}
 127 : 9 \approx 14,1 \\
 127 : 10 = 12,7 < 13 \\
 1.^\circ \text{ andar} \rightarrow \text{mais 6 enf.}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 107 : 8 \approx 13,4 \\
 107 : 9 \approx 11,9 < 13 \\
 3.^\circ \text{ andar} \rightarrow \text{mais 5 enf.}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 80 : 6 \approx 13,3 \\
 80 : 7 \approx 11,4 < 13 \\
 4.^\circ \text{ andar} \rightarrow \text{mais 4 enf.}
 \end{array}$$

$$6 + 5 + 4 = 15$$

15.

Viana do Castelo					
	PS	PPD/PSD	CDS-PP	BE	PCP-PEV
1	51 305,0	44 327,0	19 246,0	12 098,0	5 934,0
2	25 652,5	22 163,5	9 623,0	6 049,0	2 967,0
3	17 101,7	14 775,7	6 415,3	4 032,7	1 978,0
4	12 826,3	11 081,8	4 811,5	3 024,5	1 483,5
5	10 261,0	8 865,4	3 849,2	2 419,6	1 186,8
6	8 550,8	7 387,8	3 207,7	2 016,3	989,0

Santarém					
	PS	PPD/PSD	CDS-PP	BE	PCP-PEV
1	83 123,0	66 516,0	29 379,0	27 660,0	22 848,0
2	41 561,5	33 258,0	14 689,5	13 830,0	11 424,0
3	27 707,7	22 172,0	9 793,0	9 220,0	7 616,0
4	20 780,8	16 629,0	7 344,8	6 915,0	5 712,0
5	16 624,6	13 303,2	5 875,8	5 532,0	4 569,6
6	13 853,8	11 086,0	4 896,5	4 610,0	3 808,0
7	11 874,7	9 502,3	4 197,0	3 951,4	3 264,0

Número de deputados		
	Viana do Castelo	Santarém
PS	3	4
PPD/PSD	2	3
CDS-PP	1	1
BE	0	1
PCP-PE	0	1

16.

	Fábrica A	Fábrica B	Fábrica C
: 1	1800	1200	480
: 3	600	400	160
: 5	360	240	96
: 7	257,1	171,4	68,6
: 9	200	133,3	53,3

Fábrica A: 4 engenheiros

Fábrica B: 2 engenheiros

Fábrica C: 1 engenheiro

17.

	Citrina	Aquática	Amadeirada	Floral	Terrosa
1	2340,0	1760,0	1495,0	1220,0	550,0
3	780,0	586,7	498,3	406,7	183,3
5	468,0	352,0	299,0	244,0	110,0
7	334,3	251,4	213,6	174,3	78,6
9	260,0	195,6	166,1	135,6	61,1
11	212,7	160,0	135,9	110,9	50,0
13	180,0	135,4	115,0	93,8	42,3
15	156,0	117,3	99,7	681,3	36,7

Citrina: 6 psicólogos

Aquática: 4 psicólogos

Amadeirada: 4 psicólogos

Floral: 3 psicólogos

Terrosa: 1 psicólogo

18. Divisor-padrão: 0,1203

País	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	Número de representantes
A	87,2818	87	0,2818	87
B	73,1505	73	0,1505	73
C	39,5677	39	0,5677	39 + 1 = 40
Total	-----	199	-----	200

País A: 87 representantes

País B: 73 representantes

País C: 40 representantes

19. Divisor-padrão: 36,5

Nível	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	Número de representantes
1.º ciclo	1,0959	1	0,0959	1
2.º ciclo	3,2877	3	0,2877	3
3.º ciclo	6,0274	6	0,0274	6
Secundário	9,5890	9	0,5890	9 + 1 = 10
Total	-----	19	-----	20

1.º ciclo: 1 representante

2.º ciclo: 3 representantes

3.º ciclo: 6 representantes

Secundário: 10 representantes

20.1. Divisor-padrão: 40,3636

Aluno	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	Número de prémios
A	9,9099	9	0,9099	9 + 1 = 10
B	5,5743	5	0,5743	5 + 1 = 6
C	4,9550	4	0,9550	4 + 1 = 5
D	1,5608	1	0,5608	1
Total	-----	19	-----	22

Aluno A: 10 prémios

Aluno B: 6 prémios

Aluno C: 5 prémios

Aluno D: 1 prémio

20.2. Divisor-padrão: 41,1818

Aluno	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	Número de prémios
A	9,7130	9	0,7130	$9 + 1 = 10$
B	5,7064	5	0,7064	5
C	4,8565	4	0,8565	$4 + 1 = 5$
D	1,7241	1	0,7241	$1 + 1 = 2$
Total	-----	19	-----	22

Aluno A: 10 prémios

Aluno B: 5 prémios

Aluno C: 5 prémios

Aluno D: 2 prémios

O aumento da pontuação do aluno B fez com que perdesse um prémio (paradoxo da população). Já o aluno D beneficiou com o aumento da sua pontuação.

Pág. 68

21. Divisor-padrão: 37,547

Divisor-padrão modificado: 36

Escola	Quota-padrão	Quota inferior	Quota-padrão modificada	Quota modificada inferior
A	27,6985	27	28,8889	28
B	18,6432	18	19,4444	19
C	6,6583	6	6,9444	6
Total	-----	51	-----	53

Escola A : 28 quadros

Escola B : 19 quadros

Escola C : 6 quadros

22. Divisor-padrão: 36,5

Divisor-padrão modificado: 35

Nível de ensino	Quota-padrão	Quota inferior	Quota-padrão modificada	Quota modificada inferior
1.º ciclo	1,0959	1	1,1429	1
2.º ciclo	3,2877	3	3,4286	3
3.º ciclo	6,0274	6	6,2857	6
Secund.	9,5890	9	10,0000	10
Total	-----	19	-----	20

1.º ciclo: 1 representante

2.º ciclo: 3 representantes

3.º ciclo: 6 representantes

Secundário: 10 representantes.

Os resultados produzidos pelos dois métodos são iguais.

Pág. 70

23. Divisor-padrão: 37,5472

Divisor-padrão modificado: 38,75

Escola	Quota-padrão	Quota inferior	Quota-padrão modificada	Quota inferior modificada
A	27,6985	28	26,8387	27
B	18,6432	19	18,0645	19
C	6,6583	7	6,4516	7
Total	-----	54	-----	53

Escola A : 27 quadros

Escola B : 19 quadros

Escola C : 7 quadros

Os dois métodos (Jefferson e Adams) produzem resultados diferentes, sendo que o método de Adams favorece a escola com menos alunos (tendo direito a mais um quadro interativo).

24. Divisor-padrão: 6,45

Divisor-padrão modificado: 6,49

Instituição	Quota-padrão	Quota inferior	Quota-padrão modificada	Quota modificada inferior
Centro de dia	74,4186	75	73,9599	74
Apoio a crianças	77,5194	78	77,0416	78
Apoio a jovens	48,0620	49	47,7658	48
Total	-----	202	-----	200

Centro de dia para a 3.ª idade: 74 000 €

Apoio a crianças carenciadas: 78 000 €

Apoio a jovens desempregados: 48 000 €

Pág. 72

25. Divisor-padrão: 6,45

Instituição	Quota-padrão	Quota arredondada
Centro de dia	74,4186	74
Apoio a crianças	77,5194	78
Apoio a jovens	48,0620	48
Total	-----	200

Centro de dia para a 3.ª idade: 74 000 €

Apoio a crianças carenciadas: 78 000 €

Apoio a jovens desempregados: 48 000 €

Aplicando os métodos de Adams e de Webster obtivemos os mesmos resultados.

26.1. Divisor-padrão: 90

Sucursal	Quota-padrão	Quota arredondada
A	31,5000	32
B	29,1667	29
C	30,0556	30
D	9,2778	9
Total	-----	100

Sucursal A : 32 planos de férias

Sucursal B : 29 planos de férias

Sucursal C : 30 planos de férias

Sucursal D : 9 planos de férias

26.2. Divisor-padrão: 90

Divisor-padrão modificado: 92

Sucursal	Quota-padrão	Quota superior	Quota-padrão modificada	Quota modificada superior
A	31,5000	32	30,8152	31
B	29,1667	30	28,5326	29
C	30,0556	31	29,4022	30
D	9,2778	10	9,0761	10
Total	-----	103	-----	100

Sucursal A : 31 planos de férias

Sucursal B : 29 planos de férias

Sucursal C : 30 planos de férias

Sucursal D : 10 planos de férias

Os resultados obtidos pela aplicação dos dois métodos são diferentes. O método de Adams favoreceu a sucursal com menos funcionários.

Pág. 75

27. Divisor-padrão: 15,4

Escalão	Quota-padrão	Quota inferior (I)	Quota superior (S)	Média geométrica (M)	Quota arredondada pela regra H-H
Sub-13	1,9481	1	2	1,4142	2
Sub-15	3,3766	3	4	3,4641	3
Sub-17	2,0779	2	3	2,4495	2
Sub-19	2,5974	2	3	2,4495	3
Total	-----	-----	-----	-----	10

Sub-13: 2 futebolistas

Sub-15: 3 futebolistas

Sub-17: 2 futebolistas

Sub-19: 3 futebolistas

28. Método de Hondt

Divisor	Oeste	Este	Norte	Sul	Noroeste
1	9061,0	7179,0	5259,0	3319,0	1182,0
2	4530,5	3589,5	2629,5	1659,5	591,0
3	3020,3	2393,0	1753,0	1106,3	394,0
4	2265,3	1794,8	1314,8	829,8	295,5
5	1812,2	1435,8	1051,8	663,8	236,4
6	1510,2	1196,5	876,5	553,2	197,0
7	1294,4	1025,6	751,3	474,1	168,9
8	1132,6	897,4	657,4	414,9	147,8
9	1006,8	797,7	584,3	368,8	131,3
10	906,1	717,9	525,9	331,9	118,2
11	823,7	652,6	478,1	301,7	107,5
12	755,1	598,3	438,3	276,6	98,5
13	697,0	552,2	404,5	255,3	90,9
14	647,2	512,8	375,6	237,1	84,4

Oeste: 10 representantes

Este: 7 representantes

Norte: 5 representantes

Sul: 3 representantes

Noroeste: 1 representante

Método de Hamilton

Divisor-padrão: 1000

Agrup.	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	Número de representantes
Oeste	9,0610	9	0,0610	9
Este	7,1790	7	0,1790	7
Norte	5,2590	5	0,2590	5
Sul	3,3190	3	0,3190	3 + 1 = 4
Noroeste	1,1820	1	0,1820	1
Total	-----	25	-----	26

Oeste: 9 representantes

Este: 7 representantes

Norte: 5 representantes

Sul: 4 representantes

Noroeste: 1 representante

Método de Jefferson

Divisor-padrão: 1000 Divisor-padrão modificado: 900

Agrup.	Quota-padrão	Quota inferior	Quota modificada	Quota modificada inferior
Oeste	9,0610	9	10,0678	10
Este	7,1790	7	7,9767	7
Norte	5,2590	5	5,8433	5
Sul	3,3190	3	3,6878	3
Noroeste	1,1820	1	1,3133	1
Total	-----	25	-----	26

Oeste: 10 representantes

Este: 7 representantes

Norte: 5 representantes

Sul: 3 representantes

Noroeste: 1 representante

Método de Adams

Divisor-padrão: 1000 Divisor-padrão modificado: 1130

Agrup.	Quota-padrão	Quota superior	Quota modificada	Quota modificada superior
Oeste	9,0610	10	8,0186	9
Este	7,1790	8	6,3531	7
Norte	5,2590	6	4,6540	5
Sul	3,3190	4	2,9372	3
Noroeste	1,1820	2	1,0460	2
Total	-----	30	-----	26

Oeste: 9 representantes

Este: 7 representantes

Norte: 5 representantes

Sul: 3 representantes

Noroeste: 2 representantes

Método de Webster

Divisor-padrão: 1000 Divisor-padrão modificado: 957

Agrup.	Quota-padrão	Quota arredondada	Quota modificada	Quota modificada arredondada
Oeste	9,0610	9	9,4681	9
Este	7,1790	7	7,5016	8
Norte	5,2590	5	5,4953	5
Sul	3,3190	3	3,4681	3
Noroeste	1,1820	1	1,2351	1
Total	-----	25	-----	26

Oeste: 9 representantes

Este: 8 representantes

Norte: 5 representantes

Sul: 3 representantes

Noroeste: 1 representante

Método de Hill-Huntington

Divisor-padrão: 1000 Divisor-padrão modificado: 960

Agrup.	Quota-padrão	Média geométrica	Quota arredondada pela regra H-H	Quota modificada	Média geométrica	Quota modif. arredondada pela regra H-H
Oeste	9,0610	9,4868	9	9,4385	9,4868	9
Este	7,1790	7,4833	7	7,4781	7,4833	7
Norte	5,2590	5,4772	5	5,4781	5,4772	6
Sul	3,3190	3,4641	3	3,4573	3,4641	3
Noroeste	1,1820	1,4142	1	1,2313	1,4142	1
Total	-----	-----	25	-----	-----	26

Oeste: 9 representantes Este: 7 representantes
 Norte: 6 representantes Sul: 3 representantes
 Noroeste: 1 representante

Agrup.	Hondt	Hamilton	Jefferson	Adams	Webster	Hill-Hunt.
Oeste	10	9	10	9	9	9
Este	7	7	7	7	8	7
Norte	5	5	5	5	5	6
Sul	3	4	3	3	3	3
Noroeste	1	1	1	2	1	1

Os métodos produzem todos resultados diferentes, à exceção dos métodos de Hondt e Jefferson pois, como sabemos, são matematicamente equivalentes. Observa-se que o método de Hondt (e o de Jefferson) favorece claramente o agrupamento de escolas com mais alunos, enquanto o método de Adams favorece o agrupamento mais pequeno (é o único que atribui ao Agrupamento de Escolas do Noroeste 2 representantes). Nesta situação, os métodos de Hamilton e de Hill-Huntington parecem ser os que produzem resultados mais aceitáveis tendo em conta a distribuição aproximada que resultaria de um simples cálculo proporcional.

Pág. 83

29.1. Total: $1250 + 760 + 910 = 2920$

Proposta A: $\frac{1250}{2920} \times 100 \approx 42,8\%$

Proposta B: $\frac{760}{2920} \times 100 \approx 26\%$

Proposta C: $\frac{910}{2920} \times 100 \approx 31,2\%$

29.2. Maioria simples (a proposta A vence com maioria relativa).

30.1. $700 + 1100 + 250 + 1345 = 3395$

Votaram 3395 associados.

30.2. $5200 - 3395 = 1805$ (abstenção)

$\frac{1805}{5200} \times 100 \approx 34,7\%$

Abstenção: aproximadamente 34,7%

30.3. 1.º passo

Candidato A: 1100

Candidato B: $700 + 250 = 950$ (eliminado)

Candidato C: 1345

2.º e 3.º passos

1.ª	A	A	C	C
2.ª	C	C	A	A
N.º de votos	700	1100	250	1345

Candidato A: $700 + 1100 = 1800$

Candidato C: $250 + 1345 = 1595$

O candidato vencedor foi o A.

30.4.

A vs. B
(vence A) | A : $1100 + 1345 = 2445$
B : $700 + 250 = 950$

A vs. C
(vence A) | A : $700 + 1100 = 1800$
C : $250 + 1345 = 1595$

B vs. C
(vence C) | B : $700 + 250 = 950$
C : $1100 + 1345 = 2445$

Candidato A: 2 vitórias

Candidato B: nenhuma vitória

Candidato C: 1 vitória

Vencedor: candidato A (e é um vencedor de Condorcet).

31.1. O prato P₄ (Rojões à minhota)

31.2. Dois elementos do júri (D e E) escolheram P₁ como terceira preferência. Assim, $\frac{2}{6} \times 100 \approx 33,3\%$.

Aproximadamente 33,3%.

31.3. Contagem de pontos

P₁ : $5 + 4 + 1 + 3 + 3 + 1 = 17$

P₂ : $2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 5 = 18$

P₃ : $4 + 5 + 2 + 4 + 1 + 4 = 20$ ← Vencedor

P₄ : $1 + 3 + 5 + 1 + 5 + 3 = 18$

P₅ : $3 + 1 + 4 + 5 + 2 + 2 = 17$

Vencedor: prato P₃ (Tripas à moda do Porto)

31.4. Reordenação da tabela (eliminando P₃)

Preferência	A	B	C	D	E	F
1.ª	P ₁	P ₁	P ₄	P ₅	P ₄	P ₂
2.ª	P ₅	P ₄	P ₅	P ₁	P ₂	P ₄
3.ª	P ₂	P ₂	P ₂	P ₂	P ₁	P ₅
4.ª	P ₄	P ₅	P ₁	P ₄	P ₅	P ₁

Contagem de pontos

P₁ : $4 + 4 + 1 + 3 + 2 + 1 = 15$

P₂ : $2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 = 15$

P₄ : $1 + 3 + 4 + 1 + 4 + 3 = 16$ ← Vencedor

P₅ : $3 + 1 + 3 + 4 + 1 + 2 = 14$

Vencedor: prato P₄ (Rojões à minhota)

32.1. $2 + 8 + 17 + 20 + 27 = 74$ votos

Votaram 74 pessoas.

Pág. 84

32.2. Candidato A com, aproximadamente, 29,7% de primeiras preferências.

$\frac{22}{74} \times 100 \approx 29,7\%$

32.3. Candidato B (45 vezes votado como última preferência)

$8 + 17 + 20 = 45$

32.4. Candidato A

32.5. 1.º passo: contagem das primeiras preferências

A : $2 + 20 = 22$

B : 27

C : 17 (eliminado)

D : 8 (eliminado)

2.º e 3.º passos: nova contagem (depois da reordenação)

A : $2 + 8 + 17 + 20 = 47$

B : 27

Vencedor: candidato A

32.6. 1.º passo

Consultar o 1.º passo da alínea anterior: elimina-se o candidato D.

2.º Passo

	2	8	17	20	27
1.ª	A	C	C	A	B
2.ª	B	A	A	C	A
3.ª	C	B	B	B	C

3.º Passo

A : $2 + 20 = 22$ (eliminado)

B : 27

C : $8 + 17 = 25$

	2	8	17	20	27
1.ª	B	C	C	C	B
2.ª	C	B	B	B	C

B : $2 + 27 = 29$

C : $8 + 17 + 20 = 45$ Vencedor: candidato C

32.7. Pontuações

A : $2 \times 4 + 8 \times 2 + 17 \times 3 + 20 \times 4 + 27 \times 2 = 209$ pontos

B : $2 \times 3 + 8 \times 1 + 17 \times 1 + 20 \times 1 + 27 \times 4 = 159$ pontos

C : $2 \times 2 + 8 \times 3 + 17 \times 4 + 20 \times 2 + 27 \times 1 = 163$ pontos

D : $2 \times 1 + 8 \times 4 + 17 \times 2 + 20 \times 3 + 27 \times 3 = 209$ pontos

Vencedor: não existe (empate entre os candidatos A e D)

32.8.

A vs. B
(vence A) $\left| \begin{array}{l} A : 2 + 8 + 17 + 20 = 47 \\ B : 27 \end{array} \right.$

A vs. C
(vence A) $\left| \begin{array}{l} A : 2 + 20 + 27 = 49 \\ C : 8 + 17 = 25 \end{array} \right.$

A vs. D
(vence A) $\left| \begin{array}{l} A : 2 + 17 + 20 = 39 \\ D : 8 + 27 = 35 \end{array} \right.$

Não é necessário “simular” mais confrontos, pois o candidato A já é um vencedor de Condorcet.

Sim, o candidato A é vencedor de Condorcet.

33.1. Designando cada uma das cidades pela respetiva inicial:

	Maria	Bruno	Clara	Joana	Diogo
1.ª	Z	R	P	L	L
2.ª	R	A	R	A	P
3.ª	A	L	A	R	R
4.ª	P	Z	L	Z	Z
5.ª	L	P	Z	P	A

33.2. Cidade vencedora: Londres (pois tem mais votos em primeira preferência).**33.3. Pontuações**

Z : $5 + 2 + 1 + 2 + 2 = 12$ pontos

R : $4 + 5 + 4 + 3 + 3 = 19$ pontos

A : $3 + 4 + 3 + 4 + 1 = 15$ pontos

P : $2 + 1 + 5 + 1 + 4 = 13$ pontos

L : $1 + 3 + 2 + 5 + 5 = 16$ pontos

Vão passar férias em Roma.

34.1. Ricardo (pois é o que tem mais votos em primeira preferência).**34.2. $36 + 32 + 5 = 73$**

$$73 : 2 = 36,5$$

Ninguém obteve, pelo menos, 37 votos em primeira preferência, logo, nenhum candidato alcançou maioria absoluta.

34.3.

Ricardo vs. Nuno
(vence o Nuno) $\left| \begin{array}{l} \text{Ricardo : } 36 \\ \text{Nuno : } 32 + 5 = 37 \end{array} \right.$

Ricardo vs. Constança
(vence a Constança) $\left| \begin{array}{l} \text{Ricardo : } 36 \\ \text{Constança : } 32 + 5 = 37 \end{array} \right.$

Nuno vs. Constança
(vence a Constança) $\left| \begin{array}{l} \text{Nuno : } 32 \\ \text{Constança : } 36 + 5 = 41 \end{array} \right.$

Vence a Constança (vencedora de Condorcet)

34.4. O vencedor será o Nuno.**35.1. N.º de aprovações**

Martinho: 5 Gonçalo: 4 Tiago: 4

Vencedor: Martinho

35.2. Não**35.3. Martinho: $62,5\% \left(\frac{5}{8} \times 100 \right)$**

Gonçalo: $50\% \left(\frac{4}{8} \times 100 \right)$

Tiago: $50\% \left(\frac{4}{8} \times 100 \right)$

A soma das percentagens é superior a 100% pois, neste sistema, vários candidatos podem até obter mais de 50% das aprovações (no limite, até podiam todos ter 100% das aprovações).

36.1. Contagem:

A : 13 primeiras preferências

B : 11 primeiras preferências (eliminado)

C : $9 + 5 = 14$ primeiras preferências

Nova contagem (eliminando B)

A : $13 + 11 = 24$

B : $9 + 5 = 14$

Vencedor: candidato A

36.2. Não é justo. O critério de independência das alternativas irrelevantes não se verifica, pois se o candidato C desistisse (mantendo-se as votações e preferências), o candidato B passaria a ser vencedor.

$$A : 13 + 5 = 18 \qquad B : 9 + 11 = 20$$

Observação: o critério da maioria também não é satisfeito (o vencedor deveria ser o candidato C).

37.1.

	A	B	C	D
1	2412	1809	1205	906
2	1206	904,5	602,5	453
3	804	603	401,7	302
4	603	452,3	301,3	226,5
5	482,4	361,8	241	181,2
6	402	301,5	200,8	151
7	344,6	258,4	172,1	129,4
8	301,5	226,1	150,6	113,3

Lista A: 3 representantes

Lista B: 3 representantes

Lista C: 1 representante

Lista D: 1 representante

37.2.

	A	B	C	D
1	2412	1809	1206	906
2	1206	904,5	603	453
3	804	603	402	302
4	603	452,3	301,5	226,5
5	482,4	361,8	241,2	181,2
6	402	301,5	201	151
7	344,6	258,4	172,3	129,4
8	301,5	226,1	150,8	113,3

Sim, provocou alterações.

Lista A: 3 representantes

Lista B: 2 representantes

Lista C: 2 representantes

Lista D: 1 representante

37.3.

	A	B	C	D
1	2412,0	1809,0	1205,0	906,0
3	804,0	603,0	401,7	302,0
5	482,4	361,8	241,0	181,2
7	344,6	258,4	172,1	129,4
9	268,0	201,0	133,9	100,7
11	219,3	164,5	109,5	82,4
13	185,5	139,2	92,7	69,7
15	160,8	120,6	80,3	60,4

Sim, usando o método de Sainte-Lagué os resultados são diferentes da alínea 37.1.

Lista A: 3 representantes

Lista B: 2 representantes

Lista C: 2 representantes

Lista D: 1 representante

38.1. $437 + 774 + 4286 + 3873 + 257 = 9627$

O país tem 9 627 000 habitantes.

38.2. Divisor-padrão = $\frac{9627}{140} \approx 68,7643$ (4 c. d.)

38.3. Quota-padrão (Estado A) = $\frac{437}{68,7643} \approx 6,3550$

Quota-padrão (Estado B) = $\frac{774}{68,7643} \approx 11,2558$

Quota-padrão (Estado C) = $\frac{4286}{68,7643} \approx 62,3289$

Quota-padrão (Estado D) = $\frac{3873}{68,7643} \approx 56,3228$

Quota-padrão (Estado E) = $\frac{257}{68,7643} \approx 3,7374$

38.4. a) Divisor-padrão: 68,7643

Estado	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares
A	6,3550	6	0,3550	6 + 1 = 7
B	11,2558	11	0,2558	11
C	62,3289	62	0,3289	62
D	56,3228	56	0,3228	56
E	3,7374	3	0,7374	3 + 1 = 4
Total	-----	138	-----	140

Estado A: 7 lugares

Estado B: 11 lugares

Estado C: 62 lugares

Estado D: 56 lugares

Estado E: 4 lugares

b) Divisor-padrão: 68,7643

Divisor-modificado: 97

Estado	Quota-padrão	Quota inferior	Quota modificada	Quota modificada inferior
A	6,3550	6	6,5224	6
B	11,2558	11	11,5522	11
C	62,3289	62	63,9701	63
D	56,3228	56	57,8060	57
E	3,7374	3	3,8358	3
Total	-----	138	-----	140

Estado A: 6 lugares

Estado B: 11 lugares

Estado C: 63 lugares

Estado D: 57 lugares

Estado E: 3 lugares

39. Método de Hamilton

Divisor-padrão: 2242,8571

Partido	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de mandatos
PPD/PSD	3,7947	3	0,7947	3 + 1 = 4
PS	1,8169	1	0,8169	1 + 1 = 2
CDS-PP	1,1954	1	0,1954	1
PCP-PEV	0,1275	0	0,1275	0
BE	0,0655	0	0,0655	0
Total	-----	5	-----	7

Método de Adams

Divisor-padrão: 2242,8571

Divisor modificado: 4100

Partido	Quota-padrão	Quota superior	Quota modificada	Quota modificada superior (N.º de mandatos)
PPD/PSD	3,7947	4	2,0759	3
PS	1,8169	2	0,9939	1
CDS-PP	1,1954	2	0,6539	1
PCP-PEV	0,1275	1	0,0698	1
BE	0,0655	1	0,0359	1
Total	-----	10	-----	7

Partido	Método de Hondt	Método de Hamilton	Método de Adams
PPD/PSD	4	4	3
PS	2	2	1
CDS-PP	1	1	1
PCP-PEV	0	0	1
BE	0	0	1

Nesta situação, enquanto que o método de Hamilton conduz aos mesmos resultados do método de Hondt, o de Adams favorece claramente os partidos com menos votos (PCP-PEV e BE).

40.1. Divisor-padrão: 100,45

Universidade	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de consultores
UD	10,5027	10	0,5027	10 + 1 = 11
UBM	89,4973	89	0,4973	89
Total	-----	99	-----	100

UD: 11 consultores

UBM: 89 consultores

40.2. Divisor-padrão: 100,4206

Universidade	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de consultores
UD	10,5058	10	0,5058	10
UBM	89,5235	89	0,5235	89 + 1 = 90
UTC	6,9707	6	0,9707	6 + 1 = 7
Total	-----	99	-----	100

Com a introdução da UTC temos:

UD: 10 consultores

UBM: 90 consultores

UTC: 7 consultores

Verificamos que, com a introdução de uma nova universidade com direito a um determinado número de consultores, existe alteração na distribuição relativa às outras universidades (a UD perde um consultor para a UBM). Estamos perante o chamado Paradoxo do Novo Estado.

Corporação	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de veículos de emergência
Polícia	7,7291	7	0,7291	7 + 1 = 8
Bombeiros	3,3944	3	0,3944	3
Proteção Civil	4,8765	4	0,8765	4 + 1 = 5
Total	-----	14	-----	16

Polícia: 8 veículos

Bombeiros: 3 veículos

Proteção Civil: 5 veículos

42. Divisor-padrão: 1 Divisor modificado: 0,975

Rotas	Quota-padrão	Quota inferior	Quota modificada	Quota modificada inferior
A	45,3000	45	46,4615	46
B	31,0700	31	31,8667	31
C	20,4900	20	21,0154	21
D	14,1600	14	14,5231	14
E	10,2600	10	10,5231	10
F	8,7200	8	8,9436	8
Total	-----	128	-----	130

Rota A: 46 autocarros

Rota B: 31 autocarros

Rota C: 21 autocarros

Rota D: 14 autocarros

Rota E: 10 autocarros

Rota F: 8 autocarros

43. Divisor-padrão: 7,8

Loja	Quota-padrão	Média geométrica	Quota arredondada pela regra H-H
Braga	7,0513	7,4833	7
Coimbra	3,2051	3,4641	3
Lisboa	5,0000	5,4772	5
Porto	9,7436	9,4868	10
Total	-----	-----	25

Braga: 7 subgerentes

Coimbra: 3 subgerentes

Lisboa: 5 subgerentes

Porto: 10 subgerentes

44.1. Divisor-padrão: 2,5

Género	Quota-padrão	N.º de livros doados
Policia	16,0000	16
Poesia	14,0000	14
Romance	6,0000	6
Científico	4,0000	4
Total	-----	40

Policia: 16 livros

Poesia: 14 livros

Romance: 6 livros

Científico: 4 livros

44.2. Divisor-padrão: 2,3256

Divisor modificado: 2,3

2.1. O destino escolhido pela maioria dos alunos foi os Açores.

Não obteve maioria absoluta pois, para isso, teria de ter, pelo menos, 106 votos.

$$\frac{70 + 65 + 75}{2} = \frac{210}{2} = 105$$

2.2. a)

1. ^a	A	C	C
2. ^a	C	A	A
Total	70	65	75

Método de Borda

$$A : 70 \times 2 + 65 \times 1 + 75 \times 1 = 280$$

$$C : 70 \times 1 + 65 \times 2 + 75 \times 2 = 350 \quad \text{Vence C}$$

Método run-off standard

A : 70 primeiras preferências

$$C : 65 + 75 = 140 \text{ primeiras preferências} \quad \text{Vence C}$$

Se o destino B for retirado, por ambos os métodos, vence C.

b)

1. ^a	A	B	B
2. ^a	B	A	A
Total	70	65	75

Método de Borda

$$A : 70 \times 2 + 65 \times 1 + 75 \times 1 = 280$$

$$B : 70 \times 1 + 65 \times 2 + 75 \times 2 = 350 \quad \text{Vence B}$$

Método run-off standard

A : 70 primeiras preferências

$$B : 140 \text{ primeiras preferências} \quad \text{Vence B}$$

Se o destino C for retirado, por ambos os métodos, vence B.

c)

1. ^a	B	B	C
2. ^a	C	C	B
Total	70	65	75

Método de Borda

$$B : 70 \times 2 + 65 \times 1 + 75 \times 1 = 345$$

$$C : 70 \times 1 + 65 \times 1 + 75 \times 2 = 285 \quad \text{Vence B}$$

Método run-off standard

$$B : 70 + 65 = 135$$

$$C : 75 \quad \text{Vence B}$$

Se o destino A for retirado, por ambos os métodos, vence B.

$$2.3. A : 70 \times 3 + 65 \times 1 + 75 \times 1 = 350$$

$$B : 70 \times 2 + 65 \times 3 + 75 \times 2 = 485$$

$$C : 70 \times 1 + 65 \times 2 + 75 \times 3 = 425$$

Pelo método de Borda, vence B (Costa Alentejana).

- 2.4.** Apesar de os Açores ser o destino escolhido pela maioria, pela aplicação do método de Borda, o vencedor é a Costa Alentejana. Importa também referir que, se o destino Algarve não estivesse a votação, o vencedor seria a Costa Alentejana, seja pelo método da maioria, pelo de Borda ou pelo *run-off standard*.

$$3.1. 12 + 16 + 5 + 13 + 18 + 30 + 52 + 17 = 163$$

Votaram 163 pessoas.

$$3.2. 163 + 20 = 183 \quad 183 \text{ ----- } 100\%$$

$$20 \text{ ----- } x \quad x = \frac{20 \times 100}{183} \approx 11\%$$

A abstenção foi de, aproximadamente, 11%.

$$3.3. \text{ Candidato A : } 12 + 16 + 52 = 80$$

$$\text{Candidato B : } 5 + 18 = 23$$

$$\text{Candidato C : } 13 + 30 = 43$$

$$\text{Candidato D : } 17$$

$$3.4. \text{ Foi o candidato B (com } 30 + 52 = 82 \text{ últimos lugares).}$$

$$3.5. \text{ Candidato A : } 13 + 18 + 30 = 61 \rightarrow \frac{61}{163} \times 100 \approx 37,42\%$$

$$\text{Candidato B : } 12 + 17 = 29 \rightarrow \frac{29}{163} \times 100 \approx 17,79\%$$

$$\text{Candidato C : } 16 + 52 = 68 \rightarrow \frac{68}{163} \times 100 \approx 41,72\%$$

$$\text{Candidato D : } 5 \rightarrow \frac{5}{163} \times 100 \approx 3,07\%$$

3.6. Pontuações:

$$A : 12 \times 4 + 16 \times 4 + 5 \times 2 + 13 \times 3 + 18 \times 3 + 30 \times 3 + 52 \times 4 + 17 \times 2 = 547 \text{ pontos}$$

$$B : 12 \times 3 + 16 \times 2 + 5 \times 4 + 13 \times 2 + 18 \times 4 + 30 \times 1 + 52 \times 1 + 17 \times 3 = 319 \text{ pontos}$$

$$C : 12 \times 2 + 16 \times 3 + 5 \times 1 + 13 \times 4 + 18 \times 1 + 30 \times 4 + 52 \times 3 + 17 \times 1 = 440 \text{ pontos}$$

$$D : 12 \times 1 + 16 \times 1 + 5 \times 3 + 13 \times 1 + 18 \times 2 + 30 \times 2 + 52 \times 2 + 17 \times 4 = 324 \text{ pontos}$$

Vencedor: candidato A

3.7. Número de aprovações:

$$A : 12 + 16 + 13 + 18 + 30 + 52 = 141$$

$$B : 12 + 5 + 18 + 17 = 52$$

$$C : 16 + 13 + 30 + 52 = 111$$

$$D : 5 + 17 = 22$$

Vencedor: candidato A (com 141 aprovações)

4. Run-off standard

$$A : 14$$

$$B : 4 \text{ (eliminado)} \xrightarrow{\text{nova contagem}} A : 14$$

$$C : 10 + 1 = 11$$

$$C : 10 + 8 + 4 + 1 = 23$$

$$D : 8 \text{ (eliminado)}$$

Vencedor: C

Run-off sequencial

(elimina-se B)

Nova contagem 1:

$$A : 14$$

$$C : 10 + 1 = 11 \text{ (eliminado)}$$

$$D : 8 + 4 = 12$$

Nova contagem 2:

$$A : 14$$

$$D : 10 + 8 + 4 + 1 = 23$$

Vencedor: D

Borda

$$A : 14 \times 4 + 10 \times 1 + 8 \times 1 + 4 \times 1 + 1 \times 1 = 79 \text{ pontos}$$

$$B : 14 \times 3 + 10 \times 3 + 8 \times 2 + 4 \times 4 + 1 \times 2 = 106 \text{ pontos}$$

$$C : 14 \times 2 + 10 \times 4 + 8 \times 3 + 4 \times 2 + 1 \times 4 = 104 \text{ pontos}$$

$$D : 14 \times 1 + 10 \times 2 + 8 \times 4 + 4 \times 3 + 1 \times 2 = 81 \text{ pontos}$$

Vencedor: B

Condorcet

A vs. B (vence B)	A : 14
	B : 23
A vs. C (vence C)	A : 14
	C : 23
A vs. D (vence D)	A : 14
	D : 23
B vs. C (vence C)	B : 14 + 4 = 18
	C : 37 – 18 = 19
B vs. D (vence B)	B : 14 + 10 + 4 = 28
	D : 37 – 28 = 9
C vs. D (vence C)	C : 14 + 10 + 1 = 25
	D : 37 – 25 = 8

	A	B	C	D
N.º de vitórias	0	2	3	1

Vencedor: C

Ranking	Run-off standard	Run-off sequencial	Borda	Condorcet
1.º	C	D	B	C
2.º	A	A	C	B
3.º	D	C	D	D
4.º	B	B	A	A

5.1. $10\,112 + 2\,839 + 4\,825 + 71\,556 + 2\,512 + 5\,546 + 25\,974 + 3\,135 + 16\,945 + 1\,087 + 2\,813 = 147\,344$
 $256\,755 - 147\,344 = 109\,411$
 $\frac{109\,411}{256\,755} \times 100 \approx 42,61\%$
A abstenção foi de, aproximadamente, 42,61% .

5.2.

Partidos	Total de votos	Percentagem
PTP	10 112	6,86
MPT	2 839	1,93
PND	4 825	3,27
PPD/PSD	71 556	48,56
BE	2 512	1,70
PCP-PEV	5 546	3,76
CDS-PP	25 974	17,63
PAN	3 135	2,13
PS	16 945	11,50

5.3.

	PTP	MPT	PND	PPD/PSD	BE	PCP-PEV	CDP-PP	PAN	PS
1	10 112,0	2 839,0	4 825,0	71 556,0	2 512,0	5 546,0	25 974,0	3 135,0	16 945,0
2	5 056,0	1 419,5	2 412,5	35 778,0	1 256,0	2 773,0	12 987,0	1 567,5	8 472,5
3	3 370,7	946,3	1 608,3	23 852,0	837,3	1 848,7	8 658,0	1 045,0	5 648,3
4	2 528,0	709,8	1 206,3	17 889,0	628,0	1 386,5	6 493,5	783,8	4 236,3
5	2 022,4	567,8	965,0	14 311,2	502,4	1 109,2	5 194,8	627,0	3 389,0
6	1 685,3	473,2	804,2	11 926,0	418,7	924,3	4 329,0	522,5	2 824,2
7	1 444,6	405,6	689,3	10 222,3	358,9	792,3	3 710,6	447,9	2 420,7
8	1 264,0	354,9	603,1	8 944,5	314,0	693,3	3 246,8	391,9	2 118,1
9	1 123,6	315,4	536,1	7 950,7	279,1	616,2	2 886,0	348,3	1 882,8
10	1 011,2	283,9	482,5	7 155,6	251,2	554,6	2 597,4	313,5	1 694,5
11	919,3	258,1	438,6	6 505,1	228,4	504,2	2 361,3	285,0	1 540,5
12	842,7	236,6	402,1	5 963,0	209,3	462,2	2 164,5	261,3	1 412,1
13	777,8	218,4	371,2	5 504,3	193,2	426,6	1 998,0	241,2	1 303,5
14	722,3	202,8	344,6	5 111,1	179,4	396,1	1 855,3	223,9	1 210,4
15	674,1	189,3	321,7	4 770,4	167,5	369,7	1 731,6	209,0	1 129,7
16	632,0	177,4	301,6	4 472,3	157,0	346,6	1 623,4	195,9	1 059,1
17	594,8	167,0	283,8	4 209,2	147,8	326,2	1 527,9	184,4	996,8

18	561,8	157,7	268,1	3 975,3	139,6	308,1	1 443,0	174,2	941,4
19	532,2	149,4	253,9	3 766,1	132,2	291,9	1 367,1	165,0	891,8
20	505,6	142,0	241,3	3 577,8	125,6	277,3	1 298,7	156,8	847,3
21	481,5	135,2	229,8	3 407,4	119,6	264,1	1 236,9	149,3	806,9
22	459,6	129,0	219,3	3 252,5	114,2	252,1	1 180,6	142,5	770,2
23	439,7	123,4	209,8	3 111,1	109,2	241,1	1 129,3	136,3	736,7
24	421,3	118,3	201,0	2 981,5	104,7	231,1	1 082,3	130,6	706,0
25	404,5	113,6	193,0	2 862,2	100,5	221,8	1 039,0	125,4	677,8
26	388,9	109,2	185,6	2 752,2	96,6	213,3	999,0	120,6	651,7
27	374,5	105,1	178,7	2 650,2	93,0	205,4	962,0	116,1	627,6
28	361,1	101,4	172,3	2 555,6	89,7	198,1	927,6	112,0	605,2
29	348,7	97,9	166,4	2 467,4	86,6	191,2	895,7	108,1	584,3
30	337,1	94,6	160,8	2 385,2	83,7	184,9	865,8	104,5	564,8

N.º de mandatos – PTP: 3 ; MPT: 1 ; PND: 1 ; PPD/PSD: 25 ; BE: nenhum; PCP-PEV: 1 ; CDS-PP: 9 ; PAN: 1 ; PS: 6

5.4.

	PTP	MPT	PND	PPD/PSD	BE	PCP-PEV	CDP-PP	PAN	PS
1	10 112,0	2 839,0	4 825,0	71 556,0	2 512,0	5 546,0	25 974,0	3 135,0	16 945,0
3	3 370,7	946,3	1 608,3	23 852,0	837,3	1 848,7	8 658,0	1 045,0	5 648,3
5	2 022,4	567,8	965,0	14 311,2	502,4	1 109,2	5 194,8	627,0	3 389,0
7	1 444,6	405,6	689,3	10 222,3	358,9	792,3	3 710,6	447,9	2 420,7
9	1 123,6	315,4	536,1	7 950,7	279,1	616,2	2 886,0	348,3	1 882,8
11	919,3	258,1	438,6	6 505,1	228,4	504,2	2 361,3	285,0	1 540,5
13	777,8	218,4	371,2	5 504,3	193,2	426,6	1 998,0	241,2	1 303,5
15	674,1	189,3	321,7	4 770,4	167,5	369,7	1 731,6	209,0	1 129,7
17	594,8	167,0	283,8	4 209,2	147,8	326,2	1 527,9	184,4	996,8
19	532,2	149,4	253,9	3 766,1	132,2	291,9	1 367,1	165,0	891,8
21	481,5	135,2	229,8	3 407,4	119,6	264,1	1 236,9	149,3	806,9
23	439,7	123,4	209,8	3 111,1	109,2	241,1	1 129,3	136,3	736,7
25	404,5	113,6	193,0	2 862,2	100,5	221,8	1 039,0	125,4	677,8
27	374,5	105,1	178,7	2 650,2	93,0	205,4	962,0	116,1	627,6
29	348,7	97,9	166,4	2 467,4	86,6	191,2	895,7	108,1	584,3
31	326,2	91,6	155,6	2 308,3	81,0	178,9	837,9	101,1	546,6
33	306,4	86,0	146,2	2 168,4	76,1	168,1	787,1	95,0	513,5
35	288,9	81,1	137,9	2 044,5	71,8	158,5	742,1	89,6	484,1
37	273,3	76,7	130,4	1 933,9	67,9	149,9	702,0	84,7	458,0
39	259,3	72,8	123,7	1 834,8	64,4	142,2	666,0	80,4	434,5
41	246,6	69,2	117,7	1 745,3	61,3	135,3	633,5	76,5	413,3
43	235,2	66,0	112,2	1 664,1	58,4	129,0	604,0	72,9	394,1
45	224,7	63,1	107,2	1 590,1	55,8	123,2	577,2	69,7	376,6
47	215,1	60,4	102,7	1 522,5	53,4	118,0	552,6	66,7	360,5
49	206,4	57,9	98,5	1 460,3	51,3	113,2	530,1	64,0	345,8
51	198,3	55,7	94,6	1 403,1	49,3	108,7	509,3	61,5	332,3
53	190,8	53,6	91,0	1 350,1	47,4	104,6	490,1	59,2	319,7
55	183,9	51,6	87,7	1 301,0	45,7	100,8	472,3	57,0	308,1

N.º de mandatos – PTP: 3 ; MPT: 1 ; PND: 2 ; PPD/PSD: 23 ; BE: 1 ; PCP-PEV: 2 ; CDS-PP: 8 ; PAN: 1 ; PS: 6

O militante do BE tinha razão, pois a distribuição dos mandatos aplicando o método de Sainte-Laguë é, de facto, diferente e implica que, por exemplo, o BE passe a ter direito a um mandato.

6.1. $378 + 4610 + 5012 = 10\,000$

O número total de produtores de cacau é 10 000.

6.2. $\text{divisor-padrão} = \frac{10\,000}{25} = 400$

O divisor-padrão é 400. Significa que existe um elemento/representante por cada 400 produtores de cacau.

6.3. a) Divisor-padrão: 400

País	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de elementos
Alfa	0,9450	0	0,9450	$0 + 1 = 1$
Beta	11,5250	11	0,5250	11
Ómega	12,5300	12	0,5300	$12 + 1 = 13$
Total	-----	23	-----	25

Alfa: 1 elemento

Beta: 11 elementos

Ómega: 13 elementos

b) Divisor-padrão: 400

Divisor modificado: 380

País	Quota-padrão	Quota inferior	Quota modificada	Quota modificada inferior (N.º de elementos)
Alfa	0,9450	0	0,9947	0
Beta	11,5250	11	12,1316	12
Ómega	12,5300	12	13,1895	13
Total	-----	23	-----	25

Alfa: nenhum elemento

Beta: 12 elementos

Ómega: 13 elementos

6.4. Podemos concluir que, com a aplicação do método de Jefferson, o país Alfa fica sem nenhum representante no corpo administrativo. Nesta situação, a aplicação do método de Hamilton seria mais benéfica para o país Alfa e, de certa forma, até mais justa, pois o número de produtores desse país está próximo do valor do divisor-padrão, que nos indica que, teoricamente, deveria existir um representante por cada 400 produtores.

Pág. 91

7.1. Método de Hamilton

Divisor-padrão: 300

Departamento	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de representantes
Serviços	2,3000	2	0,3000	2
Produção	1,4500	1	0,4500	$1 + 1 = 2$
Desenvolv.	1,2500	1	0,2500	1
Total	-----	4	-----	5

Serviços: 2 representantes

Produção: 2 representantes

Desenvolvimento: 1 representante

Método de Jefferson

Divisor-padrão: 300

Divisor modificado: 230

Departamento	Quota-padrão	Quota inferior	Quota modificada	Quota modificada inferior (N.º de representantes)
Serviços	2,3000	2	3,0000	3
Produção	1,4500	1	1,8913	1
Desenvolv.	1,2500	1	1,6304	1
Total	-----	4	-----	5

Serviços: 3 representantes

Produção: 1 representante

Desenvolvimento: 1 representante

7.2. Método de Hamilton

Divisor-padrão: 300

Departamento	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de representantes
Serviços	1,8500	1	0,8500	$1 + 1 = 2$
Produção	1,5500	1	0,5500	1
Desenvolv.	1,6000	1	0,6000	$1 + 1 = 2$
Total	-----	3	-----	5

Serviços: 2 representantes

Produção: 1 representante

Desenvolvimento: 2 representantes

Método de Jefferson

Divisor-padrão: 300

Divisor modificado: 240

Departamento	Quota-padrão	Quota inferior	Quota modificada	Quota modificada inferior (N.º de representantes)
Serviços	1,8500	1	2,3125	2
Produção	1,5500	1	1,9375	1
Desenvolv.	1,6000	1	2,0000	2
Total	-----	3	-----	5

Serviços: 2 representantes

Produção: 1 representante

Desenvolvimento: 2 representantes

7.3. O grande prejudicado é o departamento de Produção pois, com o método de Hamilton conseguia eleger 2 representantes (para 435 funcionários), mas depois do aumento do número de funcionários para 465 acaba por “perder” um representante (pela aplicação do mesmo método). Note-se que a diferença para o departamento de Desenvolvimento é de apenas 15 funcionários, mas isso acaba por concretizar-se numa diferença de um representante.

Também o departamento de Serviços perde um representante (pelo método de Jefferson), mas aí também houve diminuição do seu número de funcionários.

8.1.

Associação	N.º de inscritos	Quota-padrão	Média geométrica (M)	N.º de jogadores
A	501	6,4806	6,4807	6
B	332	4,2945	4,4721	4
C	53	0,6856	0,0000	1
D	46	0,5950	0,0000	1
E	15	0,1940	0,0000	1
F	58	0,7502	0,0000	1
Total	1005	-----	-----	14

8.2. Apenas com a tabela anterior não é possível efetuar a seleção, pois atribuiu-se um jogador a mais.

Divisor modificado: 95

Associação	N.º de inscritos	Quota-padrão	Média geométrica (M)	N.º de jogadores
A	501	5,2737	5,4772	5
B	332	3,4947	3,4641	4
C	53	0,5579	0,0000	1
D	46	0,4842	0,0000	1
E	15	0,1579	0,0000	1
F	58	0,6105	0,0000	1
Total	1005	-----	-----	13

Associação A: 5 jogadores

Associação B: 4 jogadores

Associação C: 1 jogador

Associação D: 1 jogador

Associação E: 1 jogador

Associação F: 1 jogador

8.3. A repartição efetuada nas alíneas anteriores conduziu a uma violação da regra da quota. De facto, a associação A, com uma quota-padrão de 6,4806 deveria ter direito a 6 ou 7 jogadores (quota inferior ou quota superior) e, no final, elegeu apenas 5 .

1.2. Teoria da partilha equilibrada

Pág. 92

- 1.1. A Ana valoriza três vezes mais a parte com chocolate, comparativamente à parte com morango. Assim, para a Ana, a parte com chocolate vale $\frac{3}{4}$ do valor total do bolo e a parte

com morango vale $\frac{1}{4}$, ou seja, a Ana valoriza em

$\frac{3}{4} \times 12 = 9 \text{ €}$ a parte com chocolate e em $\frac{1}{4} \times 12 = 3 \text{ €}$ a parte com morango.

1.2. Morango $\rightarrow \frac{60^\circ}{180^\circ} \times 3 \text{ €} = 1 \text{ €}$ ou $3 \text{ €} \text{ ----- } 180^\circ$
 $x \text{ ----- } 60^\circ$

Chocolate $\rightarrow \frac{40^\circ}{180^\circ} \times 9 \text{ €} = 2 \text{ €}$ $x = \frac{60 \times 3}{180} = 1 \text{ €}$

Para a Ana, a fatia cortada vale 3 € (1 € + 2 €).

2. Para o Diogo, é justo receber as parcelas 1 ou 4.
 Para o Martinho, é justo receber as parcelas 1 ou 2.
 Para a Joana, é justo receber a parcela 4.
 Para a Teresa, é justo receber as parcelas 1 ou 3.
 Partilha possível: Diogo $\rightarrow$ Parcela 1; Martinho $\rightarrow$ Parcela 2;
 Joana $\rightarrow$ Parcela 4; Teresa $\rightarrow$ Parcela 3

Pág. 96

46.1. $\begin{array}{l} \text{cogumelos: } \frac{1}{5} \text{ (20\%)} \\ \text{Para o Bruno} \swarrow \searrow \\ \text{chouriço: } \frac{4}{5} \text{ (80\%)} \end{array}$

• Parte com mais chouriço: $\frac{120^\circ}{180^\circ} \times 80\% + \frac{60^\circ}{180^\circ} \times 20\% = 60\%$

• Parte com mais cogumelos: $\frac{120^\circ}{180^\circ} \times 20\% + \frac{60^\circ}{180^\circ} \times 80\% = 40\%$

Na perspetiva do Bruno, a parte com mais chouriço vale 60% do valor da pizza e a outra parte, 40%.

- 46.2. O Bruno, o selecionador, escolhe a parte com mais chouriço (pois é a que valoriza mais). O Filipe fica com a parte que resta (como foi o divisor, espera-se que tenha valorizado cada uma das partes de igual forma).

Pág. 98

47.

	Tabela 1	Tabela 2
Ana	B_3	B_1
Bernardo	B_2	?
Carina	B_1	?

No caso da Tabela 2, a única parte justa, quer para o Bernardo quer para a Carina, é a B_3 . Como B_1 é a parte que ambos menos valorizam, essa fica para a Ana (para ela é indiferente receber B_1 , B_2 ou B_3). De seguida, podem juntar as partes B_2 e B_3 e aplicar o método do divisor-selecionador. Repare-se que, independentemente do resultado final, o Bernardo ficará sempre com uma parte que vale, pelo menos, 40% do bolo ($B_2 + B_3 \rightarrow 30\% + 50\% = 80\%$) e a Carina acabará sempre com uma parte que vale, pelo menos, 45% do bolo ($B_2 + B_3 \rightarrow 20\% + 70\% = 90\%$).

Pág. 100

48. Depois dos clubes A e C terem dividido o horário semanal entre si (3 subpartes para cada um), o clube B, o selecionador, vai escolher uma subparte pertencente a cada um dos outros dois clubes. Suponhamos que o clube B escolhe os horários A_1 e C_3 . Ficamos, assim, com a distribuição seguinte:

- Clube A: 3.ª-feira (tarde), 4.ª-feira e 5.ª-feira (manhã)
- Clube B: 2.ª-feira e sábado (manhã)
- Clube C: 3.ª-feira (manhã), 5.ª-feira (tarde) e 6.ª-feira

Pág. 102

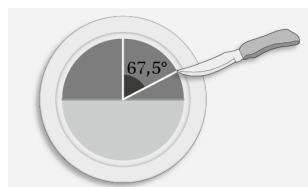
- 49.1. Jenny 49.2. Diana
 49.3. Zulmira 49.4. Xavier e Vítor

Pág. 104

50. Atendendo a que o bolo vale 24 euros, cada um dos participantes deve ficar com uma parte que valorize em, pelo menos, 6 euros (um quarto do total).

Hipoteticamente, poderá acontecer o que se segue:

- O primeiro a dizer STOP deverá ser o João, quando a faca se encontrar na seguinte posição:

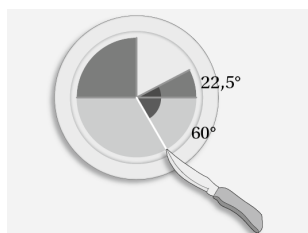


Assim, o João fica com uma parte que vale 6 € (fatia apenas com chocolate).

Cálculos: $180^\circ \text{ ----- } 16 \text{ €}$

$$x \text{ ----- } 6 \text{ €} \quad x = \frac{180 \times 6}{16} = 67,5^\circ$$

- O segundo a dizer STOP deverá ser o Hélder, quando a fatia já tiver esta configuração:

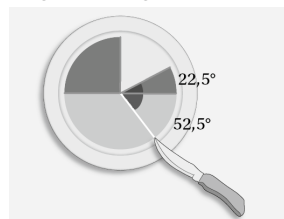


Cálculos: $180^\circ \text{ ----- } 18 \text{ €}$

$$x \text{ ----- } 6 \text{ €} \quad x = \frac{180 \times 6}{18} = 60^\circ$$

Assim, o Hélder fica com 6 € de manga e 0,75 € de chocolate.

Observação: Para sermos mais precisos, o Hélder até poderia dizer STOP na configuração seguinte:



e garantia que ficava com 6 € (0,75 € de chocolate e 5,25 € de manga).

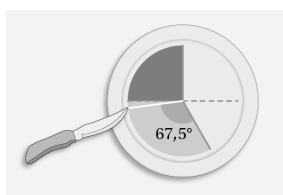
- O terceiro a dizer STOP deverá ser o Bruno, enquanto a faca ainda desliza na parte de manga:

Cálculos:

$$180^\circ \text{ ----- } 16 \text{ €}$$

$$x \text{ ----- } 6 \text{ €}$$

$$x = \frac{180 \times 6}{16} = 67,5^\circ$$



O Bruno fica com uma fatia com apenas manga, no valor de 6 €.

- O Rui fica com o restante bolo, “beneficiando” da “vantagem” de não ter preferência por qualquer um dos sabores. Recebe metade da metade de chocolate (6 €) e mais um bocado da parte de manga (a valer cerca de 4 €).

Pág. 109

51. 1.º passo: Tabela do enunciado

2.º passo:

Presidente: prémios de jogo, ajudas de custo e seguro de saúde
Futebolista: salário e casa

3.º Passo:

Presidente: $40 + 10 + 15 = 65$ (perdedor inicial)

Futebolista: $50 + 25 = 75$ (vencedor inicial)

4.º Passo:

Salário: $\frac{50}{30} \approx 1,67 \leftarrow$ item a transferir

Casa: $\frac{25}{5} = 5$

5.º Passo:

Transfere-se o item “salário” do Futebolista para o Presidente.

Recalculam-se as pontuações:

Presidente: $40 + 10 + 15 + 30 = 95$

Futebolista: 25

Ou seja, esta transferência fez com que o perdedor inicial passe a ser o vencedor inicial: o item “salário” terá de ser partilhado.

6.º Passo:

x : representa a fração de item que fica com o futebolista

$$50x + 25 = 40 + 10 + 15 + 30(1 - x)$$

7.º Passo:

$$50x + 25 = 65 + 30(1 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50x + 30x = 65 + 30 - 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 80x = 70 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{70}{80}$$

$$\Leftrightarrow x = 0,875$$

Assim, o Futebolista fica com 87,5% de salário, o que corresponde a $0,875 \times 50 = 43,75$ pontos.

O Presidente fica com 12,5% do item “salário”, o que corresponde a $0,125 \times 30 = 3,75$ pontos.

Pontuação final:

Presidente: $40 + 10 + 15 + 3,75 = 68,75$ pontos

Futebolista: $43,75 + 25 = 68,75$ pontos

Distribuição final:

O Futebolista verá satisfeitas as exigências que fez relativamente à casa e a 87,5% do seu salário.

O Presidente sairá beneficiado nos itens “Prémios de jogo”, “Ajudas de custo”, “Seguro de saúde” e ainda em 12,5% do salário.

Pág. 112

52.

	A	B	C	D
Item 1	350	240	300	220
Item 2	90	120	100	130
Item 3	400	450	500	460
Item 4	600	550	600	650
Item 5	720	750	800	700
Valor total licitado	2160	2110	2300	2160
Valor justo	540	527,5	575	540
Bens	Item 1	-----	Item 3 Item 5	Item 2 Item 4
Valor total dos bens	350	0	1300	780
Saldo	190	527,5	-725	-240
Dinheiro disponível	61,88	61,88	61,88	61,88
Dinheiro a receber/pagar	251,88	589,38	-663,13	-178,13
Total final	601,88	589,38	636,88	601,88

Herdeiro A: fica com o Item 1 e recebe 251,88 € em dinheiro.

Herdeiro B: recebe 589,38 € em dinheiro.

Herdeiro C: fica com os Itens 3 e 5 e paga 663,13 € em dinheiro.

Herdeiro D: fica com os Itens 2 e 4 e paga 178,13 € em dinheiro.

Pág. 114

53. Amigo A: cromos 10, 11, 12 e 13

Amigo B: cromos 1 e 2

Amigo C: cromos 6, 7 e 8

Amigo D: cromos 14 e 15

Cromos que sobram: 3, 4, 5 e 9 (faz-se um sorteio e cada um dos amigos fica com um dos cromos que sobrou).

Observação: O amigo D também podia ficar com os cromos 11, 12 e 13 (compreendidos entre os marcadores D_2 e D_3) e o amigo A com os cromos 14 e 15. Nesta situação, já iriam sobrar cinco cromos (3, 4, 5, 9 e 10) podendo ser distribuídos aplicando novamente o método dos marcadores.

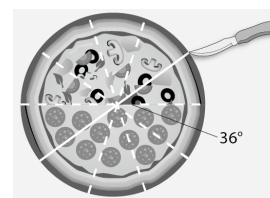
Pág. 118

54.1. Para o Filipe, a parte com

chouriço vale $\frac{2}{3}$ do valor

da pizza e a parte com

vegetais $\frac{1}{3}$.



Assim, a metade com mais chouriço vale, para o Filipe

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \text{ (ou 60\%) } .$$

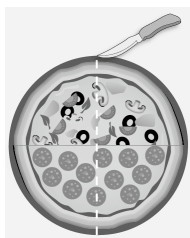
A metade com menos chouriço vale, para o Filipe

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \text{ (ou 40\%) } .$$

- 54.2. A Cátia, o divisor, corta a *pizza* em duas partes que ela considera valerem o mesmo. O Filipe, o selecionador, escolhe a parte que valoriza mais (a que tem mais chouriço – que vale, para ele, 60% do valor total da *pizza*). A Cátia fica com a outra parte (que, para ela, vale 50% do valor total da *pizza*).

- 54.3. Provavelmente, cortaria a *pizza* da forma indicada na figura.

Repare que ele desconhece as preferências da Cátia, logo, para não arriscar, cortaria de forma a ficar com 50% do valor que idealiza para a *pizza*.



55. Alice: T_2 Bruno: T_1 Matilde: T_3

- 56.1. Lucas: P_3 Dinis: P_5 Eduardo: P_1
Liz: P_4 Afonso: P_2

- 56.2. a) 1.ª parte: Liz 2.ª parte: Lucas 3.ª parte: Eduardo

b) O Afonso

c) Utiliza-se o método do divisor-selecionador.

57. O clube B , o selecionador, escolhe uma subparte de cada um dos outros clubes. Suponhamos que escolhe A_2 , C_4 e D_1 . Assim, o clube A fica com as partes A_1 , A_3 e A_4 ; o clube B com as partes A_2 , C_4 e D_1 ; o clube C com C_1 , C_2 e C_3 ; o clube D com D_2 , D_3 e D_4 .

Pontuação:

Manuel: $50 + 0,286 \times 30 \approx 59$ pontos

António: $30 + 0,714 \times 40 \approx 59$ pontos

António: quadro e aproximadamente 71,4% da casa;

Manuel: empresa e aproximadamente 28,6% da casa.

59.

	A	B	C
Zê Carrinhos	100	200	350
Chico Bala	250	100	120
João Colosso	60	90	70
Nando Talocha	500	450	650
Valor total licitado	910	840	1190
Valor justo	303,33	280,00	396,67
Bens (futebolistas)	ChicoBala	João Colosso	Zê Carrinhos Nando Talocha
Valor total dos bens	250	90	1000
Saldo	53,333	190,000	-603,333
Dinheiro disponível	120,00	120,00	120,00
Dinheiro a receber/pagar	173,333	310,000	-483,333
Total final	423,333	400,000	516,667

Empresário A : fica com o futebolista Chico Bala e ainda recebe cerca de 173 333 € em dinheiro.

Empresário B : fica com o futebolista João Colosso e ainda recebe 310 000 € em dinheiro.

Empresário C : fica com os futebolistas Zê Carrinhos e Nando Talocha e ainda tem de pagar cerca de 483 333 € em dinheiro.

Pág. 119

58. Manuel: Empresa (50 pontos)

António: Casa e Quadro ($40 + 30 = 70$ pontos)

Vencedor inicial $\rightarrow$ António

Casa: $\frac{40}{30} \approx 1,33$

Quadro: $\frac{30}{20} \approx 1,5$ Item a transferir $\rightarrow$ Casa

Como o Manuel passa a ter mais pontos, o item “Casa” terá de ser partilhado.

x : fração da “Casa” que fica com o António

$$40x + 30 = 50 + 30(1 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40x + 30x = 50 + 30 - 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 70x = 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{50}{70}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 0,714$$

60.

	W	X	Y	Z
Tablet	5	2	8	10
Computador	10	20	80	60
Consola	20	15	12	15
Bola	2	10	6	12
Valor total licitado	37	47	106	97
Valor justo	9,25	11,75	26,5	24,25
Bens	Consola	-----	Computador	Tablet Bola
Valor total dos bens	20	0	80	22
Saldo	-10,75	11,75	-53,5	2,25
Dinheiro disponível	12,56	12,56	12,56	12,56
Dinheiro a receber/pagar	1,81	24,31	-40,94	14,81
Total final	21,81	24,31	39,06	36,81

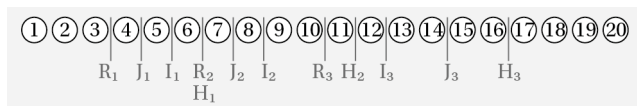
Irmão *W*: fica com a consola e recebe 1,81 € em dinheiro.

Irmão *X*: recebe 24,31 € em dinheiro.

Irmão *Y*: fica com o computador e paga 40,94 € em dinheiro.

Irmão *Z*: fica com o *tablet* e a bola e recebe 14,81 € em dinheiro.

61.



- O primeiro marcador é o R_1 , logo, a Rita fica com as gomas 1, 2 e 3 (retiram-se os marcadores da Rita).
 - O primeiro “segundo marcador” é o J_2 , logo, o João fica com as gomas entre J_1 e J_2 , ou seja, as gomas 5, 6 e 7 (retiram-se os marcadores do João).
 - O primeiro “terceiro marcador” é o I_3 , logo, a Íris fica com as gomas entre I_2 e I_3 , ou seja, as gomas 9, 10, 11 e 12 (retiram-se os marcadores da Íris).
 - Finalmente, o Hugo fica com as gomas 17, 18, 19 e 20.
- Sobram as gomas 4, 8, 13, 14, 15 e 16, às quais se pode aplicar novamente o método dos marcadores.

Pág. 120

- 1.1. Sr. Azevedo: material informático,
de escritório e máquinas 15 + 10 + 50 = 75 pontos
Sr. Salgado: instalações 60 pontos
Vencedor inicial: Sr. Azevedo

$$\text{Material informático: } \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{Material de escritório: } \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{Máquinas: } \frac{50}{30} \approx 1,67 \quad (\text{item a transferir})$$

Novas pontuações:

$$\text{Sr. Azevedo} \rightarrow 15 + 10 = 25 \text{ pontos}$$

$$\text{Sr. Salgado} \rightarrow 60 + 30 = 90 \text{ pontos}$$

Item a partilhar: Máquinas

Seja x a fração do item “Máquinas” que fica com o Sr. Azevedo.

$$15 + 10 + 50x = 60 + 30(1 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50x + 30x = 60 + 30 - 15 - 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 80x = 65 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{65}{80}$$

$$\Leftrightarrow x = 0,8125$$

O Sr. Azevedo fica com o material informático, com o material de escritório e com 81,25% do item “Máquinas”. O Sr. Salgado fica com as instalações e com 18,75% do item “Máquinas”.

1.2.

	Sr. Azevedo	Sr. Salgado
Material informático	1 500 000	600 000
Material de escritório	1 000 000	600 000
Máquinas	5 000 000	3 600 000
Instalações	2 500 000	7 200 000
Valor total lícitado	10 000 000	12 000 000
Valor justo	5 000 000	6 000 000
Bens	Material de escritório Material informático Máquinas	Instalações
Valor total dos bens	7 500 000	7 200 000
Saldo	-2 500 000	-1 200 000
Dinheiro disponível	1 850 000	1 850 000
Dinheiro a receber/pagar	-650 000	+650 000
Total final	6 850 000	7 850 000

Sr. Azevedo: fica com o material informático, o material de escritório e com as máquinas e paga 650 000 € em dinheiro.

Sr. Salgado: fica com as instalações e recebe 650 000 € em dinheiro.

- 2.1. a) Cada bombom vermelho vale por três, logo $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$, ou seja, 60% (um bombom vermelho “vale” 15% e um de outra cor, 5%).

Para a Mónica, o conjunto de cima vale 60% e o conjunto de baixo 40%.

b) 50% cada um dos conjuntos.

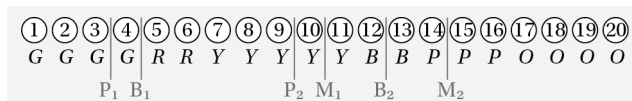
- 2.2. A Mónica fica com os bombons de cima (que para ela valem 60% do conjunto) e a Beatriz fica com os bombons de baixo (que, na perspetiva dela, valem 50%). Como cada uma delas fica com pelo menos 50% do valor total (de acordo com a perspetiva individual), nenhuma das intervenientes fica insatisfeita.

Pág. 121

- 3.1. Como foi ela a efetivar a divisão, assegurou-se que o conjunto ficava particionado em três partes que ela considera terem o mesmo valor, ou seja, $\frac{100}{3}\% \approx 33,3\%$ do valor total.

- 3.2. Beatriz: X_1 Mónica: X_3 Petra: X_2

4. Verde: G ; vermelho: R , amarelo: Y , azul: B , cor de laranja: O , lilás: P



Petra: bombons 1, 2 e 3 (três verdes)

Beatriz: bombons 5 a 12 (dois vermelhos, cinco amarelos e um azul)

Mónica: bombons 15 a 20 (quatro cor de laranja e dois lilás)

Sobram: um verde, um azul e um lilás (podem ser atribuídos por sorteio).

- 1.1. Homem-Aranha: $10 + 13 = 23$ votos
 Velocidade Furiosa: $8 + 15 = 23$ votos
 Guerra das Estrelas: 14 votos
 O Hobbit: 6 votos (eliminado)
 Maioria absoluta: 34 votos (mínimo)

1.2. Nova contagem:

- Homem-Aranha: $10 + 13 + 6 = 29$ votos
- Velocidade Furiosa: $8 + 15 = 23$ votos
- Guerra das estrelas: 14 votos (eliminado)

Nova contagem

- Homem-Aranha: $10 + 13 + 6 + 14 = 43$ votos (vencedor)
- Velocidade Furiosa: $8 + 15 = 23$ votos

Resultado final:

O “Homem-Aranha” é o filme escolhido.

1.3. Pontuações

- Homem-Aranha:
 $10 \times 4 + 8 \times 2 + 13 \times 4 + 6 \times 3 + 15 \times 1 + 14 \times 3 = 183$
 - Velocidade Furiosa:
 $10 \times 2 + 8 \times 4 + 13 \times 3 + 6 \times 1 + 15 \times 4 + 14 \times 1 = 171$
 - Guerra das Estrelas:
 $10 \times 1 + 8 \times 3 + 13 \times 1 + 6 \times 2 + 15 \times 2 + 14 \times 4 = 145$
 - O Hobbit:
 $10 \times 3 + 8 \times 1 + 13 \times 2 + 6 \times 4 + 15 \times 3 + 14 \times 2 = 161$
- Vencedor: Homem-Aranha

1.4. 7% dos alunos não votaram; então, 93% dos alunos votaram.

93% ----- 66

$$100\% \text{ ----- } x \quad x = \frac{100 \times 66}{93} \approx 71 \text{ alunos}$$

Frequentam o 10.º ano de escolaridade 71 alunos.

2. Método de Hondt

	A	B	C	D	E
1	545,0	740,0	250,0	810,0	140,0
2	272,5	370,0	125,0	405,0	70,0
3	181,7	246,7	83,3	270,0	46,7
4	136,3	185,0	62,5	202,5	35,0
5	109,0	148,0	50,0	162,0	28,0
6	90,8	123,3	41,7	135,0	23,3
7	77,9	105,7	35,7	115,7	20,0
8	68,1	92,5	31,3	101,3	17,5

Distribuição segundo o método de Hondt:

- A: 3 lugares
 B: 4 lugares
 C: 1 lugar
 D: 4 lugares
 E: Nenhum lugar

Método de Hamilton

Divisor-padrão: 207,0833

Partido	Quota-padrão	Parte inteira da quota-padrão	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares
A	2,6318	2	0,6318	$2 + 1 = 3$
B	3,5734	3	0,5734	3
C	1,2072	1	0,2072	1
D	3,9115	3	0,9115	$3 + 1 = 4$
E	0,6761	0	0,6761	$0 + 1 = 1$
Total	-----	9	-----	12

Distribuição segundo o método de Hamilton:

- A: 3 lugares
 B: 3 lugares
 C: 1 lugar
 D: 4 lugares
 E: 1 lugar

O Martinho não tem razão.

3.1.

$$\begin{array}{l|l} A \text{ vs. } J & A : 62 + 120 = 182 \\ \text{(vence A)} & J : 44 + 106 = 150 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} A \text{ vs. } M & A : 44 + 62 = 106 \\ \text{(vence M)} & M : 106 + 120 = 226 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} M \text{ vs. } J & M : 106 + 120 = 226 \\ \text{(vence M)} & J : 44 + 62 = 106 \end{array}$$

Candidato	A	M	J
N.º de vitórias	1	2	0

A candidata escolhida é a Melina.

3.2. Divisor-padrão: 7,5

Agrupamento	Quota-padrão	Média geométrica (M)	Quota arredondada pela regra H-H
X	21,33	21,49	21
P	50,67	50,50	51
T	16,00	-----	16
O	72,00	-----	72
Total	-----	-----	160

Agrupamento X: 21 convites

Agrupamento P: 51 convites

Agrupamento T: 16 convites

Agrupamento O: 72 convites

4. Divisor-padrão: 38,603

Freguesia	Quota-padrão	Parte inteira da quota-padrão	Parte decimal da quota-padrão	Número de computadores
Beirais de Cima	29,013	29	0,013	29
Beirais de Baixo	13,600	13	0,600	$13 + 1 = 14$
Beiraliz	25,387	25	0,387	25
Total	-----	67	-----	68

Beirais de Cima: 29 computadores

Beirais de Baixo: 14 computadores

Beiraliz: 25 computadores

Apesar de existirem mais dois computadores para distribuir e apenas a população de Beirais de Baixo ter aumentado, observa-se que, para além do esperado benefício dessa freguesia, as outras duas são prejudicadas, pois perdem um computador cada uma.

Pág. 127

5.

+	Filipa	João	Alberto
Valor global	2500	2450	2600
Valor justo	$0,25 \times 2500 = 625$	$0,4 \times 2450 = 980$	$0,35 \times 2600 = 910$
Prémio	Viagem	-----	Computador e TV
Paga/Recebe	$625 - 1200 = -575$	980	$910 - (1000 + 850) = -940$
Excesso	$575 + 940 - 980 = 535$ $0,25 \times 535 = 133,75$	$0,40 \times 535 = 214$	$0,35 \times 535 = 187,25$
Valor final	$133,75 - 575 = -441,25$	$980 + 214 = 1194$	$187,25 - 940 = -752,75$

Filipa: recebe a viagem e paga 441,25 €.

João: recebe 1194 €.

Alberto: recebe o computador, a TV e paga 752,75 €.

Pág. 129

6.1. Valor da herança

Valor justo

Afonso: 366 000 €

Afonso: 122 000 €

Dinis: 381 000 €

Dinis: 127 000 €

Eduardo: 335 500 €

Eduardo: 111 833,33 €

6.2.

	Afonso	Dinis	Eduardo
Apartamento	120 000	200 000	100 000
Terreno	64 000	50 500	70 000
Automóvel	32 000	40 500	45 500
Quadro	150 000	90 000	120 000
Valor total licitado	366 000	381 000	335 500
Valor justo	122 000	127 000	111 833,33
Bens	Quadro	Apartamento	Terreno Automóvel
Valor total dos bens	150 000	200 000	115 500
Saldo	-28 000,00	-73 000,00	-3 666,67
Dinheiro disponível	34 888,89	34 888,89	34 888,89
Dinheiro a receber/pagar	6 888,89	-38 111,11	31 222,22
Valor total a receber	156 888,89	161 888,89	146 722,22

Afonso: recebe o quadro e ainda 6888,89 € (totalizando 156 888,89 €, ou seja, um valor acima do que considerava justo receber).

Dinis: recebe o apartamento e paga 38 111,11 € (totalizando 161 888,89 €, ou seja, um valor acima do que considerava justo receber).

Eduardo: recebe o terreno, o automóvel e ainda 312 22,22 € (totalizando 146 722,22 €, ou seja, um valor acima do que considerava justo receber).

2.2. Interpretação de tabelas e gráficos

Pág. 144

- 1.1. A população é constituída pelos 1000 alunos da escola.
 1.2. A amostra é constituída pelos 50 alunos selecionados.
 1.3. A unidade estatística é cada um dos alunos que constituem a amostra.

Pág. 146

- 1.1. Variável em estudo: Nível obtido pelos alunos
Variável qualitativa.
 1.2. Variável em estudo: Sabor do iogurte
Variável qualitativa
 1.3. Variável em estudo: Espécie de árvores plantadas
Variável qualitativa
 1.4. Variável em estudo: N.º de computadores por empresa
Variável quantitativa discreta
 2.1. Variável: Tempo em segundos
Variável quantitativa contínua.
 2.2. Variável: Número de livros lidos
Variável quantitativa discreta.

Pág. 147

- 3.1. A população é constituída por todos os alunos que frequentam a escola da Ana.
 3.2. A amostra é constituída pelos 40 alunos selecionados.
 3.3. A unidade estatística é cada um dos alunos que constituem a amostra.
 3.4. A variável estatística é o número de irmãos.
É uma variável quantitativa discreta.
 3.5. Número de alunos que têm pelo menos três irmãos: 10
 Número total de alunos: 40
 $\frac{10}{40} = 0,25 = 25\%$
 Resposta: 25%

Pág. 148

- 4.1. A população é constituída por todos os alunos da escola da Beatriz.
 4.2. Variável qualitativa
 4.3. Variável quantitativa discreta
 4.4. Sabemos que 6 em 10 alunos têm telemóvel, ou seja,
 $\frac{6}{10} = 0,6 = 60\%$.
 60% de 1200 = $0,6 \times 1200 = 720$
 Resposta: 720 alunos
 4.5. a) Pictograma
 b) $3 \times 60 = 180$
 Resposta: 180 alunos
 c) $3 \times 60 + 30 = 210$; $60 + 60 = 120$
 Resposta: Aproximadamente 210 alunos.
 Aproximadamente 120 alunos.
 d) Vantagens: fácil leitura
 Desvantagens: pouco rigor

- e) Alunos que utilizam o telemóvel para ter acesso ao e-mail durante 9 min por dia: $4 \times 60 = 240$
 Número total de alunos que têm telemóvel: 720
 $\frac{240}{750} = 0,32$
 Resposta: 32%

Pág. 149

- 5.1. População: População portuguesa
A variável em estudo: Acesso à Internet por banda larga, por tipo de tecnologia.
 5.2. Gráfico de barras (simples)
 5.3. 315 milhares. 972 milhares
 5.4. Fibra ótica: 459 milhares
 Total: 2563 milhares
 Resposta: $\frac{459}{2563}$
 5.5. Fibra ótica.
 6.1. Número de sacos de papel: 1107
 Número total de sacos: 1589
 $\frac{1107}{1589} \approx 0,69666$
 Resposta: 69,7%
 6.2. Número de sacos de papel: 315
 Número de sacos de plástico: 96
 $\frac{315}{411} = \frac{105}{137}$
 Resposta: $\frac{105}{137}$ ou 105 : 137
 6.3. Razão entre o número de sacos de papel e sacos de plástico:
 Domingo: $\frac{226}{45} \approx 5,02$ Segunda: $\frac{43}{75} \approx 0,57$
 Terça: $\frac{214}{68} \approx 3,15$ Quarta: $\frac{85}{98} \approx 0,87$
 Quinta: $\frac{116}{45} \approx 2,58$ Sexta: $\frac{108}{55} \approx 1,96$
 Sábado: $\frac{315}{96} \approx 3,28$
 Resposta: Segunda-feira ; Domingo

Pág. 150

- 7.1. Gráfico de barras duplas
 7.2. A população é constituída pelo número de alunos matriculados, em Portugal, no Ensino Secundário.
A variável em estudo: Número de matrículas no Ensino Secundário.
 7.3. Norte de Lisboa: $162\,969 + 93\,488 = 256\,457$
 Resto do País:
 $116\,354 + 29\,087 + 17\,848 + 9949 + 11\,200 = 184\,438$
 Sim. $256\,457 > 184\,438$
 7.4. Em 2010: $178\,350 + 107\,418 + 126\,601 + 31\,736 + 18\,679 + 10\,064 + 11\,134 = 483\,982$
 Em 2011: $162\,969 + 93\,488 + 116\,354 + 29\,087 + 17\,848 + 9949 + 11\,200 = 440\,895$

7.5. 178 350 (Norte)
 440 895 (Total) $\frac{178\,350}{483\,982} \approx 0,3685$

Resposta: 36,85%

7.6. 116 354 (Lisboa)
 483 982 (Total) $\frac{116\,354}{440\,895} \approx 0,2639$

Resposta: 26,39%

8.1. População: Consumidores de energia elétrica em Portugal
 Variável: Tipo de consumo de energia elétrica
 Natureza qualitativa

8.2. Consumidores domésticos: $6\,368\,632 \times 0,8444 =$
 $= 5\,377\,672,861$

Resposta: Domésticos, aproximadamente, 5 377 673

Consumidores agrícolas: $6\,368\,632 \times 0,0173 =$
 $= 110\,177,3336$

Resposta: Agrícolas, aproximadamente, 110 177

8.3. Consumidores agrícolas: 110 177,3336

Consumidores industriais: $6\,368\,632 \times 0,0107 =$
 $= 68\,144,3624$

$110\,177,3336 - 68\,144,3624 = 42\,032,9712$

Resposta: Aproximadamente, 42 033

Pág. 151

9.1. Histograma

9.2. $2 + 6 + 12 = 20$

Resposta: 20 alunos

9.3. $\frac{8}{29} \approx 0,27586$

Resposta: 27,59%

9.4. 10% de 58,5 kg = $0,1 \times 58,5 \text{ kg} = 5,85 \text{ kg}$

Logo, os alunos carregam mochilas com *peso* superior ao aconselhado.

9.5. Este gráfico é utilizado para variáveis quantitativas e com dados agrupados em classes, enquanto que o gráfico de barras é utilizado para variáveis qualitativas ou quantitativas discretas.

Nos histogramas não há espaço entre as barras.

Nos gráficos de barras há espaços iguais entre as barras.

10.1. 4,8 litros

10.2. a) $7,2 - 5,7 = 1,5$

Resposta: 1,5 litros

b) $10,3 - 11,4 = -1,1$

Resposta: -1,1 litros

10.3. Entre 62 km/h e 115 km/h, aproximadamente.

Pág. 152

1. Região Autónoma dos Açores

2. R. A. M.: $29,3 - 25,1 = 4,2$

R. A. A.: $27,4 - 23,5 = 3,9$

Algarve: $29,2 - 24,7 = 4,5$

Alentejo: $28,9 - 24,6 = 4,3$

Lisboa: $30 - 26,2 = 3,8$

Centro: $29,9 - 24,9 = 5$

Norte: $29,8 - 25 = 4,8$

Resposta: Lisboa

3. Zona centro

5. Por exemplo, observando os dados, através do gráfico, verifica-se que a idade em que se é mãe pela primeira vez aumentou em todas as regiões do país.

Este aumento pode dever-se a várias razões entre as quais, por exemplo, a situação da economia do país neste período ter sido menos favorável à constituição de família.

Pág. 153

11.1. Carne de suínos

11.2. $\frac{84\,011}{468\,180} \approx 0,1794$; Total: $84\,011 + 17\,755 + 366\,414 = 468\,180$

Resposta: 17,94%

11.3.

Tipo de carnes	Freq. absoluta (t)	Freq. relativa (%)
Suínos	366 414	78%
Ovinos	17 755	4%
Bovinos	84 011	18%

12.1. Quantitativa contínua

12.2. Quantitativa contínua

12.3. Quantitativa contínua

12.4. Qualitativa

12.5. Qualitativa

12.6. Qualitativa

12.7. Quantitativa discreta

13.1. Alunos do Ensino Secundário da escola do professor João.
 Natureza quantitativa discreta.

13.2. a) 60 min

b) 7%

c)

Tempo de estudo (min)	N.º de alunos	Frequência relativa (%)
30	63	21
60	126	42
90	81	27
120	21	7
Outro	9	3
Total	300	100

Pág. 154

1.1. 2007

1.2. 2012

1.3. 2009

1.4. $1,94 - 0,77 = 1,17$; $0,77 + 0,93 = 1,7$

$1,81 - 0,77 = 1,04$; $2,49 - 0,2 = 2,29$

$0,2 + 2,98 = 3,18$; $1,9 + 1,83 = 3,73$

$3,32 - 1,83 = 1,49$

Resposta: 2005

2.1. Morango

2.2. 19%

2.3. $35\% \times 200 = 70$

Resposta: 70 pessoas

2.4. Maior: $46 + 36 = 82$

Dos que respondem “Gosta muito” e “Gosta”, o aroma que recolhe maior percentagem é o de Morango.

Menor: $14 + 23 = 37$

Dos que respondem “Gosta muito” e “Gosta” o aroma que recolhe menor percentagem é o de Laranja.

Pág. 155

3.1. 4.º trimestre

3.2. 4.º trimestre ; 2.º trimestre

3.3. $1,35 \times (12\,000 + 7500 + 23\,500 + 30\,325) =$
 $= 1,35 \times 73\,325 = 98\,988,75$

Resposta: 98 988,75 €

3.4. 1.º trimestre: $\frac{1195}{12\,000} = \frac{239}{2400} \approx 0,0995$ 2.º trimestre: $\frac{820}{7500} = \frac{41}{375} \approx 0,1093$ 3.º trimestre: $\frac{1850}{23\,500} = \frac{37}{470} \approx 0,0787$ 4.º trimestre: $\frac{2550}{30\,325} = \frac{102}{1213} \approx 0,084$

Maior: 2.º trimestre

Menor: 3.º trimestre

3.5. $1195 \times 1,20 = 1434$; $12\,000 \times 1,15 = 13\,800$

Resposta: 1434 saídas ; 13 800 litros

4.1. 2013

4.2. $13\,911 - 12\,963 = 948$

Resposta: 948 caixas multibanco.

4.3. $14\,318 - 13\,894 = 424$ $\frac{424}{14\,318} \approx 0,02961$

Resposta: 2,96%

4.4. Sim, concordo. Determinadas entidades como, por exemplo, postos de combustíveis, optaram por não ter caixas multibanco devido a assaltos.

2.3. Construção e interpretação de tabelas de frequência e gráficos

Pág. 156

1.

N.º de peças de fruta	n_i	f_i	f_i (%)
0	5	$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$	20
1	3	$\frac{3}{25}$	12
2	5	$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$	20
3	6	$\frac{6}{25}$	24
4	4	$\frac{4}{25}$	16
5	2	$\frac{2}{25}$	8
Total	25	1	100

Pág. 158

14.1.

Cor dos olhos dos alunos do 10.º K		
Cor dos olhos x_i	Freq. absoluta n_i	Freq. relativa f_i
Azul	2	10%
Verde	5	25%
Castanho-escuro	8	40%
Castanho-claro	5	25%
Total	20	100%

14.2. Por exemplo, a maior parte dos alunos da turma K do 10.º ano tem os olhos castanhos.

Há apenas dois alunos que têm os olhos azuis e 25% dos alunos, ou seja, cinco têm os olhos verdes.

15.1.

Número de amêndoas por saco				
N.º de amêndoas por saco x_i	Freq. absoluta n_i	Freq. relativa f_i	Freq. absoluta acumulada N_i	Freq. relativa acumulada F_i
44	1	4,2%	1	4,2%
46	1	4,2%	2	8,4%
47	3	12,5%	5	20,9%
48	3	12,5%	8	33,4%
49	2	8,3%	10	41,7%
50	3	12,5%	13	54,2%
51	5	20,8%	18	75%
52	3	12,5%	21	87,5%
53	3	12,5%	24	100%
Total	24	100%		

15.2. 45,8%

15.3. Por exemplo, o número de amêndoas, por saco, varia entre 44 e 53. O número de amêndoas mais frequente, por saco, é 51. Mais de metade dos sacos, concretamente, 14 (que corresponde, aproximadamente, a 58%) têm 50 ou mais amêndoas.

16.

Alturas dos jogadores				
Classes de altura (m)	n_i	f_i	N_i	F_i
[1,75; 1,83[	3	17%	3	17%
[1,83; 1,91[	4	22%	7	39%
[1,91; 1,99[	6	33%	13	72%
[1,99; 2,07[	3	17%	16	89%
[2,07; 2,15[	2	11%	18	100%
Total	18	100%		

Pág. 160

17. $n = 21$; valor mínimo: 10; valor máximo: 19

$$2^4 = 16 < n; \quad 2^5 = 32 > n$$

Número de classes: 5

$$\text{Amplitude de cada classe: } \frac{19 - 10}{5} = 1,8$$

Tomaremos 2 para amplitude de classe.

Limite inferior da primeira classe: 10

Alturas das plantas				
Classes de altura (cm)	n_i	f_i	N_i	F_i
[10, 12[	5	0,24	5	0,24
[12, 14[	6	0,29	11	0,53
[14, 16[	3	0,14	14	0,67
[16, 18[	4	0,19	18	0,86
[18, 20[	3	0,14	21	1
Total	21	1		

18. $n = 60$

Valor mínimo: 8; valor máximo: 98

 $2^6 = 64 < 60$; Número de classes: 6

$$\text{Amplitude de cada classe: } \frac{98 - 8}{6} = 15$$

Tomaremos 16 para amplitude de classe.

Limite inferior da primeira classe: 5

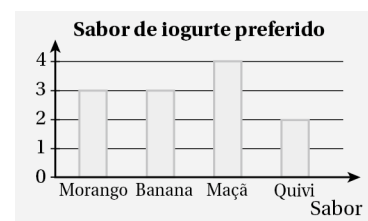
Número de mensagens diárias enviadas durante 60 dias				
Classes	Freq. absoluta n_i	Freq. relativa f_i	Freq. absoluta acumulada N_i	Freq. relativa acumulada F_i
[5, 21[	12	0,20	12	0,20
[21, 37[	8	0,13	20	0,33
[37, 53[	9	0,15	29	0,48
[53, 69[	9	0,15	38	0,63
[69, 85[	14	0,24	52	0,87
[85, 101[	8	0,13	60	1
Total	60	1		

19.

Classes	n_i	f_i	N_i	F_i
[240, 242[	10	$\frac{1}{7}$	10	$\frac{1}{7}$
[242, 244[	10	$\frac{1}{7}$	20	$\frac{2}{7}$
[244, 246[	0	0	20	$\frac{2}{7}$
[246, 248[	20	$\frac{2}{7}$	40	$\frac{4}{7}$
[248, 250[	10	$\frac{1}{7}$	50	$\frac{5}{7}$
[250, 252[	20	$\frac{2}{7}$	70	$\frac{7}{7} = 1$
Total	70	1		

Pág. 161

20.



21.

Alunos matriculados em 2015 na disciplina de MACS na Escola X						
Turma	Rapazes		Raparigas		Total	
	n_i	f_i	n_i	f_i	n_i	f_i
A	12	0,33	10	0,40	22	0,36
B	12	0,33	10	0,40	22	0,36
C	12	0,34	5	0,20	17	0,28
Total	36	1	25	1	61	1

Pág. 163

22.1.

Ingredientes	Massa (g)
Açúcar	250
Chocolate	150
Manteiga	308
Farinha	292

22.2.



23. No que se refere ao futebol, os dois gráficos apresentam setores com a mesma amplitude. Logo, podemos concluir que, nas duas escolas, existe a mesma percentagem de praticantes desta modalidade. Ora, como a Escola S. Domingos tem mais alunos que a escola S. Pedro, sendo a percentagem a mesma, tem mais praticantes. Por isso, o António está errado.

24. Carro: $0,4 \times 31\,500 = 12\,600$; $0,40 \times 360^\circ = 144^\circ$

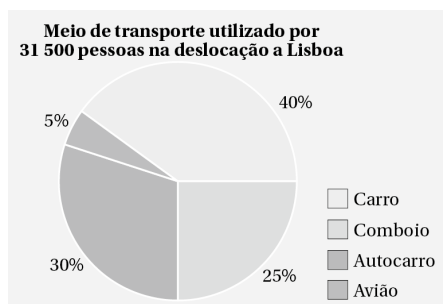
Comboio: $0,25 \times 31\,500 = 7875$; $0,25 \times 360^\circ = 90^\circ$

Avião: $0,05 \times 31\,500 = 1575$; $0,05 \times 360^\circ = 18^\circ$

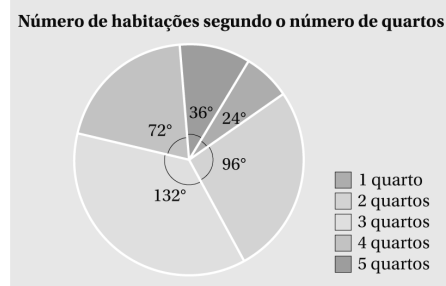
Autocarro: $0,30 \times 31\,500 = 9450$; $0,30 \times 360^\circ = 108^\circ$

24.1. 12 600 pessoas viajaram de automóvel e 1575 viajaram de avião.

24.2.



27.2. $\frac{4}{60} \times 360^\circ = 24^\circ$; $\frac{16}{60} \times 360^\circ = 96^\circ$; $\frac{22}{60} \times 360^\circ = 132^\circ$;
 $\frac{12}{60} \times 360^\circ = 72^\circ$; $\frac{6}{60} \times 360^\circ = 36^\circ$



27.3.

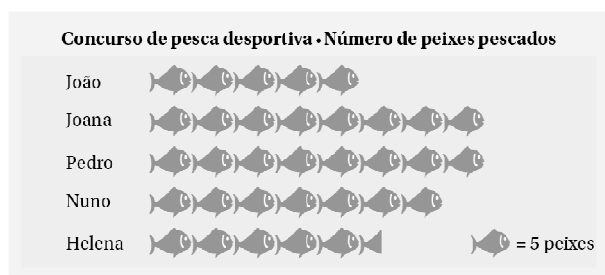


27.4. Qualquer um dos gráficos pode ser útil dependendo do objetivo pretendido.

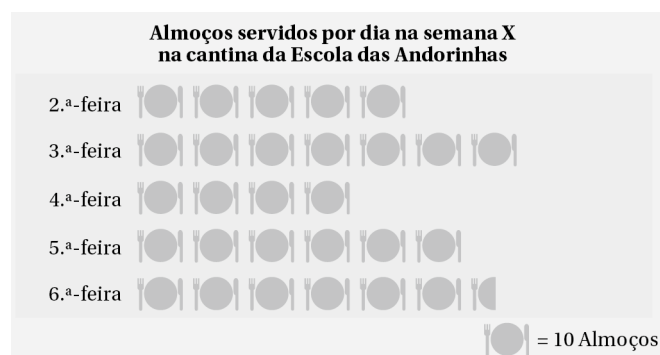
Pág. 167

25.

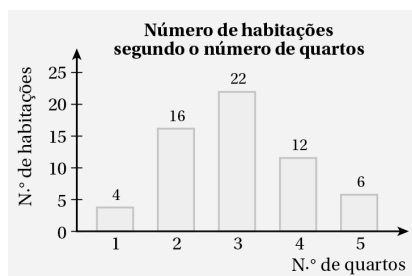
Pág. 165



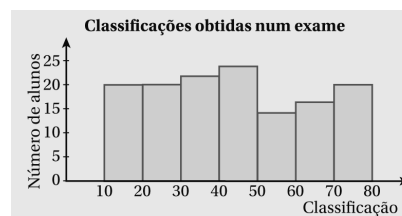
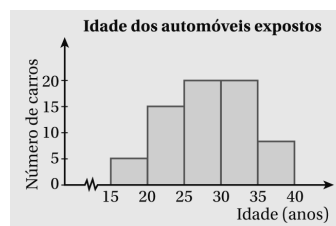
26.



27.1.



28.



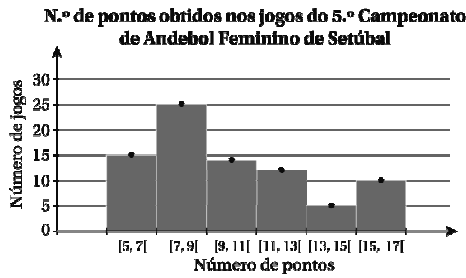
29.1.

Tempo de resolução de um problema no concurso X, em 2015				
Tempo (min)	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. absoluta acumulada	Freq. relativa acumulada
[1,5; 3,5[	5	0,05	5	0,05
[3,5; 5,5[	15	0,15	20	0,20
[5,5; 7,5[	20	0,20	40	0,40
[7,5; 9,5[	25	0,25	65	0,65
[9,5; 11,5[	15	0,15	80	0,80
[11,5; 13,5[	10	0,10	90	0,90
[13,5; 15,5[	5	0,05	95	0,95
[15,5; 17,5[	5	0,05	100	1
Total	100	1		

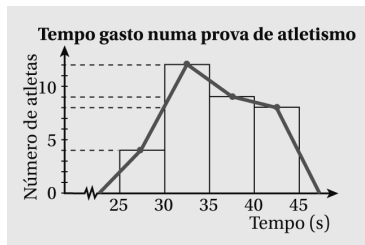
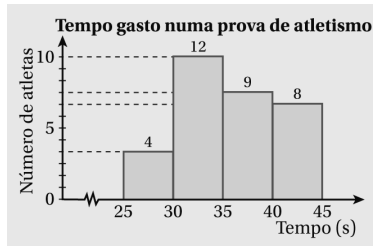
29.2. 80 estudantes

29.3. 35 estudantes

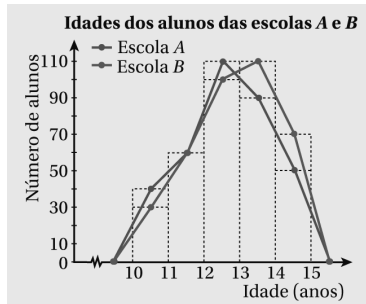
30.1 e 30.2.



31.



32.



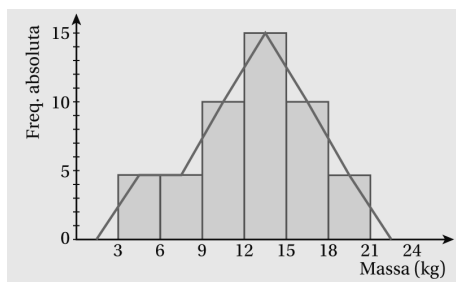
Por exemplo:

As idades dos alunos de ambas as escolas variam entre 10 e 15 anos. No entanto, na escola B há mais alunos com 13 ou mais anos que na escola A.

Já no que diz respeito às idades inferiores a 13 anos, as duas escolas têm um número muito idêntico de alunos.

33.1. 70% das abóboras têm menos de 15 kg.

33.2.



Pág. 171

34.1. Idades dos funcionários do escritório

2	8
3	0 1 1 2
4	1 2 2 3 4 5 9
5	0 5 5 6 6 8
6	0 1

3|0 significa 30 anos

34.2. Temperaturas máximas, em Agosto, nas cidades A e B

9 8 8 5 2 2	1	2 5 6 7 8
9 9 8 7 6 5 5 4 4 3 3 2 2 2 1	2	0 1 1 2 2 2 4 4 5 5 6 6 7 7 7 7 8 8 9 9
8 6 5 3 1 1 0 0	3	0 0 0 1 1

Cidade A

Cidade B

5|1|2 significa 15° C na cidade A e 12° C na cidade B

Pág. 177

35.1.

Rendimento anual em milhares de euros	Freq. absoluta n_i	Freq. absoluta acumulada N_i	Freq. relativa f_i	Freq. relativa acumulada F_i
10	40	40	$\frac{8}{21}$	$\frac{8}{21}$
14	50	90	$\frac{10}{21}$	$\frac{18}{21}$
21	10	100	$\frac{2}{21}$	$\frac{20}{21}$
27	4	104	$\frac{4}{105}$	$\frac{104}{105}$
58	1	105	$\frac{1}{105}$	1
Total	105		1	

35.2. 90 funcionários

35.3. $\frac{104}{105} \approx 99,0\%$

Resposta: 99,0%

36.

Classes	n_i	f_i (%)
[45, 50[	8	16
[50, 55[	16	32
[55, 60[	20	40
[60, 65[	4	8
[65, 70[	2	4
Total	50	100

37.1. 100 alunos

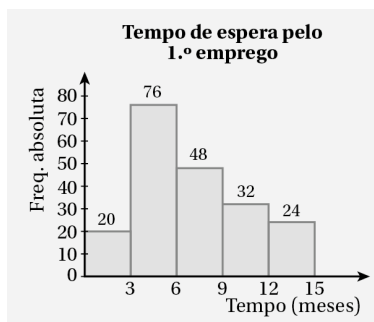
37.2. 220 alunos

37.3. $\frac{60}{520} \approx 0,11538$

Resposta: 11,54%

38.

Classes	n_i
[0, 3[	20
[3, 6[	76
[6, 9[	48
[9, 12[	32
[12, 15[	24
Total	200



Pág. 178

39.

Resultados	N.º de funcionários
[50, 60[	2
[60, 70[	4
[70, 80[	8
[80, 90[	5
[90, 100[	1
Total	20

39.1. Seis pessoas

39.2. $\frac{14}{20} = 0,7$

Resposta: 70%

40.1. $6 + 19 + 31 + 19 + 25 = 100$

$6 + 19 = 25$

Resposta: 25%

40.2. 25%

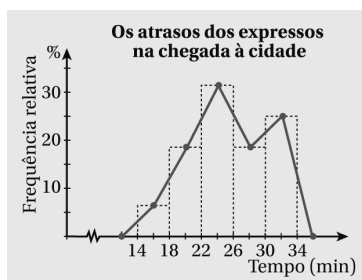
40.3. $0,25 \times 20 = 5$

Resposta: Cinco expressos

40.4.

Intervalo	n_i
[14, 18[	16
[18, 22[	20
[22, 26[	24
[26, 30[	28
[30, 34[	32

40.5.



41.

Modalidade preferida	f_i	n_i
Voleibol	25%	30
Andebol	30%	36
Natação	10%	12
Futebol	35%	42
Total	100%	120

41.1. 10%

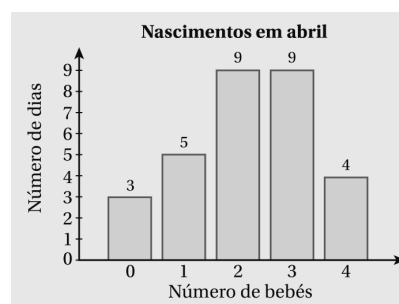
41.2. 36 alunos

42.1. Número de nascimentos

42.2. $\frac{13}{30} \approx 0,4333$

Resposta: 43,33%

42.3.



Pág. 179

43.1. Rapazes: $7 + 6 + 3 + 1 = 17$

Raparigas: $4 + 6 + 2 + 1 = 13$

Resposta: Rapazes são 17 e raparigas 13.

43.2. $\frac{9}{13} \approx 0,6923$

Resposta: 69,23%

43.3. $6 + 6 + 3 + 2 = 17$

Resposta: 17 alunos

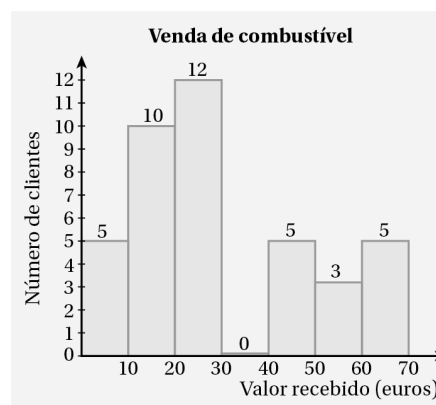
44. Gráficos de pontos, pictogramas, gráfico de barras e diagramas circulares.

45.1. 40 viaturas

45.2. 24 clientes

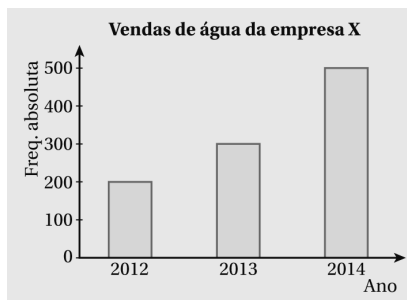
45.3. $\frac{10}{40} = 0,25$ Resposta: 25%

45.4.



1.1. As barras têm largura diferente e não estão igualmente espaçadas.

1.2.



2.1. Número de pessoas que dormiram 6,5 h ou mais e menos de 7 h.

2.2. Limite inferior: 7 ;

Limite superior: 7,5 ;

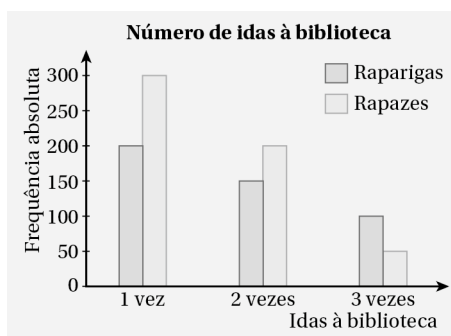
Amplitude: 0,5

2.3. 25 pessoas

2.4. $\frac{14}{30} \approx 0,467$

Resposta: 46,7%

3.1.



3.2. $\frac{500}{1000} = 50\%$ — 1 vez (correto)

$\frac{350}{1000} = 35\%$ — 2 vezes (errado)

$\frac{150}{1000} = 15\%$ — 3 vezes (errado)

Resposta: O gráfico não representa os dados.

4.1. 20 bebés

4.2. $7 + 9 + 5 = 21$ bebés. $\frac{21}{27} \times 100 \approx 77,8\%$

4.3.

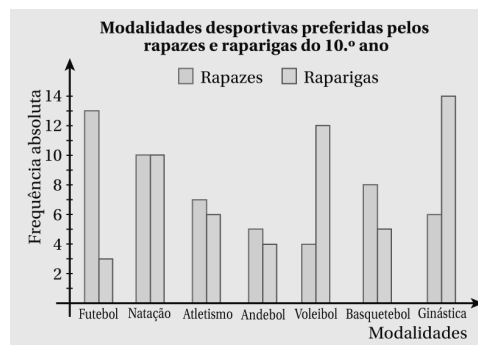
Classes	n_i	N_i	$f_i (\%)$	$F_i (\%)$
[6; 6,5[	1	1	3,7	3,7
[6,5; 7[	3	4	11,1	14,8
[7; 7,5[	7	11	25,9	40,7
[7,5; 8[	9	20	33,4	74,1
[8; 8,5[	5	25	18,5	92,6
[8,5; 9[	2	27	7,4	100
Total	27		100	

5.1. Futebol e Natação

5.2. Futebol e Andebol

5.3. Futebol ($13 - 3 = 10$)

5.4.



6.1. Cinco classes

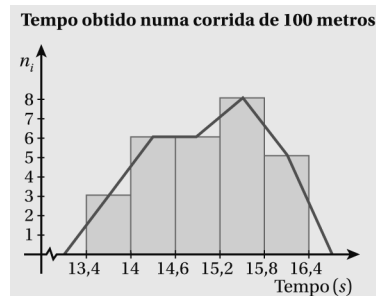
• limite inferior: 13,4

• limite superior: 16,3

• amplitude de cada classe: $\frac{16,3 - 13,4}{5} = 0,6$

Classes	n_i
[13,4; 14[	3
[14; 14,6[	6
[14,6; 15,2[	6
[15,2; 15,8[	8
[15,8; 16,4[	5

6.2. e 6.3.



2.4. Percentis. Mediana. Quartis. Diagrama de extremos e quartis

Pág. 184

1.1. Amostra ordenada: (2, 2, 2, 3, 4, 5, 7)

1.2. $y_4 = 4$; $y_{(4)} = 3$ 2. $n = 5$

$$z_{(1)} = 1 ; z_{(2)} = 3 ; z_{(3)} = 5 \text{ e } z_{(4)} = 5$$

Como $z_{(3)} = z_{(5)} = 5$, então $z_{(4)} = 5$.

$$\bar{z} = (1, 3, 5, 5, 5)$$

Pág. 184

46.1. $n = 10$; $\bar{x} = (18, 15, 18, 20, 13, 16, 17, 15, 14, 16)$

Amostra ordenada:

(13, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 20)

46.2. $P_{10} = ?$

$$\text{a) } \frac{k \times n}{100} = \frac{10 \times 10}{100} = 1 \text{ (inteiro)}$$

$$\frac{x_{(1)} + x_{(2)}}{2} = \frac{13 + 14}{2} = 13,5$$

Logo, $P_{10} = 13,5$ cm .b) $P_{25} = ?$

$$\frac{k \times n}{100} = \frac{25 \times 10}{100} = 2,5 \text{ (não inteiro)}$$

$$[2,5] + 1 = 2 + 1 = 3$$

Logo, $P_{25} = x_{(3)} = 15$.

$$P_{25} = 15 \text{ cm}$$

c) $P_{50} = ?$

$$\frac{k \times n}{100} = \frac{50 \times 10}{100} = 5 \text{ (inteiro)}$$

$$\frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{16 + 16}{2} = 16$$

$$P_{50} = 16 \text{ cm}$$

d) $P_{75} = ?$

$$\frac{k \times n}{100} = \frac{75 \times 10}{100} = 7,5 \text{ (não inteiro)}$$

$$[7,5] + 1 = 8$$

$$P_{75} = x_{(8)} = 18$$

$$P_{75} = 18 \text{ cm}$$

e) $P_{80} = ?$

$$\frac{k \times n}{100} = \frac{80 \times 10}{100} = 8 \text{ (inteiro)}$$

$$\frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{18 + 18}{2} = 18$$

$$P_{80} = 18 \text{ cm}$$

f) $P_{92} = ?$

$$\frac{k \times n}{100} = \frac{92 \times 10}{100} = 9,2$$

$$[9,2] + 1 = 10$$

$$P_{92} = x_{(10)} = 20$$

$$P_{92} = 20 \text{ cm}$$

47.

$$\bar{x} = (2,47; 2,50; 2,61; 2,49; 2,52; 2,60; 5,58; 2,63; 2,69; 2,64)$$

Amostra ordenada: $n = 10$

$$(2,47; 2,49; 2,50; 2,52; 2,60; 2,61; 2,63; 2,64; 2,69; 5,58)$$

$$P_{25} = ?$$

$$\frac{k \times n}{100} = \frac{25 \times 10}{100} = 2,5 \text{ (não inteiro)}$$

$$[2,5] + 1 = 3$$

$$P_{25} = x_{(3)} = 2,50$$

$$P_{25} = 2,5 \text{ cm}$$

Pelo menos 25% das velas têm altura inferior ou igual a 2,5 cm .

Pág. 185

48. $n = 20$

48.1. (5, 7, 8, 10, 10, 12, 17, 19, 19, 21, 22, 22, 25, 30, 31, 33, 35, 40, 40, 41)

$$P_{25} = ?$$

$$\frac{25 \times 20}{100} = 5 \text{ (inteiro)}$$

$$\frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{10 + 12}{2} = 11$$

$$P_{25} = 11 \text{ min}$$

$$P_{50} = ?$$

$$\frac{50 \times 20}{100} = 10 \text{ (inteiro)}$$

$$\frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{21 + 22}{2} = 21,5$$

$$P_{50} = 21,5 \text{ min}$$

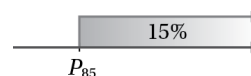
$$P_{75} = ?$$

$$\frac{75 \times 20}{100} = 15 \text{ (inteiro)}$$

$$\frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = \frac{31 + 33}{2} = 32$$

$$P_{75} = 32 \text{ min}$$

48.2.



$$\frac{85 \times 20}{100} = 17 \text{ (inteiro)}$$

$$\frac{x_{(17)} + x_{(18)}}{2} = \frac{35 + 40}{2} = 37,5$$

$$P_{85} = 37,5 \text{ min (40 min)}$$

O tempo pedido é 40 min .

48.3. Sabe-se que $x_{(14)} = 30$.Existe $P_k = x_{(14)}$?

$$\left[\frac{20k}{100} \right] + 1 = 14 \quad 13 < \frac{20k}{100} < 14 \Leftrightarrow 65 < k < 70$$

Assim, o tempo 30 min pode pertencer a P_{66} , P_{67} , P_{68} ou P_{69} .

Pág. 188

49. $A_1 = 2 \times 2 = 4$; $A_2 = 2 \times 3 = 6$; $A_3 = 2 \times 7 = 14$;
 $A_4 = 2 \times 5 = 10$; $A_5 = 2 \times 4 = 8$; $A_6 = 2 \times 3 = 6$
 $A_i = 48$; $nh = 48 \Rightarrow n = \frac{48}{2} = 24$

49.1. $P_{30} = ?$

$$x = \frac{30 \times 48}{100} = 14,4$$

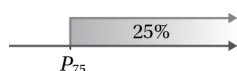
$$P_{30} \in [12, 14[$$

$$(P_{30} - 12) \times 7 + 6 + 4 = 14,4 \Leftrightarrow (P_{30} - 12) \times 7 = 4,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{30} - 12 = \frac{4,4}{7} \Leftrightarrow P_{30} = \frac{4,4}{7} + 12 \Leftrightarrow P_{30} \approx 12,63$$

Logo, 30% dos alunos tiveram classificação inferior ou igual a 12,63.

49.2.



$$P_{75} = ?$$

$$x = \frac{75 \times 48}{100} = 36$$

$$P_{75} \in [16, 18[$$

$$(P_{75} - 16) \times 4 + 10 + 14 + 6 + 4 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (P_{75} - 16) \times 4 = 2 \Leftrightarrow P_{75} = \frac{2}{4} + 16 \Leftrightarrow P_{75} = 16,5$$

Logo, a classificação mínima é 16,5 valores.

49.3. $P_{40} = ?$

$$x = \frac{40 \times 48}{100} = 19,2$$

$$P_{40} \in [12, 14[$$

$$(P_{40} - 12) \times 7 + 6 + 4 = 19,2 \Leftrightarrow (P_{40} - 12) \times 7 = 9,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{40} = \frac{9,2}{7} + 12 \Leftrightarrow P_{40} \approx 13,31$$

Logo, a classificação mais elevada dos alunos com classificações 40% mais baixas é, aproximadamente, 13,31 valores.

49.4. $12,3 \in [12, 14[$

$$(12,3 - 12) \times 7 = 2,1$$

$$A_1 + A_2 + 2,1 = 4 + 6 + 2,1 = 12,1$$

$$\frac{knh}{100} = 12,1 \Leftrightarrow \frac{k \times 48}{100} = 12,1 \Leftrightarrow k \approx 25,21$$

$$P_k = P_{26}$$

Logo, $12,3 \in P_{26}$.

Pág. 190

50.1. Localidade A ; $n = 70$ (par)

$$k = \frac{70}{2} = 35$$

A mediana é a semissoma dos valores de ordem 35 e 36.

$$Me = \frac{x_{(35)} + x_{(36)}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

Logo, pelo menos 50% das famílias têm dois filhos ou menos.

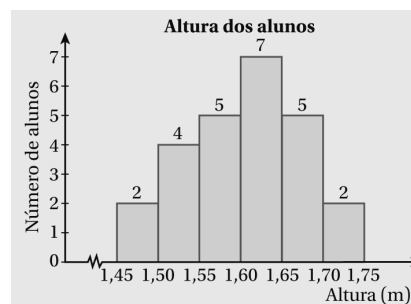
50.2. Localidade B ; $n = 73$ (impar)

$$k = \frac{73 + 1}{2} = \frac{74}{2} = 37$$

$$Md = x_{(37)} = 2$$

Logo, 50% das famílias têm, no máximo, dois filhos.

51.1.



51.2. $A_1 = 2 \times 0,05 = 0,1$; $A_2 = 4 \times 0,05 = 0,2$;

$$A_3 = 5 \times 0,05 = 0,25$$
 ; $A_4 = 7 \times 0,05 = 0,35$;

$$A_5 = 5 \times 0,05 = 0,25$$
 ; $A_6 = 2 \times 0,05 = 0,1$

$$A_i = 25 \times 0,05 = 1,25$$

$$P_{50} = ?$$

$$x = \frac{50 \times 1,25}{100} = 0,625$$

$$P_{50} \in [1,60, 1,65[$$

$$(P_{50} - 1,60) \times 7 + 0,25 + 0,2 + 0,1 = 0,625 \Leftrightarrow P_{50} \approx 1,61$$

$$P_{50} = 1,61 \text{ m}$$

Logo, 50% dos alunos têm uma altura inferior ou igual a 1,61 m.

Pág. 191

52. $\left(\begin{array}{cccccccccccc} 10 & 13 & 14 & 15 & 16 & 19 & 19 & 20 & 21 & 25 & 25 \\ x_{(1)} & x_{(2)} & x_{(3)} & x_{(4)} & x_{(5)} & x_{(6)} & x_{(7)} & x_{(8)} & x_{(9)} & x_{(10)} & x_{(11)} \end{array} \right)$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 32 & 32 & 34 & 36 & 37 & 58 \\ x_{(12)} & x_{(13)} & x_{(14)} & x_{(15)} & x_{(16)} & x_{(17)} \end{array} \right)$$

$$1.^\circ \text{ Quartil} = P_{25}$$

$$\frac{25 \times 17}{100} = 4,25 \quad [4,25] + 1 = 5$$

$$P_{25} = x_{(5)} = 16$$
 ; $Q_1 = 16$ SMS

$$2.^\circ \text{ Quartil}$$

$$\frac{50 \times 17}{100} = 8,5 \quad [8,5] + 1 = 9$$

$$P_{50} = x_{(9)} = 21$$
 ; $Q_2 = 21$ SMS

$$3.^\circ \text{ Quartil}$$

$$\frac{75 \times 17}{100} = 12,75 \quad [12,75] + 1 = 13$$

$$P_{75} = x_{(13)} = 32$$
 ; $Q_3 = 32$ SMS

Pág. 192

53.1. $n = 2500$

$$40\% + 30\% + 15\% = 85\%$$

$$85\% \text{ de } 2500 = 0,85 \times 2500 = 2125$$

Logo, 2125 alunos andaram, no máximo, duas vezes de avião.

- 53.2. 1.º quartil é 0 vezes, porque $40\% > 25\%$.
 2.º quartil é 1 vez, porque $40\% < 50\% < 70\%$.
 3.º quartil é 2 vezes, porque $70\% < 75\% < 80\%$.

Pág. 194

54.1. Valor mínimo: 86 min

Valor máximo: 116 min

$$Q_1 = P_{25} = ?$$

$$\frac{25 \times 22}{100} = 5,5 ; Q_1 = x_{(6)} = 89 \text{ min}$$

$$Q_2 = P_{50} = ?$$

$$\frac{50 \times 22}{100} = 11 ; Q_2 = \frac{x_{(11)} + x_{(12)}}{2} = \frac{94 + 95}{2} = 94,5 \text{ min}$$

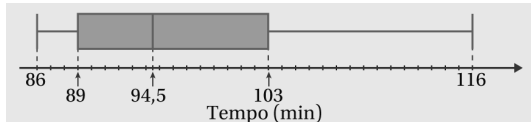
$$Q_3 = P_{75}$$

$$\frac{75 \times 22}{100} = 16,5 ; Q_3 = x_{(17)} = 103 \text{ min}$$

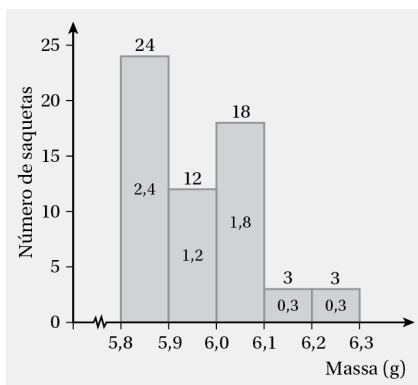
$$Q_3 - Q_1 = 103 - 89 = 14$$

A amplitude interquartis é igual a 14 min.

54.2.



Pág. 195

55. $n = 60$ 

$$A_i = nh = 60 \times 0,1 = 6$$

$$P_{25} = ?$$

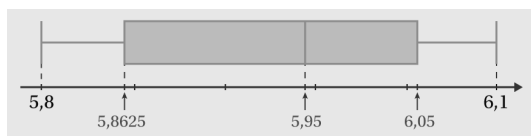
$$\frac{25 \times 6}{100} = 1,5 ; (P_{25} - 5,8) \times 24 = 1,5 \Leftrightarrow P_{25} = 5,8625$$

$$P_{50} = ?$$

$$\frac{50 \times 6}{100} = 3 ; (P_{50} - 5,9) \times 12 + 2,4 = 3 \Leftrightarrow P_{50} = 5,95$$

$$P_{75} = \frac{75 \times 6}{100} = 4,5$$

$$(P_{75} - 6,0) \times 18 = 4,5 - (2,4 + 1,2) \Leftrightarrow P_{75} = 6,05$$

Amplitude interquartis = $6,05 - 5,8625 = 0,1875$

Pág. 196

56.1. Turma A

$$n = 14 ;$$

$$(11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14)$$

$$P_{25} = ?$$

$$\frac{25 \times 14}{100} = 3,5$$

$$P_{25} = x_{(4)} = 12 ; Q_1 = 12 \text{ min}$$

$$P_{50} = ?$$

$$\frac{50 \times 14}{100} = 7$$

$$P_{50} = \frac{x_{(7)} + x_{(8)}}{2} = \frac{12 + 13}{2} = 12,5 ; Q_2 = 12,5 \text{ min}$$

$$P_{75} = ?$$

$$\frac{75 \times 14}{100} = 10,5$$

$$P_{75} = x_{(11)} = 13 ; Q_3 = 13 \text{ min}$$

Turma B

$$n = 14$$

$$(12, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15)$$

$$P_{25} = ?$$

$$P_{25} = x_{(4)} = 13 ; Q_1 = 13 \text{ min}$$

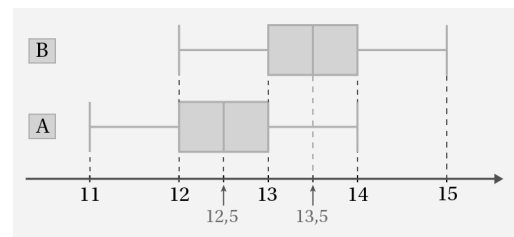
$$P_{50} = ?$$

$$P_{50} = \frac{x_{(7)} + x_{(8)}}{2} = \frac{13 + 14}{2} = 13,5 ; Q_2 = 13,5 \text{ min}$$

$$P_{75} = ?$$

$$P_{75} = x_{(11)} = 14 ; Q_3 = 14 \text{ min}$$

56.2.



É igual nas duas turmas:

- a diferença entre os extremos;
- a amplitude interquartis;
- a dispersão dos tempos inferiores ou iguais a Q_1 e superiores ou iguais a Q_3 .

Pág. 198

57.1. (11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18)

57.2. a) $P_8 = ?$

$$\frac{8 \times 25}{100} = 2 ; P_8 = \frac{x_{(2)} + x_{(3)}}{2} = \frac{12 + 12}{2} = 12 ; P_8 = 12 \text{ min}$$

b) $P_{25} = ?$

$$\frac{25 \times 25}{100} = 6,25 ; P_{25} = x_{(7)} = 14 \text{ min}$$

c) $P_{50} = ?$

$$\frac{50 \times 25}{100} = 12,5 ; P_{50} = x_{(13)} = 15 \text{ min}$$

d) $P_{60} = ?$

$$\frac{60 \times 25}{100} = 15 ; P_{60} = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = \frac{16 + 16}{2} = 16$$

$$P_{60} = 16 \text{ min}$$

e) $P_{75} = ?$

$$\frac{75 \times 25}{100} = 18,75 ; P_{75} = x_{(19)} = 17 \text{ min}$$

f) $P_{80} = ?$

$$\frac{80 \times 25}{100} = 20 ; P_{80} = \frac{x_{(20)} + x_{(21)}}{2} = \frac{17 + 17}{2} = 17$$

$$P_{80} = 17 \text{ min}$$

58.1. Tem 24 japoneiras.

58.2. $P_{50} = ?$

$$\frac{50 \times 24}{100} = 12 ; P_{50} = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{129 + 132}{2} = 130,5$$

Logo, 50% das japoneiras têm altura igual ou inferior a 130,5 cm .

58.3. $P_{75} = ?$

$$\frac{75 \times 24}{100} = 18 ; P_{75} = \frac{x_{(18)} + x_{(19)}}{2} = \frac{138 + 150}{2} = 144$$

Logo, 75% das japoneiras têm altura igual ou inferior a 144 cm .

59.1. $n = 25$

$$P_{50} = ? ; \frac{50 \times 25}{100} = 12,5$$

$$P_{50} = x_{(13)} = 3 ; Me = 3 \text{ h}$$

59.2. $n = 27$

$$P_{50} = ? ; \frac{50 \times 27}{100} = 13,5$$

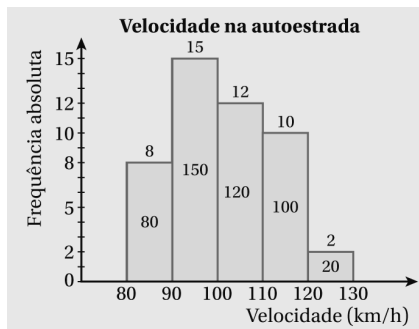
$$P_{50} = x_{(14)} = 13,5 ; Me = 3 \text{ h}$$

59.3. $n = 30$

$$P_{50} = ? ; \frac{50 \times 30}{100} = 15$$

$$P_{50} = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3 ; Me = 3 \text{ h}$$

60.1.



$$A_1 = 47 \times 10 = 470$$

60.2. $P_{50} = ? ; x = \frac{50 \times 470}{100} = 235$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 350$$

$$P_{50} \in [100, 110[$$

$$(P_{50} - 100) \times 12 + 150 + 80 = 235$$

$$\Leftrightarrow P_{50} \approx 100,42 ; Me = 100,42 \text{ km/h}$$

Logo, pelo menos 50% dos veículos circulam a uma velocidade igual ou inferior a 100,42 km/h .

Pág. 199

61.1. Vendeu 21 pares de calças.

61.2. $Q_1 = P_{25} = ?$

$$\frac{25 \times 21}{100} = 5,25$$

$$P_{25} = x_{(6)} = 34 ; Q_1 = \text{tamanho } 34$$

$$Q_2 = 50 = ?$$

$$\frac{50 \times 21}{100} = 10,5$$

$$P_{50} = x_{(11)} = 40 ; Q_2 = \text{tamanho } 40$$

$$Q_3 = P_{75} = ?$$

$$\frac{75 \times 21}{100} = 15,75$$

$$P_{75} = x_{(16)} = 48 ; Q_3 = \text{tamanho } 48$$

62.1. $n = 150$

Os números 8, 9, 10 correspondem, respetivamente, 4%, 1% e 1% .

$$0,04 + 0,01 + 0,01 = 0,06$$

$$0,06 \times 150 = 9$$

Logo, nove das lojas selecionadas são de média ou grande dimensão.

62.2.

N.º de computadores	Percentagem	Σ
1	10	10
2	12	22
3	16	38
4	17	55
5	19	74
6	12	86
7	8	94
8	4	98
9	1	99
10	1	100%

$$3.^\circ Q = P_{75} = 6 \quad (86\% \geq 75\%)$$

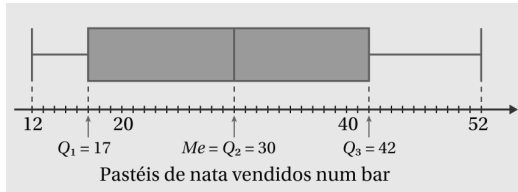
$$Me = P_{50} = 4 \quad (55\% \geq 50\%)$$

63. (12, 13, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 21, 22, 30, 31, 33, 37, 41, 42, 42, 42, 50, 51, 52) ; $n = 21$

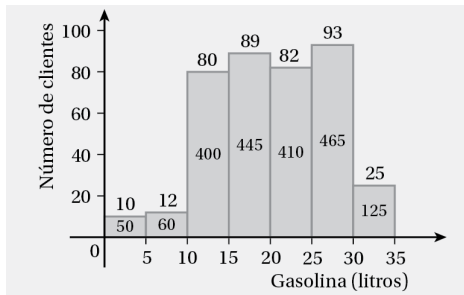
63.1. Extremo inferior: 12 ; Extremo superior: 52

63.2. $Q_1 = P_{25} = ?$; $\frac{25 \times 21}{100} = 5,25$ 1 | 2 3 5 6 6 7 8 8
 $P_{25} = x_{(6)} = 17$ pastéis de nata 2 | 1 2
 $Q_2 = P_{50} = ?$; $\frac{50 \times 21}{100} = 10,5$ 3 | 0 1 3 7
 $P_{50} = x_{(11)} = 30$; $Q_2 = 30$ pastéis de nata 4 | 1 2 2 2
 $Q_3 = P_{75} = ?$; $\frac{75 \times 21}{100} = 15,75$ 5 | 0 1 2
 $P_{75} = x_{(16)} = 42$; $Q_3 = 42$ pastéis de nata

63.3.



64.1.



$A_i = 1955$

$Q_1 = P_{25} = ?$; $x = \frac{25 \times 1955}{100} = 488,75$

$P_{25} \in [10, 15[$

$(P_{25} - 10) \times 80 = 488,75 - (50 + 60)$

$\Leftrightarrow P_{25} \approx 14,73$; $Q_1 = 14,73$

$Q_2 = P_{50} = ?$; $x = \frac{50 \times 1955}{100} = 977,5$

$P_{50} \in [20, 25[$

$(P_{50} - 20) \times 82 = 977,5 - (50 + 60 + 400 + 445)$

$\Leftrightarrow P_{50} \approx 20,27$; $Q_2 = 20,27$

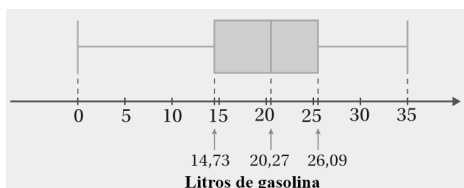
$Q_3 = P_{75} = ?$; $x = \frac{75 \times 1955}{100} = 1466,25$

$P_{75} \in [25, 30[$

$(P_{75} - 25) \times 93 = 1466,25 - (50 + 60 + 400 + 445 + 410)$

$\Leftrightarrow P_{75} \approx 26,09$; $Q_3 = 26,09$

64.2.



65.2. $P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 100}{100} = 50$

$P_{50} = \frac{x_{(50)} + x_{(51)}}{2} = \frac{9 + 9}{2} = 9$ euros ; $Me = 9$ euros

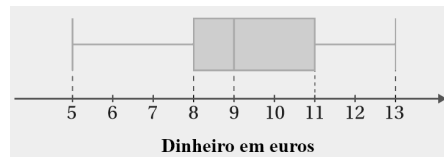
65.3. $P_{25} = ?$; $\frac{25 \times 100}{100} = 25$

$P_{25} = \frac{x_{(25)} + x_{(26)}}{2} = \frac{8 + 8}{2} = 8$; $P_{25} = 8$ euros

$P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 100}{100} = 75$

$P_{75} = \frac{x_{(75)} + x_{(76)}}{2} = \frac{11 + 11}{2} = 11$; $P_{75} = 11$ euros



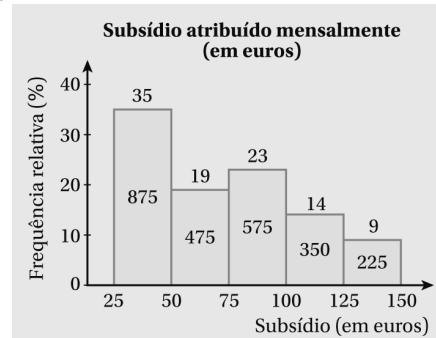
66.1. À equipa A.

66.2. a) Falso, pois metade ganha, pelo menos, 1500 € .

b) Verdadeira, $P_{50} = Me = 2000$.

c) Verdadeira, $Q_1 = P_{25} = 1250$.

67.1.



$A_i = 2500$

67.2. $Q_1 = P_{25} = ?$

$x = \frac{25 \times 2500}{100} = 625$

$P_{25} \in [25, 50[$; $(P_{25} - 25) \times 35 = 625$

$\Leftrightarrow P_{25} \approx 42,86$ (2 c. d.)

$Q_1 = 42,86$

$Q_2 = P_{50} = ?$

$x = \frac{50 \times 2500}{100} = 1250$

$P_{50} \in [50, 75[$

$(P_{50} - 50) \times 19 = 1250 - 875 \Leftrightarrow P_{50} \approx 69,74$ (2 c. d.)

$Q_2 = 69,74$

$Q_3 = P_{75} = ?$

$x = \frac{75 \times 2500}{100} = 1875$

$P_{75} \in [75, 100[$

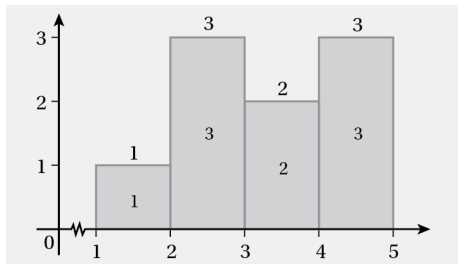
$(P_{75} - 75) \times 23 = 1875 - (875 + 475)$

$P_{75} \approx 97,83$; $Q_3 = 97,83$

65.1. Variável estatística: n.º de euros que os alunos levavam.

Variável quantitativa discreta.

68.1.



$$A_i = 9$$

$$P_{50} = ?$$

$$\frac{50 \times 9}{100} = 4,5$$

$$P_{50} \in [3, 4[$$

$$(P_{50} - 3) \times 2 + 3 + 1 = 4,5$$

$$(P_{50} - 3) \times 2 = 0,5$$

$$P_{50} = \frac{0,5}{2} + 3 = 3,25$$

Logo, a mediana é 3,25 h.

68.2. O número de alunos que gastou mais de 3 h é igual a $2 + 3 = 5$.

O número total de alunos é igual a 9.

$$\frac{5}{9} \approx 0,555\,56$$

Logo, cerca de 55,6% dos alunos gastou mais de três horas em leitura extracurricular.

Pág. 201

69. (84, 123, 123, 137, 144, 148, 151, 153, 153, 161, 161, 165, 167, 168, 169, 171, 176, 177, 179, 180, 182, 182, 183, 184, 185, 185, 187, 192, 195, 197, 198, 199, 199, 200, 206, 209, 212, 217, 218, 220, 221, 222, 222, 223, 224, 225, 226, 235, 238, 243, 252, 258, 267, 270, 271, 278, 293, 318, 333, 384)

69.1. $P_{15} = ?$

$$\frac{15 \times 60}{100} = 9 ; P_{15} = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{153 + 161}{2} = 157$$

$$P_{15} = 157 \text{ mg/dl}$$

$$P_{74} = ?$$

$$\frac{74 \times 60}{100} = 44,4 ; P_{74} = x_{(45)} = 224$$

$$P_{74} = 224 \text{ mg/dl}$$

69.2. $P_{50} = ?$

$$\frac{50 \times 60}{100} = 30 ; P_{50} = \frac{x_{(30)} + x_{(31)}}{2} = \frac{197 + 198}{2} = 197,5$$

$$P_{50} = 197,5 \text{ mg/dl}$$

Pelo menos 50% dos homens têm um nível de colesterol igual ou inferior a 197,5 mg/dl, pelo que 50% dos homens têm um nível aceitável.

69.3. $200 = x_{(34)}$. Existe $P_k = x_{(34)}$?

$$33 < \frac{60k}{100} < 34 \Leftrightarrow 55 < k < 56,66 ; P_k = P_{56}$$

Pelo menos 56% dos homens apresentam um nível de colesterol aceitável.

69.4. $P_{40} = ?$

$$\frac{40 \times 60}{100} = 24 ; P_{40} = \frac{x_{(24)} + x_{(25)}}{2} = \frac{184 + 185}{2} = 184,5$$

$$P_{40} = 184,5 \text{ mg/dl}$$

O valor mais elevado, de entre os 40% dos níveis mais baixos, é 184 mg/dl.

70. $\bar{x} = (13, 15, 14, 16, 17, 16, 14, 18, 16, 19)$

Amostra ordenada:

(13, 14, 14, 15, 16, 16, 16, 17, 18, 19)

70.1. $x_2 = 15$ e $x_{(2)} = 14$ 70.2. $P_{60} = ?$

$$\frac{60 \times 10}{100} = 6 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{60} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2}$$

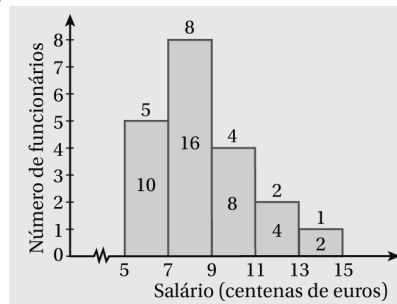
A expressão que representa P_{60} é a (B).

70.3. $\frac{75 \times 10}{100} = 7,5$

$$P_{75} = x_{(8)} = 17 \text{ anos}$$

Logo, pelo menos 75% dos alunos que estavam a estudar na biblioteca têm idade igual ou inferior a 17 anos.

71.1.

71.2. $A_i = 40$

$$P_{15} = ?$$

$$\frac{15 \times 40}{100} = 6$$

$$P_{15} \in [5, 7[; (P_{15} - 5) \times 5 = 6 \Leftrightarrow P_{15} = 6,2$$

Logo, $P_{15} = 6,2$ centenas de euros.

$$P_{55} = ?$$

$$\frac{55 \times 40}{100} = 22 ; (P_{55} - 7) \times 8 = 22 - 10 \Leftrightarrow P_{55} = 8,5$$

Logo, $P_{55} = 8,5$ centenas de euros.

$$P_{99} = ?$$

$$\frac{99 \times 40}{100} = 39,6$$

$$P_{99} \in [13, 15[$$

$$(P_{99} - 13) \times 1 = 39,6 - (10 + 16 + 8 + 4) \Leftrightarrow P_{99} = 14,6$$

Logo, $P_{99} = 14,6$ centenas de euros.

71.3. $P_{75} = ?$

$$\frac{75 \times 40}{100} = 30$$

$$P_{75} \in [9, 11[$$

$$(P_{75} - 9) \times 4 = 30 - (10 + 16)$$

$$\Leftrightarrow P_{75} = 10$$

Logo, $P_{75} = 10$ centenas de euros.

Assim, pelo menos 75% dos salários dos funcionários são iguais ou inferiores a 11 centenas de euros.

72. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)

72.1. $P_{10} = ?$; $\frac{10 \times 24}{100} = 2,4$; $P_{10} = x_{(3)} = 0$; $P_{10} = 0$ livros

$$P_{30} = ?$$
 ; $\frac{30 \times 24}{100} = 7,2$; $P_{30} = x_{(8)} = 1$; $P_{30} = 1$ livro

$$P_{75} = ?$$
 ; $\frac{75 \times 24}{100} = 18$; $P_{75} = \frac{x_{(18)} + x_{(19)}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$;

$$P_{75} = 2 \text{ livros}$$

72.2.



$$P_{80} = ?$$

$$\frac{80 \times 24}{100} = 19,2$$
 ; $P_{80} = x_{(20)} = 3$

Leu três livros.

Pág. 202

1.1. $Q_1 = P_{25} = ?$

$$\frac{25 \times 25}{100} = 6,25$$
 ; $P_{25} = x_{(7)} = 1$;

$$Q_1 = 1 \text{ erro}$$

$$Q_2 = P_{50} = Me = ?$$

$$\frac{50 \times 25}{100} = 12,5$$
 ; $P_{50} = x_{(13)} = 3$;

$$Q_2 = 3 \text{ erros}$$

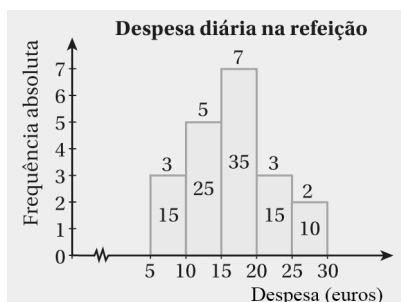
$$Q_3 = P_{75} = ?$$

$$\frac{75 \times 25}{100} = 18,75$$
 ; $P_{75} = x_{(19)} = 3$; $Q_3 = 3 \text{ erros}$

1.2. Amplitude interquartis: $(3 - 1) \text{ erros} = 2 \text{ erros}$

1.3. 50% dos alunos, no máximo, cometeram 3 erros, pois $P_{50} = Me = 3$.

2.1.



$$A_i = 100$$

2.2. $P_{25} = ?$

$$\frac{25 \times 100}{100} = 25$$
 ; $P_{25} \in [10, 15[$

$$(P_{25} - 10) \times 5 = 25 - 15 \Leftrightarrow P_{25} = 12$$

Logo, $P_{25} = 12$ euros.

$$P_{45} = ?$$

$$\frac{45 \times 100}{100} = 45$$
 ; $P_{45} \in [15, 20[$

$$(P_{45} - 15) \times 7 = 45 - (15 + 25)$$

$$\Leftrightarrow P_{45} \approx 15,71 \text{ (2 c. d.)}$$

Logo, $P_{45} = 15,71$ euros.

$$P_{80} = ?$$

$$\frac{80 \times 100}{100} = 80$$
 ; $P_{80} \in [20, 25[$

$$(P_{80} - 20) \times 3 = 80 - (15 + 25 + 35)$$

$$P_{80} \approx 21,67 \text{ (2 c. d.)}$$

Logo, $P_{80} = 21,67$ euros.

2.3. $22,5 \in [20, 25[$

$$P_k = 22,5$$
 ; $k = ?$

$$A_1 + A_2 + A_3 + 2,5 \times 3 =$$

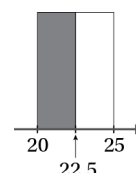
$$15 + 25 + 35 + 2,5 \times 3 = 82,5$$

$$\frac{knh}{100} = 82,5 \Leftrightarrow \frac{k \times 100}{100} = 82,5$$

Como k é não inteiro, a resposta é o menor inteiro superior a 82,5 .

Logo, $P_k = P_{83}$.

Pertence ao percentil 83 .



3.1. A variável associada é o comprimento dos cordões.

A variável é quantitativa contínua.

3.2. N.º de cordões com comprimento inferior a 21 cm : 30

$$\frac{30 \times 100}{50} = 60$$

A percentagem é 60% .

3.3. $A_1 = 5$; $A_2 = 10$; $A_3 = 7,5$; $A_4 = 2,5$; $A_i = 25$

a) $P_{25} = ?$

$$\frac{25 \times 25}{100} = 6,25$$
 ; $P_{25} \in [20,5 ; 21[$

$$(P_{25} - 20,5) \times 20 = 6,25 - 5$$

$$\Leftrightarrow P_{25} = 20,5625$$

Logo, $P_{25} = 20,56$ cm

b) $P_{50} = ?$

$$\frac{50 \times 25}{100} = 12,5$$
 ; $P_{50} \in [20,5 ; 21[$

$$(P_{50} - 20,5) \times 20 = 12,5 - 5$$

$$P_{50} = 20,875$$

Logo, $P_{50} = 20,88$ cm

c) $P_{75} = ?$

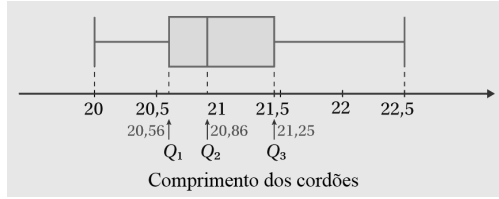
$$\frac{75 \times 25}{100} = 18,75$$
 ; $P_{75} \in [21 ; 21,5[$

$$(P_{75} - 21) \times 15 = 18,75 - (5 + 10)$$

$$\Leftrightarrow P_{75} = 21,25$$

Logo, $P_{75} = 21,25$ cm .

3.4.



4. $P_{25} = 10$; $P_{50} = 15$; $P_{75} = 12$
 Porque P_{75} não pode ser inferior a P_{50} .

Pág. 203

5.1.



5.2. $P_{25} = Q_1 = ?$

$$\frac{25 \times 40}{100} = 10 ; P_{25} = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

$Q_1 = 2$ peças de fruta

$P_{50} = Q_2 = ?$

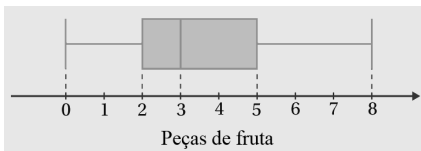
$$\frac{50 \times 40}{100} = 20 ; P_{50} = \frac{x_{(20)} + x_{(21)}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

$Q_2 = 3$ peças de fruta

$P_{75} = Q_3 = ?$

$$\frac{75 \times 40}{100} = 30 ; P_{75} = \frac{x_{(30)} + x_{(31)}}{2} = \frac{5 + 5}{2} = 5$$

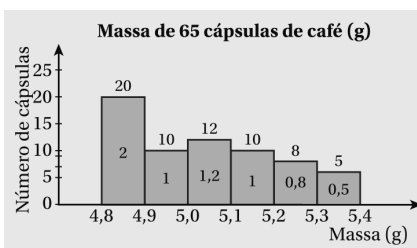
$Q_3 = 5$ peças de fruta



6.1.

Massa da cápsula	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. relativa acumulada
[4,8; 4,9[	20	0,3077	0,3077
[4,9; 5,0[	10	0,1538	0,4615
[5,0; 5,1[	12	0,1846	0,6461
[5,1; 5,2[	10	0,1538	0,7999
[5,2; 5,3[	8	0,1231	0,9231
[5,3; 5,4[	5	0,0769	1
		1	

6.2. Não são 70 cápsulas mas 65 .



$$A_i = 6,5$$

$$Q_1 = P_{25} = ?$$

$$\frac{25 \times 6,5}{100} = 1,625 ; P_{25} \in [4,8 ; 4,9[$$

$$(P_{25} - 4,8) \times 20 = 1,625 \Leftrightarrow P_{25} = 4,8813$$

Logo, $P_{25} = 4,9$ g .

$$Q_2 = P_{50} = ?$$

$$\frac{50 \times 6,5}{100} = 3,25 ; P_{50} \in [5,0 ; 5,1[$$

$$(P_{50} - 5) \times 12 = 3,25 - 3 \Leftrightarrow P_{50} = 5,0208$$

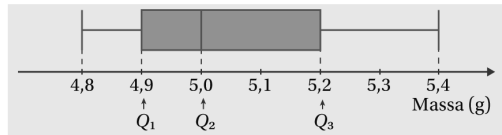
Logo, $P_{50} = 5,0$ g .

$$Q_3 = P_{75}$$

$$\frac{75 \times 6,5}{100} = 4,875 ; P_{75} \in [5,1 ; 5,2[$$

$$(P_{75} - 5,1) \times 10 = 4,875 - 5,1 \Leftrightarrow P_{75} = 5,1675$$

Logo, $P_{75} = 5,2$ g .



7. $n = 25$

7.1. $P_{25} = Q_1 = ?$

$$\frac{25 \times 25}{100} = 6,25 ; P_{25} = x_{(7)} = 87 ; Q_1 = 87 \text{ min}$$

$P_{50} = Me = ?$

$$\frac{50 \times 25}{100} = 12,5 ; P_{50} = x_{(13)} = 95 ; Q_2 = 95 \text{ min}$$

$P_{75} = Q_3 = ?$

$$\frac{75 \times 25}{100} = 18,75 ; P_{75} = x_{(19)} = 103 ; Q_3 = 103 \text{ min}$$

7.2.

Registo do tempo	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. relativa acumulada
85	2	0,08	0,08
86	3	0,12	0,20
87	2	0,08	0,28
89	1	0,04	0,32
90	1	0,04	0,36
91	1	0,04	0,40
94	2	0,08	0,48
95	4	0,16	0,64
96	1	0,04	0,68
103	2	0,08	0,76
105	2	0,08	0,84
108	1	0,04	0,88
109	1	0,04	0,92
111	1	0,04	0,96
115	1	0,04	1
	25		

2.5. Média e moda. Medidas de localização

Pág. 204

1.1. $\sum_{i=1}^4 x_i$

1.2. $\sum_{i=1}^4 2x_i$

1.3. $\sum_{i=1}^4 (x_i + 1)$

2.
$$\frac{\sum_{i=1}^4 2i}{4} = \frac{2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4}{4} =$$
$$= \frac{20}{4} = 5$$

Pág. 205

73.
$$\bar{x} = \frac{2 \times 1 + 3 \times 7 + 4 \times 5 + 5 \times 8 + 6 \times 10}{31} \approx 4,6129$$
$$\bar{x} = 4,6 \text{ vezes}$$

Pág. 207

74.1.

Classes	Frequência absoluta, n_i	Valor central da classe, x_i	$n_i x_i$
[1,75; 1,83[	3	1,79	5,37
[1,83; 1,91[	4	1,87	7,48
[1,91; 1,99[	6	1,95	11,7
[1,99; 2,07[	4	2,03	8,12
[2,07; 2,15[	1	2,11	2,11
Total	$\sum_{i=1}^5 n_i = 18$		$\sum_{i=1}^5 n_i x_i = 34,78$

74.2.
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 n_i x_i}{n} = \frac{34,78}{18} \approx 1,9322$$

Logo, $\bar{x} = 1,93 \text{ m}$.

74.3.
$$\sum_{i=1}^5 n_i x_i = 34,78$$

$$34,78 - 1,78 + 2,01 = 35,01$$

$$\bar{x} = \frac{35,01}{18} = 1,945$$

Logo, $\bar{x} = 1,95 \text{ m}$.

Pág. 210

75.
$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

Como $\underline{y} = \frac{x}{3}$, então $\bar{y} = \frac{\bar{x}}{3} = \frac{7}{3}$.

Como $\underline{z} = 5\underline{x} - 1$, então $\bar{y} = 5\bar{x} - 1 = 5 \times 7 - 1 = 34$.

Pág. 211

76. $850 \times 3 = 2550$
$$(2550 - 755 - 800 - 650) \text{ €} = 345 \text{ €}$$
$$345 : 3 = 115$$
Resposta: 115 euros

77.1. $3000 - 2\% \times 3000 =$
$$= 3000 - 0,02 \times 3000 =$$
$$= 2940$$

ou

$2\% = 0,02$

$1 - 0,02 = 0,98$

$0,98 \times 3000 = 2940$

Em média, cada família pagou, no ano anterior, 2940 €.

77.2. $3000 + 3\% \times 3000 =$
$$= 3000 + 0,03 \times 3000 =$$
$$= 3090$$

ou

$3\% = 0,03$

$1 + 0,03 = 1,03$

$1,03 \times 3000 = 3090$

Em média, no próximo ano, cada família pagará 3090 €.

Pág. 213

78.1. Grupo 1 : 13

Grupo 2 : 12 e 13 (bimodal)

Grupo 3 : amodal

78.2. a) Turma A : 12 valores

Turma B : 10 valores e 11 valores

b) Turma A

$$\bar{x} = \frac{9 \times 2 + 10 \times 4 + 11 \times 6 + 12 \times 8 + 13 \times 6 + 14 \times 2}{28}$$

$$\bar{x} = \frac{326}{28} \approx 11,6428...$$

$$\bar{x} = 11,6$$

A mediana é 12. ($28 : 2 = 14$)

Turma B

$$\bar{x} = \frac{9 \times 2 + 10 \times 8 + 11 \times 8 + 12 \times 6 + 13 \times 4}{28}$$

$$\bar{x} = \frac{310}{28} \approx 11,0714$$

$$\bar{x} = 11,1$$

A mediana é 11. ($28 : 2 = 14$)

Pág. 215

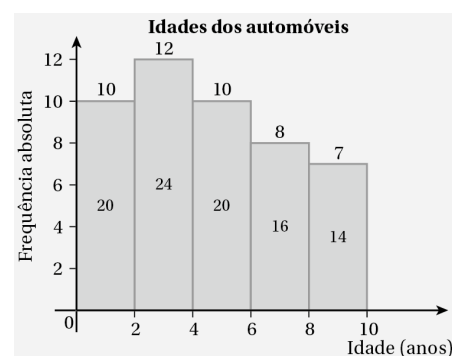
79.1. [2, 4[

79.2.
$$\bar{x} = \frac{10 \times 1 + 12 \times 3 + 10 \times 5 + 8 \times 7 + 7 \times 9}{47} = \frac{215}{47} =$$
$$= \frac{215}{47} \approx 4,5744... = 4,6$$

$$\bar{x} = 4,6$$

79.3. $47 : 2 = 23,5$

A classe mediana é [4, 6[.



$$A_i = 2 \times 47 = 94$$

$$P_{50} = ?$$

$$\frac{50 \times 94}{100} = 47$$

$$P_{50} \in [4, 6[$$

$$(P_{50} - 4) \times 10 + 24 + 20 = 47$$

$$P_{50} = \frac{3}{10} + 4 = 4,3$$

A mediana é 4,3 .

Pág. 220

$$\begin{aligned} 80. \quad & \frac{0 \times a + 1 \times 10 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 4 \times 1}{21 + a} = 1,52 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 21 \times 1,52 + 1,52a = 38 \Leftrightarrow 1,52a = 38 - 31,92 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow a = \frac{6,08}{1,52} \Leftrightarrow a = 4 \end{aligned}$$

Logo, quatro alunos.

81.1. Comprimento dos parafusos

$$81.2. \quad 18 + 13 + 9 + 5 + 3 = 48\%$$

$$\begin{aligned} 81.3. \quad & \frac{3 \times 5,05 + 5 \times 5,15 + 9 \times 5,25 + 13 \times 5,35 + 18 \times 5,45}{100} + \\ & + \frac{19 \times 5,55 + 17 \times 5,65 + 10 \times 5,75 + 3 \times 5,85 + 2 \times 5,95}{100} + \\ & + \frac{1 \times 6,05}{100} = \frac{550,3}{100} = 5,503 \end{aligned}$$

5,5 cm

81.4. Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta.

Para construir o histograma, é necessário começar por construir uma tabela de frequências, que, tendo em consideração o enunciado, terá de ter 7 classes.

Estas classes devem ter todas a mesma amplitude, h , que se escolhe como sendo um valor aproximado, por excesso, do quociente:

$$\frac{\text{maior valor da amostra} - \text{menor valor da amostra}}{\text{n.º de classes}}$$

Como o maior valor da amostra é 6,070, o menor valor da amostra é 5,025 e o número de classes é 7, um valor possível para h é 0,15. Tendo em consideração os valores referidos, as classes serão, então:

$$\begin{aligned} & [5,025; 5,175[; [5,175; 5,325[; [5,325; 5,475[; \\ & [5,475; 5,625[; [5,625; 5,775[; [5,775; 5,925[; \\ & [5,925; 6,075[\end{aligned}$$

Uma vez que não dispomos dos dados originais, não é possível saber quais as frequências associadas às classes anteriores.

Pág. 221

$$82. \quad \bar{x} \approx 70,29 \text{ €}$$

$$83. \quad \text{A pé} \longrightarrow \bar{x} = 12,2 \text{ min}$$

$$\text{Autocarro} \longrightarrow \bar{x} = (12,2 \times 1,1) \text{ min} = 13,42 \text{ min}$$

Logo, 13,42 minutos.

84.1.

N.º de filhos	Freq. absoluta acumulada	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. relativa acumulada
1	10	10	$\frac{10}{100} = 0,1$	0,1
2	40	30	$\frac{30}{100} = 0,3$	0,4
3	60	20	$\frac{20}{100} = 0,2$	0,6
4	80	20	$\frac{20}{100} = 0,2$	0,8
5	100	20	$\frac{20}{100} = 0,2$	1
Total		100	1	

84.2. Média com os dados da tabela:

$$\bar{x} = \frac{10 \times 1 + 30 \times 2 + 20 \times 3 + 20 \times 4 + 20 \times 5}{100} = 3,1$$

Média com os dados corrigidos:

$$\bar{x} = \frac{0 \times 10 + 1 \times 30 + 2 \times 20 + 3 \times 20 + 4 \times 20}{100} = 2,1$$

A média diminui 1 unidade.

85.1. A amostra ordenada é:

$$(2,250; 2,650; 2,750; 2,880; 2,900; 2,930; 2,950;$$

$$x_{(1)} \quad x_{(2)} \quad x_{(3)} \quad x_{(4)} \quad x_{(5)} \quad x_{(6)} \quad x_{(7)}$$

$$3,250; 3,400; 3,585; 3,600; 3,650; 3,720; 3,750;$$

$$x_{(8)} \quad x_{(9)} \quad x_{(10)} \quad x_{(11)} \quad x_{(12)} \quad x_{(13)} \quad x_{(14)}$$

$$3,820; 3,900; 3,950; 4,050; 4,150; 4,200$$

$$x_{(15)} \quad x_{(16)} \quad x_{(17)} \quad x_{(18)} \quad x_{(19)} \quad x_{(20)}$$

$$3,720 = x_{(13)}$$

Pretende-se determinar k , tal que $P_k = x_{(13)}$.

Para tal, é necessário que $\frac{20k}{100}$ seja não inteiro e que

$$\left\lceil \frac{20k}{100} \right\rceil + 1 = 13, \text{ ou seja:}$$

$$12 < \frac{20k}{100} < 13 \Leftrightarrow 60 < k < 65$$

Logo, ao *peso* 3,720 correspondem P_{61} , P_{62} , P_{63} ou P_{64} .

$$85.2. \quad \frac{75 \times 20}{100} = 15 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{75} = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = \frac{3,820 + 3,900}{2} = 3,860$$

Como $P_{75} = 3,860$ kg, há 15 bebés que têm *peso* inferior a P_{75} .

$$85.3. \quad P_{20} = ?$$

$$\frac{20 \times 20}{100} = \frac{400}{100} = 4$$

$$P_{20} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{2,880 + 2,900}{2} = 2,890$$

Assim, $P_{20} = 2,890$ kg.

Resposta: 2,880 kg

86.1. a) $P_{50} = ?$

$$\frac{50 \times 22}{100} = 11$$

$$P_{50} = \frac{x_{(11)} + x_{(12)}}{2} = \frac{93 + 95}{2} = 94$$

$$Me = 94 \text{ min}$$

b) $\frac{25 \times 22}{100} = 5,5$

$$P_{25} = x_{(6)} = 88$$

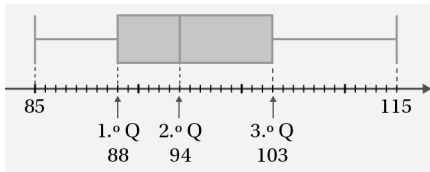
$$1.^{\circ} Q = 88 \text{ min}$$

c) $\frac{75 \times 22}{100} = 16,5$

$$P_{75} = x_{(17)} = 103$$

$$3.^{\circ} Q = 103 \text{ min}$$

86.2.



$$86.3. \bar{x} = (85 + 85 + 87 + 87 + 88 + 88 + 88 + 88 + 90 + 91 + 93 + 93 + 95 + 95 + 95 + 96 + 102 + 103 + 106 + 106 + 108 + 110 + 115) : 22$$

$$\bar{x} = 95,7 \text{ min}$$

87.1. a) $200 \times 0,40 = 80$

$$80 \times 0,45 = 36$$

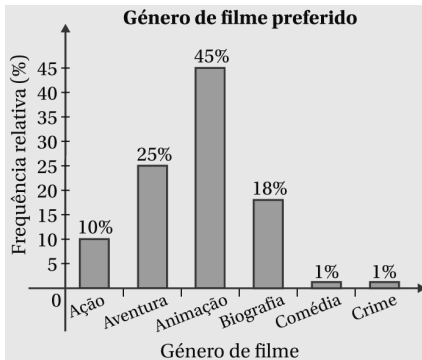
Resposta: 36 alunos

b) $200 \times 0,60 = 120$

$$120 \times 0,05 = 6$$

Resposta: 6 alunos

87.2.



88. 25 alunos

Número de exercícios resolvidos no total:

$$2 \times 6 + 4 \times 5 + 10 \times 2 + 12 \times 3 + 16 \times 5 + 18 \times 4 = 240$$

$$\bar{x} = \frac{240}{25} = 9,6$$

No gráfico, observa-se que dos 25 alunos, 11 resolveram 2 ou 4 exercícios, valores muito inferiores à média e 9 alunos resolveram 16 ou 18 exercícios, que é um valor muito superior à média.

Por esta razão, a média não é um bom indicador do número de exercícios realizados por alunos para a preparação para o teste.

1. $175 \times 11 = 1925$

$$1925 - 185 = 1740$$

Seja k a altura do novo jogador.

$$\frac{1740 + k}{11} = 176 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1740 + k = 1936$$

$$\Leftrightarrow k = 196$$

O jogador que entrou em campo mede 196 cm de altura.

2. $\frac{12 \times 65 + 13 \times 61}{25} = \frac{1573}{25} = 62,92$

A média das massas dos alunos da turma é 62,92 kg.

3. $\frac{30 + x}{6} = 7$ $x = 42 - 30$ $x = 12$

4. $\bar{x} = (10, 14, 13, 15, 16, 18, 12)$

4.1. $x = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7} = \frac{98}{7} = 14$

Em média, consome 14 L por semana.

4.2. Se o consumo diário aumenta 2 l então $y = \bar{x} + 2$.

Logo, pelas propriedades da média, $\bar{y} = \bar{x} + 2 = 14 + 2 = 16$

(c.q.d.)

ou

$$\bar{y} = (12, 16, 15, 17, 18, 20, 14)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^7 y_i}{7} = \frac{112}{7} = 16 = \bar{x} + 2$$

$$\bar{y} = 16 \text{ l}$$

4.3. Se o consumo duplicar, então $z = 2\bar{x}$; logo, pela propriedade da média:

$$\bar{z} = 2\bar{x} = 2 \times 14 = 28.$$

Resposta: 28 l

5.

x_i	n_i	$n_i x_i$
182,5	2	365
187,5	4	750
192,5	1	192,5
197,5	2	395
202,5	3	607,5
207,5	2	415
Total	$\sum_{i=1}^6 n_i = 14$	$\sum_{i=1}^6 n_i x_i = 2725$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i n_i}{\sum_{i=1}^6 n_i} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{2725}{14} \Leftrightarrow \bar{x} \approx 194,64$$

A média dos descontos é, aproximadamente, 194,64 €.

6.1.

Classe	n_i	x_i	$n \cdot x_i$
[145, 150[	1	147,5	147,5
[150, 155[	7	152,5	1067,5
[155, 160[	6	157,5	945
[160, 165[	6	162,5	975
[165, 170[	2	167,5	335
[170, 175[	3	172,5	517,5
Total	25		3987,5

6.2. $\bar{x} = \frac{3987,5}{25} \Leftrightarrow \bar{x} = 159,5$

A média das alturas dos alunos do 10.º K é 159,5 cm.

7. $\frac{110 \times 1,60 + 90x}{200} = 1,65 \Leftrightarrow 176 + 90x = 330$

$$\Leftrightarrow 90x = 154 \Leftrightarrow x \approx 1,71 \text{ m}$$

A média das alturas dos atletas masculinos é, aproximadamente, 1,71 m.

8.1. $\bar{x} = \frac{25 \times 12 + 50 \times 15 + 100 \times 28 + 150 \times 28}{12 + 15 + 28 + 28}$
 $= \frac{8050}{83} \approx 96,99$

Moda: 100 e 150 ; $n = 83$

$$\frac{25 \times 83}{100} = 20,75 \quad \frac{50 \times 83}{100} = 41,5$$

$$\frac{75 \times 83}{100} = 62,25$$

$\bar{x} = 96,99$; moda: 100 e 150 ;

$Q_1 = 50$; $x = 100$ e $Q_3 = 150$

8.2. $\frac{25 \times 12 + 50 \times 15 + 100 \times 28 + 150 \times 25 + x \times 150}{83 + x} = 100$

$$\Leftrightarrow 8050 + 150x = 8300 + 100x$$

$$\Leftrightarrow 50x = 250 \Leftrightarrow x = 5$$

$$28 + 5 = 33$$

Resposta: 33 garrafas

9.1. 35% de 22 530 = $0,35 \times 22\,530 = 7885,50$

Resposta: 7885,50 €

9.2. $\frac{3830,10}{22\,530} = 0,17$

10%	35%	x	17%	18%
-----	-----	-----	-----	-----

$$x = 100\% - 10\% - 35\% - 17\% - 18\% = 20\% \quad x = 20\%$$

Resposta: A percentagem pedida é 20%.

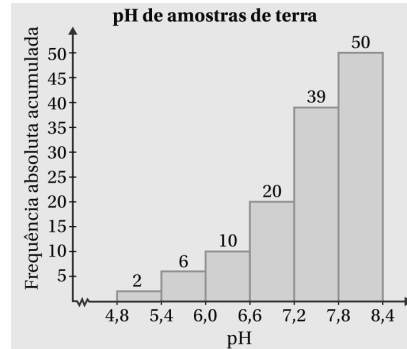
10.1. $\frac{10}{50} = 0,2$

Resposta: 20%

10.2. [7,2 ; 7,8[

pH	Freq. absoluta
[4,8; 5,4[	2
[5,4; 6,0[	4
[6,0; 6,2[	4
[6,6; 7,2[	10
[7,2; 7,8[	19
[7,8; 8,4[	11

10.3.

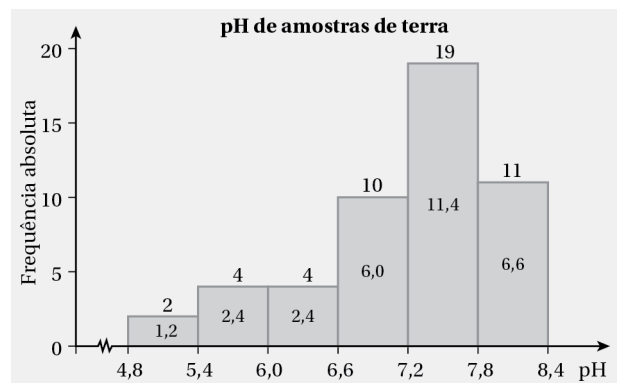


10.4. $x = \frac{2 \times 5,1 + 5,7 \times 4 + 6,3 \times 4 + 6,9 \times 10 + 7,5 \times 19 + 8,1 \times 11}{50}$

$$= 7,176$$

$$\bar{x} \approx 7,2 \text{ (pH)}$$

10.5.



$$A_1 = 30$$

$$P_{50} = ? ; \frac{50 \times 30}{100} = 15 \quad P_{50} \in [7,2 ; 7,8]$$

$$(P_{50} - 7,2) \times 19 + 6 + 2,4 + 2,4 + 1,2 = 15$$

$$(P_{50} - 7,2) \times 19 = 3 \Leftrightarrow P_{50} = \frac{3}{19} + 7,2$$

$$P_{50} \approx 7,36$$

Logo, pelo menos 50% das amostras de terra tem pH igual ou inferior a 7,36.

10.6. $P_{25} = ? ; \frac{25 \times 30}{100} = 7,5 \quad P_{25} \in [6,6 ; 7,2]$

$$(P_{25} - 6,6) \times 10 + 2,4 + 2,4 + 1,2 = 7,5$$

$$(P_{25} - 6,6) \times 10 = 1,5 ; P_{25} = \frac{1,5}{10} + 6,6 = 6,75 ; P_{25} = 6,75$$

$$P_{50} = ? ; \frac{50 \times 30}{100} = 15 \quad P_{50} \in [7,2 ; 7,8]$$

$$(P_{50} - 7,2) \times 19 + 6 + 2,4 + 2,4 + 1,2 = 15 ; P_{50} \approx 7,36$$

$$P_{75} = ? ; \frac{75 \times 30}{100} = 22,5 \quad P_{75} \in [7,2 ; 7,8]$$

$$(P_{75} - 7,2) \times 19 + 6 + 4,8 + 1,2 = 22,5$$

$$(P_{75} - 7,2) \times 19 = 10,5$$

$$P_{75} = \frac{10,5}{19} + 7,2 = 7,75$$

Resposta: O diagrama representa os dados anteriores.

2.6. Variância e desvio-padrão. Medidas de dispersão

Pág. 226

1. Maria: Amostra ordenada: (12, 17, 17, 17, 19, 20)

$$\bar{x} = \frac{1 \times 12 + 3 \times 17 + 1 \times 19 + 1 \times 20}{6} = \frac{102}{6} = 17; \quad \bar{x} = 17$$

$$\frac{50 \times 6}{100} = 3$$

$$Me_x = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{17 + 17}{2} = 17; \quad Me_x = 17$$

Moda: 17; $Mo_x = 17$

- Manuel: Amostra ordenada: (15, 16, 17, 17, 18, 19)

$$\bar{y} = \frac{1 \times 15 + 1 \times 16 + 2 \times 17 + 1 \times 18 + 1 \times 19}{6} = \frac{102}{6} = 17; \quad \bar{y} = 17$$

$$\frac{50 \times 6}{100} = 3$$

$$Me_y = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{17 + 17}{2} = 17; \quad Me_y = 17$$

Moda: 17; $Mo_y = 17$

2. O gráfico que apresenta uma maior dispersão é o relativo às notas da Maria.
3. O aluno mais regular é o Manuel, pois as notas obtidas variam menos em torno do valor da média, 17.

Pág. 229

89. Loja A:
- $\bar{x} = (25, 15, 15, 18, 17, 24, 26)$

Loja B: $\bar{y} = (38, 10, 15, 10, 10, 37, 20)$

$$89.1. \quad \bar{x} = \frac{25 + 15 + 15 + 18 + 17 + 24 + 26}{7} = 20$$

A loja A vendeu, em média, 20 telemóveis.

$$\bar{y} = \frac{38 + 10 + 15 + 10 + 10 + 37 + 20}{7} = 20$$

A loja B vendeu, em média, 20 telemóveis.

- 89.2. Loja A

x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
25	$25 - 20 = 5$	25
15	$15 - 20 = -5$	25
15	$15 - 20 = -5$	25
18	$18 - 20 = -2$	4
17	$17 - 20 = -3$	9
24	$24 - 20 = 4$	16
26	$26 - 20 = 6$	36
		$SS_x = 140$

$$s_x^2 = \frac{140}{6} \approx 23,3 \quad s_x \approx 4,8$$

Loja B

y_i	$d_i = y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
38	$38 - 20 = 18$	324
10	$10 - 20 = -10$	100
15	$15 - 20 = -5$	25
10	$10 - 20 = -10$	100
10	$10 - 20 = -10$	100
37	$37 - 20 = 17$	289
20	$20 - 20 = 0$	0
		$SS_y = 938$

$$s_y^2 = \frac{938}{6} \approx 156,3333 \quad s_y \approx 12,5$$

Como $s_y > s_x$, há uma maior dispersão dos dados na loja B, isto é, o número de vendas do telemóvel na loja B é mais irregular.

Pág. 230

90.

x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \times n_i$
9	1	23,04	23,04
10	1	14,44	14,44
11	4	7,84	31,26
12	11	3,24	35,64
13	17	0,64	10,88
14	19	0,04	0,76
15	15	1,44	21,6
16	8	4,84	38,72
17	3	10,24	30,72
18	1	17,64	17,64
			224,8

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \times n_i}{79}} = \sqrt{\frac{224,8}{79}} \approx 1,69; \quad s \approx 1,69$$

Resposta: $s \approx 1,69$ utilizações da cantina.

Pág. 231

91.

x_i	n_i	$x_i n_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$
10	60	600	858,49	51 509,40
30	55	1650	86,49	4 756,95
50	35	1750	114,49	4 007,15
70	32	2240	942,49	30 159,68
90	18	1620	2 570,49	46 268,82
Total	200	7860		163 702,00

$$91.1. \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i n_i}{\sum_{i=1}^5 n_i} = \frac{7860}{200} = 39,3; \quad \bar{x} \approx 39,3$$

Em média, cada pessoa gastou 39,30 €.

$$91.2. \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 n_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{136 702}{199}} \approx 26,21$$

Resposta: $s \approx 26,21$ €

Pág. 233

92.1.

x_i	n_i	$x_i n_i$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$
8	5	40	29,768
9	6	54	12,442
10	6	60	1,1616
13	5	65	32,768
14	3	42	38,021
Total	25	261	114,16

$$\bar{x} = \frac{261}{25} = 10,44 ; Me = x_{13} = 10 ; s = \sqrt{\frac{114,16}{24}} \approx 2,18$$

$$\bar{x} = 10,44 ; \bar{x}_1 = 10,44 + 2 = 12,44$$

$$\bar{x}_2 = 10,44 \times 1,2 = 12,528$$

$$\bar{x}_3 = (10,44 + 1) \times 1,1 = 12,584$$

$$\bar{x}_1 = 12,44 ; \bar{x}_2 = 12,528 ; \bar{x}_3 = 12,584$$

92.2. $Me = 10 ; Me_1 = 10 + 2 = 12$

$$Me_2 = 10 \times 1,2 = 12$$

$$Me_3 = (10 + 1) \times 1,1 = 12,1$$

$$Me_1 = 12 ; Me_2 = 12 ; Me_3 = 12,1$$

92.3. $s = 2,18 ; s_1 = s = 2,18$

$$s_2 = s \times 1,2 = 2,62$$

$$s_3 = s \times 1,1 = 2,40$$

$$s_1 \approx 2,18 ; s_2 \approx 2,62 ; s_3 \approx 2,40$$

Pág. 235

93.1. 18

93.2. a) $89 - 10 = 79$

b) $Me = \frac{50 \times 18}{100} = 9$ (inteiro)

$$Me = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{48 + 48}{2} = 48$$

$$Me = 48 \text{ euros}$$

c) $\bar{x} \approx 46,39$ euros

d) $P_{25} = ? ; \frac{25 \times 18}{100} = 4,5$ (não inteiro)

$$P_{25} = x_{(5)} = 25$$

$$1.^{\circ} Q = 25 \text{ euros}$$

$$2.^{\circ} Q = Me = 48 \text{ euros}$$

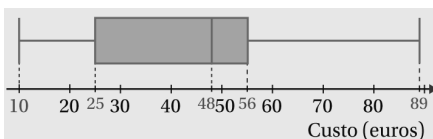
$$P_{75} = ? ; \frac{75 \times 18}{100} = 13,5 \text{ (não inteiro)}$$

$$P_{75} = x_{(14)} = 56$$

$$3.^{\circ} Q = 56 \text{ euros}$$

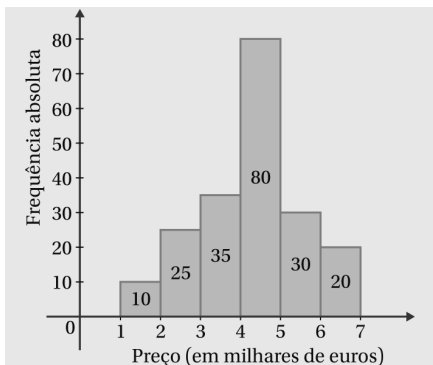
e) 48 euros

93.3.



93.4. $s_x \approx 22,82$ euros

94.1.



94.2. $A_i = nh = 200 \times 1 = 200$

a) $Me = P_{50} = ?$

$$\frac{50 \times 200}{100} = 100$$

$$P_{50} \in [4, 5[$$

$$(P_{50} - 4) \times 80 + 35 + 25 + 10 = 100$$

$$\Leftrightarrow P_{50} = 4,375$$

$$Me = 4,38 \text{ milhares de euros.}$$

b) $1.^{\circ} Q ; \frac{25 \times 200}{100} = 50 ; 1.^{\circ} Q = P_{25} \in [3, 4[$

$$(P_{25} - 3) \times 35 = 50 - 35 \Leftrightarrow P_{25} \approx 3,43$$

$$1.^{\circ} Q = 3,43 \text{ milhares de euros}$$

$$3.^{\circ} Q = ? ; \frac{75 \times 200}{100} = 150$$

$$\text{Como } 10 + 25 + 35 + 80 = 150 ,$$

$$3.^{\circ} Q = 5 \text{ milhares de euros}$$

$$5 - 3,43 = 1,57$$

$$\text{Amplitude interquartis é igual a } 1,57 \text{ milhares euros.}$$

c) É preciso calcular $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{1,5 \times 10 + 2,5 \times 25 + 3,5 \times 35 + 4,5 \times 80 + 5,5 \times 30 + 6,5 \times 20}{200} = 4,275$$

Classes	x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$
[1, 2[	1,5	10	-2,775	7,700 625	77,006 25
[2, 3[	2,5	25	-1,775	3,150 625	78,765 625
[3, 4[	3,5	35	-0,775	0,600 625	21,021 875
[4, 5[	4,5	80	0,225	0,050 625	4,05
[5, 6[	5,5	30	1,225	1,500 625	45,018 75
[6, 7[	6,5	20	2,225	4,950 625	99,0125
		$\Sigma 200$			$\Sigma = 324,875$

$$s_x = \sqrt{\frac{324,875}{199}} \approx 1,28$$

$$s_x \approx 1,28 \text{ milhares de euros}$$

Pág. 236

95.1.

Matemática		Informática
n_i	x_i	n_i
6	16	13
11	17	11
15	18	3
9	19	9
7	20	14

• Matemática

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i n_i}{48} = 18$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 n_i}{47}} \approx 1,2$$

• Informática

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i n_i}{50} = 18$$

$$s \approx 1,6$$

a) Matemática: $\bar{x} = 18$; $s \approx 1,2$

Informática: $\bar{x} = 18$; $s \approx 1,6$

b) Enquanto em Matemática há maior concentração das classificações próximo da média, em Informática as classificações “afastam-se” do valor médio. O desvio-padrão em Informática é maior que em Matemática.

95.2. a) $x_i \geq 18$ em Informática: $3 + 9 + 14 = 26$ alunos

$$\frac{26}{50} \times 100 = 52\% \quad (1 \text{ c. d.})$$

52% dos alunos tinham em Informática classificação maior ou igual a 18 valores.

b) $x_i \leq 19$ em Matemática: $6 + 11 + 17 = 34$ alunos

$$\frac{34}{50} \times 100 = 68\% \quad (1 \text{ c. d.})$$

68% dos alunos tinham em Matemática classificação inferior a 19 valores.

Pág. 238

96.1. A moda é 2.

96.2. a) $\bar{x} = \frac{1+0+3+2+4+1+2+2}{8} = \frac{15}{8} = 1,875$

Resposta: 1,88 golos

b)

N.º golos	n_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
0	1	-1,875	3,515 625	3,515 625
1	2	-0,875	0,765 625	1,531 25
2	3	0,125	0,015 625	0,046 875
3	1	1,125	1,265 625	1,265 625
4	1	2,125	4,515 625	4,515 625
$\sum = 8$				$\sum = 10,875$

$$SS_x = 10,875$$

Resposta: 10,88

c) $s_x = \sqrt{\frac{10,875}{7}} \approx 1,25$

$$s_x \approx 1,25 \text{ golos}$$

97.1. Pela máquina:

D. Ana: $\underline{x} = (2, 5, 7, 10, 15)$

$$s_x \approx 5,0 \text{ kg}$$

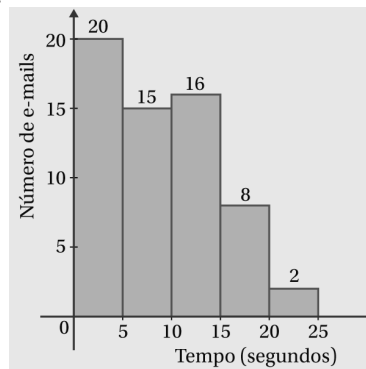
Sr. Bernardo: $\underline{y} = (2, 4, 8, 12, 100)$

$$s_y \approx 42,0 \text{ kg}$$

97.2. É verdadeira a afirmação; o desvio-padrão é afetado por valores ou muito grandes ou muito pequenos, até porque, pela sua definição, ele depende da média, ela própria pouco resistente.

98. $s_x \approx 6,4$ mensagens

99.1.



99.2. Máquina: $n = 61$; $\bar{x} \approx 9$ min

99.3. $s_x \approx 5,8$ min

100.1. Sejam x_i os valores obtidos no teste, com $i \in \{1, \dots, n\}$. Sejam y_i os valores dos testes, com o aumento de 30% em cada um.

$$y_i = x_i + 0,3x_i = 1,3x_i$$

100.1. $\bar{y} = 1,3\bar{x}$

100.2. $Me_y = 1,3Me_x$

100.3. Amplitude $\underline{x} =$ Amplitude $\underline{y}$

100.4. $\underline{x} = \underline{y}$

Amplitude interquartis $\underline{x} =$ Amplitude interquartis $\underline{y}$

100.5. $s_y = 1,3s_x$

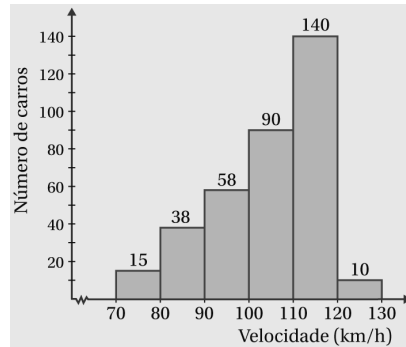
Pág. 239

101.1. $125 - 75 = 50$; amplitude ≈ 50 km/h

101.2. $[110, 120[$

101.3. Máquina: $\bar{x} \approx 104,5$ km/h

101.4.



101.5. Máquina:

Mediana = 105 km/h

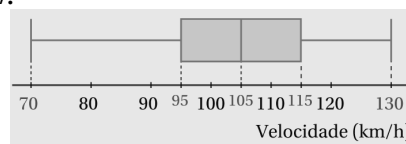
1.º Q = 95 km/h

3.º Q = 115 km/h

101.6. $115 - 95 = 20$

Resposta: 20 km/h

101.7.



101.8. $s_x \approx 12,24$ km/h

101.9. $\bar{x} \approx 104,5$ km/h ; $s_x \approx 12,34$ km/h

O desvio-padrão representa a dispersão em torno da média, pelo que, neste caso, há uma variabilidade de 12,24 km/h em torno de 104,5 km/h (média).

102.1. Sejam, em centímetros:

X : diâmetro dos círculos produzidos pela máquina A ;

Y : diâmetro dos círculos produzidos pela máquina B .

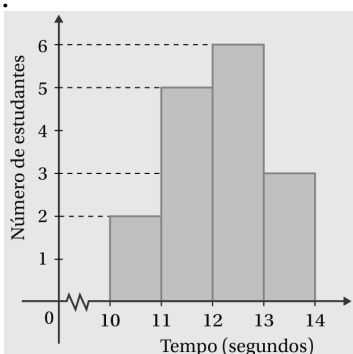
$\bar{x} \approx 15,1$ cm ; $\bar{y} \approx 14,7$ cm ; $\text{Med}_x = 15$; $\text{Med}_y = 15$

$s_x \approx 1,1$ cm ; $s_y \approx 0,8$ cm

102.2. Se se considerar a melhor aquela que produz peças com menor variabilidade no diâmetro, como $s_y < s_x$, então a melhor máquina será a B .

Pág. 240

103.1.



103.2. $\bar{x} \approx 12,13$ (segundos)

103.3. $s_x \approx 0,96$ (segundos)

104. $\bar{x} \approx 24,45$ euros ; $s_x \approx 14,88$ euros

105.1.

Gráfico 1: $\bar{x} = \frac{4+4+6+4+5}{10} = \frac{23}{10} = 2,3$

Gráfico 2: $\bar{x} = \frac{1+8+9+4+5}{10} = \frac{27}{10} = 2,7$

Gráfico 3: $\bar{x} = \frac{3+2+3+4+20}{10} = \frac{32}{10} = 3,2$

Gráfico 4: $\bar{x} = \frac{1+4+9+8+10}{10} = \frac{32}{10} = 3,2$

105.2. Gráfico 3: $s_x \approx 1,81$; Gráfico 4: $s_y \approx 1,32$

O desvio-padrão do gráfico 4 é menor do que o desvio-padrão do gráfico 3.

Os dados do gráfico 3 apresentam uma maior dispersão relativamente à média do que os dados do gráfico 4.

Pág. 241

106.1. $\bar{x} \approx 15,64$

106.2. $\frac{8}{18} \approx 0,4444$

Resposta: 44,44%

106.3. $s_x \approx 0,84$; $s_y \approx 1,06$

107. Gráfico 1: $\bar{x} = 25$; $s = 11,47$; $Me = 25$

Gráfico 2: $\bar{x} = 25$; $s = 9,49$; $Me = 20$

Gráfico 3: $\bar{x} = 26,55$; $s = 10,10$; $Me = 30$

107.1. Gráfico 1: $\bar{x} = 25$

Gráfico 2: $\bar{x} = 25$

Gráfico 3: $\bar{x} = 26,55$

107.2. $s_1 = 11,47$; $s_2 = 9,49$; $s_3 = 10,10$

Gráfico 1, porque $s_1 > s_3 > s_2$.

107.3. Gráfico 1, $Me = 25$; $\bar{x} = 25$

Pág. 242

1.1. $\bar{x} \approx -1,8$ °C

1.2. $Me = -2$ °C

1.3. $s_x^2 \approx 13,7$ °C

1.4. $s_x \approx 3,7$ °C

1.5. $Q_1 = -4,5$ °C

$Q_3 = 2$ °C

$Q_3 - Q_1 = 6,5$ °C

Resposta: 6,5 °C

2.1. Balança A :

$\bar{x} = (71, 82, 71, 86, 71, 89, 71, 85, 71, 84)$

Balança B :

$\bar{y} = (71, 85, 71, 86, 71, 84, 71, 85, 71, 83)$

$\bar{x} \approx 71,85$ kg ; $\bar{y} \approx 71,85$ kg

$s_x \approx 0,03$ kg ; $s_y \approx 0,01$ kg

2.2. Atendendo a que a balança B apresenta uma menor variabilidade em torno da média, ($s_y < s_x$), escolheu a balança B .

3.1. $\bar{x} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 5 + 4 \times 6 + k \times 7}{20} = 4,6$

$n = 20 \Leftrightarrow 7k = 92 - 36$

$\Leftrightarrow k = 8$

3.2. $s_x \approx 2,7$ golos

4.

n	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$	$\bar{x}$	s
100	101,4	102,83	1,014	0,01
14	152,6	1700,91	10,9	1,7
18	1026	58 754	57	4

Pág. 243

5. Na disciplina de Física, pois as notas estão mais concentradas nos extremos, isto é, distantes da média.

6.1. $s = 1,2$; amplitude $R = 5$; $\bar{x} = 4$

Novos valores

$s_2 = 1,2 = s$

Amplitude:

$R_2 = 5 = R$

$\bar{x}_2 = 6 = \bar{x} + 2$

6.2. $\bar{y} = 3\bar{x}$; $s_y = 3s_x = 3 \times 1,2 = 3,6$

Amplitude: $\bar{y} = 3r = 15$

$\bar{y} = 3\bar{x} = 3 \times 4 = 12$

7.1.

N.º pessoas	Freq. absoluta acumulada	Freq. absoluta simples	Freq. relativa simples	Freq. relativa acumulada
1	10	10	$\frac{10}{60} = 0,17$	0,17
2	22	$22 - 10 = 12$	0,2	0,37
3	37	$37 - 22 = 15$	0,25	0,62
4	51	$51 - 37 = 14$	0,23	0,85
5	60	$60 - 51 = 9$	0,15	1

7.2. $\bar{x} \approx 2,75$; $s_x \approx 0,84$

Tabela 2 corrigida

N.º pessoas	0	1	2	3	4
Freq. absoluta simples	5	15	30	10	0

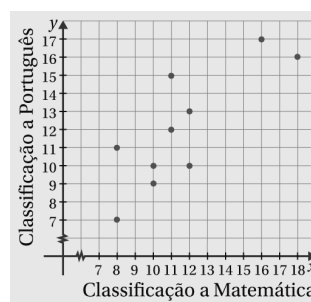
 $\bar{y} \approx 1,75$; $s_y = 0,84$

A média com os dados corrigidos vem diminuída de uma unidade, o desvio-padrão ficou igual, pois não se alterou o desvio em relação à média.

2.7. Dados bivariados

Pág. 244

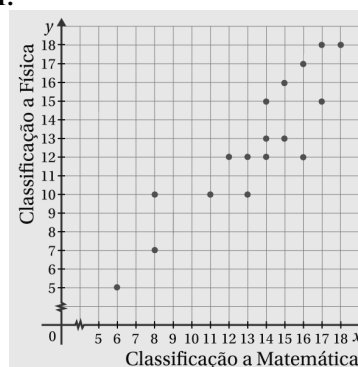
1.



2. O Nuno pretende investigar a relação estatística existente entre as duas variáveis.

Pág. 246

108.1.



108.2. Sim. Existe uma relação estatística acentuada entre as duas variáveis.

109.1. 2000 €

109.2. Um ano

109.3.

Idade do carro	Preço (€)
1 ano	8000
2 anos	4000
3 anos	3000
	4000
4 anos	2000
5 anos	2000
	3000
6 anos	1000

110.1. Pelo menos 18 atletas.

110.2. Sim. A disposição dos pontos revela uma certa tendência (a altura aumenta à medida que o número de calçado aumenta).

110.3. Pelo menos 12 vezes.

110.4. Verifica-se a tendência para a temperatura descer à medida que a altitude aumenta.

Pág. 248

- 111.1. a) (A) , (C) e (F)
- b) (B) e (D)
- 111.2. (E)

Pág. 250

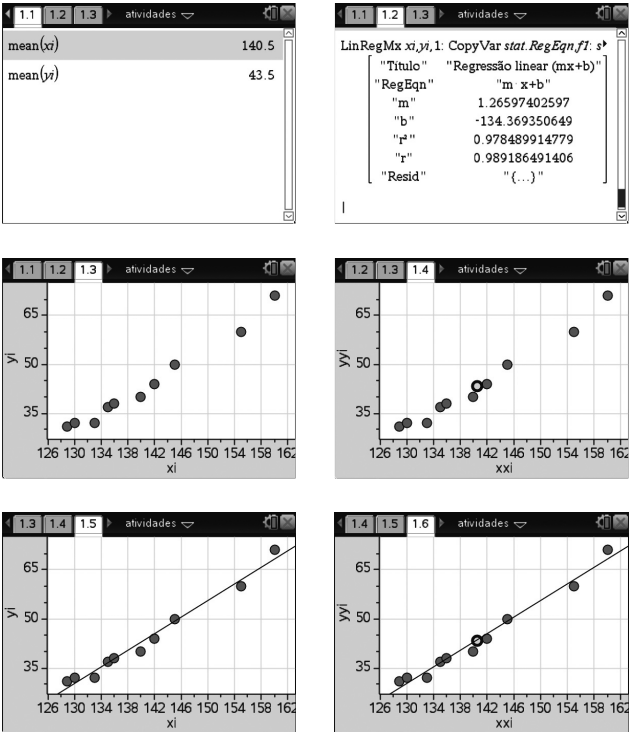
112. Em A e B verifica-se uma correlação positiva forte, sendo o coeficiente de correlação de B superior ao de A . Logo, a B corresponde $r = 0,92$ e a A corresponde $r = 0,59$.
- De igual modo, verifica-se uma correlação negativa forte em C e D , sendo a de C superior (em módulo) à de D . Assim, a C corresponde $r = -0,98$ e a D corresponde $r = -0,93$.

r	-0,01	0,02	-0,98	0,92	0,59	-0,93
Diagrama	—	—	C	B	A	D

Pág. 253

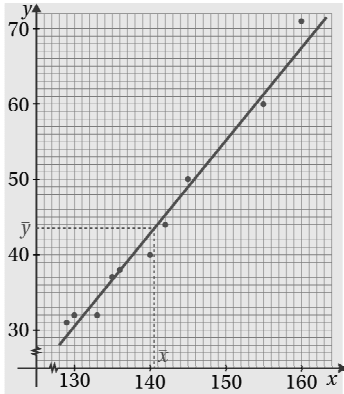
- (113.1.)
- $$\bar{x} = \frac{129 + 130 + 133 + 135 + 136 + 140 + 142 + 145 + 155 + 160}{10} = 140,5$$
- $$\bar{y} = \frac{31 + 32 + 32 + 37 + 38 + 40 + 44 + 50 + 60 + 71}{10} = 43,5$$
- Logo, $\bar{x} = 104,5 \text{ cm}$; $\bar{y} = 43,5 \text{ kg}$

(113.2.)



Reta de regressão: $y = 1,266x - 134,369$; $r \approx 0,989$

(113.3.)

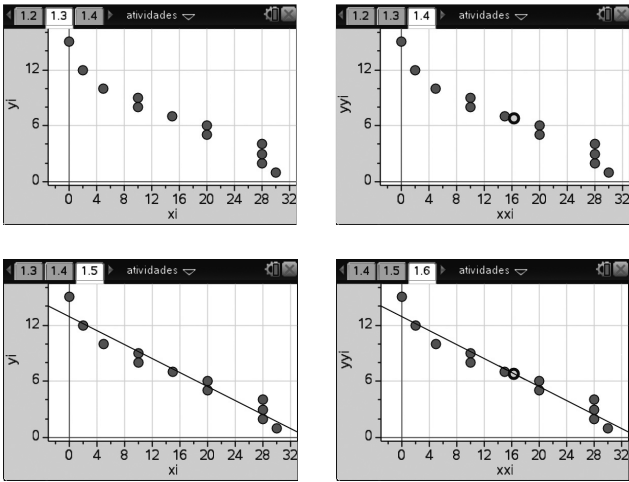


(114.1.)

$$\bar{x} = \frac{28 + 10 + 5 + 2 + 10 + 30 + 15 + 20 + 0 + 20 + 28 + 28}{12} = \frac{196}{12} = \frac{49}{3}$$
$$\bar{y} = \frac{2 + 9 + 10 + 12 + 8 + 1 + 7 + 6 + 14 + 5 + 3 + 4}{12} = \frac{81}{12} = 6,75$$

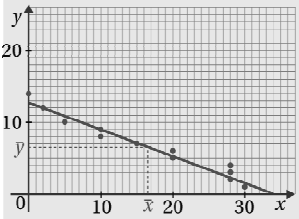
Logo, $\bar{x} = \frac{49}{3} \approx 16,3$; $\bar{y} = 6,75$.

(114.2.)

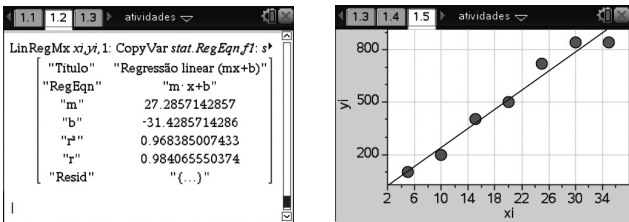


Reta de regressão: $y = -0,362x + 12,659$; $r \approx -0,979$

(114.3.)



115.1. Por exemplo:

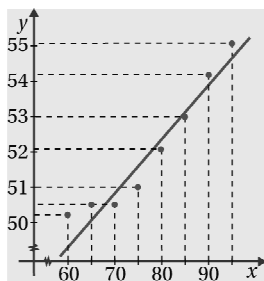


$y = 27,29x - 31,43$ (2 c. d.)

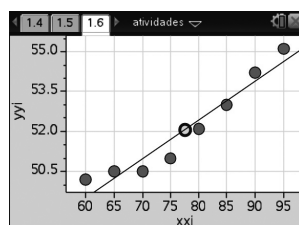
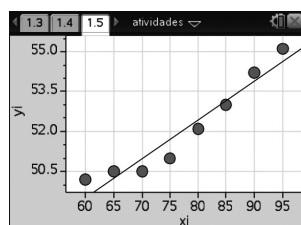
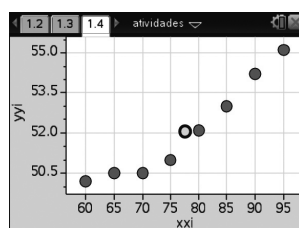
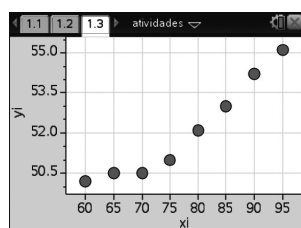
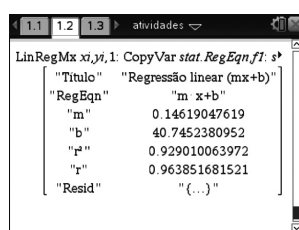
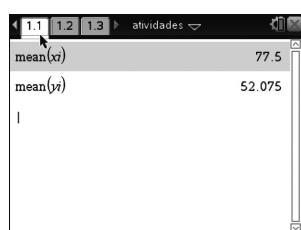
- 115.2. $r = 0,98$; verifica-se uma correlação positiva forte entre as duas variáveis, o que é natural, pois compram-se mais guarda-chuvas quando a chuva é mais frequente.

Pág. 255

116.1.



116.2.



$$y = 0,146x + 40,745 \quad (3 \text{ c. d.})$$

- 116.3. Para $x = 72^\circ\text{C}$ vem $y \approx 51,3 \text{ mm}$.
 Se $x = 130^\circ\text{C}$, então $y \approx 59,8 \text{ mm}$.
 Resposta: 51,3 mm e 59,8 mm.
 A segunda estimativa é pouco fiável dado que 130°C é um valor muito afastado do intervalo de valores conhecidos.

Pág. 257

117.

		MACS																Total
		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
Português	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	10	1	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4	
	11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	12	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	
	13	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	3	
	15	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	
	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	
	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1		
Total		2	0	2	0	4	1	1	2	0	3	1	1	0	0	1	18	

118.1. 10

118.2. $\frac{67}{237} \approx 0,283$; 28,3%

118.3.

2.ª-feira	3.ª-feira	4.ª-feira	5.ª-feira	6.ª-feira	Sábado	Domingo
6%	8%	10%	12%	16%	20%	28%

O número de chamadas realizadas ao sábado e ao domingo é praticamente igual ao realizado durante os outros dias da semana.

119. A afirmação é verdadeira. 15 dos 22 professores de Português declararam que as bases dos seus alunos eram insuficientes: $\frac{15}{22} \approx 68,18\%$.

Pág. 259

120.1. Grupo de controlo: 10% ; grupo experimental: 40%

120.2. $\frac{6}{50} = 0,12 = 12\%$; $\frac{23}{50} = 0,46 = 46\%$

Resposta: 12% e 46%, respetivamente.

- 120.3. Por exemplo, da análise do gráfico constata-se que a percentagem de positivas obtidas pelos alunos do grupo experimental (a quem foi implementado o novo método de avaliação) é superior à percentagem de positivas obtidas pelos alunos do grupo de controlo.
 Deste modo, podemos concluir que o novo método de avaliação é mais vantajoso que os anteriores métodos para alunos que revelem insucesso.

121. Departamento de marketing

	Admitidos	Não admitidos	Total
Mulheres	7	1	8
Homens	40	10	50
Total	47	11	58

Departamento editorial

	Admitidos	Não admitidos	Total
Mulheres	13	12	25
Homens	13	20	33
Total	26	32	58

- 121.1. Percentagem de mulheres admitidas relativamente ao total de mulheres candidatas e percentagem de homens admitidos relativamente ao total de homens candidatos, por departamento:

	Marketing	Editorial
Mulheres	$\frac{7}{8} = 87,5\%$	$\frac{13}{25} = 52\%$
Homens	$\frac{40}{50} = 80\%$	$\frac{13}{33} \approx 39,4\%$

121.2.

	Admitidos	Não admitidos	Total
Mulheres	20	13	33
Homens	53	30	83
Total	73	43	116

Percentagens de mulheres e homens admitidos relativamente ao total de mulheres e homens candidatos:

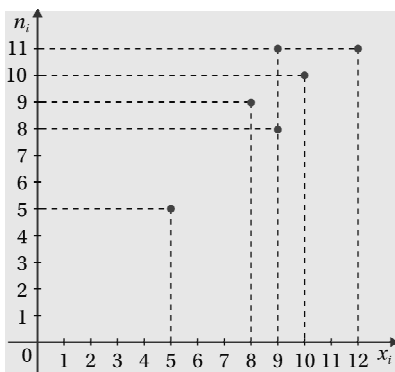
Mulheres: $\frac{20}{33} \approx 60,6\%$

Homens: $\frac{53}{83} \approx 63,9\%$

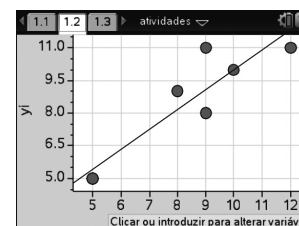
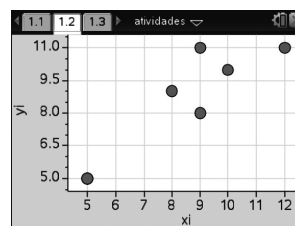
- 121.3. A maior parte dos homens $\left(\frac{50}{83} \approx 60,2\%\right)$ candidatou-se ao departamento de *marketing* onde foi admitida a maior parte dos funcionários $\left(\frac{47}{73} \approx 64,4\%\right)$.
Com as mulheres ocorreu o inverso. A maior parte $\left(\frac{25}{33} \approx 75,8\%\right)$ candidatou-se ao departamento editorial, que apenas recrutou cerca de 35,6% $\left(\frac{26}{73}\right)$ dos candidatos admitidos.

Pág. 261

122.



123.



124. Gráfico C

125.1. 20 casos

125.2. Sim.

125.3. Aumenta.

126. Em A : correlação positiva fraca
Em B : correlação positiva forte
Em C : correlação negativa fraca
 $r_A = 0,6$; $r_B = 0,9$ e $r_C = -0,6$

127. $-0,67$

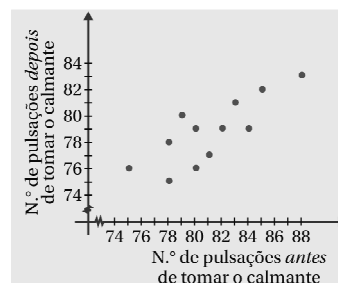
Pág. 262

128. $y = mx + b$, $m > 0$; $y = az + c$, $a < 0$
 $mx + b = az + c$; $mx = az + c - b$

$$x = \frac{a}{m}z + \frac{c-b}{m}, \quad \frac{a}{m} < 0$$

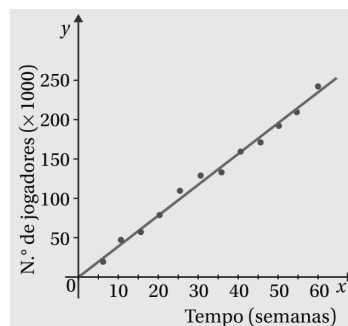
O coeficiente de correlação entre x e z é -1 .

129.



Existe uma associação positiva forte.

130.



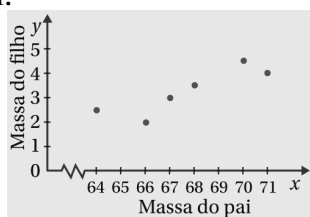
$$y = 3,85x + 4,94$$

131.1.

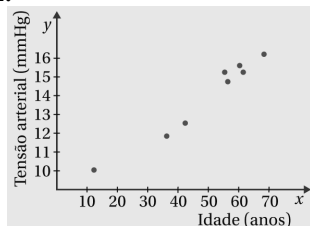
x	1	1	1	1	3	3	3	5	5
y	0	2	2	2	0	0	1	0	2

131.2. $r = -0,3$

132.1.

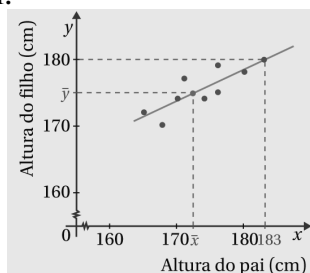
 $r \approx 0,87$; correlação positiva forte.

132.2.

 $r \approx 0,98$; correlação positiva forte.

Pág. 263

133.1.



133.2.
$$\bar{x} = \frac{165+168+170+171+180+174+176+176}{8}$$

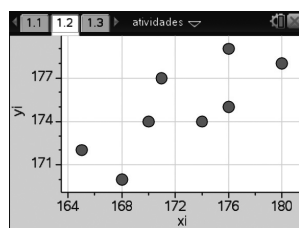
$$= \frac{1380}{8} = 172,5$$

$$\bar{y} = \frac{172+170+174+177+178+174+175+179}{8}$$

$$= \frac{1399}{8} = 174,875$$

$$\bar{x} = 172,5 ; \bar{y} = 174,875$$

133.3.



x_i	{ 165, 168, 170, 171, 180, 174, 176, 176 }
y_i	{ 172, 170, 174, 177, 178, 174, 175, 179 }
mean(x_i)	172,5
mean(y_i)	174,875

LinRegMx $x_i, y_i, 1$: CopyVar stat.RegEqn.f1: s*	
"Titulo"	"Regressão linear (mx+b)"
"RegEqn"	"m x+b"
"m"	0.473214285714
"b"	93.2455357143
"r"	0.579892650702
"r"	0.761506829058
"Resid"	"{...}"

$$y = 0,473x + 93,246 \quad (3 \text{ c. d.})$$

133.4. $y = 180$

$$180 = 0,473x + 93,246 \Leftrightarrow x = \frac{86,754}{0,473} \Leftrightarrow x \approx 183 \text{ cm}$$

Resposta: 183 cm

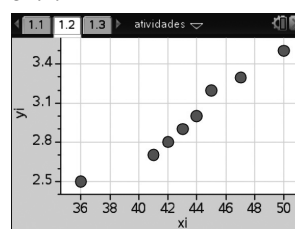
134.1.
$$\bar{x} = \frac{36+41+42+43+44+45+47+50}{8}$$

$$= \frac{348}{8} = 43,5$$

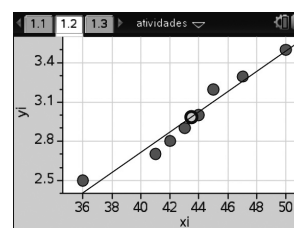
$$\bar{y} = \frac{2,5+2,7+2,8+2,9+3+3,2+3,3+3,5}{8}$$

$$= \frac{23,9}{8} = 2,9875$$

134.2.



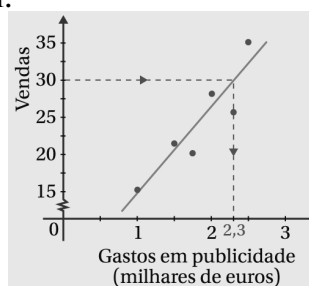
mean(x_i)	43.5
mean(y_i)	2.9875



$$y = 0,077x - 0,382 \quad (3 \text{ c. d.})$$

135. Cerca de 10,5 kg .

136.1.



136.2. 2,3 mil euros

136.3. Trata-se de uma correlação positiva forte.

Pode concluir-se que o aumento dos gastos em publicidade é acompanhado, em geral, por um aumento dos resultados das vendas.

136.4. $r \approx 0,92$

Confirma-se o comentário feito por observação do diagrama de dispersão.

137. $r = 0,80$ (2 c. d.)

Pág. 264

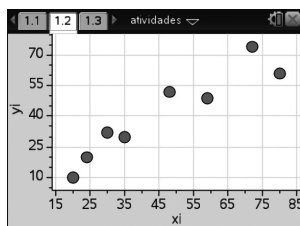
1.1.
$$\bar{x} = \frac{80+72+59+48+30+35+24+20}{8} = \frac{368}{8} = 46$$

$$\bar{y} = \frac{61+74+49+52+32+30+20+10}{8} = \frac{328}{8} = 41$$

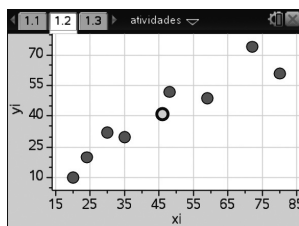
$$\bar{x} = 46 \text{ e } \bar{y} = 41$$

mean(xi)	46
mean(yi)	41

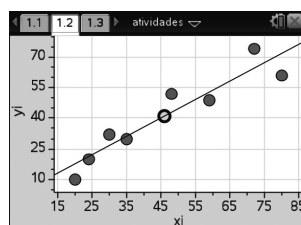
1.2.



1.3.



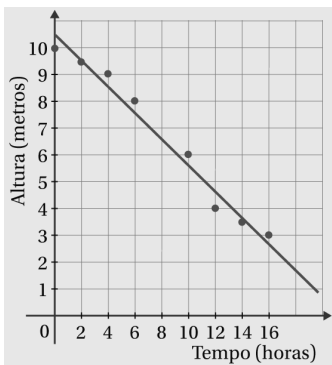
1.4.



$$y = 0,90x - 0,52 \text{ (2 c. d.)}$$

LinRegMx xi,yi,1: CopyVar stat.RegEqn,f1: s	
"Titulo"	"Regressão linear (mx+b)"
"RegEqn"	"m x+b"
"m"	0.902597402597
"b"	-0.519480519481
"r"	0.880294050062
"Resid"	"{...}"

2.1.



$$2.2. \quad y = -0,483x + 10,492 \text{ (3 c. d.)} \quad r \approx -0,99$$

2.3. $r < 0$ significa que à medida que o tempo passa, a altura da água no depósito decresce. Como $|r| \approx 1$, a correlação entre as duas variáveis é muito forte.

$$2.4. \quad x = 5; \quad y \approx 0,483 \times 5 + 10,492$$

$$y \approx 8,1 \text{ m (1 c. d.)}$$

$$2.5. \quad y = 2,5$$

$$-0,483x + 10,492 = 2,5 \Leftrightarrow -0,483x = -7,992$$

$$\Leftrightarrow x \approx 16,55 \text{ h}$$

$$x \approx 16 \text{ h } 33 \text{ min}$$

$$3.1. \quad y = 1,68x - 3358,21 \text{ (2 c. d.)}$$

$$3.2. \quad y = 1,68 \times 2015 - 3358,21 \Leftrightarrow y = 26,99$$

Resposta: Aproximadamente, 26,99 km².

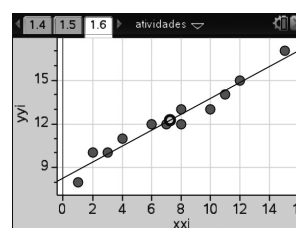
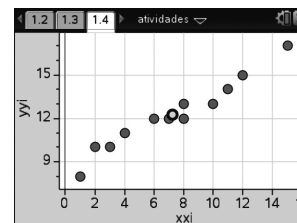
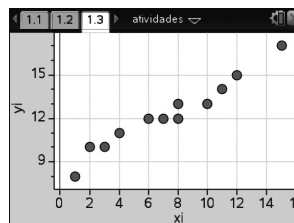
$$3.3. \quad 33 = 1,68x - 3358,21 \Leftrightarrow x = \frac{33 + 3358,21}{1,68} \Leftrightarrow x \approx 2018$$

Resposta: No ano de 2018.

4.

mean(xi)	7.25
mean(yi)	12.25

LinRegMx xi,yi,1: CopyVar stat.RegEqn,f1: s	
"Titulo"	"Regressão linear (mx+b)"
"RegEqn"	"m x+b"
"m"	0.550061804697
"b"	8.26205191595
"r"	0.952441646266
"Resid"	"{...}"



$$4.1. \quad y = 0,55x + 8,26 \quad r = 0,98$$

Correlação positiva forte

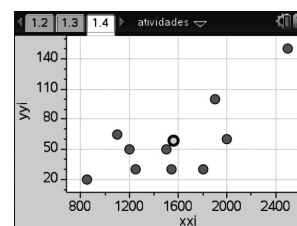
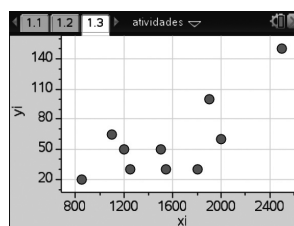
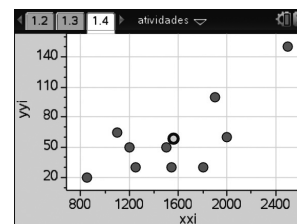
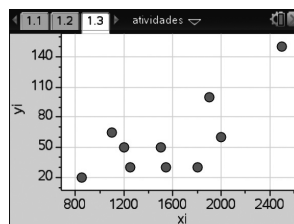
4.2. a) Aproximadamente, 1 h de estudo.

b) Aproximadamente, 11 valores.

5.

mean(xi)	1565
mean(yi)	58.5

LinRegMx xi,yi,1: CopyVar stat.RegEqn,f1: s	
"Titulo"	"Regressão linear (mx+b)"
"RegEqn"	"m x+b"
"m"	0.059662908553
"b"	-34.8724518848
"r"	0.550209431274
"Resid"	"{...}"



$$5.1. \quad r = 0,7 \quad \text{Correlação positiva fraca}$$

5.2. Aproximadamente, 73 €.

$$5.3. \quad y = 0,06x - 34,87$$

Pág. 266

1.1. $n = 5$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = 61,84 \quad (2 \text{ c. d.})$$

1.2. $n = 5$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = 61,85 \quad (2 \text{ c. d.})$$

1.3. $s_x = 0,03 \quad (2 \text{ c. d.})$

1.4. $s_x = 0,01 \quad (2 \text{ c. d.})$

1.5. A balança B , pois como $s_y < s_x$, isto é, a dispersão dos *pesos* em torno da média é inferior na balança B .

2.1.

50 — 25

 x — 100 ; $x = 200$

Foram inquiridos 200 alunos.

2.2. Suficiente : 32%

Muito bom: 25%

Não responde: 3%

Insuficiente: $k\%$ Bom: $3k\%$

$$32 + 25 + 3 + k + 3k = 100 \Leftrightarrow 4k = 40$$

$$\Leftrightarrow k = 10$$

Insuficiente: 10%

Pág. 267

3.1. $\underline{x} = (210, 182, 205, 198)$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i}{4} = 198,75 \text{ g}$$

3.2. Verdadeiros *pesos*

$$\underline{y} = \underline{x} - 5 \Rightarrow \bar{y} = 198,75 - 5 = 193,75 \text{ g}$$

ou

$$\underline{y} = (205, 177, 200, 193)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i}{4} = 193,75 \text{ g}$$

3.3. $s_x = 12,20 \text{ g}$

$$\underline{y} = \underline{x} - 5 \Rightarrow s_y = s_x$$

ou

$$s_y = 12,20 \text{ g}$$

$$s_y = s_x$$

4. $\underline{x} = (1, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 4, 4, 5)$

Amostra ordenada

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5)$$

$$4.1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = \frac{36}{15} = 2,4$$

Em média, os alunos comeram 2,4 peças de fruta.

$$4.2. SS_x = \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = 27,6$$

$$4.3. s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{27,6}{14} = 1,97 \approx 2,0 \quad (\text{aproximado às décimas})$$

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = 1,404 \approx 1,4 \quad (1 \text{ c. d.})$$

4.4. $P_{25} = ?$

$$\frac{25 \times 15}{100} = 3,75 \quad (\text{não inteiro})$$

$$P_{25} = x_{(4)} = 1 ; P_{25} = 1$$

$$P_{50} = ?$$

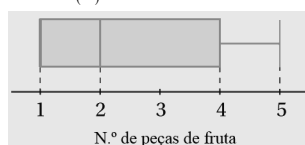
$$\frac{50 \times 15}{100} = 7,5 \quad (\text{não inteiro})$$

$$P_{50} = x_{(8)} = 2 ; P_{50} = 2$$

$$P_{75} = ?$$

$$\frac{75 \times 15}{100} = 11,25 \quad (\text{não inteiro})$$

$$P_{75} = x_{(12)} = 4 ; P_{75} = 4$$



5.1. Número de folhas por planta de tabaco.

$$5.2. a) \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^8 x_j n_j}{n} = \frac{2967}{150} = 19,78$$

b) $P_{50} = Md = ?$

$$\frac{50 \times 155}{100} = 77,5$$

$$Md = P_{50} = x_{(78)} = 20$$

c) $s_x = 1,38 \quad (2 \text{ c. d.})$

d) $s_x^2 = 1,90 \quad (2 \text{ c. d.})$

N.º de folhas	N.º de plantas	N_i
17	3	3
18	22	25
19	44	69
20	42	111
21	22	133
22	10	143
23	6	149
24	1	150

Pág. 268

6. É necessário calcular s_x e s_y .Bicicleta:

$$n_x = 9 ; \underline{x} = (7,5; 8,7; 9,2; 9,8; 10,9; 11,1; 12,2; 12,8; 13,5)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = \frac{95,7}{9} \approx 10,6 \quad (1 \text{ c. d.})$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 31,97$$

$$S_x = \sqrt{\frac{31,97}{8}} \approx 2$$

Passadeira:

$$n_y = 8 ; \underline{y} = (8,7; 13,2; 13,8; 14,7; 15,5; 16,2; 16,2; 17,8)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i}{8} = 14,5$$

$$SS_y = \sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2 = 53,53$$

$$S_y = \sqrt{\frac{53,53}{7}} \approx 2,8$$

Há uma maior variabilidade dos tempos na passadeira, pois $s_y > s_x$.

7. $n = 32$

7.1.

0	5	6	7	7	8	9				
1	1	2	2	5	6	7	7	8	8	9
2	0	1	2	3	9					
3	2	5	6	7						
4	1	4	4	5	9					
5										
6	2	5								

7.2. $P_{25} = ?$

$$\frac{25 \times 32}{100} = 8$$

$$P_{25} = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{12 + 12}{2} = 12 ; P_{25} = 12$$

 $P_{50} = ?$

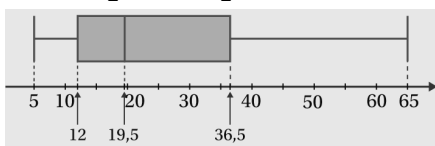
$$\frac{50 \times 32}{100} = 16$$

$$P_{50} = \frac{x_{(16)} + x_{(17)}}{2} = \frac{19 + 20}{2} = 19,5 ; P_{50} = 19,5$$

 $P_{75} = ?$

$$\frac{75 \times 32}{100} = 24$$

$$P_{75} = \frac{x_{(24)} + x_{(25)}}{2} = \frac{36 + 37}{2} = 36,5 ; P_{75} = 36,5$$



7.3.

 $P_{70} = ?$

$$\frac{70 \times 32}{100} = 22,4$$

$$P_{70} = x_{(23)} = 35 ; P_{70} = 35$$

Dos 30% de percursos com maior duração, o que tem menor duração, demora 35 min.

8. Por exemplo,

Diagrama 1

Mínimo: 1

Máximo: 5

 $Q_1 = 2 ; a = Q_2 = 4 ; Q_3 = 4,5$ $x = (1; 2; 4; 4,5; 5)$ Diagrama 2

Mínimo: 1

Máximo: 3

 $Q_1 = 1,5 ; b = Q_2 = 2 ; Q_3 = 2,5$ $y = (1; 1,5; 2; 3; 3,5)$ Diagrama 3

Mínimo: 1

Máximo: 5

 $Q_1 = 1,5 ; c = Q_2 = 3 ; Q_3 = 4,5$ $z = (1; 1,5; 3; 4,5; 5)$ Diagrama 4

Mínimo: 1

Máximo: 5

 $Q_1 = 1 ; d = Q_2 = 3 ; Q_3 = 4,5$ $w = (1; 1; 3; 4,5; 5)$

Pág. 269

9.1. Idades

 $x = (18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29)$

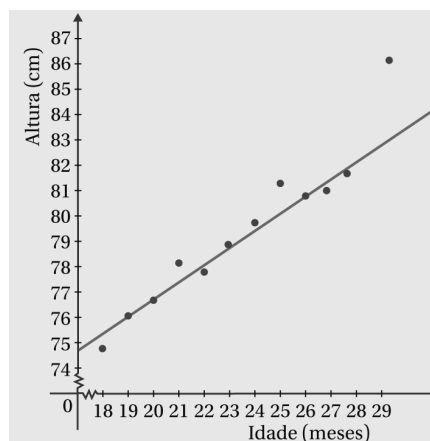
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = 23,5 \text{ meses}$$

Altura

 $y = (74,9; 76,2; 77,0; 78,4; 78,1; 79,3; 79,9; 81,7; 80,9)$

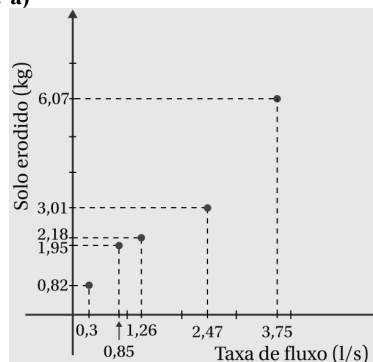
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{12} y_i}{12} \approx 79,7 \text{ cm}$$

9.2.

9.3. $\bar{x} = 23,5$ (máquina calculadora) $\bar{y} \approx 79,7$ (máquina calculadora) $\bar{y} = 0,82\bar{x} + 60,41$ $\bar{y} = 0,82 \times 23,5 + 60,41 \approx 79,7$ e $\bar{y} \approx 79,7$

10.1. Taxa de fluxo

10.2. a)



b) Taxa de fluxo:

 $x = (0,31; 0,85; 1,26; 2,47; 3,75)$

Solo erodido:

 $y = (0,82; 1,95; 2,18; 3,01; 6,07)$ $\bar{x} = 1,728$ e $\bar{y} = 2,806$

c) $y = ax + b$

$a = 1,39$ (2 c. d.)

$b = 0,41$ (2 c. d.)

$y = 1,39x + 0,41$

11. Gráfico 1: declive positivo

$r_1 = 0,76$

Gráfico 2: declive negativo

$r_2 = -0,84$

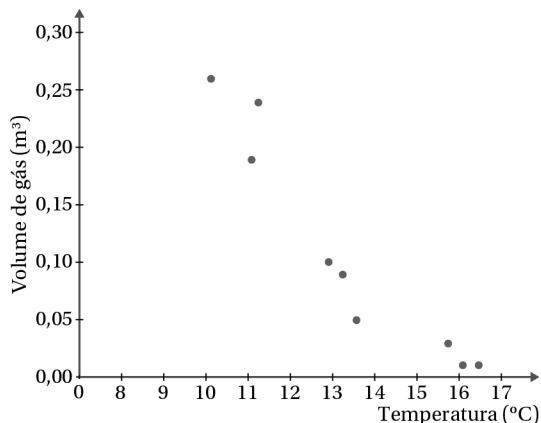
Gráfico 3: pouca relação

$r_3 = -0,25$

Pág. 270

12.1. Temperatura

12.2.



a) $y = ax + b$

$a = -0,033\ 360\ 025\ 6$

$b = 0,539\ 233\ 219\ 4$

$r = -0,95\ 439 \approx -1$

$r \approx -1$; existe uma relação linear negativa.

b) $\bar{x} = 12,9$ e $\bar{y} = 0,1$

c) $y = ax + b$; $a = -0,03$; $b = 0,54$

$y = -0,03x + 0,54$

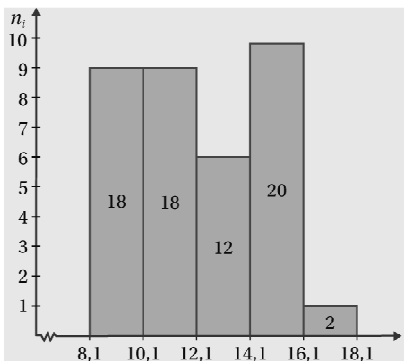
d) $\bar{y} = -0,03 \times 7 + 0,54 = 0,33$ pois $\bar{x} = 7$.

O consumo esperado será $0,33\text{ m}^3$.

13.1. $n = 35$; amplitude: 2

	n_i
$[8,1; 10,1[$	9
$[10,1; 12,1[$	9
$[12,1; 14,1[$	6
$[14,1; 16,1[$	10
$[16,1; 18,1[$	1
Σ	$= 35$

13.2.



$A_i = nh = 35 \times 2 = 70$

13.3. $P_{10} = ?$

$\frac{10 \times 70}{100} = 7 \Rightarrow P_{10} \in [8,1; 10,1[$

$(P_{10} - 8,1) \times 9 = 7$

$\Leftrightarrow P_{10} = 8,88$

Logo, $P_{10} = 8,88\text{ kg}$.

$P_{15} = ?$

$\frac{15 \times 70}{100} = 10,5 \Rightarrow P_{15} \in [8,1; 10,1[$

$(P_{15} - 8,1) \times 9 = 10,5$

$\Leftrightarrow P_{15} = 9,27$

Logo, $P_{15} = 9,27\text{ kg}$.

$P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 70}{100} = 35 \Rightarrow P_{50} \in [10,1; 12,1[$

$(P_{50} - 10,1) \times 9 = 35 - 18$

$\Leftrightarrow P_{50} = 11,99$

Logo, $P_{50} = 11,99\text{ kg}$.

$P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 70}{100} = 52,5 \Rightarrow P_{75} \in [14,1; 16,1[$

$(P_{75} - 14,1) \times 10 = 52,5 - (18 + 18 + 12)$

$\Leftrightarrow P_{75} = 14,55$

Logo, $P_{75} = 14,55\text{ kg}$.

$P_{85} = ?$

$\frac{85 \times 70}{100} = 59,5 \Rightarrow P_{85} \in [14,1; 16,1[$

$(P_{85} - 14,1) \times 10 = 59,5 - (18 + 18 + 12)$

$\Leftrightarrow P_{85} = 15,25$

Logo, $P_{85} = 15,25\text{ kg}$.

13.4. $11,4 \in P_k$, $P_k = ?$

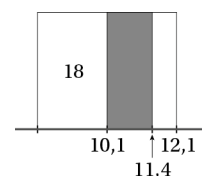
$11,4 \in [10,1; 12,1[$

$(11,4 - 10,1) \times 9 = 11,7$

$18 + 11,7 = 29,7$

$\frac{knh}{100} = 29,7 \Rightarrow k = 42,43$

$P_k = P_{43}$



13.5. $P_{75} = 14,55 \in [14,1; 16,1[\rightarrow 4.\text{ª classe}$

$9 \rightarrow 1.\text{ª classe}$

$9 \rightarrow 2.\text{ª classe}$

$6 \rightarrow 3.\text{ª classe}$

Quantas crianças pertencem ao intervalo $[14,1; 14,55]$?

Há duas, logo $9 + 9 + 6 + 2 = 26$.

Há 26 crianças com *peso* inferior ou igual a P_{75} .

13.6.



$P_{20} = ?$

$\frac{20 \times 70}{100} = 14 \Rightarrow P_{20} \in [8,1; 10,1[$

$(P_{20} - 8,1) \times 9 = 14 \Leftrightarrow P_{20} = 9,66$

O maior valor inferior a 9,66 é 9,6 kg, logo, a criança com *peso* mais elevado do conjunto dos que têm *peso* 20% mais baixo, *pesa* 9,6 kg.

13.7. $P_{10} = 8,9 < 9,8$ P_{10} (OMS)

$P_{15} = 9,3 < 10,1$ P_{15} (OMS)

$P_{50} = 12 > 11,3$ P_{50} (OMS)

$P_{85} = 15,3 > 12,7$ P_{85} (OMS)

P_{10} e P_{15} têm valores inferiores, respetivamente, a P_{10} e P_{15} da OMS.

P_{50} e P_{85} têm valores superiores, respetivamente, a P_{50} e P_{85} da OMS.

Tudo indica que as crianças do centro de saúde terão *peso* superior ao indicado pela OMS.

Pág. 271

14.1. a) Grupo 1 $\rightarrow n_1 = 61$

Grupo 2 $\rightarrow n_2 = 62$

b) $\bar{x}_1 = 64,34$ (2 c. d.)

$\bar{y}_1 = 66,69$ (2 c. d.)

c) $s_x = 12,097$ e $s_y = 10,567$ (máquina)

14.2. Grupo 1:

$Q_1 = ?$

$\frac{25 \times 61}{100} = 15,25$

$Q_1 = P_{25} = x_{(16)} = 54$

$Q_2 = Md = ?$

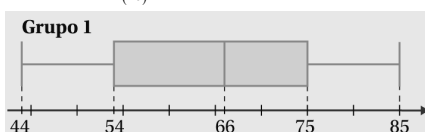
$\frac{50 \times 61}{100} = 30,5$

$Q_2 = Md = x_{(31)} = 66$

$Q_3 = P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 61}{100} = 45,75$

$Q_3 = P_{75} = x_{(46)} = 75$



Grupo 2:

$Q_1 = ?$

$\frac{25 \times 62}{100} = 15,5$

$Q_1 = P_{25} = x_{(16)} = 60$

$Q_2 = Md = ?$

$\frac{50 \times 62}{100} = 31$

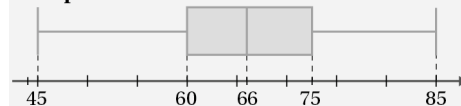
$Q_2 = \frac{x_{(31)} + x_{(32)}}{2} = \frac{66 + 66}{2} = 66$

$Q_3 = P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 62}{100} = 46,5$

$Q_3 = x_{(47)} = 75$

Grupo 2



14.3. Grupo I: $75 - 54 = 21$

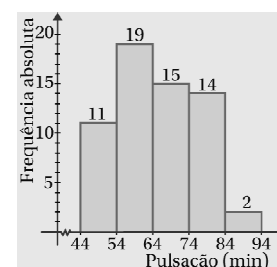
Grupo II: $75 - 60 = 15$

14.4. Apesar das medianas serem iguais os dados do grupo I são mais dispersos relativamente à mediana

14.5. a) Amplitude 10

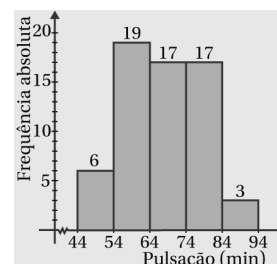
Grupo 1

	n_i
[44, 54[	11
[54, 64[	19
[64, 74[	15
[74, 84[	14
[84, 94[	2
Σ	61



Grupo 2

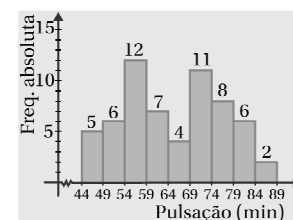
	n_i
[44, 54[	6
[54, 64[	19
[64, 74[	17
[74, 84[	17
[84, 94[	3
Σ	62



b) Amplitude 5

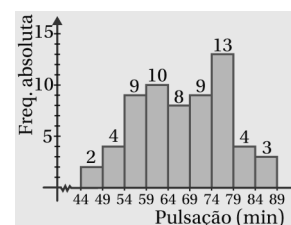
Grupo 1

	n_i
[44, 49[	5
[49, 54[	6
[54, 59[	12
[59, 64[	7
[64, 69[	4
[69, 74[	11
[74, 79[	8
[79, 84[	6
[84, 89[	2
Σ	61



Grupo 2

	n_i
[44, 49[	2
[49, 54[	4
[54, 59[	9
[59, 64[	10
[64, 69[	8
[69, 74[	9
[74, 79[	13
[79, 84[	4
[84, 89[	3
Σ	62



- 14.6. Atendendo a que $\bar{x} = 64,34$ e que $\bar{y} = 66,69$, é mais provável que no grupo 2 exista uma maior percentagem de mulheres.

15. $n = 10$

Manteiga: média = 500 g ; desvio-padrão = 25

Arroz: média = 5000 g ; desvio-padrão = 100

Manteiga: $\frac{25}{500} = 0,05 = 5\%$

Arroz: $\frac{100}{5000} = 0,02 = 2\%$

Resposta: A manteiga ($5\% > 2\%$).

- 16.1.

Altura (cm)	N.º de alunos	Freq. absoluta acumulada	Freq. relativa	Freq. relativa acumulada
156	2	2	0,08	0,08
162	5	7	0,2	0,28
168	8	15	0,32	0,60
174	6	21	0,24	0,84
180	4	25	0,16	1

- 16.2. a) $\bar{x} = 169,2$

Logo, $\bar{x} = 169,2$ cm

- b) $s_x = 7,14$ cm (2 c. d.)

6.2. Pela alínea anterior, o preço final do computador é 405,69 €.

$$\begin{array}{lcl} 7. & 120 \text{ €} & \text{-----} 118\% \\ & x & \text{-----} 100\% \end{array} \quad x = \frac{120 \times 100}{118}$$

$x \approx 101,69 \text{ €}$ (valor sem IVA incluído)
 $101,69 + 0,23 \times 101,69 \approx 125,08 \text{ €}$
 Gastaria 125,08 €.

8. $10,50 + 1,80 + 2,43 + 5,00 + 19,35 = 39,08$

Total (euros): 39,08

Taxa 6%: Valor: 8,71 € Líquido $\rightarrow 5 + 2,43 + 1,80 = 9,23$
 Valor IVA: 0,52 € Valor sem IVA $\rightarrow 9,23 : 1,06 \approx 8,71$

Taxa 23%: Líquido: 29,85 €

9.1. Cilindrada $\rightarrow 112,89 \text{ €}$

Emissões CO₂ $\rightarrow 57,76 \text{ €}$

Ano $\rightarrow$ coeficiente 1,05

$112,89 + 57,76 = 170,65 \text{ €}$

$170,65 \text{ €} \times 1,05 \approx 179,18 \text{ €}$

Valor anual de IUC: 179,18 €

9.2. Preço a pronto pagamento: 12 500 €

12 500 € ----- 123%

$$\begin{array}{lcl} & x & \text{-----} 23\% \end{array} \quad x = \frac{12\,500 \times 23}{123}$$

$x \approx 2337,40 \text{ €}$

Pagará 2337,40 € de IVA.

9.3. $48 \times 280 \text{ €} = 13\,440 \text{ €}$

$13\,440 \text{ €} - 12\,500 \text{ €} = 940 \text{ €}$

Pagará a mais 940 €.

10. $1500 \text{ €} : 1,21 \approx 1239,67 \text{ €}$ (preço sem a taxa de IVA de 21%)

$1239,67 \text{ €} \times 1,23 \approx 1524,79 \text{ €}$ (preço com a taxa de IVA de 23%)

Custo atual do computador: 1524,79 €.

Pág. 285

11.1. $85\,000 \text{ €} : 1,23 \approx 69\,105,69 \text{ €}$

8% de $69\,105,69 \text{ €} \rightarrow 0,08 \times 69\,105,69 \text{ €} \approx 5528,46 \text{ €}$

Recebeu 5528,46 €.

11.2. Arganil $\rightarrow$ Taxa de IMI: 0,38%

$$\frac{0,38}{100} \times 85\,000 = 323 \text{ €}$$

Irá pagar 323 € de IMI.

12. Valor base: 1280 €

IVA (23%): $0,23 \times 1280 \text{ €} = 294,40 \text{ €}$

Imposto de selo: 5 €

IRS (25%): $9,25 \times 1280 \text{ €} = 320 \text{ €}$

Importância recebida: $1280 - (294,40 + 5 + 320) = 660,60 \text{ €}$

13.1. Vai receber 80% do prémio:

$$0,80 \times 12\,000\,000 \text{ €} = 9\,600\,000 \text{ €}$$

Vai receber 9 600 000 €.

13.2. $6500 - 5000 = 1500$

20% de 1500 €: $0,20 \times 1500 \text{ €} = 300 \text{ €}$

Valor do imposto: 300 €

Pág. 286

14.1. Rendimento global: $12\,000 \text{ €} + 8500 \text{ €} = 20\,500 \text{ €}$

Como se trata de um casal sem filhos:

$$20\,500 \text{ €} : 2 = 10\,250 \text{ €}$$

Consultando a tabela: taxa de 28,50%

14.2. Parcela a abater: 980 €

$$20\,500 \text{ €} \times 0,285 - 980 \text{ €} = 4862,50 \text{ €}$$

$$4862,50 \text{ €} \times 2 = 9725 \text{ €}$$

IRS a pagar: 9725 €

$$15. \quad \frac{1,5}{100} = 0,015$$

$$750 + 750 \times 0,015 = 761,25 \text{ €}$$

Passará a ganhar 761,25 €.

$$\begin{aligned} 16. \quad \text{Taxa de inflação} &= \frac{\text{IPC}(2002) - \text{IPC}(2001)}{\text{IPC}(2001)} \times 100 = \\ &= \frac{104,8 - 103,2}{103,2} \times 100 = \\ &\approx 1,55\% \end{aligned}$$

Taxa de inflação: 1,55%

17.1. a) IPC médio anual de 2014:

$$\frac{100,5 + 100 + 101,5 + 101 + 102,1 + 103,4 + 103,4 + 103,8 + 103 + 102,8 + 103,1 + 103,2}{12} = \approx 102,3$$

IPC médio anual de 2015

De modo análogo, obtemos 103,4.

$$\text{Taxa de inflação} = \frac{103,4 - 102,3}{102,3} \times 100 \approx 1,08\%$$

A taxa de inflação foi de, aproximadamente, 1,08%.

$$17.1. \text{ b) } \frac{103,1 - 102,8}{102,8} \times 100 \approx 0,29\%$$

A taxa de inflação foi de, aproximadamente, 0,29%.

17.2. Valor-base: junho de 2013

$$\text{IPC}(\text{junho de 2015}) = \frac{\text{Preço}(\text{junho de 2015})}{\text{Preço na data-base}} \times 1000$$

$$103,2 = \frac{x}{110,50} \times 100 \Leftrightarrow x = \frac{103,2 \times 110,50}{100} \Leftrightarrow x = 114,04 \text{ €}$$

Em junho de 2015 ter-se-ia de pagar 114,04 €.

Pág. 287

- 1.1.** $49,99 \text{ €} \text{ ----- } 123\%$
 $x \text{ ----- } 23\%$
 $x = \frac{49,99 \times 23}{123}$
 $x \approx 9,35 \text{ €}$
 Pagou 9,35 € de IVA.
- 1.2.** $49,99 \text{ €} - 9,35 \text{ €} = 40,64 \text{ €}$
ou
 $49,99 : 1,23 \approx 40,64 \text{ €}$
 Custavam 40,64 €.
- 2.** $1650 \text{ €} - 1500 \text{ €} = 150 \text{ €}$
 $0,08 \times 150 = 12 \text{ €}$
 Vai pagar 12 € de imposto.
- 3.** $24\ 000 \text{ €} : 2 = 12\ 000 \text{ €}$ (rendimento coletável)
 Taxa de IRS: 28,50%
 Parcela a abater: 980 €
 $12\ 000 \text{ €} \times 0,285 - 980 \text{ €} = 2440 \text{ €}$ $2440 \text{ €} \times 2 = 4880 \text{ €}$
 Valor de IRS: 4880 €
- 4.** Taxa da cilindrada: 56,50 €
 Taxa das emissões de CO₂: 57,76 €
 Coeficiente do ano de matrícula: 1,15
 $56,50 \text{ €} + 57,76 \text{ €} = 114,26 \text{ €}$
 $1,15 \times 114,26 \approx 131,40 \text{ €}$
 Valor do IUC: 131,40 €
- 5.** Braga: 0,35% (taxa de IMI)
 $\frac{0,35}{100} \times 165\ 000 = 577,50 \text{ €}$
 Valor de IMI: 577,50 €
- 6.** Valor total do cabaz (2029): 1760 €
 Valor total do cabaz (2030): 2070 €
 $\text{IPC}(2030) = \frac{2070}{1760} \times 100 \approx 117,6$
 O IPC, em 2030, será de, aproximadamente, 117,6.
- 7.** Taxa de inflação: $\frac{103,2 - 101,6}{101,6} \times 100 \approx 1,57\%$
 A taxa de inflação é de, aproximadamente, 1,57%.

3.2. Aplicações financeiras

Pág. 288

- 1.1.** $0,08 \times 400 \text{ €} = 32 \text{ €}$
 $6 \times 32 \text{ €} = 192 \text{ €}$
 Ao fim de meio ano teria 192 €.
- 1.2.** 2 anos $\rightarrow$ 24 meses
 $24 \times 32 \text{ €} = 768 \text{ €}$
 $768 \text{ €} + 400 \text{ €} = 1168 \text{ €}$
 Terá, no total, 1168 €.
- 2.1.** $0,05 \times 2000 \text{ €} = 100 \text{ €}$
 $2000 \text{ €} + 100 \text{ €} = 2100 \text{ €}$
 Devia 2100 €.
- 2.2.** $0,10 \times 2100 \text{ €} = 210 \text{ €}$
 $2100 \text{ €} + 210 \text{ €} = 2310 \text{ €}$
 Devia 2310 €.
- 3.1.** Não, pois como podemos constatar a seguir, um aumento de 12% não é o mesmo que um aumento de 4% seguido de um de 8%.
- 1.º ano
 $800 \text{ €} + 0,04 \times 800 \text{ €} = 832 \text{ €}$ (aumento de 4%)
- 2.º ano
 $832 \text{ €} + 0,08 \times 832 \text{ €} = 898,56 \text{ €}$ (aumento de 8%)
 Se o aumento fosse de 12%, teríamos:
 $800 \text{ €} + 0,12 \times 800 \text{ €} = 896 \text{ €}$
- 3.2.** Pela alínea anterior, o salário no final do 2.º ano era de 898,56 €. Assim, a percentagem de aumento é dada por:
- $$\frac{898,56 - 800}{800} \times 100 = 12,32\%$$
- O Fonseca foi aumentado, em dois anos, 12,32%.

Pág. 291

- 18.1.** $n = \frac{90}{365}$; $i = 0,04$; $C_0 = 15\ 000$
 Juros: $C_0 \times i \times n$
 $15\ 000 \text{ €} \times 0,04 \times \frac{90}{365} \approx 147,95 \text{ €}$
 Juros recebidos: 147,95 €
- 18.2.** $15\ 000 + 147,95 = 15\ 147,95$
 Terá na conta 15 147,95 €.
- 18.3.** Como faltam $365 - 90 = 275$ dias para perfazer 1 ano, então:
 $n = \frac{275}{365}$; $i = 0,04$; $C_0 = 15\ 147,95$
 Assim, $C_{\frac{275}{365}} = 15\ 147,95 \times \left(1 + 0,04 \times \frac{275}{365}\right) \approx 15\ 604,46$
 Ao fim de um ano terá 15 604,46 €.

Pág. 292

- 19.1.** $C_0 = 10\ 000$; $i = 0,035$; $C_n = 10\ 000 + 96 = 10\ 096$; $n = ?$
 $10\ 096 = 10\ 000 \times (1 + 0,035n) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 10\ 096 = 10\ 000 + 350n \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n = \frac{10\ 096 - 10\ 000}{350}$
 $\Leftrightarrow n = \frac{96}{350}$ Logo, $n \approx 0,2743$
 Em dias: $0,2743 \times 365 \approx 100$
 Período de capitalização: 100 dias

19.2. $i = 0,20$; $n = \frac{9}{12}$; $C_9 = 575$; $i = ?$

$$575 = C_0 \left(1 + 0,20 \times \frac{9}{12} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_0 = \frac{575}{1 + 0,20 \times \frac{9}{12}} \Leftrightarrow C_0 = 500$$

O empréstimo foi de 500 euros.

Pág. 293

20. $C_0 = 2000$; $n = \frac{3}{12}$; $C_3 = 2040$; $i = ?$

$$2040 = 2000 \times \left(1 + i \times \frac{3}{12} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + i \times \frac{3}{12} = \frac{2040}{2000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i = \left(\frac{2040}{2000} - 1 \right) \times \frac{12}{3} \Leftrightarrow i = 0,08$$

A taxa de juro anual utilizada é de 8% .

Pág. 295

21. $i = 0,02$; $C_0 = 4500$

21.1.
 $n = 1$

$$C_1 = 4500 \times (1 + 0,02)^1 = 4590$$

$$4590 \text{ €}$$

21.3. $n = 20$

$$C_{20} = 4500 \times (1 + 0,02)^{20} \approx 6686,76$$

$$6686,76 \text{ €}$$

22.

$$C_0 = 8000$$

$$i = 0,20$$

$$n = ?$$

$$C_n = 2 \times 8000 = 16\,000$$

21.2.

$$n = 5$$

$$C_5 = 4500 \times (1 + 0,02)^5 \approx 4968,36$$

$$4968,36 \text{ €}$$

$$16\,000 = 8000 \times (1 + 0,20)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,20^n = \frac{16\,000}{8000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,20^n = 2$$

(esta equação exponencial será resolvida graficamente no 11.º ano)

Por tentativas:

$$n = 1 \rightarrow 1,20^1 = 1,20$$

$$n = 2 \rightarrow 1,20^2 = 1,44$$

$$n = 3 \rightarrow 1,20^3 = 1,728$$

$$n = 4 \rightarrow 1,20^4 = 2,0736$$

Assim, $n \approx 4$.

Serão necessários 4 anos.

Pág. 297

23. $C_0 = 5000$; $n = 3$; $i = 0,06$

23.1. $C_3 = 5000 \times (1 + 0,06)^3 = 5955,08$

A pagar: 5955,08 €

23.2. $k = 3$

$$C_3 = 5000 \times \left(1 + \frac{0,06}{3} \right)^{3 \times 3} \approx 5975,46$$

A pagar: 5975,46 €

23.3. $k = 4$

$$C_3 = 5000 \times \left(1 + \frac{0,06}{4} \right)^{4 \times 3} \approx 5978,09$$

A pagar: 5978,09 €

23.4. $k = 365$

$$C_3 = 5000 \times \left(1 + \frac{0,06}{365} \right)^{365 \times 3} \approx 5986$$

A pagar: 5986,00 €

24.

$$i = 0,035$$

$$k = 2$$

$$C_2 = 12\,230$$

$$C_0 = ?$$

$$12\,230 = C_0 \left(1 + \frac{0,035}{2} \right)^{2 \times 10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\,230 = C_0 \times 1,0175^{20}$$

$$\Leftrightarrow C_0 = \frac{12\,230}{1,0175^{20}}$$

Assim, $C_0 \approx 8644,46$.

Capital inicial: 8644,46 €

Pág. 299

25. 3 anos $\rightarrow 3 \times 12 = 36$ meses

$$\frac{5000 \text{ €}}{36} \approx 138,89 \text{ € (por mês)} \rightarrow \text{valor sem juros}$$

$$\text{Juros} \rightarrow 5000 \text{ €} \times \frac{0,12}{12} = 50 \text{ € (por mês)}$$

Valor mensal: $138,89 + 50 = 188,89$

Prestação mensal: 188,89 €

Pág. 300

26.1. • Primeiros 4 anos

$$70\,000 \text{ €} \times \frac{0,045}{12} = 262,50 \text{ € (por mês)}$$

• Depois do 4.º ano

$$20 - 4 = 16 \text{ anos} \rightarrow 16 \times 12 = 192 \text{ meses}$$

Assim, durante 192 meses paga, por mês:

$$\frac{70\,000 \text{ €}}{192} + 262,50 \text{ €} \approx 627,08 \text{ €}$$

Primeiros quatro anos: 262,50 € por mês

Depois do 4.º ano: 627,08 € por mês

26.2. Total de juros: 262,50 € (pela alínea 26.1.) por mês, durante 20 anos, ou seja, 240 meses.

$$240 \times 262,50 \text{ €} = 63\,000 \text{ €}$$

Total de juros: 63 000 €

Pág. 302

27.1. $0,50 \times 400 \text{ €} = 200 \text{ €}$

Valor debitado: 200 €

27.2. $\frac{0,30}{365} \times 30 \times 200 \text{ €} \approx 4,93 \text{ €}$

Valor dos juros: 4,93 €

Pág. 303

28.

Ano	Valor no início do ano (€)	Desvalorização ao longo do ano (€)	Percentagem de desvalorização relativamente ao valor de compra
1.º	12 000,00	1 440,00	12%
2.º	10 560,00	1 584,00	25,2%
3.º	8 976,00	2 692,80	47,64%
4.º	6 283,20	1 884,96	63,348%

Pág. 304

29. 1.º ano

$$0,05 \times 10\,000 \text{ €} = 500 \text{ €}$$

2.º ano

$$\text{Lucros} \rightarrow 10\,000 \text{ €} + 0,12 \times 10\,000 \text{ €} = 11\,200 \text{ €}$$

$$\text{Investimento} \rightarrow 0,05 \times 11\,200 \text{ €} = 560 \text{ €}$$

3.º ano

$$\text{Lucros} \rightarrow 11\,200 \text{ €} + 0,12 \times 11\,200 \text{ €} = 12\,544 \text{ €}$$

$$\text{Investimento} \rightarrow 0,05 \times 12\,544 \text{ €} = 627,20 \text{ €}$$

Investimento em publicidade:

$$500 \text{ €} + 560 \text{ €} + 627,20 \text{ €} = 1687,20 \text{ €}$$

Pág. 306

30.

$$\begin{array}{l|l} C_0 = 4250 & C_n = C_0 (1 + in) \\ i = 0,05 & \\ n = \frac{181}{365} & C_{\frac{181}{365}} = 4250 \times \left(1 + 0,05 \times \frac{181}{365}\right) \\ C_n = ? & \approx 4355,38 \text{ (euros)} \end{array}$$

$$\text{Juros: } 4355,38 - 4250 = 105,38$$

ou, de forma mais simples:

$$\text{Juros: } C_0 \times i \times n$$

$$4250 \times 0,05 \times \frac{181}{365} \approx 105,38$$

Juro recebido ao fim de 181 dias: 105,38 €

31.

$$\begin{array}{l|l} C_0 = 50\,000 & 65\,000 = 50\,000 \times (1 + 0,10n) \\ i = 0,10 & \Leftrightarrow 65\,000 = 50\,000 \times 5000n \\ C_n = 65\,000 & \Leftrightarrow n = \frac{65\,000 - 50\,000}{5000} \\ n = ? & \Leftrightarrow n = 3 \end{array}$$

O prazo é de 3 anos.

32.1.

$$\begin{array}{l|l} C_0 = 25\,000 & \text{Juro: } C_0 (1 + i)^n - C_0 \\ n = 1 & \text{ou seja,} \\ i = 0,06 & 25\,000 \times (1 + 0,06)^1 - 25\,000 = 1500 \end{array}$$

Juros a acrescentar ao capital: 1500 €

32.2. $C_3 = 25\,000 \times (1 + 0,06)^3$

$$= 29\,775,40$$

Terá 29 775,40 €.

33.1. Regime de Capitalização Simples

33.2. Juro anual: $10\,000 \text{ €} \times 0,04 = 400 \text{ €}$

$$\text{Juros ao fim de 8 anos: } 8 \times 400 \text{ €} = 3200 \text{ €}$$

Capital acumulado:

$$100\,000 + 3200 = 103\,200 \text{ (euros)}$$

ou, usando modelo RCS

$$C_8 = 10\,000 \times (1 + 0,04 \times 8) = 103\,200 \text{ (euros)}$$

Capital ao fim de 8 anos: 103 200 €

34.1. $C_0 = 550$; $n = 6$; $i = 0,16$

$$C_6 = 550 \times (1 + 0,16 \times 6) = 1078$$

1078 €

34.2. $C_6 = 550 \times (1 + 0,16)^6 \approx 1340,02$

1340,02 €

35.

$$\begin{array}{l|l} C_0 = 750 & 9075,23 = 750 \times (1 + 0,12)^n \\ i = 0,12 & \Leftrightarrow 9075,23 = 750 \times 1,12^n \\ C_n = 9075,23 & \Leftrightarrow 1,12^n = \frac{9075,23}{750} \\ n = ? & \end{array} \quad \boxed{\text{Nota: } \frac{9075,23}{750} \approx 12,1}$$

Vamos procurar n compreendido entre $\sqrt{441}$ e $\sqrt{625}$, ou seja, entre 21 e 25.• Para $n = 21$, $1,12^{21} \approx 10,8 \times$ • Para $n = 22$, $1,12^{22} \approx 12,1 \checkmark$ Assim, $n = 22$.

Ao fim de 22 anos.

36.

$$\begin{array}{l|l} 0,10 \leq i \leq 0,15 & 20\,380,06 = 400 \times (1 + i)^{30} \\ n = 30 & \Leftrightarrow (1 + i)^{30} = \frac{20\,380,06}{400} \\ C_0 = 400 & \\ C_n = 20\,380,06 & \Leftrightarrow (1 + i)^{30} = 50,950\,15 \end{array}$$

Vamos procurar um valor de i compreendido entre 0,10 e 0,15.• Para $i = 0,10$: $(1 + 0,10)^{30} \approx 17,45$ • Para $i = 0,13$: $(1 + 0,13)^{30} \approx 39,12$ • Para $i = 0,14$: $(1 + 0,14)^{30} \approx 50,95$ Assim, $i = 0,14$.

A taxa de juro é de 14%.

37.1.

$$\begin{array}{l|l} C_0 = 1000 \text{ €} & C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} \\ i = 0,02 & \\ n = 3 & C_3 = 1000 \times \left(1 + \frac{0,02}{2}\right)^{2 \times 3} \approx 1061,52 \text{ (euros)} \\ k = 2 & \end{array}$$

Capital acumulado: 1061,52 €

37.2. $C_5 - C_0 = 1000 \times \left(1 + \frac{0,02}{2}\right)^{2 \times 5} - 1000$

$$\approx 1104,62 - 1000$$

$$= 104,62$$

Juro total: 104,62 €

Pág. 307

38.1. $C_0 = 15\,000$; $i = 0,16$; $n = 4,5$; $k = 12$

$$C_{4,5} = 15\,000 \times \left(1 + \frac{0,16}{12}\right)^{12 \times 4,5} \approx 30\,670,23 \text{ (euros)}$$

38.2. $k = 4$

$$C_{4,5} = 15\,000 \times \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{4 \times 4,5} \approx 30\,387,25 \text{ (euros)}$$

39.

$$\begin{array}{l|l} i = 0,06 & 20\,000 = C_0 \times (1 + 0,06 \times 1) \\ C_1 = 20\,000 & \Leftrightarrow 20\,000 = C_0 \times 1,06 \\ C_0 = ? & \Leftrightarrow C_0 = \frac{20\,000}{1,06} \\ & C_0 \approx 18\,867,92 \end{array}$$

O depósito deverá ser 18 867,92 € .

40. $i = 0,10$ trimestral ; n representa, aqui, o n.º de trimestres

$$C_n = C_0 (1 + in)$$

$$C_n = 4 C_0, \text{ logo, } 4 C_0 = C_0 (1 + 0,10n)$$

$$\Leftrightarrow 4 = 1 + 0,10n$$

$$\Leftrightarrow 0,10n = 3$$

$$\Leftrightarrow n = 30 \text{ (trimestres)}$$

30 trimestres são 7,5 anos.

Ao fim de sete anos e meio.

41. $C_0 = 2400$ € ; $n = 5$ anos = 20 trimestres ; $C_{20} = 3000$ €

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

$$3000 = 2400 \times (1 + i)^{20}$$

$$\Leftrightarrow (1 + i)^{20} = \frac{3000}{2400}$$

$$\Leftrightarrow (1 + i)^{20} = 1,25$$

Assim, $1 + i = \sqrt[20]{1,25}$, ou seja, $i = \sqrt[20]{1,25} - 1 \approx 0,0112$.

Foi aplicada uma taxa de juro de 1,12% .

42. • Dia 2 de junho:

$$10\,000 + 0,05 \times 10\,000 = 1,05 \times 10\,000 = 10\,500 \text{ (€)}$$

• Dia 3 de junho:

$$10\,500 - 0,05 \times 10\,500 = 0,95 \times 10\,500 = 9975 \text{ (€)}$$

Ficou com 9975 € .

43. Banco A

$$C_1 = 600 \times (1 + 0,04 \times 1) = 624 \text{ €}$$

Banco B

 $(n = 2 \text{ semestres} = 1 \text{ ano})$

$$C_2 = 600 \times (1 + 0,02 \times 2) = 624 \text{ €}$$

Banco C

$$C_1 = 1000 \times (1 + 0,06 \times 1) = 1060 \text{ €}$$

A Joana empresta 1000 € – 600 € = 400 € .

$$C_1 = 400 \times (1 + 0,03 \times 1) = 412 \text{ €}$$

O Fábio “recebe” 1060 € do banco, mas tem de pagar 412 € à Joana, pelo empréstimo.

Fica, assim, com 1060 € – 412 € = 648 € .

A melhor opção é o Banco C .

44.1. 2010: Juros $\rightarrow 0,06 \times 1200 \text{ €} = 72 \text{ €}$ 2011: Juros $\rightarrow 0,058 \times 1500 \text{ €} = 87 \text{ €}$

Capital acumulado:

$$1200 \text{ €} + 1500 \text{ €} + 72 \text{ €} + 87 \text{ €} = 2859 \text{ €}$$

44.2. Juros 2012: $0,053 \times 2500 \text{ €} = 132,50 \text{ €}$

Juros acumulados:

$$72 \text{ €} + 87 \text{ €} + 132,50 \text{ €} = 291,50 \text{ €}$$

44.3. Juros 2013: $0,051 \times 3000 \text{ €} = 153 \text{ €}$ Juros 2014: $0,048 \times 4000 \text{ €} = 192 \text{ €}$

Total de juros, em euros:

$$72 + 87 + 132,50 + 153 + 192 = 636,50$$

Depósitos, em euros:

$$1200 + 1500 + 2500 + 3000 + 4000 = 12\,200$$

$$\text{Total: } 636,50 \text{ €} + 12\,200 \text{ €} = 12\,836,50 \text{ €}$$

Pág. 308

45. Banco Verde

$$365 \times 0,80 \text{ €} = 292 \text{ €}$$

(juro anual pago por um empréstimo de 1000 €)

Banco Azul

$$C_1 = 1000 \times (1 + 0,22 \times 1) = 1220 \text{ €}$$

(paga 1220 – 1000 = 220 euros de juro anual pelo empréstimo de 1000 €)

Deverá recorrer ao Banco Azul.

46. $C_0 = 6000$; $n = \frac{180}{365}$, $i = 0,15$

Ao fim de 180 dias, receberia:

$$C_{\frac{180}{365}} = 6000 \times \left(1 + 0,15 \times \frac{180}{365}\right) \approx 6443,84 \text{ (euros)}$$

Como o banco “comprou” o cheque passados 30 dias, então ficam a faltar 150 dias para terminar o prazo.

$$6443,84 = 6000 \times \left(1 + i \times \frac{150}{365}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + i \times \frac{150}{365} = \frac{6443,84}{6000}$$

$$\Leftrightarrow i = \left(\frac{6443,84}{6000} - 1\right) \times \frac{365}{150} \quad \text{Então, } i \approx 0,18$$

O banco cobra uma taxa de 18% .

47.1. $i = \frac{5}{100} = 0,05$; $C = 5000$; $n = 10$

$$M = 5000 \times (1 + 0,05) \frac{(1 + 0,05)^{10} - 1}{0,05} \approx 66\,033,94$$

$$66\,033,94 \text{ €}$$

47.2.

$$\begin{array}{l|l} C = ? & 10\,000 = C(1 + 0,08) \frac{(1 + 0,08)^5 - 1}{0,08} \\ M = 10\,000 & \\ i = \frac{8}{100} = 0,08 & \Leftrightarrow C = \frac{10\,000}{(1 + 0,08) \frac{(1 + 0,08)^5 - 1}{0,08}} \\ n = 5 & \end{array}$$

$$C \approx 1578,30 \text{ €}$$

48. $6 \text{ anos} = 6 \times 12 = 72 \text{ meses}$
 $\frac{17\,000}{72} \approx 236,11 \text{ euros (valor proporcional ao empréstimo)}$

Juros a pagar

$$17\,000 \times \frac{0,20}{12} \approx 283,33 \text{ (euros)}$$

$$\text{Total: } 236,11 \text{ €} + 283,33 \text{ €} = 519,44 \text{ €}$$

$$\text{Prestação mensal: } 519,44 \text{ €}$$

49.1. Cada uma das percentagens incide sobre valores diferentes, por isso a sua soma é 105%.

49.2.

Ano	Valor no início do ano	Desvalorização ao longo do ano	Valor no final do ano	Percentagem de desvalorização
1.º	40 000 €	10 000 €	30 000 €	25%
2.º	30 000 €	12 000 €	18 000 €	55%
3.º	18 000 €	7 200 €	10 800 €	73%

Pág. 309

1. $C_0 = 35\,000$; $i = 0,04$ (anual) ; $n = 1$ ano

1.1. $k = 12$ meses

$$C_1 = 35\,000 \times \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{12 \times 1} \approx 36\,425,95 \text{ €}$$

1.2. $k = 2$ semestres

$$C_1 = 35\,000 \times \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{2 \times 1} = 36\,414 \text{ €}$$

2.1. $C_0 = 7600$; $i = 0,065$ (anual) ; $n = 7$

RCS

$$C_7 = 7600 \times (1 + 0,065 \times 7) = 11\,058 \text{ €}$$

2.2. $C_0 = 7600$; $i = 0,065$ (anual) ; $n = 7$

RCC

$$C_7 = 7600 \times (1 + 0,065)^7 \approx 11\,810,30 \text{ €}$$

3.1. Juros: $90\,000 \text{ €} \times \frac{0,062}{12} = 465 \text{ €}$ (por mês)

3.2. $30 \text{ anos} = 360 \text{ meses}$

$$\frac{90\,000 \text{ €}}{360} = 250 \text{ €}$$

$$\text{Prestação mensal: } 465 \text{ €} + 250 \text{ €} = 715 \text{ €}$$

3.3. 715 € por mês, durante 30 anos (360 meses):

$$360 \times 715 \text{ €} = 257\,400 \text{ €}$$

4.1. $0,30 \times 350 \text{ €} = 105 \text{ €}$

4.2. Como já foram liquidados 105 € da dívida, restam $350 - 105 = 245 \text{ euros}$ por pagar.

$$\text{Valor dos juros a pagar: } \frac{0,25}{365} \times 30 \times 245 \text{ €} \approx 5,03 \text{ €}$$

5. $n = \frac{240}{365}$

$$C_{\frac{240}{365}} = 600 \times \left(1 + 0,15 \times \frac{240}{365}\right) \approx 659,18 \text{ €}$$

(valor do cheque aos 240 dias)

$$240 - 90 = 150 \text{ dias}$$

$$C_{\frac{150}{365}} = 659,18 \text{ , ou seja:}$$

$$659,18 = 610 \times \left(1 + i \times \frac{150}{365}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + i \times \frac{150}{365} = \frac{659,18}{610}$$

$$\Leftrightarrow i = \left(\frac{659,18}{610} - 1\right) \times \frac{365}{150} \quad \text{Então, } i \approx 0,2 \text{ .}$$

O banco estabelece, como taxa de juro, 20%.

3.3. Tarifários

Pág. 310

- 1.1. a) Nota: Os 40 € não entram nos cálculos pois o valor é devolvido ao fim do 1.º ano.

1 ano e meio = 18 meses

$$18 \times 38,40 \text{ €} = 691,20 \text{ €}$$

- b) Ao fim de 11 meses:

$$40 \text{ €} + 11 \times 38,40 = 462,40 \text{ €}$$

Ao fim de 12 meses:

$$12 \times 38,40 \text{ €} = 460,80 \text{ €}$$

Acaba por pagar menos se ficar no ginásio 12 meses, pois o valor da “inscrição + seguro” é devolvido.

- 1.2. 1 ano = 12 meses

TOPFITS → 460,80 € (alínea anterior)

GYMPOW →

1 ano = 52 semanas (não convém calcular com base no pressuposto de um mês ter 4 semanas. Um mês tem, em média, aproximadamente 4,3 semanas.)

$$52 \times 9,20 \text{ €} - 9,20 \text{ €} + 35 \text{ €} = 504,20 \text{ €}$$

(oferta)

Mais vantajosa: alternativa TOPFITS

- 1.3. $\frac{1}{2}$ ano $\xrightarrow{(6 \text{ meses})}$ $6 \times 38,40 \text{ €} + 40 \text{ €} = 270,40 \text{ €}$ (TOPFITS)

$$\xrightarrow{(26 \text{ semanas})} 26 \times 9,20 \text{ €} - 9,20 \text{ €} + 35 \text{ €} = 265 \text{ €}$$
 (GYMPOW)

Não, a melhor alternativa passa a ser o ginásio GYMPOW.

- 1.4. 2 anos

$$\text{TOPFITS: } 24 \times 38,40 \text{ €} = 921,60 \text{ €}$$

$$\text{GYMPOW: } 104 \times 9,20 \text{ €} - 9,20 \text{ €} + 35 \text{ €} = 982,60 \text{ €}$$

A melhor opção é o ginásio TOPFITS.

2. Anualmente:

$$4 \times 40 \text{ €} + 12 \times 20 \text{ €} + 60 \text{ €} + 12 \times 350 \text{ €} = 4660 \text{ €}$$

↑ ↑ ↑ ↑
Elevador Limpeza Outras despesas Renda

$$\text{Média mensal: } \frac{4660 \text{ €}}{12} \approx 388,33 \text{ €}$$

Em média gastará 388,33 € por mês.

Pág. 312

50. Tarifário 1

$$\text{SMS: } 30 \times 0 \text{ €} = 0 \text{ €}$$

Chamadas:

$$10 \times 1 \times 0,10 \text{ €} + 10 \times 5 \times 0,05 \text{ €} + 3 \times 2 \times 0,50 \text{ €} = 6,50 \text{ €}$$

Tarifário 2

$$\text{SMS: } 30 \times 0 \text{ €} = 0 \text{ €}$$

$$\text{Chamadas: } 10 \times 6 \times 0,08 + 3 \times 2 \times 0,20 = 6,00 \text{ €}$$

Deve escolher o tarifário 2.

Pág. 313

- 51.1. 4,60 kVA → 6,03 €

$$32 \text{ kWh} \times 0,1528 \text{ €} \approx 4,89 \text{ €}$$

$$6,03 \text{ €} + 4,89 \text{ €} = 10,92 \text{ €} \xrightarrow{+ \text{IVA (23\%)}} 1,23 \times 10,92 \approx 13,43$$

Paga 13,43 €.

- 51.2. $12,96 \text{ €} + 30 \times 0,1543 \text{ €} = 17,589 \text{ €}$

$$\xrightarrow{+ \text{IVA (23\%)}} 1,23 \times 17,589 \approx 21,634 \text{ 47}$$

Desconto mensal de 5%:

$$0,95 \times 21,634 \text{ 47 €} = 20,552 \text{ 746 5 €}$$

Anual:

$$12 \times 20,552 \text{ 746 5 €} \approx 246,63 \text{ €}$$

Pagará 246,63 €.

Pág. 314

52. Número de pessoas: $42 + 4 = 46$

Hipótese A

$$\frac{310 \text{ €} + 46 \times 4 \text{ €}}{46} \approx 10,74 \text{ €}$$

Hipótese B

Número de quilómetros: $175 \text{ km} \times 2 + 60 \text{ km} = 410 \text{ km}$

$$\frac{100 \text{ €} + 410 \times 0,04 \text{ €} + 161 \text{ €} + 46 \times 1 \text{ €}}{46} \approx 7,03 \text{ €}$$

A opção mais económica é a hipótese B.

Hipótese A: 10,74 € por pessoa

Hipótese B: 7,03 € por pessoa

Pág. 316

- 53.1. Não é possível, pois está obrigado a uma fidelização de 12 meses.

- 53.2. $11 \times 34,50 \text{ €} + 12 \times 3,50 \text{ €} = 421,50 \text{ €}$

Vai pagar 421,50 €.

- 54.1. Primavera: 750 €

$$\text{Inverno: } 750 \text{ €} + 3500 \text{ €} = 4250 \text{ €}$$

$$750 \text{ €} \text{ ----- } 100\%$$

$$3500 \text{ €} \text{ ----- } x \quad x = \frac{3500 \times 100}{750} \approx 466,67\%$$

ou

$$\frac{4250 - 750}{750} \times 100 \approx 466,67\%$$

Gasta a mais, aproximadamente, 466,67%.

- 54.2. $16\,000 \text{ €} - 0,30 \times 16\,000 \text{ €} = 11\,200 \text{ €}$ (valor anual)

$$\frac{30\,000}{11\,200} \approx 2,7 \text{ anos}$$

O investimento terá retorno ao fim de três anos.

- 55.1. Ao pagar com cartão de débito: 71,49 €

$$72,92 \text{ €} - 71,49 \text{ €} = 1,43 \text{ €} \text{ (valor do desconto)}$$

$$\frac{1,43 \text{ €}}{72,92 \text{ €}} \times 100 \approx 2\%$$

Desconto: 2%

- 55.2. $40,99 \text{ €} \rightarrow 72,92 \text{ €}$

$$\frac{72,92 - 40,99}{40,99} \times 100 \approx 77,9\%$$

Aumento: 77,9%

- 55.3. $72,92 \text{ €} \text{ ----- } 123\%$

$$x \text{ ----- } 100\% \quad x = \frac{72,92 \text{ €} \times 100}{123} \approx 59,28 \text{ €}$$

Preço da viagem sem imposto: 59,28 €

56. $10 \times 8 \text{ €} + 0,25 \times 8 \text{ €} + 10 \text{ €} + 24 \text{ €} + 10 \times 5 \text{ €} = 166 \text{ €}$

Pág. 317

57.1. $15 \times 48 \text{ €} - 659 \text{ €} = 61 \text{ €}$

Poupará 61 €.

57.2. $695 \text{ €} \text{ ----- } 100\%$

$61 \text{ €} \text{ ----- } x \quad x = \frac{61 \times 100}{659} \approx 9,3\%$

Pagará a mais, aproximadamente, 9,3%.

57.3. Não, pois o cliente acaba por pagar mais 9,3% (alínea anterior) do valor da TV. Podemos dizer que os 9,3% representam a taxa de juro cobrada ao cliente por não ter pago a pronto.

58. Se comprasse *online*, pagaria $199 - 0,10 \times 199 = 179,10 \text{ €}$.

A 24,40 €/mês, o valor do *smartphone* é alcançado ao fim de:

$$\frac{179,10}{24,40} \approx 7,3 \text{ meses}$$

O *smartphone* pode-se considerar pago ao fim de oito meses.

59.

1.º ano: 165 €

2.º ano: 165 €

3.º ano: 165 €

4.º ano: $0,85 \times 165 \text{ €} = 140,25 \text{ €}$

5.º ano: 140,25 €

...

Por tentativa e erro:

Ao fim de 6 anos:

$$6 \times 156 \text{ €} = 936 \text{ €}$$

$$3 \times 165 \text{ €} + 3 \times 140,25 \text{ €} = 915,75 \text{ €} \quad (\text{já compensa})$$

Ao fim de 5 anos:

$$5 \times 156 \text{ €} = 780 \text{ €}$$

$$3 \times 165 \text{ €} + 2 \times 140,25 \text{ €} = 775,50 \text{ €} \quad (\text{já compensa})$$

Será que ao fim de 4 anos já compensa?

$$4 \times 156 \text{ €} = 624 \text{ €}$$

$$3 \times 165 \text{ €} + 140,25 \text{ €} = 635,25 \text{ €} \quad (\text{não compensa})$$

A partir do 5.º ano, inclusive.

60. $5 \text{ m}^3 \rightarrow 5 \times 0,49 \text{ €} = 2,45 \text{ €}$

Excesso: $3 \text{ m}^3 \rightarrow 3 \times 0,64 \text{ €} = 1,92 \text{ €}$

Total: $2,45 \text{ €} + 1,92 \text{ €} + 8 \times 0,021 \text{ €} + 8 \times 0,43 \text{ €} \approx 7,98 \text{ €}$

Fatura mensal: 7,98 €

Pág. 318

61. Modalidade A: 1 bilhete de adulto Menu

$$6,50 \text{ €} + 5,60 \text{ €} = 12,10 \text{ €}$$

Modalidade B: 2 bilhetes de estudante

$$2 \times 5,10 \text{ €} = 10,20 \text{ €}$$

A modalidade mais económica é a B.

62. • Pagamento único anual:

Lídia $\rightarrow 30 \text{ €} + 11 \times 60 \text{ €} = 690 \text{ €}$

Filho $\rightarrow 30 \text{ €} + \underbrace{11}_{\text{oferta de uma mensalidade}} \times \underbrace{0,90 \times 45 \text{ €}}_{\text{desconto de 10\%}} = 475,50 \text{ €}$

Total anual: $690 \text{ €} + 475,50 \text{ €} = 1165,50 \text{ €}$

• Pagamento mensal:

Lídia $\rightarrow 30 \text{ €} + 12 \times 60 \text{ €} = 750 \text{ €}$

Filho $\rightarrow 30 \text{ €} + 12 \times 0,90 \times 45 \text{ €} = 516 \text{ €}$

Total anual: $750 \text{ €} + 516 \text{ €} = 1266 \text{ €}$

Valor total pago para a:

• opção pagamento único: 1165,50 €

• opção pagamento mensal: 1266 €

63. Chamadas para:

• William: $5 \times 0,458 \text{ €} = 2,29 \text{ €}$ (Zona 2/fins de semana)

• Ricardo: $5 \times 0,496 \text{ €} = 2,48 \text{ €}$ (Zona 1)

• Júlia: $5 \times 0,623 \text{ €} = 3,115 \text{ €}$ (Zona 3)

• Concha: $5 \times 1,567 \text{ €} = 7,835 \text{ €}$ (Zona 4)

Total: $2,29 \text{ €} + 2,48 \text{ €} + 3,115 \text{ €} + 7,835 \text{ €} = 15,72 \text{ €}$

Gasta 15,72 €.

Pág. 319

1. • Primeiros seis meses: $6 \times 29,90$

• Do 7.º ao 24.º mês: $18 \times 40,50$

• Aluguer da *box*: $24 \times 5,50$

Total: $6 \times 29,90 + 18 \times 40,50 + 24 \times 5,50 = 1040,40 \text{ €}$

Ao fim de dois anos paga 1040,40 €.

2. Tarifário “Tudo ao Molho”

Hora	Custo / €
08:15	$\frac{120}{60} \times 0,10 = 0,20$
11:35	0,30
16:24	$0,30 + \frac{(76-60)}{60} \times 0,12 \approx 0,33$
21:15	0,10
23:57	$\frac{210}{60} \times 0,10 = 0,35$
00:10	$\frac{675}{60} \times 0,10 \approx 1,13$
06:30	$\frac{222}{60} \times 0,10 = 0,37$
09:34	$0,30 + \frac{(198-60)}{60} \times 0,12 \approx 0,58$
15:22	0,30
Total	3,66

Tarifário “Habla Mucho”

Rede	Hora	Custo / €
Hello	08:15	$\frac{120}{30} \times 0,02 = 0,08$
Hello	11:35	0,25
Outra rede	16:24	$0,50 + \frac{(76-60)}{60} \times 0,18 \approx 0,55$
Hello	21:15	$2 \times 0,02 = 0,04$
Outra rede	23:57	$\frac{210}{60} \times 0,15 \approx 0,53$
Hello	00:10	$\frac{675}{30} \times 0,02 = 0,45$
Outra rede	06:30	$\frac{222}{60} \times 0,15 \approx 0,56$
Hello	09:34	$0,25 + \frac{(198-60)}{60} \times 0,05 \approx 0,37$
Outra rede	15:22	0,50
Total		3,33

Tarifário “Tudo ao Molho”: paga 3,66 € por semana.

Tarifário “Habla Mucho”: paga 3,33 € por semana.

3. • $6 \times 25 \text{ €} = 150 \text{ €}$ (mensalidades)

• $0,40 \times 25 \text{ €} = 10 \text{ €}$ (taxa de inscrição)

• $6 \times 5 \text{ €} = 30 \text{ €}$ (fotocópias)

• 30 € (diploma)

Total: $150 + 10 + 30 + 30 = 220$

Vai gastar 220 €.

Exercícios tipo exame

Pág. 320

- 1.1.** IRS (18,5%) : $0,185 \times 1481,82 \text{ €} \approx 274,14 \text{ €}$
 SS (11%) : $0,11 \times 1481,82 \text{ €} \approx 163 \text{ €}$
 $1481,82 \text{ €} - (274,14 + 163 + 485) \text{ €} = 559,68 \text{ €}$
 Sobretaxa (3,5%) : $0,035 \times 559,68 \text{ €} \approx 19,59 \text{ €}$
 Assim,
 IRS (S): 19,59 € Total a receber:
 IRS (18,5%): 274,14 € 1572,75 € - 456,73 € =
 SS (11%): 163 € = 1116,02 €
 Total de descontos: 456,73 €
 Total a receber: 1116,02 €
- 1.2.** Total de abonos (€): $750 + 90,93 = 840,93$
 IRS (18,5%) (€): $0,185 \times 750 = 138,75$
 SS (11%) (€): $0,11 \times 750 = 82,50$
 IRS (S) (€): $750 - (138,75 + 82,50 + 485) = 43,75$
 Sobretaxa (3,5%) (€): $0,035 \times 43,75 \approx 1,53$
 Total de descontos (€): $138,75 + 82,50 + 1,53 = 222,78$
 Total a receber: $840,93 \text{ €} - 222,78 \text{ €} = 618,15 \text{ €}$
 Receberia 618,15 €.

- 2.1.** $0,05 \text{ h} = 0,05 \times 60 \text{ min} = 3 \text{ min}$
 1,05 horas $\rightarrow$ 1 h 3 min
 A reparação demorou 1 h e 3 min.

- 2.2.** 45,60 € (valor sem IVA)
 $0,23 \times 45,60 \text{ €} \approx 10,49 \text{ €}$ (valor do IVA)
 $45,60 \text{ €} + 10,49 \text{ €} = 56,09 \text{ €}$ (valor com IVA)
 Pagou 56,09 €.

Pág. 321

- 3.1.** Rendimento coletável: $18\,450 \text{ €} : 2 = 9225 \text{ €}$
 Taxa a aplicar: 28,50%
 Parcela a abater: 980 €
 Então, $0,2850 \times 9225 \text{ €} \approx 2629,13 \text{ €}$
 $2629,13 \text{ €} - 980 \text{ €} = 1649,13 \text{ €}$
 Coleta do casal: $1649,13 \text{ €} \times 2 = 3298,26 \text{ €}$
 IRS: 3298,26 €
- 3.2.** • Cálculo do IRS sem a prestação do serviço:
 Rendimento coletável: $12\,000 \text{ €} : 2 = 6000 \text{ €}$
 Taxa a aplicar: 14,50 €
 Parcela a abater: 0 €
 Então, $0,1450 \times 6000 \text{ €} = 870 \text{ €}$
 Coleta do casal: $870 \text{ €} \times 2 = 1740 \text{ €}$
 IRS: 1740 €
- Cálculo do IRS com a prestação do serviço:
 Rendimento coletável: $14\,500 \text{ €} : 2 = 7250 \text{ €}$
 Taxa a aplicar: 28,50%
 Parcela a abater: 980 €
 Então, $0,2850 \times 7250 \text{ €} = 2066,25 \text{ €}$
 $2066,25 \text{ €} - 980 \text{ €} = 1086,25 \text{ €}$
 Coleta do casal: $1086,25 \text{ €} \times 2 = 2172,50 \text{ €}$

Com a prestação do serviço, paga 2172,50 € de IRS e sem a prestação de serviço paga 1740 €. Existe uma diferença de apenas 432,50 € ($2172,50 - 1740 = 432,50$), logo compensa efetuar o serviço por 2500 €.

Pág. 322

- 4.1.** TANB (1.º semestre): 0,90%
 TANL (1.º semestre): 0,648% (já inclui os 28% de IRS)
 $\frac{0,648}{100} \times 8500 \text{ €} = 55,08 \text{ €}$
 Irá receber 55,08 €.
- 4.2.** Regime de capitalização simples
 $n = 3 \text{ anos} = 6 \text{ semestres}$; $i = \frac{1,538}{100} = 0,01548$ (TANL média)
 $C_n = C_0 (1 + in)$
 $C_6 = 8500 \times (1 + 0,01548 \times 6) = 9289,48$
 Retorno global de investimento: 9289,48 €
- 4.3.** RCS
 Juros: $C_0 \times i \times n$; 6 semestres
 $i = \frac{2,15}{100} = 0,0215$ (TANB média)
 Assim, $8500 \times 0,0215 \times 6 = 1096,50$
 Receberia 1096,50 € de juros.

Pág. 323

5.1.

Ano	Ramiro (devedor)		Amigo (credor)	
	Início	Fim	Início	Fim
1.º	2500	3125	0	0
2.º	3125	2850	0	500
3.º	2850	1543	500	1750
4.º	1543	2005,90	1750	1750
5.º	2005,90	1406,49	1750	2550

- 5.2.** Podemos afirmar que o Ramiro cumpriu com as suas obrigações, tendo devolvido os 2500 € mais 50 € de juros, o que corresponde a uma taxa de juro de 2%. O Ramiro obteve um lucro de 1406,49 €, não tendo prejuízo em qualquer um dos cinco anos do empréstimo.

6.

OPÇÃO A

- Vencimento no 6.º mês
 $500 \times (1 + 0,10)^5 \approx 805,26 \text{ €}$
- Soma até ao 6.º mês
 $500 \times (1,10^0 + 1,10^1 + 1,10^2 + 1,10^3 + 1,10^4 + 1,10^5) \approx 3857,81 \text{ €}$
- Soma total (6 + 18 = 24 meses)
 $3857,81 \text{ €} + 18 \times 805,26 \text{ €} = 18\,352,49 \text{ €}$

OPÇÃO B

- Vencimento no 6.º mês
 $V_6 = 600 \text{ €} \times 1,05^{6-1} \approx 765,77 \text{ €}$
- Soma até ao 6.º mês
 $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 600 \times (1,05^0 + 1,05^1 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5) \approx 4081,15 \text{ €}$
- Soma total (6 + 18 = 24 meses)
 $4081,15 \text{ €} + 18 \times 765,77 \text{ €} \approx 17\,865,01 \text{ €}$

No final do 1.º semestre, seria mais vantajosa a opção B; no entanto, no fim da duração do contrato (dois anos), a opção mais vantajosa é a A.

7. FIBRA+

- Ao fim de dois anos (24 meses)
 - Mensalidades: $6 \times 29,90 \text{ €} + 18 \times 49,90 \text{ €} = 1077,60 \text{ €}$
 - Box: $24 \times 1 \text{ €} = 24 \text{ €}$
 - Valor a pagar: $1077,60 \text{ €} + 24 \text{ €} = 1101,60 \text{ €}$
- Ao fim de três anos (36 meses)
 - Mensalidades: $6 \times 29,90 \text{ €} + 30 \times 49,90 \text{ €} = 1676,40 \text{ €}$
 - Box: $24 \times 1 \text{ €} + 12 \times 5,50 \text{ €} = 90 \text{ €}$
 - Valor a pagar: $1676,40 \text{ €} + 90 \text{ €} = 1766,40 \text{ €}$

ZAPPING

- Ao fim de dois anos
 - Mensalidades: $24 \times 40,90 \text{ €} - 40,90 \text{ €} = 940,70 \text{ €}$
 - Box: 0 €
 - Valor a pagar: $940,70 \text{ €}$
- Ao fim de três anos
 - Mensalidades: $23 \times 40,90 \text{ €} + 12 \times 69,90 \text{ €} = 1779,50 \text{ €}$
 - Box: 0 €
 - Valor a pagar: $1779,50 \text{ €}$

Assim,

	FIBRA+	ZAPPING
2 anos	1101,60 €	940,70 €
3 anos	1766,40 €	1779,50 €

Se cancelar o contrato no final do período de fidelização (24 meses) é mais vantajoso optar pela operadora ZAPPING. Caso prolongue o contrato por mais um ano, já se torna mais vantajosa a operadora FIBRA+.

8.1. 94 kWh

Observação: 64 kWh já tinham sido faturados (cobrados) numa fatura anterior (apesar de não terem sido consumidos). Este tipo de operações designam-se por “acertos”.

$$8.2. -8,92 + 94 \times 0,1393 + 5 \times 0,1748 - 0,06 + 94 \times 0,001 \approx 5,08 \text{ € (valor sem IVA)}$$

$$\text{Valor de IVA: } 0,23 \times 5,08 \text{ €} \approx 1,17 \text{ €}$$

8.3. Pela alínea anterior:

$$\text{Valor a pagar sem IVA: } 5,08 \text{ €}$$

$$\text{Valor de IVA: } 1,17 \text{ €}$$

$$5,08 \text{ €} + 1,17 \text{ €} = 6,25 \text{ €}$$

$$\text{Valor a pagar: } 6,25 \text{ €}$$

9.1. 1 kWh $\rightarrow$ 0,1393 € (sem IVA)

$$156 \text{ kWh/ano} \times 0,1393 \approx 21,73 \text{ €}$$

$$313 \text{ kWh/ano} \times 0,1393 \approx 43,60 \text{ €}$$

Com IVA:

$$21,73 \text{ €} \times 1,23 \approx 26,73 \text{ €}$$

$$43,60 \text{ €} \times 1,23 \approx 53,63 \text{ €}$$

Modelo com etiqueta A+++ : aprox., 26,73 € por ano

Modelo com etiqueta A+ : aprox., 53,63 € por ano

$$9.2. 15 \times 26,73 \text{ €} = 400,95 \text{ €}$$

$$15 \times 53,63 \text{ €} = 804,45 \text{ €}$$

$$804,45 \text{ €} - 400,95 \text{ €} = 403,50 \text{ €}$$

$$\text{Valor total da poupança: } 403,50 \text{ €}$$