1.1. Introdução à lógica bivalente

Pág. 10

Atividade de diagnóstico

1.1. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ **1.2.** $2{,}5 \notin \mathbb{Z}$ **1.3.** $-5 \in \mathbb{Q}$

1.4. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ **1.5.** $-\pi \in \mathbb{R}$ **1.6.** $\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$

1.7. $2 \in \mathbb{Z}^+$ **1.8.** $0 \in \mathbb{Z}_0^+$

2.1. $\underset{(3)}{1} - \frac{x-1}{3} = \underset{(3)}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - x + 1 = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x = 15 - 4$

$\Leftrightarrow x = -11$

$S = \{-11\}$

2.2. $\underset{(3)}{3} - \frac{x-1}{3} - \underset{(3)}{2}(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 - x + 1 - 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x - 6x = 6 - 1 - 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7x = -4$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$

$S = \left\{\frac{4}{7}\right\}$

2.3. $\underset{(12)}{1} - \frac{x-1}{\underset{(6)}{2}} - \frac{3x-2}{\underset{(4)}{3}} = \frac{1}{\underset{(1)}{12}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 - 6x + 6 - 12x + 8 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x - 12x = 1 - 26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -18x = -25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{18}$

$S = \left\{\frac{25}{18}\right\}$

3.1. $\frac{x-2}{3} = 6 \Leftrightarrow x - 2 = 18 \Leftrightarrow x = 20$

Equação possível determinada em $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$

3.2. $2 - \frac{x-1}{3} = 5 \Leftrightarrow 6 - x + 1 = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x = 15 - 7 \Leftrightarrow x = -8$

Equação possível determinada em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ e impossível em $\mathbb{N}$

3.3. $x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Equação impossível em $\mathbb{N}$, em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{Q}$

3.4. $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 + x}{2} = 0 \Leftrightarrow 3 + x = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Equação possível determinada em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ e impossível em $\mathbb{N}$

4.1. $|x| = 5 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$

$S = \{-5\,,\,5\}$

4.2. $|x-1| = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 5 \vee x - 1 = -5 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -4$

$S = \{-4\,,\,6\}$

4.3. $|2x-1| = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

5.1. $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Condição universal

5.2. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Condição possível

5.3. $x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Condição impossível

5.4. $x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$. Condição possível

5.5. $|x| \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Condição universal

5.6. $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$. Condição possível

5.7. $|x-3| < 5 \Leftrightarrow x - 3 < 5 \wedge x - 3 > -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < 8 \wedge x > -2$

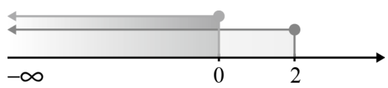
$S =]-2\,,\,8[$. Condição possível

5.8. $|x-3| \leq 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$S = \{3\}$. Condição possível

Pág. 11

6.1.

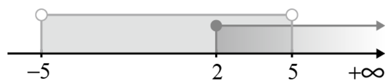


$A \cup B =]-\infty\,,\,2]$

6.2. Pela questão **6.1.**: $A \cap B =]-\infty\,,\,0]$

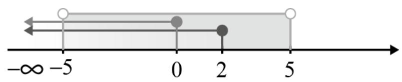
6.3. $A \cap C = \{2\}$

6.4.



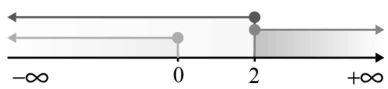
$C \cap D = [2\,,\,5[$

6.5.



$(A \cup B) \cup D =]-\infty\,,\,5[$

6.6.



$A \cap (B \cup C) =]-\infty\,,\,0] \cup \{2\}$

7.1. $-\frac{1}{2}x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

$S =]0\,,\,+\infty[$

7.2. $1 - \frac{x-1}{3} > 1 \Leftrightarrow -\frac{x-1}{3} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x + 1 > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

$S =]-\infty\,,\,1[$

7.3. $-2x - 3(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -2x - 3x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5}$ $S = \left[\frac{3}{5}\,,\,+\infty\right[$

7.4. $-\underset{(2)}{\frac{x-1}{3}}-\underset{(6)}{3}\left(x-2\right)<-\underset{(3)}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+2-18x+36<-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -20x<-3-38\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -20x<-41\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>\frac{41}{20}$

$S=\left]\frac{41}{20}\,,+\infty\right[$

7.5. $\underset{(3)}{2}-\frac{x-1}{3}-\underset{(3)}{2}\left(x+1\right)>-\underset{(3)}{1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6-x+1-6x-6>-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7x>-3-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<\frac{4}{7}$

$S=\left]-\infty\,,\frac{4}{7}\right[$

7.6. $\underset{(2)}{3}-\frac{x-3}{2}>\underset{(2)}{3}\left(x-1\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6-x+3>6x-6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x-6x>-6-9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7x>-15\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<\frac{15}{7}$

$S=\left]-\infty\,,\frac{15}{7}\right[$

7.7. $x-\frac{4-x}{-2}\leq-\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x+\frac{4-x}{2}\leq-\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x+12-3x\leq-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x\leq-2-12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x\leq-14\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\leq-\frac{14}{3}$

$S=\left]-\infty\,,\,-\frac{14}{3}\right]$

8.1. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-3\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0\vee x-3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=3$

$S=\left\{\frac{1}{2}\,,3\right\}$

8.2. $x\left(x-2\right)\left(x+5\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x-2=0\vee x+5=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=2\vee x=-5$

$S=\left\{-5\,,0\,,2\right\}$

8.3. $x^2=x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=1\qquad S=\left\{0\,,1\right\}$

8.4. $\frac{1}{2}x=\underset{(2)}{2}x^2\Leftrightarrow x=4x^2\Leftrightarrow 4x^2-x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(4x-1\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee 4x-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{1}{4}$

$S=\left\{0\,,\frac{1}{4}\right\}$

8.5. $3x^2=-\frac{5}{2}x\Leftrightarrow 6x^2+5x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(6x+5\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee 6x+5=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=-\frac{5}{6}\qquad S=\left\{-\frac{5}{6}\,,0\right\}$

8.6. $x^2=4\Leftrightarrow x=-2\vee x=2\qquad S=\left\{-2\,,2\right\}$

8.7. $x^2=5\Leftrightarrow x=-\sqrt{5}\vee x=\sqrt{5}$

$S=\left\{-\sqrt{5}\,,\sqrt{5}\right\}$

8.8. $2x^2=18\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=-3\vee x=3$

$S=\left\{-3\,,\,3\right\}$

8.9. $x^2-8x+7=0\Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{8\pm6}{2}\Leftrightarrow x=1\vee x=7\qquad S=\left\{1\,,7\right\}$

Pág. 14

1. A: "1 + 3 > 7" é uma proposição falsa.

C: "Um dado cúbico tem seis faces." é uma proposição verdadeira.

E: "A Torre de Pisa está inclinada." é uma proposição verdadeira.

2.1. "$\pi=3{,}1416$" é uma proposição falsa porque a dízima de π é infinita.

2.2. $8\sqrt{12}=8\times\sqrt{4\times3}=8\times2\sqrt{3}=16\sqrt{3}$

A proposição dada é verdadeira.

2.3. O comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo é maior do que qualquer um dos comprimentos dos catetos.

A proposição dada é falsa.

2.4. $\sqrt{0{,}09}=0{,}3$ e $0{,}3\in\mathbb{Q}$

$\sqrt{0{,}09}\in\mathbb{Q}$, logo é uma proposição verdadeira.

Pág. 15

3. Por exemplo:

3.1. $p\Leftrightarrow r$. A proposição p é verdadeira e a proposição r é falsa. Logo, $p\Leftrightarrow r$ é falsa.

3.2. $p\Leftrightarrow q$. As proposições p e q são verdadeiras. Logo, $p\Leftrightarrow q$ é verdadeira.

4. p: 0,(6) × 2 = 0,666 66 … × 2 = 1,333 33… = 1,(3)

p é falsa.

q: $10^{20}-5\times10^{19}=10\times10^{19}-5\times10^{19}=\left(10-5\right)\times10^{19}$

$=5\times10^{19}$

q é verdadeira.

r: $\left(-5{,}7\right)^{-10^5}\in\mathbb{R}^+$ porque 10^5 é par.

r é falsa.

s: m.d.c. (72 , 108) = 36; s é verdadeira

Então, $p\Leftrightarrow r$ e $q\Leftrightarrow s$.

Pág. 17

5.1. A Roda dos Alimentos não dá orientações para uma alimentação saudável. Proposição falsa

5.2. $\sim\left(\sqrt{2} \geq \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3}$. Proposição verdadeira

5.3. $\sim\left(\frac{5}{2} < 1\right) \Leftrightarrow \frac{5}{2} \geq 1$. Proposição verdadeira

5.4. $\sim\left(2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow 2\frac{1}{3} \neq \frac{7}{3}$. Proposição falsa

$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$

5.5. Não é verdade que todos os pontos de um círculo pertencem à circunferência que o define. Proposição verdadeira

5.6. $\sim\left(\frac{7}{3} > 2,(3)\right) \Leftrightarrow \frac{7}{3} \leq 2,(3)$. Proposição verdadeira

$\frac{7}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2 + 0,(3) = 2,(3)$

5.7. Não é verdade que todos os triângulos têm dois ângulos agudos. Proposição falsa

5.8. Não é verdade que todos os múltiplos de 3 são múltiplos de 6. Proposição verdadeira

Pág. 19

6. p: O número 2 é primo.

q: O número 9 é um quadrado perfeito.

6.1. $p \wedge q$. Proposição verdadeira porque p e q são verdadeiras.

6.2. $p \wedge \sim q$. Proposição falsa porque $\sim q$ é falsa.

6.3. $\sim p \wedge \sim q$. Proposição falsa porque $\sim p$ e $\sim q$ são falsas.

7.1. $\sqrt{2} = 1,414 \wedge \pi^2 < 10$ é uma proposição falsa porque $\sqrt{2} = 1,414$ é uma proposição falsa.

7.2. $\sim(5 < 4) \wedge \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} > 1$ é uma proposição verdadeira porque $\sim(5 < 4) \Leftrightarrow 5 \geq 4$ é verdadeiro e $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} > 1 \Leftrightarrow 9 > 1$ é verdadeiro.

7.3. $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Z} \wedge 3,1416 \in \mathbb{Q}$ é falsa, porque $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Z}$ é falsa dado que $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Z}$.

Pág. 21

8. Se $p \wedge q$ é uma proposição verdadeira, então $p \Leftrightarrow \mathrm{V}$ e $q \Leftrightarrow \mathrm{V}$.

8.1. $p \vee q \Leftrightarrow \mathrm{V} \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$ Proposição verdadeira

8.2. $\sim p \vee q \Leftrightarrow \sim \mathrm{V} \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$ Proposição verdadeira

8.3. $\sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$ Proposição falsa

9. Se $p \vee q$ é verdadeira qualquer que seja q, então p é verdadeira $(p \Leftrightarrow \mathrm{V})$. Se p fosse uma proposição falsa, poderia ser falsa se q fosse uma proposição falsa.

10. p e $\sim p$ têm valores lógicos contrários, ou seja, se p é verdadeira, $\sim p$ é falsa e se p é falsa, $\sim p$ é verdadeira. Logo, $p \wedge \sim p$ é falsa (princípio de não contradição).

11. Pelo princípio do terceiro excluído $p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathrm{V}$, logo $\sim(p \vee \sim p) \Leftrightarrow \mathrm{F}$.

Pág. 23

12. p: Chove. q: O sol brilha. r: Está calor.

12.1. $q \Rightarrow r$

12.2. $p \Rightarrow \sim r$

12.3. $\sim r \Rightarrow \sim q$

12.4. $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$

13. Se $p \Rightarrow q$ é falsa, então p é verdadeira e q é falsa.

$p \Leftrightarrow \mathrm{V}$ e $q \Leftrightarrow \mathrm{F}$

13.1. $\sim p \vee q \Leftrightarrow \sim \mathrm{V} \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$

Proposição falsa

13.2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \wedge \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

Proposição falsa

13.3. $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \wedge \sim \mathrm{F}) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \wedge \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$

Proposição verdadeira

13.4. $(p \vee \sim q) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \vee \sim \mathrm{F}) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \vee \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$

Proposição verdadeira

13.5. $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim \mathrm{V} \wedge \mathrm{F}) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \wedge \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$. Proposição falsa

13.6. $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$. Proposição verdadeira

13.7. $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$

Proposição verdadeira

14.1. $a \vee \sim a$ é verdadeiro qualquer que seja a (princípio do terceiro excluído).

Então, $a \vee (a \vee \sim a)$ é verdadeira pois $a \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$ qualquer que seja a.

14.2. $a \wedge \sim a$ é falsa qualquer que seja a (princípio de não contradição). Logo, $a \wedge (a \wedge \sim a)$ é falsa dado que $a \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$ qualquer que seja a.

14.3. $a \wedge \sim a$ é falsa qualquer que seja a. Logo, $(a \wedge \sim a) \Rightarrow a$ é verdadeira porque se o antecedente é falso, então a implicação é sempre verdadeira.

Pág. 24

15. O losango [*ABCD*] é um quadrado se e somente se tem as diagonais iguais. Proposição verdadeira

16. Se $\sim p \vee q$ é uma proposição falsa, então as proposições $\sim p$ e q são ambas falsas, ou seja, a proposição p é verdadeira e a proposição q é falsa.

16.1. $\sim p$ é falsa e q é falsa. Logo, a proposição $\sim p \Leftrightarrow q$ é verdadeira porque as proposições $\sim p$ e q têm o mesmo valor lógico.

16.2. p é verdadeira e q é falsa. Logo, $p \Rightarrow q$ é falsa, p é verdadeira e $\sim q$ é verdadeira. Assim, $p \wedge \sim q$ é verdadeira. Portanto, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ é uma proposição falsa.

Pág. 26

17.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

↑ ↑

$\boxed{p \vee q \Leftrightarrow q \vee p}$

18.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

$\boxed{(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)}$

19.1.

p	F	$p \wedge \text{F}$
V	F	F
F	F	F

$\boxed{p \wedge \text{F} \Leftrightarrow \text{F}}$

19.2.

p	F	$p \vee \text{F}$
V	F	V
F	F	F

$\boxed{p \vee \text{F} \Leftrightarrow p}$

Pág. 27

20.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$\boxed{p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \wedge r)}$

Pág. 28

21.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

$\boxed{\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q}$

Pág. 29

22.

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

$\boxed{\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q}$

Pág. 30

23.1.

$\sim$	$(p$	$\Leftrightarrow$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$\sim p)$
F	V	V	V		(V	F	F)	F	(V	F	F)
V	V	F	F		(V	V	V)	V	(F	F	F)
V	F	F	V		(F	F	F)	V	(V	V	V)
F	F	V	F		(F	F	V)	F	(F	F	V)

$\boxed{\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)}$

23.2.

$(p$	$\Leftrightarrow$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$(\sim p$	$\Leftrightarrow$	$\sim q)$
(V	V	V)	V	(F	V	F)
(V	F	F)	V	(F	F	V)
(F	F	V)	V	(V	F	F)
(F	**V**	V)	V	(V	**V**	V)

Pág. 31

24.1. $a \vee (\sim a \wedge b) \Leftrightarrow (a \vee \sim a) \wedge (a \vee b)$

$\Leftrightarrow \text{V} \wedge (a \vee b)$ $\quad$ $\text{V} \wedge p \Leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow a \vee b$

24.2. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \wedge \text{V}) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow$ $\quad$ $p \wedge \text{V} \Leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow p \wedge (\text{V} \vee q) \Leftrightarrow$ $\quad$ $\text{V} \vee q \Leftrightarrow \text{V}$

$\Leftrightarrow p \wedge \text{V} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p$

24.3. $(a \vee b) \wedge (a \vee \sim b) \Leftrightarrow a \vee (b \wedge \sim b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \vee \text{F} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a$

24.4. $(a \Rightarrow \sim b) \Rightarrow b \Leftrightarrow$ $\quad$ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

$\Leftrightarrow \sim (a \Rightarrow \sim b) \vee b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (\sim a \vee \sim b) \vee b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a \wedge b) \vee b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b \wedge a) \vee (b \wedge \text{V}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b \wedge (a \vee \text{V}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b \wedge \text{V} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b$

24.5. $(a \Rightarrow b) \wedge (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim a \vee b) \wedge (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(\sim a \vee b) \wedge a] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(\sim a \wedge a) \vee (b \wedge a)] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\text{F} \vee (b \wedge a)] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b \wedge a) \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \wedge (b \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \wedge b$

24.6. $\sim (\sim a \Rightarrow b) \vee (\sim a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim [\sim (\sim a) \vee b] \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (a \vee b) \vee (\sim a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim a \wedge \sim b) \vee (\sim a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim a \wedge (\sim b \vee b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim a \wedge \text{V} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim a$

25.1. $\left[a \Rightarrow (\sim a \Rightarrow b)\right] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\sim a \vee (\sim a \Rightarrow b)\right] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\sim a \vee (\sim(\sim a) \vee b)\right] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\sim a \vee (a \vee b)\right] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(\sim a \vee a) \vee b\right] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mathrm{V} \vee b) \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{V} \vee b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b$

25.2. $\sim(\sim a \Rightarrow b) \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim \left[\sim(\sim a) \vee b\right] \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (a \vee b) \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(\sim a \wedge \sim b)\right] \wedge \left[(\sim a \wedge \sim b) \vee b\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim a \vee a) \wedge (\sim b \vee a) \wedge (\sim a \vee b) \wedge (\sim b \vee b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{V} \wedge (b \Rightarrow a) \wedge (a \Rightarrow b) \wedge \mathrm{V} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a \Leftrightarrow b)$

26.1. $\left[(p \vee q) \Rightarrow q\right] \vee p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\sim (p \vee q) \vee q\right] \vee p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee (q \vee p) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow$ $\qquad \sim a \vee a \Leftrightarrow \mathrm{V}$

$\Leftrightarrow \mathrm{V}$

26.2. $\left[\sim p \Rightarrow (\sim p \vee q)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\sim(\sim p) \vee (\sim p \vee q)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \vee \sim p \vee q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \vee q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{V} \vee q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{V}$

26.3. $p \wedge \left[\sim(\sim p \Rightarrow q)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \wedge \left[\sim(\sim(\sim p) \vee q)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \wedge \left[\sim(p \vee q)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \wedge (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \wedge (\sim q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{F} \wedge (\sim q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{F}$

Pág. 34

Atividades complementares

27. *B*: O coelho tem duas patas. Proposição falsa

D: $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$. Proposição verdadeira

B e *D* são proposições.

28.1. Proposição falsa

28.2. Proposição verdadeira

28.3. Proposição verdadeira

28.4. Proposição falsa

28.5. Proposição falsa

28.6. Proposição verdadeira

29. *p*: π é um número irracional (verdadeiro)

q: $\frac{2}{3}$ é um número racional (verdadeiro)

r: 5 é múltiplo de 25 (falso)

Por exemplo:

29.1. $p \Leftrightarrow q$ **29.2.** $p \Leftrightarrow r$

30.1. $3 \times 7 \neq 7 \times 3$ **30.2.** $-4 \notin \mathbb{N}$

30.3. Não é verdade que todos os múltiplos de 3 são número ímpares.

31. Se *p* é verdadeira:

31.1. $\sim p$ é falsa e $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ é verdadeira.

32.1. $a \wedge b$: Os patos nadam e têm bico.

32.2. $b \wedge c$: Os patos têm bico e comem plantas.

32.3. $\sim a \wedge b$: Os patos não nadam, mas têm bico.

32.4. $b \wedge \sim c$: Os patos têm bico e não comem plantas.

33.1. $p \wedge \sim q$. Proposição falsa

33.2. $\sim p \wedge q$. Proposição falsa

33.3. $\sim q \wedge \sim p$. Proposição falsa

Pág. 35

34.1. A bicicleta é da Alice ou tem flores. Proposição verdadeira

34.2. A bicicleta não é da Alice, mas tem flores. Proposição falsa

35. Se $\sim p \wedge q$ é verdadeira então $\sim p$ e q são proposições verdadeiras. Logo, *p* é falsa e *q* é verdadeira.

35.1. $p \vee \sim q \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$

A proposição é falsa.

35.2. $\sim p \vee q \Leftrightarrow \mathrm{V} \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$

A proposição é verdadeira.

35.3. $\sim(\sim p) \vee q \Leftrightarrow p \vee q \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$

A proposição é verdadeira.

35.4. $\sim(p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(\mathrm{F} \vee \mathrm{F}) \Leftrightarrow \sim \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V}$

A proposição é verdadeira.

36.1.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

A proposição $p \vee \sim p$ é verdadeira qualquer que seja a proposição *p*.

36.2.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

A proposição $p \wedge \sim p$ é falsa qualquer que seja a proposição *p*.

37.1. $q \Rightarrow p$: Se como maçãs, então como fruta.

37.2. $r \Rightarrow q$: Se compro fruta, então como maçãs.

37.3. $r \Rightarrow \sim p$: Se compro fruta, então não como fruta.

37.4. $\sim r \Rightarrow \sim q$: Se não compro fruta, então não como maçãs.

38. Se $\sim a \Rightarrow b$ é uma proposição falsa, então $\sim a$ é verdadeira e *b* é falsa, ou seja, *a* e *b* são proposições falsas. Então:

38.1. $a \vee b \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$

Proposição falsa

38.2. $a \vee \sim b \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \sim \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$

Proposição verdadeira

38.3. $a \wedge \sim b \Leftrightarrow \text{F} \wedge \sim \text{F} \Leftrightarrow \text{F} \wedge \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$
Proposição falsa

38.4. $\sim a \wedge \sim b \Leftrightarrow \sim \text{F} \wedge \sim \text{F} \Leftrightarrow \text{V} \wedge \text{V} \Leftrightarrow \text{V}$
Proposição verdadeira

38.5. $(b \Rightarrow a) \Leftrightarrow (\text{F} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{V}$
Proposição verdadeira

38.6. $\sim(\sim b \Rightarrow a) \Leftrightarrow \sim(\sim \text{F} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \sim(\text{V} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \sim \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$
Proposição verdadeira

38.7. $\sim(\sim b \Rightarrow \sim a) \Leftrightarrow \sim(\sim \text{F} \Rightarrow \sim \text{F}) \Leftrightarrow \sim(\text{V} \Rightarrow \text{V})$
$\Leftrightarrow \sim \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$. Proposição falsa

38.8. $\sim(a \Rightarrow \sim b) \Leftrightarrow \sim(\text{F} \Rightarrow \sim \text{F}) \Leftrightarrow \sim(\text{F} \Rightarrow \text{V}) \Leftrightarrow \sim \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$
Proposição falsa

39. Se $a \Rightarrow \sim b$ é falsa, então a é verdadeira e $\sim b$ é falsa, ou seja, a e b são verdadeiras.

39.1. $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\text{V} \Leftrightarrow \text{V}) \Leftrightarrow \text{V}$
Proposição verdadeira

39.2. $(a \Leftrightarrow \sim b) \Leftrightarrow (\text{V} \Leftrightarrow \sim \text{V}) \Leftrightarrow (\text{V} \Leftrightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$
Proposição falsa

39.3. $a \vee \sim b \Leftrightarrow \text{V} \vee \sim \text{V} \Leftrightarrow \text{V} \vee \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$
Proposição verdadeira

39.4. $\sim a \wedge b \Leftrightarrow \sim \text{V} \wedge \text{V} \Leftrightarrow \text{F} \wedge \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$
Proposição falsa

39.5. $\sim(\sim a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \sim(\sim \text{V} \Rightarrow \text{V}) \Leftrightarrow \sim(\text{F} \Rightarrow \text{V}) \Leftrightarrow \sim \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$
Proposição verdadeira

39.6. $\sim(\sim b \Rightarrow \sim a) \Leftrightarrow \sim(\sim \text{V} \Rightarrow \sim \text{V}) \Leftrightarrow \sim(\text{F} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \sim \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$
Proposição falsa

40.1.

p	$p \wedge p$
V	V
F	F

↑ ↑

$\boxed{p \wedge p \Leftrightarrow p}$

40.2.

p	$p \vee p$
V	V
F	F

↑ ↑

$\boxed{p \vee p \Leftrightarrow p}$

41.1.

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V

↑ ↑

$\boxed{p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)}$

41.2.

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim(p \Rightarrow \sim q)$	$p \wedge q$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

↑ ↑

$\boxed{\sim(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow p \wedge q}$

41.3.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \vee (\sim p \wedge \sim q)$	$q \Rightarrow p$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V

↑ ↑

$\boxed{p \vee (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)}$

41.4.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F

↑ ↑

$\boxed{p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)}$

41.5.

p	$\Rightarrow$	$(q$	$\wedge$	$r)$	$\Leftrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(\sim p$	$\vee$	$r)$
V	V	V	V	V		F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F		F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V		F	F	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F		F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V		V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F		V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V		V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F		V	V	F	V	V	V	F

↑ ↑

$\boxed{(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q}$

42.1. $\sim(\sim a \wedge \sim b) \Leftrightarrow \sim(\sim a) \vee \sim(\sim b) \Leftrightarrow a \vee b$

42.2. $\sim a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow (\sim a \vee a) \wedge (\sim a \vee b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \text{V} \wedge (a \Rightarrow b) \Leftrightarrow a \Rightarrow b$

42.3. $(\sim a \wedge b) \vee \sim b \Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b) \wedge (b \vee \sim b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b) \wedge \text{V} \Leftrightarrow \sim a \vee \sim b \Leftrightarrow \sim(a \wedge b)$

42.4. $(a \wedge b) \vee (a \wedge \sim b) \Leftrightarrow a \wedge (b \vee \sim b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a \wedge \text{V} \Leftrightarrow a$

42.5. $\sim[(a \wedge b) \wedge \sim(a \vee b)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sim(a \wedge b) \vee \sim\sim(a \vee b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b) \vee (a \vee b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim a \vee a) \vee (\sim b \vee b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \text{V} \vee \text{V} \Leftrightarrow \text{V}$

A proposição é verdadeira quaisquer que sejam as proposições a e b (V).

42.6. $[(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow a] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sim(a \Leftrightarrow b) \vee a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sim(a \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow a) \vee a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sim[(\sim a \vee b) \wedge (\sim b \vee a)] \vee a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sim(\sim a \vee b) \vee \sim(\sim b \vee a) \vee a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a \wedge \sim b) \vee (b \wedge \sim a) \vee a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a \wedge \sim b) \vee [(b \vee a) \wedge (\sim a \vee a)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a \wedge \sim b) \vee [(b \vee a) \wedge \text{V}] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a \wedge \sim b) \vee (b \vee a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a \wedge \sim b) \vee b] \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a \vee b) \wedge (\sim b \vee b)] \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \vee b \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \vee b$

42.7. $\sim [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \wedge \sim p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim\sim q] \wedge \sim p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(\sim\sim p \wedge \sim q) \vee q] \wedge \sim p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge \sim p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)] \wedge \sim p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \text{V}] \wedge \sim p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{F} \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q \wedge \sim p$

42.8. $[b \wedge (\sim b \vee c)] \vee [(b \vee c) \wedge \sim c] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(b \wedge \sim b) \vee (b \wedge c)] \vee [(b \wedge \sim c) \vee (c \wedge \sim c)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\text{F} \vee (b \wedge c)] \vee [(b \wedge \sim c) \vee \text{F}] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b \wedge c) \vee (b \wedge \sim c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b \wedge (c \vee \sim c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b \wedge \text{V} \Leftrightarrow b$

42.9. $\sim [a \wedge (a \Rightarrow b)] \Rightarrow (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim [a \wedge (\sim a \vee b)] \Rightarrow (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim [\sim (a \wedge (\sim a \vee b))] \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [a \wedge (\sim a \vee b)] \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b)] \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{F} \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \wedge b$

Pág. 36

43.1. Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa em simultâneo.

43.2. Um proposição ou é verdadeira ou falsa.

44. $p \Leftrightarrow \text{V}$ e $q \Leftrightarrow \text{F}$

44.1. $\sim p \Leftrightarrow \sim \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$

$\sim p$ é falsa.

44.2. $\sim (\sim q) \Leftrightarrow q \Leftrightarrow \text{F}$

$\sim (\sim q)$ é falsa.

44.3. $\sim p \wedge q \Leftrightarrow \sim \text{V} \wedge \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$

$\sim p \wedge q$ é falsa.

44.4. $\sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim \text{V} \vee \sim \text{F} \Leftrightarrow \text{F} \vee \text{V} \Leftrightarrow \text{V}$

$\sim p \vee \sim q$ é verdadeira.

44.5. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\text{V} \Leftrightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$

$p \Leftrightarrow q$ é falsa.

44.6. $(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \sim \text{F}) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \text{V}) \Leftrightarrow \text{V}$

$p \Rightarrow \sim q$ é verdadeira.

45. $p \vee (p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \vee \sim p) \vee \sim q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{V} \vee \sim q \Leftrightarrow \text{V}$

ou

Se p é verdadeira, então a proposição é verdadeira. Se p é falsa, então "$p \Rightarrow \sim q$" é verdadeira, pelo que a proposição é igualmente verdadeira.

46. $(q \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p$

47.1. **a)** $a \dot{\vee} b$ **b)** $\sim a \dot{\vee} b$ **c)** $\sim a \dot{\vee} \sim b$

47.2. **a)** Ou o Dinis é engenheiro ou o Duarte é enfermeiro.

Proposição falsa

b) Ou o Duarte é enfermeiro ou o Dinis não é engenheiro.

Proposição verdadeira

Pág. 37

47.3. Se $p \Rightarrow q$ é falsa, então p é verdadeira e q é falsa:

$p \Leftrightarrow \text{V}$ e $q \Leftrightarrow \text{F}$

a) $p \dot{\vee} q \Leftrightarrow \text{V} \dot{\vee} \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$

$p \dot{\vee} q$ é verdadeira.

b) $\sim p \dot{\vee} q \Leftrightarrow \sim \text{V} \dot{\vee} \text{F} \Leftrightarrow \text{F} \dot{\vee} \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$

$\sim p \dot{\vee} q$ é falsa.

c) $(\sim p \dot{\vee} \sim q) \wedge p \Leftrightarrow (\sim \text{V} \dot{\vee} \sim \text{F}) \wedge \text{V} \Leftrightarrow (\text{F} \dot{\vee} \text{V}) \wedge \text{V} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{V} \wedge \text{V} \Leftrightarrow \text{V}$

$(\sim p \dot{\vee} \sim q) \wedge p$ é verdadeira.

47.4. Se $p \Leftrightarrow q$ é uma proposição verdadeira, então p e q têm o mesmo valor lógico.

$(p \Leftrightarrow \text{V e } q \Leftrightarrow \text{V})$ ou $(p \Leftrightarrow \text{F e } q \Leftrightarrow \text{F})$

a) $p \dot{\vee} q \Leftrightarrow \text{V} \dot{\vee} \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$ ou $p \dot{\vee} q \Leftrightarrow \text{F} \dot{\vee} \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$

$p \dot{\vee} q$ é falsa.

b) Se p e q têm o mesmo valor lógico, então p e $\sim q$ têm valores lógicos diferentes.

Logo, $p \dot{\vee} \sim q$ é verdadeira.

c) Se $p \Leftrightarrow \text{V}$ e $q \Leftrightarrow \text{V}$:

$(p \vee q) \dot{\vee} \sim p \Leftrightarrow (\text{V} \vee \text{V}) \dot{\vee} \text{F} \Leftrightarrow \text{V} \dot{\vee} \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$

Se $p = \text{F}$ e $q = \text{F}$:

$(p \vee q) \dot{\vee} \sim p \Leftrightarrow (\text{F} \vee \text{F}) \dot{\vee} \text{V} \Leftrightarrow \text{F} \dot{\vee} \text{V} \Leftrightarrow \text{V}$

Logo, $(p \vee q) \dot{\vee} \sim p$ é verdadeira.

d) Se $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow \text{V}$, então:

$(p \wedge q) \dot{\vee} \sim p \Leftrightarrow (\text{V} \wedge \text{V}) \dot{\vee} \text{F} \Leftrightarrow \text{V} \dot{\vee} \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$

Se $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow \text{F}$, então:

$(p \wedge q) \dot{\vee} \sim p \Leftrightarrow (\text{F} \wedge \text{F}) \dot{\vee} \text{V} \Leftrightarrow \text{F} \dot{\vee} \text{V} \Leftrightarrow \text{V}$

Logo, $(p \wedge q) \dot{\vee} \sim p$ é verdadeira.

47.5. **a)**

p	$\sim p$	$p \dot{\vee} \sim p$
V	F	V
F	V	V

$p \dot{\vee} \sim p \Leftrightarrow \text{V}$

b)

p	q	$\sim q$	$p \dot{\vee} \sim q$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V

c)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \dot{\vee} \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	F

d)

p	q	$\sim q$	$p \dot{\vee} \sim q$	$p \vee q$	$(p \dot{\vee} \sim q) \vee (p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V

e)

p	q	$\sim q$	$p \dot{\vee} q$	$p \dot{\vee} \sim q$	$(p \dot{\vee} q) \wedge (p \dot{\vee} \sim q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F

47.6. a)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \dot{\vee} q$	$\sim (p \dot{\vee} q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V

$$\boxed{(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \dot{\vee} q)}$$

b) Se $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \dot{\vee} q)$, então:

$\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \dot{\vee} q$

Portanto:

$p \dot{\vee} q \Leftrightarrow \sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

48.1. Se o António excedeu o limite de velocidade, então foi multado.

48.2. O António não foi multado se e somente se ficou sem carta de condução.

48.3. Se o António excedeu o limite de velocidade, então não ficou sem carta de condução.

48.4. O António excedeu o limite de velocidade ou foi multado ou ficou sem carta de condução.

48.5. Se o António excedeu o limite de velocidade, então não ficou sem carta de condução ou, se foi multado, então também não ficou sem carta de condução.

48.6. O António excedeu o limite de velocidade e foi multado ou o António não foi multado e ficou sem carta de condução.

49.1.

$\sim a$	$\Rightarrow$	$[(\sim a$	$\vee$	$b)$	$\Rightarrow$	$(a$	$\wedge$	$b)]$
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	F	F	F

49.2. $\sim a \Rightarrow (\sim a \vee b \Rightarrow a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (\sim a) \vee [\sim (\sim a \vee b) \wedge (a \wedge b)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \vee (a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \vee [(a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \vee [a \wedge (\sim b \vee b)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \vee (a \wedge \text{V}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a$

50. Se $(a \Rightarrow \sim b) \vee (a \wedge c)$ é falsa, então:

- $a \Rightarrow \sim b$ é falsa
- $a \wedge c$ é falsa

Se $a \Rightarrow \sim b$ é falsa, então:

- *a* é verdadeira
- $\sim b$ é falsa, ou seja, *b* é verdadeira.

Se $a \wedge c$ é falsa e como *a* é verdadeira, então *c* é falsa.

Portanto, *a* e *b* são verdadeiras e *c* é falsa.

O João estuda Filosofia e Matemática e não estuda Biologia.

51. $\sim [\sim (a \wedge \sim b) \vee a \Rightarrow b] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim [(\sim a \vee \sim b) \vee a \Rightarrow b] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim [(\sim a \vee b) \vee a \Rightarrow b] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim [(\sim a \vee a) \vee b \Rightarrow b] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (\text{V} \vee b \Rightarrow b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (\text{V} \Rightarrow b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (\sim \text{V} \vee b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (\text{F} \vee b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim \text{F} \wedge \sim b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{V} \wedge \sim b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim b$

Sabemos que $\sim b$ é verdadeira pelo que *b* é falsa.

Logo, *b* é falsa e *a* pode ser verdadeira ou falsa.

52. $m: \ \sim p \wedge (q \Rightarrow \sim r)$

52.1. Se *m* é verdadeira:

- $\sim p$ é verdadeira, pelo que *p* é falsa;
- $p \Rightarrow \sim r$ é verdadeira.

Como *r* é verdadeira, então $\sim r$ é falsa e como $q \Rightarrow \sim r$ é verdadeira, então a proposição *q* é falsa.

Portanto, *p* é falsa e *q* é falsa.

52.2. $\sim m \Leftrightarrow \sim [\sim p \wedge (q \Rightarrow \sim r)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (\sim p) \vee \sim (q \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \vee \sim (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \vee (\sim (\sim q) \wedge \sim (\sim r)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$

53.1.

$(a$	$\Rightarrow$	$\sim b)$	$\Rightarrow$	$[a$	$\vee$	$(a$	$\Rightarrow$	$b)]$
V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F	V	F

$(a \Rightarrow \sim b) \Rightarrow \left[a \vee (a \Rightarrow b)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b) \Rightarrow \left[a \vee (\sim a \vee b)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (\sim a \vee \sim b) \vee \left[(a \vee \sim a) \vee b\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim\sim a \wedge \sim\sim b) \vee (\mathrm{V} \vee b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a \wedge b) \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow$ $\qquad p \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$

$\Leftrightarrow \mathrm{V}$

53.2.

$[(b$	$\Rightarrow$	$\sim a)$	$\wedge$	$(a$	$\Rightarrow$	$b)]$	$\vee$	a
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	V
V	V	V	V	F	V	V	V	F
F	V	V	V	F	V	F	V	F

$\left[(b \Rightarrow \sim a) \wedge (a \Rightarrow b)\right] \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(\sim b \vee \sim a) \wedge (\sim a \vee b)\right] \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(\sim a \vee \sim b) \wedge (\sim a \vee b)\right] \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\sim a \vee (\sim b \wedge b)\right] \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim a \vee \mathrm{F}) \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim a \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{V}$

Pág. 38

Avaliação 1

1. O Dinis é simpático.
   A expressão não é uma proposição, porque a sua veracidade depende da avaliação subjetiva das outras pessoas.
   Resposta: (A)
2. $p \Leftrightarrow \mathrm{V}$; $q \Leftrightarrow \mathrm{F}$
   $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$
   $(\sim p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$
   Resposta: (B)
3. Se $\sim\left[p \Rightarrow (q \vee r)\right]$ é verdadeira, então $\left[p \Rightarrow (q \vee r)\right]$ é falsa.
   Logo, p é verdadeira e $q \vee r$ é falsa, ou seja, p é verdadeira e q e r são falsas.
   Resposta: (C)
4. Se $p \wedge \sim q$ é verdadeira, então p é verdadeira e q é falsa.
   $p \Leftrightarrow \mathrm{V}$ e $q \Leftrightarrow \mathrm{F}$
   - $p \vee q \Leftrightarrow \mathrm{V} \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V}$
   - $\sim p \wedge q \Leftrightarrow \mathrm{F} \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$
   - $(\sim p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$
   - $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p \Leftrightarrow \left[(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F}) \Rightarrow \mathrm{F}\right] \Leftrightarrow$
     $\Leftrightarrow (\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$

   Resposta: (D)
5.

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$a \vee \sim b$	$\sim a \Leftrightarrow b$	$\sim (a \Rightarrow b)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F

Resposta: (C)

6. A afirmação dada é equivalente a "Se chover e o Joaquim não tiver um impermeável então não anda de bicicleta", ou seja, $(q \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p$ **Resposta: (B)**

Pág. 39

7.1. $\sim (10 \in \mathbb{N} \wedge 10 > 5) \Leftrightarrow 10 \notin \mathbb{N} \vee 10 \leq 5$

7.2. $\sim (10 + 2 = 15 \vee 10 \geq 0) \Leftrightarrow 10 + 2 \neq 15 \wedge 10 < 0$

7.3. $\sim (5 \leq 10 < 15) \Leftrightarrow \sim (5 \leq 10 \wedge 10 < 15) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 > 10 \vee 10 \geq 15$

8. Se a Ana está na praia e não tem telemóvel, então não fala com a avó.

9.1. **a)** Se a Alice é irmã da Adriana, então o Dinis não é estudante.

b) A Alice é irmã da Adriana se e somente se o Dinis é estudante.

c) A Alice não é irmã da Adriana e o Dinis é estudante.

d) Se a Alice é irmã da Adriana e o Dinis é estudante, então a Alice é irmã da Adriana.

9.2. $p \Leftrightarrow \mathrm{V}$ e $q \Rightarrow \mathrm{F}$

- $p \Rightarrow \sim q \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$
  $p \Rightarrow \sim q$ é verdadeira.
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$
  $p \Leftrightarrow q$ é falsa.
- $\sim p \wedge q \Leftrightarrow \mathrm{F} \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$
  $\sim p \wedge q$ é falsa.
- $(p \wedge q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \wedge \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$
  $p \wedge q \Rightarrow p$ é verdadeira.

10.1.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \Rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

↑ ↑

$p \vee q \Leftrightarrow \sim p \Rightarrow q$

10.2.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

↑ ↑

$(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow q$

11. $p \Leftrightarrow \mathrm{V}$; $\sim p \vee q \Leftrightarrow \mathrm{V}$

Se $\sim p \vee q$ é verdadeira e $\sim p$ é falsa, então q é verdadeira.

$q \Leftrightarrow \mathrm{V}$

11.1. $p \wedge \sim q \Leftrightarrow \text{V} \wedge \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$

$p \wedge \sim q$ é falsa.

11.2. $(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$

$p \Rightarrow \sim q$ é falsa.

11.3. $\sim (p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$

$\sim (p \Rightarrow \sim q)$ é verdadeira.

11.4. $\sim (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\text{F} \wedge \text{V}) \Leftrightarrow \sim \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$

$\sim (\sim p \wedge q)$ é verdadeira.

12.1. $\left[\sim a \wedge (a \wedge b) \Rightarrow \sim b\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(\sim a \wedge a) \wedge b \Rightarrow \sim b\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{F} \wedge b \Rightarrow \sim b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{F} \Rightarrow \sim b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{V}$

(Se o antecedente é falso, a implicação é verdadeira.)

A proposição é verdadeira quaisquer que sejam *a* e *b*.

12.2. $p \Rightarrow \left[\sim p \vee \sim (p \wedge \sim p)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[p \Rightarrow (\sim p \vee \sim \text{F})\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[p \Rightarrow (\sim p \vee \text{V})\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \Rightarrow \text{V}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{V}$

(Se o consequente é verdadeiro, a implicação é verdadeira).

A proposição é verdadeira quaisquer que sejam *p* e *q*.

13.1. *a*: "2884 é um múltiplo de 4."

b: "No número 2884 a soma do dobro do algarismo das dezenas com o algarismo das unidades é um múltiplo de 4."

$a \Leftrightarrow b$

13.2. *a*: "200 é múltiplo de 3."

b: "121 é múltiplo de 4."

$\sim a \wedge \sim b$

13.3. *a*: "2510 termina em 0."

b: "2510 é múltiplo de 2."

c: "2510 é múltiplo de 5."

$a \Rightarrow (b \wedge c)$

14. Se $p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ é uma proposição falsa, então:

- $p \Leftrightarrow \text{V}$
- $(\sim q \Rightarrow r) \Leftrightarrow \text{F}$

Se $\sim q \Rightarrow r$ é uma proposição falsa, então:

- $\sim q \Leftrightarrow \text{V}$ pelo que $q \Leftrightarrow \text{F}$
- $r \Leftrightarrow \text{F}$

Logo, *p* é verdadeira e *q* e *r* são falsas.

15. $a \wedge \sim (a \vee b) \wedge \left[a \Rightarrow (b \Rightarrow a)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \wedge (\sim a \wedge \sim b) \wedge \left[\sim a \vee (\sim b \vee a)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a \wedge \sim a) \wedge \sim b \wedge \left[(\sim a \vee a) \vee \sim b\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{F} \wedge \sim b \wedge (\text{V} \vee \sim b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{F} \wedge \text{V} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{F}$

16.1. $(a \wedge b) \Rightarrow b \Leftrightarrow \sim (a \wedge b) \vee b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b) \vee b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim a \vee (\sim b \vee b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim a \vee \text{V} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{V}$

16.2. $a \Rightarrow (a \vee b) \Leftrightarrow \sim a \vee (a \vee b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim a \vee a) \vee b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{V} \vee b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{V}$

1.2. Condições e conjuntos

Pág. 40

Atividade inicial 2

$\sqrt{x-1}=3$

$\sqrt{3-1}=3 \Leftrightarrow \sqrt{2}=3$ (proposição falsa)

$\sqrt{10-1}=3 \Leftrightarrow \sqrt{9}=3$ (proposição verdadeira)

Apenas 10 é solução da equação.

1. $x^2 \leq 0$

1.1. $2^2 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq 0$ (proposição falsa)

1.2. $0^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0$ (proposição verdadeira)

Pág. 41

2.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{Q}$ **2.2.** $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{Q}$

2.3. $\forall x \in P,\ x \in \mathbb{N}$ **2.4.** $\forall x \in F,\ x$ é tulipa.

Pág. 42

3.1. Existe pelo menos um número real igual ao seu dobro. Proposição verdadeira

3.2. Existe pelo menos um número natural cuja soma do seu quadrado com 1 é um número negativo. Proposição falsa

3.3. Existe pelo menos um número natural cuja diferença entre o seu dobro e 1 é igual a 1. Proposição verdadeira

3.4. Existe pelo menos um triângulo escaleno. Proposição verdadeira

Pág. 44

4.1. **a)** Condições universais: $3x = 3x$; $x^2 = x^2$ e $x \notin \{\ \}$

b) Condições possíveis não universais: $x \in \mathbb{Z}$ e $x \notin \mathbb{N}$

c) Condições impossíveis: $x + 2 = x$

4.2. **a)** $x + 2 = x$ é uma condição impossível.
Logo, $x + 2 = x \wedge x \notin \mathbb{N}$ é impossível

b) $3x = 3x$ é uma condição universal.
Logo, $3x = 3x \vee x + 2 = x$ é universal.

c) $x \in \mathbb{Z}$ é uma condição possível.
Logo, $x + 2 = x \vee x \in \mathbb{Z}$ é uma condição possível.

d) $x^2 = x^2$ é uma condição universal.
Logo, $x^2 = x^2 \vee x \notin \mathbb{N}$ é universal.

e) $x + 2 = x$ é uma condição impossível.
Logo, $x^2 = x^2 \wedge x + 2 = x$ é impossível.

f) A condição $x + 2 = x$ é impossível.
Logo, $x + 2 = x \wedge 3x = 3x$ é impossível.

Pág. 45

5.1. $\forall x \in C,\ x$ é treinado
$\exists x \in C:\ x$ não é treinado

5.2. $\exists x \in C:\ x$ usa coleira
$\forall x \in C,\ x$ não usa coleira

Pág. 46

6.1. $\exists x \in \mathbb{R}^+ : \dfrac{1}{x} \leq 0$. Proposição falsa

6.2. $\forall x \in \mathbb{Z},\ x + 1 \neq 0$. Proposição falsa

6.3. $\exists x \in \mathbb{N}:\ x$ é ímpar. Proposição verdadeira

6.4. $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 \neq \dfrac{1}{2}$. Proposição verdadeira

6.5. $\exists x \in \mathbb{N}: \dfrac{x-1}{2} > 1$. Proposição verdadeira

Cálculo auxiliar: $\frac{x-1}{2} > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 2 \Leftrightarrow x > 3$

7.1. $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ é impossível em $\mathbb{N}$.
$x^2 > 0$ é possível não universal em $\mathbb{R}$
(não se verifica para $x = 0$).
$p(x)$ é impossível e $q(x)$ é possível não universal.

7.2. **a)** $\forall x \in \mathbb{N},\ x + 1 \neq 0$ é verdadeira porque a condição $x + 1 \neq 0$ é universal em $\mathbb{N}$.

b) $\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 \leq 0$ é verdadeira porque a condição $x^2 \leq 0$ é possível em $\mathbb{R}$ (0 é solução).

Pág. 47

8.1. $\sim\left(\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x}{4} \geq 0 \Rightarrow x > 0\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \dfrac{x}{4} \geq 0 \wedge x \leq 0$

8.2. A proposição dada é falsa porque a sua negação é verdadeira (para $x = 0$).

9.1. Por exemplo, $64 = 4^3 = 8^2$.

$4^3 = \left(2^2\right)^3 = \left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$

64 é um cubo perfeito e é um quadrado perfeito.
Logo, a proposição é falsa.

9.2. Por exemplo, $|-4| > 3$ e $-4 \leq 3$.

Logo, a proposição é falsa.

Pág. 48

10. Por exemplo, $1 \in \mathbb{N}$ e $1 \leq 2$.

Pág. 49

11. $A = \{5 , 10 , 15\}$

11.1. **a)** $\exists x \in A:\ x$ é múltiplo de 5
A proposição é verdadeira.
Por exemplo, 5 é múltiplo de 5.

b) $\sim\left(\exists x \in A:\ p(x)\right) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ \sim p(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x \in A,\ x$ não é um múltiplo de 5
Nenhum elemento de A é múltiplo de 5

c) $p(x)$ é universal e $\sim p(x)$ é impossível.

11.2. **a)** $\sim a \Leftrightarrow \sim\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x > 5 \Rightarrow x > 0\right)$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}:\ x > 5 \wedge x \leq 0$
$\sim b \Leftrightarrow \sim$ ($\exists x \in \mathbb{N}:\ x$ é par $\wedge$ x tem um divisor ímpar)
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N},\ x$ é ímpar $\vee x$ não tem divisores ímpares
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}$, ($x$ é par $\Rightarrow x$ não tem divisores ímpares)

b) A proposição a é verdadeira (todo o número real maior do que 5 é positivo). A proposição b é verdadeira (por exemplo, 10 é par e 5 é divisor de 10).

Pág. 51

12.1. $A = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 10 , 15 , 30\}$
$A = \{x \in \mathbb{N}:\ x \text{ é divisor de } 30\}$, por exemplo
$B = \{-2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z}:\ |x| \leq 2\}$, por exemplo

12.2. $C=\{x\in\mathbb{N}:\ x \text{ é divisor de } 35\}$; $C=\{1\ ,5\ ,7\ ,35\}$

$D=\{x\in C:\ x \text{ é um número primo}\}$; $D=\{5\ ,7\}$

Pág. 53

13. $x\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-2 \vee x=2$

$A=\{-2\ ,0\ ,2\}$

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

$B=\{0\ ,2\}$

$C=\{x\in\mathbb{R}:\ -3\le x<0\}=[-3\ ,\ 0[$

13.1. $A\cup B=\{-2\ ,\ 0\ ,\ 2\}\cup\{0\ ,\ 2\}=\{-2\ ,\ 0\ ,\ 2\}$

13.2. $A\cap B=\{-2\ ,\ 0\ ,\ 2\}\cap\{0\ ,\ 2\}=\{0\ ,\ 2\}$

13.3. $A\setminus C=\{-2\ ,\ 0\ ,\ 2\}\setminus[-3\ ,\ 0[=\{0\ ,\ 2\}$

13.4. $\overline{B}=\{-2\}$

14. $\{n:\ a(n)\}=\{n:\ n \text{ é um quadrado perfeito}\}$

$\{n:\ b(n)\}=\{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5\ ,6\ ,7\ ,8\ ,9\}$

$\{n:\ c(n)\}=\{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,6\ ,9\ ,12\ ,18\ ,36\}$

14.1. $R=\{n:\ a(n)\wedge b(n)\}$

$=\{n: n \text{ é quadrado perfeito inferior a } 10\}$

$=\{1\ ,4\ ,9\}$

14.2. $S=\{n:\ b(n)\vee c(n)\}=$

$=\{n: n \text{ é inferior a 10 ou é divisor de } 36\}$

$=\{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5\ ,6\ ,7\ ,8\ ,9\ ,12\ ,18\ ,36\}$

14.3. $T=\{n:\ \sim a(n)\wedge c(n)\}$

$=\{n: n \text{ não é quadrado perfeito e é divisor de } 36\}$

$=\{2\ ,3\ ,6\ ,12\ ,18\}$

15. $\underset{(\times\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}x<\underset{(\times 2)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow 2x<2 \Leftrightarrow x<1$

$A=]-\infty\ ,\ 1[$

$5-3x\ge 9 \Leftrightarrow -3x\ge 4 \Leftrightarrow x\le -\frac{4}{3}$

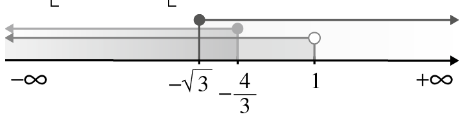
$B=\left]-\infty\ ,\ -\frac{4}{3}\right]$

$3x+\sqrt{48}\ge\sqrt{3} \Leftrightarrow 3x\ge\sqrt{3}-\sqrt{16\times 3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x\ge\sqrt{3}-4\sqrt{3} \Leftrightarrow 3x\ge -3\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\ge -\sqrt{3}$

$C=\left[-\sqrt{3}\ ,\ +\infty\right[$



15.1. $A\cup B=]-\infty\ ,\ 1[\cup\left]-\infty\ ,\ -\frac{4}{3}\right]=]-\infty\ ,\ 1[$

15.2. $B\cup C=\left]-\infty\ ,\ -\frac{4}{3}\right]\cup\left[-\sqrt{3}\ ,\ +\infty\right[=\mathbb{R}$

15.3. $A\cap B=]-\infty\ ,\ 1[\cap\left]-\infty\ ,\ -\frac{4}{3}\right]=\left]-\infty\ ,\ -\frac{4}{3}\right]$

15.4. $A\cap C=]-\infty\ ,\ 1[\cap\left[-\sqrt{3}\ ,\ +\infty\right[=\left[-\sqrt{3}\ ,\ 1\right[$

15.5. $(A\cap B)\cap C=\left]-\infty\ ,\ -\frac{4}{3}\right]\cap\left[-\sqrt{3}\ ,\ +\infty\right[=\left[-\sqrt{3}\ ,\ -\frac{4}{3}\right]$

15.6. $\overline{A}=\overline{]-\infty\ ,\ 1[}=[1\ ,\ +\infty[$

15.7. $\overline{C}=\overline{\left[\sqrt{-3}\ ,\ +\infty\right[}=\left]-\infty\ ,\ -\sqrt{3}\right[$

15.8. $A\setminus B=]-\infty\ ,\ 1[\setminus\left]-\infty\ ,\ -\frac{4}{3}\right]=\left]-\frac{4}{3}\ ,\ 1\right[$

15.9. $A\setminus(B\cap C)=]-\infty\ ,\ 1[\setminus\left[-\sqrt{3}\ ,\ -\frac{4}{3}\right]=$

$=\left]-\infty\ ,\ -\sqrt{3}\right[\cup\left]-\frac{4}{3}\ ,\ 1\right[$

Pág. 55

16.1. Se um triângulo não é isósceles, então não é equilátero.

16.2. Se um número não é racional então não é natural.

17.1. $\forall n\in\mathbb{N}$, n é par $\Rightarrow$ n^2 é par

Se n é par, então $n=2k$ para $k\in\mathbb{N}$.

Então, $n^2=(2k)^2=4k^2=2\times\left(2k^2\right)$

Como, sendo $k\in\mathbb{N}$, $2k^2\in\mathbb{N}$, resulta que $2\times\left(2k^2\right)$ é um número par, ou seja, n^2 é par.

Logo, $\forall n\in\mathbb{N}$, n é par $\Rightarrow$ n^2 é par

Portanto, por contrarrecíproco, fica provado que $\forall n\in\mathbb{N}$, n^2 é ímpar $\Rightarrow n$ é ímpar.

17.2. $\forall n\in\mathbb{N}$, n é divisível por 35 $\Rightarrow n$ é divisível por 7

Se $n\in\mathbb{N}$ é divisível por 35, então $n=k\times 35$ para algum $k\in\mathbb{N}$. Mas, $n=35k=7\times(5k)$.

Logo, se $n=35k$ com $k\in\mathbb{N}$, n é divisível por 7 porque se $k\in\mathbb{N}$, então $5k\in\mathbb{N}$.

Portanto, se n é divisível por 35, então n é divisível por 7.

Por contrarrecíproco, temos

Se n não é divisível por 7, então não é divisível por 35.

17.3. $\forall x\in\mathbb{N}$, x é um quadrado perfeito $\Rightarrow$ x não é um número primo

Se $x\in\mathbb{N}$ e x é um quadrado perfeito, então $x=1$ ou $x=n^2$ com $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$

Se $x=1$, então x não é um número primo.

Se $x=n^2$ com $n\ne 1$, então $x=n\times n$ pelo que n é divisor de x e $n\ne 1$. Logo, x não é primo.

Portanto, por contrarrecíproco, fica provado que se x é um número primo, então x não é um quadrado perfeito.

17.4. $\forall m, n\in\mathbb{N}$, $m\times n$ é par $\Rightarrow n$ é par $\vee\, m$ é par

Vamos provar o contrarrecíproco:

$\forall m, n\in\mathbb{N}$, n é ímpar $\wedge\, m$ é ímpar $\Rightarrow m\times n$ é ímpar

Se n é ímpar, $n=2p-1$, $p\in\mathbb{N}$.

Se m é ímpar, $m=2q-1$, $q\in\mathbb{N}$.

$m\times n=(2q-1)\times(2p-1)=$

$=4pq-2q-2p+1=$

$=2(pq-q-p)+1$

Se $p\in\mathbb{N}$ e $q\in\mathbb{N}$, então $2(pq-q-p)$ é par pelo que $2(pq-q-p)+1$ é ímpar.

Logo: $\forall m, n \in \mathbb{N},\ n$ é ímpar e m é ímpar $\Rightarrow m \times n$ é ímpar

Por contrarrecíproco ficou provado que se o produto de dois números naturais é par, então pelo menos um desses números é par.

Atividades complementares

18. São condições as expressões $|x| = 3$ e $x - 5 = 0$ porque, substituindo x por uma constante, obtém-se uma proposição.

19. $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{2} = 3$

Para $x = \dfrac{1}{4}$, temos: $\dfrac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{2} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{-\frac{1}{4}}{2} = 3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{8} = 3$ (falsa)

Assim, obtém-se uma proposição falsa.

20.1. $\forall x,\ x$ é árvore $\Rightarrow x$ dá fruto

20.2. $\forall x,\ x$ é triângulo $\Rightarrow x$ tem três ângulos

20.3. $\forall x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$

20.4. $\forall x,\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

21.1. A soma do quadrado de qualquer número real com 1 é um número positivo.

21.2. Qualquer número racional é maior do que a sua soma com 1.

21.3. A soma do dobro de qualquer número natural com 1 é um número ímpar.

21.4. O dobro de qualquer número natural é um número par.

22. Proposições verdadeiras: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$; $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n + 1$ é um número ímpar; $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n$ é um número par

23.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 1$

A proposição é falsa. Por exemplo $(2+1)^2 \neq 2^2 + 1$

23.2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{4}{3} \leq x$. A proposição é falsa. Por exemplo. $\dfrac{4}{3} \leq 0$.

24. $A = \{1\ ,2\ ,3\}$

24.1. $\forall x \in A,\ x \in \mathbb{N}$

24.2. $\forall x \in A,\ x < 2x$

25.1. $\exists x:\ x$ é retângulo $\wedge\ x$ é quadrado

25.2. $\exists x \in \mathbb{R}:\ 2x = x^2$

25.3. $\exists n \in \mathbb{N}:\ \sqrt{n} = 2$

25.4. $\exists x:\ x$ é barco $\wedge\ x$ é barco de pesca

26.1. Existe pelo menos um número real igual ao seu quadrado.

26.2. Existe pelo menos um número real maior do que o seu quadrado.

26.3. Existe pelo menos um número real menor que a sua metade.

26.4. Existe pelo menos um número natural diferente da sua soma com 1.

27.1. $\exists x \in \mathbb{R}:\ x = x^2$. Proposição verdadeira (por exemplo, $x = 1$)

27.2. $\exists x \in \mathbb{R}:\ x > x^2$

Proposição verdadeira $\left(\text{Por exemplo, } \dfrac{1}{2} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$

27.3. $\exists x \in \mathbb{R}:\ \dfrac{x}{2} > x$

Proposição verdadeira $\left(\text{Por exemplo, } \dfrac{-2}{2} > -2\right)$

27.4. $\exists x \in \mathbb{N}:\ x \neq x + 1$

Proposição verdadeira (por exemplo, $1 \neq 1 + 1$)

28. $A = \{1\ ,2\ ,3\}$

28.1. $\exists x \in A:\ x$ é um número primo

28.2. $\exists x \in A:\ x > x$

28.3. $\exists x \in A:\ x < 3x$

29. Apenas a proposição de **28.1.** é verdadeira.

30. $x > 2x \Leftrightarrow x - 2x > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Por exemplo:

30.1. A condição $x > 2x$ é impossível em $\mathbb{N}$.

30.2. A condição $x > 2x$ é universal em $]-\infty\ ,\ 0[$

30.3. A condição $x > 2x$ é possível mas não universal em $\mathbb{R}$.

31.1. $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Condição possível em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$.

Condição impossível em $\mathbb{N}$.

31.2. $x = x$

Condição universal em $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$.

31.3. $x \neq x$

Condição impossível em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$.

31.4. $3x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Condição possível em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$. Condição impossível em $\mathbb{N}$.

31.5. $(x-1)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Condição possível em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{Q}$. Impossível em $\mathbb{N}$.

32. $u\ (x)$ é uma condição universal e $i\ (x)$ é uma condição impossível.

32.1. $x + 1 > 0 \vee x + 1 > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Condição possível não universal

32.2. $|x| \geq 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow u(x) \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow u(x)$

Condição universal

32.3. $-x < 0 \vee x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \vee u(x) \Leftrightarrow u(x)$

Condição universal

32.4. $|x| + 1 < 0 \wedge x + 2 > x \Leftrightarrow i(x) \wedge u(x) \Leftrightarrow i(x)$

Condição impossível

32.5. $x + 1 < 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x = 2$

Condição possível não universal

32.6. $x^2 - 9 = 0 \vee x^2 + 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \vee i(x)$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

Condição possível não universal

32.7. $x + 1 < x \wedge x > 2 \Leftrightarrow i(x) \wedge x > 2 \Leftrightarrow i(x)$

Condição impossível

32.8. $x < 3 \wedge x < 3 + x \Leftrightarrow x < 3 \wedge u(x) \Leftrightarrow x < 3$

Condição possível não universal

32.9. $|x| \geq 0 \wedge x + 1 = 3 \Leftrightarrow u(x) \wedge x = 2 \Leftrightarrow x = 2$

Condição possível não universal

32.10. $|x| \leq 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x \in]0\ ,\ 1]$

Condição possível não universal

33. $p(x)$: $|x| + 1 > 0$ é uma condição universal

33.1. Sendo $i(x)$ uma condição impossível.

$p(x) \wedge i(x) \Leftrightarrow i(x)$

Por exemplo: $q(x) \Leftrightarrow x^2 < 0$

33.2. Sendo $u(x)$ uma condição possível não universal.

$u(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow q(x)$

Por exemplo: $q(x) \Leftrightarrow x + 1 = 0$

34.1. $\exists x \in E :\ x$ não utiliza telemóvel

$\sim(\exists x \in E : x$ não utiliza o telemóvel $) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in E,\ x$ utiliza o telemóvel

34.2. $\forall x \in E,\ x$ é português

$\sim(\forall x \in E,\ x$ é português$) \Leftrightarrow \exists x \in E :\ x$ não é português

35.1. $\sim\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow\ \exists x \in \mathbb{R} :\ x < \frac{x}{2}$

Proposição verdadeira $\left(\text{por exemplo, } -2 < \frac{-2}{2}\right)$

35.2. $\sim(\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < 0) \Leftrightarrow\ \exists x \in \mathbb{R} :\ |x| \geq 0$

Proposição verdadeira ($x = 0$)

35.3. $\sim(\exists x \in \mathbb{R} :\ x + 1 = 0) \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 \neq 0$

Proposição falsa ($-1 + 1 = 0$)

35.4. $\sim(\exists x \in \mathbb{N} :\ x + 1 > x) \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{N},\ x + 1 \leq x$

Proposição falsa

36. $C = \{-2 , -1 , 0 , 1\ 2\}$; $p(x) :\ |x| > 2$

36.1. Proposição falsa

36.2. $\sim(\exists x \in C :\ p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in C,\ \sim p(x)\ \Leftrightarrow \forall x \in C,\ |x| \leq 2$

O valor absoluto de qualquer elemento de C é menor ou igual a 2.

36.3. **a)** $\exists x \in C :\ \sim p(x) \Leftrightarrow \exists x \in C :\ |x| \leq 2$

Proposição verdadeira

b) Proposição falsa dado que a sua negação é verdadeira.

36.4. **a)** $p(x)$ é uma condição impossível

b) $\sim p(x)$ é uma condição universal

37.1. $\sim(\forall x \in \mathbb{R},\ x = 2 \Rightarrow x^2 = 4) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} :\ x = 2 \wedge x^2 \neq 4$

37.2. $\sim(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 - x = 0 \wedge x \neq 0$

37.3. $\sim(\forall x \in \mathbb{R},\ x > 5 \Rightarrow x > 2) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} :\ x > 5 \wedge x \leq 2$

38.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$ é falsa porque, por exemplo, $-1 < 0 \wedge (-1)^2 > 0$

38.2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} > 0 \Rightarrow x > 0$ é falsa porque, por exemplo, $\sqrt{(-1)^2} > 0 \wedge -1 \leq 0$

38.3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 1 \Rightarrow -2x < 2$ é falsa porque, por exemplo, $-3 < 1 \wedge -2 \times (-3) \geq 2$

39.1. $\sim(\ \forall x,\ x$ é aluno do 10.º $A\ \Rightarrow x$ estuda Matemática)

$\Leftrightarrow \exists x :\ x$ é aluno do 10.º $A\ \wedge\ x$ não estuda Matemática

39.2. $\sim(\ \forall x,\ x$ é quadrilátero $\Rightarrow\ x$ é paralelogramo)

$\Leftrightarrow\ \exists x :\ x$ é quadrilátero $\wedge\ x$ não é paralelogramo

39.3. $\sim(\forall x \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow\ \exists x \in \mathbb{N} :\ x \notin \mathbb{Q}$

39.4. $\sim(\ \forall x,\ x$ é trevo $\Rightarrow x$ tem quatro folhas)

$\exists x :\ x$ é trevo $\wedge\ x$ não tem quatro folhas

39.5. $\sim(\ \exists x :\ x$ é aluno do 10.º $A\ \wedge x$ tem olhos verdes)

$\forall x,\ x$ é aluno do 10.º $A \Rightarrow x$ não tem olhos verdes

39.6. $\sim(\ \exists x :\ x$ é aluno do 10.º $A\ \wedge x$ estuda Economia)

$\forall x,\ x$ é aluno do 10.º $A \Rightarrow x$ não estuda Economia

40. As proposições são falsas porque, por exemplo:

40.1. 2 é primo e 2 é par

40.2. 9 é um quadrado perfeito e 9 é ímpar

40.3. Um triângulo retângulo isósceles não é equilátero.

41. $C = \{1 , 4 , 9 , 16 , 20\}$

$p(x) :\ \sqrt{x}$ é um número inteiro

41.1. A proposição é falsa. $4 \in A$ e $\sqrt{4}$ é um número inteiro.

41.2. $\sim(\forall x \in A,\ \sim p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A :\ p(x)$

41.3. **a)** A proposição é falsa. $20 \in A$ e $\sqrt{20}$ não é inteiro.

b) A proposição é verdadeira.

42.1. $\forall x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$

42.2. $\forall x,\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow x$ é par

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N},\ x$ é par

42.3. $\exists x :\ x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 = 0$

42.4. $\exists x :\ x \in \mathbb{N} \wedge x > 100 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} :\ x > 100$

43.1. $A = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 = 2 \vee x = 0\} =$

$= \{-\sqrt{2} , 0 , \sqrt{2}\}$

43.2. $B = \{\ x \in \mathbb{N} :\ x$ é divisor de 12 $\wedge\ x$ é múltiplo de 3$\} =$

$= \{3 , 6 , 12\}$

43.3. $C = \{x \in \mathbb{Z} :\ |x| < 3 \vee 1 - x = 5\} =$

$= \{-4 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$

$1 - x = 5 \Leftrightarrow -x = 5 - 1 \Leftrightarrow x = -4$

43.4. $D = \{\ x \in \mathbb{N} :\ x$ é divisor de 18 $\wedge\ 1 < x < 18\}$

$= \{2 , 3 , 6 , 9\}$

44. $A = \{x \in \mathbb{N} :\ |x| < 3\} = \{1\ ,\ 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} :\ -4 < x - 1 < 2\} = \{1\ ,\ 2\}$

Cálculo auxiliar:

$-4 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow x - 1 > -4 \wedge x - 1 < 2 \Leftrightarrow x > -3 \wedge x < 3 \overset{x \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} x = 1 \vee x = 2$

$\forall x \in \mathbb{N},\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$ porque $p\ (x)$ e $q\ (x)$ têm o mesmo conjunto-solução: $\{1 , 2\}$.

45. $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$; $A = \{0 , 2\}$

$|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$; $B = \{-1 , 0 , 1\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z} :\ 0 \leq x < 5\}$; $C = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4\}$

45.1. $A \cup B = \{-1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\}$

45.2. $A \cap C = \{0\ ,\ 2\}$

45.3. $B \setminus A = \{-1\ ,\ 1\}$

45.4. $\overline{A} = C \setminus A = \{1\ , 3\ ,\ 4\}$

46.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$

46.2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0$

47. Se n é divisível por 33, então $n = k \times 33$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Mas, se $n = 33k$, então $n = 11 \times (3k)$ sendo $3k \in \mathbb{N}$ dado que $k \in \mathbb{N}$. Portanto, se n é divisível por 33, então n é divisível por 11. Por contrarrecíproco, tem-se:

se n não é divisível por 11, então não é divisível por 33.

Pág. 61

48. A disjunção de uma condição universal com uma condição qualquer é uma condição universal.

Resposta: (D)

49. $x<1 \wedge 2-x<0 \Leftrightarrow x<1 \wedge x>2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

50. $\sim(x \leq 3 \wedge x>4) \Leftrightarrow x>3 \vee x<4 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Resposta: (C)

51. $a(n)$: n é divisor de 24

$n \in \{\cancel{1}, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{6}, 8, \cancel{12}, \cancel{24}\}$

$b(n)$: $1<2n \leq 10 \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 5$

$n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$c(n)$: n é um quadrado perfeito

$n \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$

$d(n)$: n é múltiplo de 5

$n \in \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$

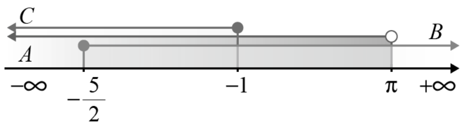
$D=\{n: a(n) \wedge b(n)\}=\{1, 2, 3, 4\}$

$E=\{n: a(n) \vee b(n)\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 24\}$

$F=\{n: a(n) \wedge \sim c(n)\}=\{2, 3, 6, 8, 12, 24\}$

$G=\{n: a(n) \wedge \sim b(n) \wedge \sim d(n)\}=\{6, 8, 12, 24\}$

52.



52.1. $A \cap (B \cup C)=A \cap \mathbb{R}=A=]-\infty, \pi[$

52.2. $\overline{A} \cup (B \cap C)=[\pi, +\infty[\cup \left[-\frac{5}{2}, -1\right]=$

$=\left[-\frac{5}{2}, -1\right] \cup [\pi, +\infty[$

52.3. $B \setminus C=]-1, +\infty[$

52.4. $C \setminus B=\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$

52.5. $\overline{C} \cap A=]-1, +\infty[\cap]-\infty, \pi[=]-1, \pi[$

52.6. $\overline{C} \setminus A=]-1, +\infty[\setminus]-\infty, \pi[=[\pi, +\infty[$

52.7. $A \setminus (\overline{B} \cap C)=]-\infty, \pi[\setminus \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[=\left[-\frac{5}{2}, \pi\right[$

53. $x^2=4x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2-4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x=\frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{4 \pm 2}{2}$

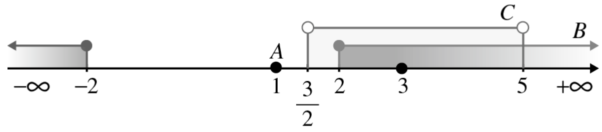
$\Leftrightarrow x=1 \vee x=3$

$A=\{1, 3\}$

$B=]-\infty, 2] \cup [2, +\infty[$

$2x-3>0 \wedge x-5<0 \Leftrightarrow 2x>3 \wedge x<5 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2} \wedge x<5$

$C=\left]\frac{3}{2}, 5\right[$



53.1. $A \cap B=\{3\}$

53.2. $A \cap C=\{3\}$

53.3. $A \setminus C=\{1, 3\} \setminus C=\{1\}$

53.4. $B \setminus \overline{C}=[2, 5[$

53.5. $(B \cup \overline{C}) \setminus A=\left(\left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty[\right) \setminus \{1, 3\}=$

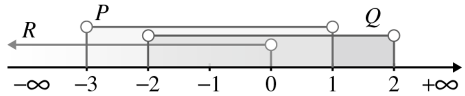
$=]-\infty, 1[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[\cup [2, 3[\cup]3, +\infty[$

53.6. $A \setminus (C \cap B)=\{1, 3\} \setminus [2, 5[=\{1\}$

54. $P=\{x \in \mathbb{R}: -3<x<1\}=]-3, 1[$

$Q=\{x \in \mathbb{R}: |x|<2\}=]-2, 2[$

$R=\left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{1}{2}x<0\right\}=]-\infty, 0[$



54.1. $P \cap Q=]-2, 1[$

54.2. $P \cup Q=]-3, 2[$

54.3. $(P \cap Q) \cup R=]-\infty, 1[$

54.4. $\overline{P} \cup R=]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

54.5. $R \setminus (P \cap \overline{Q})=]-\infty, 0[\setminus]-3, -2]=$

$=]-\infty, -3] \cup]-2, 0[$

55.
- $-\frac{1}{3}x>0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x<0 \Leftrightarrow x<0$
- $\cancel{1}-\frac{x-1}{2}>\cancel{1} \Leftrightarrow -\frac{x-1}{2}>0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \frac{x-1}{2}<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$
- $\left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{1}{3}x>0\right\}=]-\infty, 0[$

  $\left\{x \in \mathbb{R}: 1-\frac{x-1}{2}>1\right\}=]-\infty, 1[$

  Como $]-\infty, 0[\subset]-\infty, 1[$:

  $\left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{1}{3}x>0\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}: 1-\frac{x-1}{2}>1\right\}$

Avaliação 2 **Pág. 62**

1. $3x^2-2x+1$ não é uma condição em x

Resposta: (A)

2.
- $x>\frac{x}{3} \Leftrightarrow 3x>x \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$ (condição possível)
- $(x+\sqrt{2})^2=x^2+2\sqrt{2}x+2$ (condição universal)
- $x>-x \Leftrightarrow x+x>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$ (condição possível)
- $\sqrt[3]{x}=-1 \Leftrightarrow x=-1$ (condição impossível em $\mathbb{N}$)

Resposta: (D)

3. • $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

$p = \{2 , 3\}$

• $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $q = \{2\}$

• $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$; $r = \{-3 , 3\}$

$\exists x \in \mathbb{R} : \sim p(x) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge x \neq 3$

é uma proposição verdadeira.

Resposta: (C)

4. • $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (condição impossível em $\mathbb{Z}$)

• $2x < x \Leftrightarrow x < 0$

(condição possível em $\mathbb{Z}$ e impossível em $\mathbb{N}$)

• $x^2 - 2x = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 0x = 1$

(condição impossível em $\mathbb{R}$)

Resposta: (C)

5. • $x^2 > 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \vee x = -1$

(condição possível não universal)

• $\sim(|x| \leq 0) \vee x^3 = 0 \Leftrightarrow |x| > 0 \vee x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \neq 0 \vee x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (condição universal)

• $x^2 + 1 > 0 \wedge |x| > 0 \Leftrightarrow u(x) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ (condição possível não universal)

• $x^2 - 2x + 4 = 0 \wedge x^2 + 7 \geq 6 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} \wedge u(x)$

$\Leftrightarrow i(x) \wedge u(x)$ (condição impossível)

Resposta: (B)

6. • $Q = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{x-2}{3} \geq 5\right\}$

$1 - \frac{x-2}{3} \geq 5 \Leftrightarrow 3 - x + 2 \geq 15 \Leftrightarrow -x \geq 10 \Leftrightarrow x \leq -10$

$Q =]-\infty , -10]$

• $x^2 + 7x - 60 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+240}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 17}{2} \Leftrightarrow x = -12 \vee x = 5$

$A = \{-12 , 5\} \not\subset Q$

• $-\frac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow x < 0$; $B =]-\infty , 0[\not\subset Q$

• $(x+12)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

$C = \{-12\} \subset Q$

• $2 - \frac{x+8}{4} < 3 \Leftrightarrow 8 - x - 8 < 12 \Leftrightarrow -x < 12 \Leftrightarrow x > -12$

$D =]-12, +\infty[\not\subset Q$

$C \subset Q$

Resposta: (C)

7. $A =]2 , +\infty[$ e $B =]-5 , 2[$

$A \cup B =]2 , +\infty[\cup]-5 , 2[=$

$=]-5 , 2[\cup]2 , +\infty[$

$\overline{A \cup B} =]-\infty , -5] \cup \{2\}$

Resposta: (D)

8. $15 - 3x > 0 \Leftrightarrow -3x > -15 \Leftrightarrow x < 5$

Resposta: (C)

9. $\sim(\exists x \in \mathbb{R} : 2x - 1 = 2 \vee x < 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2x - 1 \neq 2 \wedge x \geq 2$

Resposta: (A)

Pág. 63

10.1. $x^2 = x \wedge \sqrt{x} = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \wedge$ condição impossível $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ condição impossível

Condição impossível

10.2. $x^2 = x \vee 2(x+1) = 2x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = x \vee 2x + 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = x \vee$ condição universal $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ condição universal

Condição universal

10.3. $\sqrt[3]{x} = 2 \vee \sqrt{x} = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 8 \vee$ condição impossível $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 8$

Condição possível não universal

10.4. $x^2 = x \vee \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 8$

Condição possível não universal

11. $A = \{1 , 2 , 3\}$

11.1. $1 > 0 \wedge 2 > 0 \wedge 3 > 0$

$\forall x \in A, x > 0$

11.2. $1 > 0 \vee 2 > 0 \vee 3 > 0$

$\exists x \in A : x > 0$

12.1. $\sim$ ($\forall x \in A$, x é vigia de praia) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists x \in A : x$ não é vigia de praia

12.2. $\sim$ ($\forall x \in A$, x joga futebol $\wedge$ x é estudante) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists x \in A : x$ não joga futebol $\vee$ x não é estudante

12.3. $\sim(\exists x \in \mathbb{R} : 3x - 1 \leq 2 \vee x = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 3x - 1 > 2 \wedge x \neq 0$

12.4. $\sim(\exists x \in \mathbb{N} : x > 0 \wedge x \neq -x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}, x \leq 0 \vee x = -x$

13. A proposição é falsa porque, por exemplo, um losango não quadrado tem os quatro lados iguais e não é um polígono regular.

14. $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq a^2 \Rightarrow x \neq a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x = a \Rightarrow x^2 = a^2$ é uma proposição verdadeira.

15.1. $2x > 6 \vee x^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 3 \vee$ condição impossível

Condição possível não universal

15.2. $|x| = 2 \vee x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x| = 2 \vee$ condição universal

$\Leftrightarrow$ condição universal

15.3. $\sqrt{x} = 1 \wedge x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ condição impossível $\wedge x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ condição impossível

15.4. $3x + 6 > 0 \vee |x+1| = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x > -6 \vee$ condição impossível $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > -2$

Condição possível não universal

15.5. $x^2 - 64 = 0 \wedge 2x + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = -8 \vee x = 8) \wedge x = -8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -8$

Condição possível não universal

15.6. $x^2 - 64 = 0 \wedge \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{x+2}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = -8 \vee x = 8) \wedge 4x - 8 = 3x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = -8 \vee x = 8) \wedge x = 14 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Condição impossível

16. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 5 \Rightarrow x^2 > 25$

16.1. A proposição é verdadeira.

16.2. $\sim\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x > 5 \Rightarrow x^2 > 25\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}:\ x > 5 \wedge x^2 \leq 25$

16.3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 5 \Rightarrow x^2 > 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 25 \Rightarrow x \leq 5$

17. $A = \left\{x \in \mathbb{R}:\ \sim\left(x^2 + 1 > 0\right) \vee x - 1 > 0\right\} =]1\ ,\ +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$\sim\left(x^2 + 1 > 0\right) \vee x - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq 0 \vee x > 1 \Leftrightarrow x > 1$

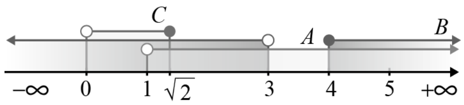
$B = \left\{x \in \mathbb{R}:\ \sim\left(x \geq 3 \wedge x < 4\right)\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R}:\ x < 3 \vee x \geq 4\right\} =$

$=]-\infty\ ,\ 3[\cup [4\ ,\ +\infty[$

$C = \left\{x \in \mathbb{R}^+:\ x - \sqrt{2} \leq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^+:\ x \leq \sqrt{2}\right\}$

$C = \left]0\ ,\ \sqrt{2}\right]$



17.1. $A \cap C = \left]1\ ,\ \sqrt{2}\right]$

17.2. $(A \cap B) \cup C = \left(]1\ ,\ 3[\cup [4\ ,\ +\infty[\right) \cup \left]0\ ,\ \sqrt{2}\right]$

$=]0\ ,\ 3[\cup [4\ ,\ +\infty[$

17.3. $B \setminus C =]-\infty\ ,\ 0] \cup \left]\sqrt{2}\ ,\ 3\right[\cup [4\ ,\ +\infty[$

17.4. $(A \setminus B) \cup C = [3\ ,\ 4[\cup \left]0\ ,\ \sqrt{2}\right]$

$= \left]0\ ,\ \sqrt{2}\right] \cup [3\ ,\ 4[$

17.5. $\left(\overline{A} \cap C\right) \cup \overline{B} =]0\ ,\ 1] \cup [3\ ,\ 4[$

17.6. $(B \setminus A) \cap C =]-\infty\ ,\ 1] \cap \left]0\ ,\ \sqrt{2}\right]$

$=]0\ ,\ 1]$

18. $p: \exists x \in \mathbb{R}:\ x = x^2$. Proposição verdadeira

$q: \forall x \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Z}$. Proposição verdadeira

$r: \forall x \in \mathbb{Q},\ x^2 \in \mathbb{Q}$. Proposição verdadeira

$s: \forall x \in \mathbb{R},\ x < x^2$. Proposição falsa ($1 \geq 1^2$)

$t: \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x < 2x$. Proposição verdadeira

19.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > x$

A proposição é falsa pois, por exemplo, $|0| \leq 0$.

$\sim\left(\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > x\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}:\ |x| \leq x$

19.2. $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 \geq 1$

A proposição é verdadeira.

19.3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (5x - 10)^2 > 0$

A proposição é falsa. Para $x = 2$, $(5 \times 2 - 10)^2 \leq 0$.

$\sim\left(\forall x \in \mathbb{R},\ (5x-10)^2 > 0\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}:\ (5x-10)^2 \leq 0$

19.4. $\exists x \in \mathbb{R}:\ \sqrt{x} + 1 = 2$

A proposição e verdadeira para $x = 1$.

Avaliação global **Pág. 64**

1. $x > 2x \Leftrightarrow x < 0$

$\exists x \in \mathbb{R}:\ x > 2x$ é uma proposição verdadeira.

Resposta: (C)

2. $p \wedge \sim q \Leftrightarrow \text{V}$; $p \Leftrightarrow \text{V}$ e $q \Leftrightarrow \text{F}$

- $\sim p \vee q \Leftrightarrow \text{F} \vee \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$
- $\sim p \Rightarrow (q \wedge p) \Leftrightarrow \text{F} \Rightarrow (\text{F} \wedge \text{V}) \Leftrightarrow (\text{F} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{V}$

Resposta: (D)

3. $\sim\left(\exists x \in \mathbb{Z}:\ x < 0 \wedge x^2 \geq 0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z},\ x \geq 0 \vee x^2 < 0$

Resposta: (B)

4. $\sim\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x = a \Rightarrow x^2 = a^2\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}:\ x = a \wedge x^2 \neq a^2$

Resposta: (A)

5. $p \wedge (p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \Rightarrow \sim s) \wedge (r \vee q) \Leftrightarrow \text{V}$

$p \Leftrightarrow \text{V}$; $(\text{V} \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \text{V}$; $(\text{V} \Rightarrow \sim s) \Leftrightarrow \text{V}$; $r \vee q \Leftrightarrow \text{V}$

$p \Leftrightarrow \text{V}$; $q \Leftrightarrow \text{F}$; $s \Leftrightarrow \text{F}$; $r \vee \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$

$p \Leftrightarrow \text{V}$; $q \Leftrightarrow \text{F}$ e $s \Leftrightarrow \text{F}$; $r \Leftrightarrow \text{V}$

Resposta: (A)

6. Se o mar tem ondas e o Rui não tem trabalho, então o Rui faz *surf*.

$a \wedge \sim c \Rightarrow b$

Resposta: (D)

7. $8 < \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow 16 < x \Leftrightarrow x > 16$

Resposta: (A)

Pág. 65

8.1. t é falsa e l é verdadeira.

8.2. $\forall x \in T,\ x$ tem um ângulo reto $\Rightarrow x$ não é isósceles

$\forall x \in L,\ x$ não é quadrado $\Rightarrow x$ tem as diagonais diferentes

9.1. Todo o número real é menor do que o seu quadrado. Proposição falsa (por exemplo: $0 = 0^2$)

9.2. Existe pelo menos um número primo no conjunto $\{2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$. Proposição verdadeira

9.3. A raiz quadrada do quadrado de um número real é um número positivo. Proposição falsa $\left(\sqrt{0^2} = 0\right)$

9.4. Existe pelo menos um número real diferente de 2 cujo quadrado é 4. Proposição verdadeira ($(-2)^2 = 4$)

10. • $A = \left\{x \in \mathbb{Z}:\ -2 < 2x - 1 < 2\right\}$

$2x - 1 > -2 \wedge 2x - 1 < 2 \Leftrightarrow 2x > -1 \wedge 2x < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2} \wedge x < \dfrac{3}{2}$; $A = \{0\ ,\ 1\}$

• $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

$B = \{1 , 3\}$

• $C = \{-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3\}$

10.1. $A = \{0 , 1\}$

10.2. $B = \{1 , 3\}$

10.3. $C = \{-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3\}$

10.4. $A \backslash B = \{0\}$

10.5. $A \cap C = \{0 , 1\}$

10.6. $C \setminus (A \cup B) = \{-3 , -2 , -1 , 2\}$

10.7. $\overline{B} =]-\infty , 1[\cup]1 , 3[\cup]3 , +\infty[$

10.8. $\overline{A \cap B} =]-\infty , 1[\cup]1 , +\infty[$

11. • $p(n)$: n é divisor de 45

$\{1 , 3 , 5 , 9 , 15 , 45\}$

• $q(n)$: n é múltiplo de 5

$\{5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , 35 , 40 , 45 , 50 , \ldots\}$

• $r(n)$: $x^2 < 100$

$\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9\}$

11.1. $A = \{n : \sim q(n) \wedge p(n)\} = \{1 , 3 , 9\}$

11.2. $B = \{n : (\sim q(n) \vee \sim p(n)) \wedge r(n)\} =$

$= \{1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9\}$

12. a: "A soma dos algarismos de 1235 é múltiplo de 3."

b: "O número 1235 é múltiplo de 3."

$\sim a \Rightarrow \sim b$

13.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > \frac{1}{3}$

Proposição falsa. Por exemplo, $0^2 \leq \frac{1}{3}$.

$\sim\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq \frac{1}{3}$

13.2. $5 - 2x = 2 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$

$\exists x \in \mathbb{N} :\ 5 - 2x = 2$ é uma proposição falsa porque

$5 - 2x = 2$ é impossível em $\mathbb{N}$.

$\sim(\exists x \in \mathbb{N} :\ 5 - 2x = 2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N},\ 5 - 2x \neq 2$

13.3. $\forall n \in \mathbb{N},\ n$ é primo $\Rightarrow n$ é ímpar

A proposição é falsa, porque 2 é primo e 2 é par.

$\exists n \in \mathbb{N} :\ n$ é primo $\wedge$ n é par

13.4. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 5 \Rightarrow x > 4$

Proposição verdadeira porque $]5 , +\infty[\subset]4 , +\infty[$

13.5. $\forall x \in \mathbb{R},\ 3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$

Proposição verdadeira porque $3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$ é universal em $\mathbb{R}$.

13.6. $\exists x \in \mathbb{Q} :\ 2x - 1 = 0$

Proposição verdadeira porque $x = \frac{1}{2}$

Pág. 66

14.1. $\sim(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 25 \Rightarrow x > 5) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 \geq 25 \wedge x \leq 5$

14.2. A proposição q é falsa porque, por exemplo:

$(-6)^2 \geq 25 \wedge -6 \leq 5$

ou seja, $\sim q$ é verdadeira.

15.1. $p :\ \exists x \in \mathbb{Z} :\ \frac{4}{3} < x < \frac{5}{3}$; $q :\ \forall x \in \mathbb{Q},\ x < 3x$;

$r :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \geq 0$

15.2. $\sim p :\ \forall x \in \mathbb{Z},\ x \leq \frac{4}{3} \vee x \geq \frac{5}{3}$; $\sim q :\ \exists x \in \mathbb{Q} :\ x \geq 3x$;

$\sim r :\ \exists n \in \mathbb{N} :\ n^2 < 0$

16. $(b \Rightarrow \sim a) \vee (a \Rightarrow c) \Leftrightarrow$ F

$(b \Rightarrow \sim a) \Leftrightarrow$ F e $(a \Rightarrow C) \Leftrightarrow$ F

$b \Leftrightarrow$ V e $a \Leftrightarrow$ V e $(\text{V} \Rightarrow c) \Leftrightarrow$ F

$b \Leftrightarrow$ V e $a \Leftrightarrow$ V e $c \Leftrightarrow$ F

O Luís toca viola e bateria, mas não toca piano.

17.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V

$\sim p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \vee \sim q)$

18. $\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

$p \wedge \sim q$ é verdadeira se e somente se p for verdadeira e q for falsa.

19. $a(x)$: $\frac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$b(x)$: $x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2}$ é impossível

$c(x)$: $\sqrt{x^2} \geq 0$ é universal

$d(x)$: $\frac{-2x+1}{2} > 1 - \frac{x-1}{3} \Leftrightarrow -6x + 3 > 6 - 2x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x + 2x > 8 - 3 \Leftrightarrow -4x > 5 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{4}$

19.1. $\sqrt{x^2} \geq 0 \wedge x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ condição universal $\wedge$ condição impossível $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ condição impossível

19.2. $\sqrt{x^2} \geq 0 \wedge \frac{-2x+1}{2} > 1 - \frac{x-1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ condição universal $\wedge\ x < -\frac{5}{4} \Leftrightarrow x < -\frac{5}{4}$

Condição possível não universal

19.3. $\sqrt{x^2} \geq 0 \vee x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ condição universal $\vee$ condição impossível $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ condição universal

19.4. $\frac{1}{2}x > 0 \vee \frac{-2x+1}{2} > 1 - \frac{x-1}{3} \Leftrightarrow x > 0 \vee x < -\frac{5}{4}$

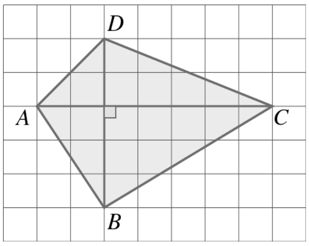
Condição possível não universal

20.1. $\sim\left(\forall x\in\mathbb{R},\ x\geq 2\Rightarrow \frac{x-1}{3}>0\right)\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}:\ x\geq 2\wedge \frac{x-1}{3}\leq 0$

20.2. $\sim\left(\exists x\in\mathbb{R}:\ x\geq 2\wedge\sqrt{x}>4\right)\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ x<2\vee\sqrt{x}\leq 4$

21. Por exemplo:

O quadrilátero [*ABCD*] tem as diagonais perpendiculares e não é um quadrado.



Pág. 67

22.1. $5x-1<3\Leftrightarrow 5x<4\Leftrightarrow x<\frac{4}{5}$

Como $\frac{4}{5}<1$, a condição $5x-1<3$ é impossível em $\mathbb{N}$.

22.2. $2x^2+x=0\Leftrightarrow x(2x+1)=0\Leftrightarrow x=0\vee 2x+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=-\frac{1}{2}$

Como $0\in\mathbb{Z}$, $2x^2+x=0$ é possível não universal em $\mathbb{Z}$.

22.3. $x^2-2=0\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2}$

Como $-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ e $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, $x^2-2=0$ é impossível em $\mathbb{Q}$.

22.4. $x^2-2=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2}$

A condição $x^2-2=0$ é possível não universal em $\mathbb{R}$.

22.5. $(x-2)^2=0\wedge x^2-4x+4\neq 0\Leftrightarrow x=2\wedge(x-2)^2\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2\wedge x\neq 2$

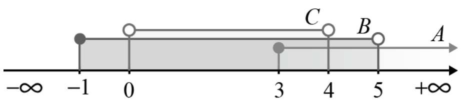
A condição $(x-2)^2=0\wedge x^2-4x+4$ é impossível em $\mathbb{R}$.

23.
- $\sim(3x-9<0)\Leftrightarrow 3x-9\geq 0\Leftrightarrow 3x\geq 9\Leftrightarrow x\geq 3$

  $A=[3\ ,\ +\infty[$
- $\sim(x<-1\vee x\geq 5)\Leftrightarrow x\geq -1\wedge x<5$

  $B=[-1\ ,\ 5[$
- $x\in\mathbb{R}^+\wedge x<4\Leftrightarrow x>0\wedge x<4$

  $C=]0\ ,\ 4[$



23.1. $A\cap B=[3\ ,\ 5[$

23.2. $A\cup B=[-1\ ,\ +\infty[$

23.3. $B\setminus A=[-1\ ,\ 3[$

23.4. $(A\cup B)\setminus C=[-1\ ,\ 0]\cup[4\ ,\ +\infty[$

23.5. $(A\setminus B)\cup(A\cap C)=[5\ ,\ +\infty[\cup[3\ ,\ 4[=$

$=[3\ ,\ 4[\cup[5\ ,\ +\infty[$

23.6. $\overline{B}\cap C$; $B=[-1\ ,\ 5[$; $\overline{B}=]-\infty\ ,\ -1[\cup[5\ ,\ +\infty[$

$\overline{B}\cap C=\varnothing$

24. $(a\Rightarrow b)\Leftrightarrow \mathrm{V}$

$[(a\vee c)\Rightarrow(b\vee c)]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sim(a\vee c)\vee(b\vee c)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sim a\wedge\sim c)\vee(b\vee c)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[(\sim a\wedge\sim c)\vee c]\vee b\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[(\sim a\vee c)\wedge(\sim c\wedge c)]\vee b\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[(\sim a\vee c)\wedge\mathrm{V}]\vee b\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sim a\vee c)\vee b\Leftrightarrow(\sim a\vee b)\vee c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a\Rightarrow b)\vee c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\mathrm{V}\vee c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\mathrm{V}$

25.1. x é múltiplo de $4\Rightarrow x$ é par

25.2. A proposição é verdadeira.

Se x é múltiplo de 4, então:

$x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=2\times(2k)$

com $2k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x$ é par

25.3. x é par $\Rightarrow x$ é múltiplo de 4

A proposição é falsa.

Por exemplo, 6 é par e não é múltiplo de 4.

26.
- $[(a\vee\sim a)\Rightarrow b]\Leftrightarrow(\mathrm{V}\Rightarrow b)$

  A proposição só é verdadeira se $b\Leftrightarrow\mathrm{V}$.
- $a\wedge(\sim a\Rightarrow b)$ é falsa se $a\Leftrightarrow\mathrm{F}$
- $a\wedge\sim a\Rightarrow b\Leftrightarrow(\mathrm{F}\Rightarrow b)\Leftrightarrow\mathrm{V}$
- $a\vee(\sim a\Rightarrow b)\Leftrightarrow a\vee(a\vee b)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow(a\vee a)\vee\mathrm{V}\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow a\vee b$

A proposição é falsa se $a\Leftrightarrow\mathrm{F}$ e $b\Leftrightarrow\mathrm{F}$.

Resposta: (C)

27.1. $(x\wedge\mathrm{V}\Leftrightarrow\mathrm{V})\Leftrightarrow(x\Leftrightarrow\mathrm{V})$

27.2. $(\mathrm{V}\wedge x\Leftrightarrow\mathrm{V})\Leftrightarrow(x\Leftrightarrow\mathrm{V})$

27.3. $(\mathrm{V}\vee x\Leftrightarrow\sim x)\Leftrightarrow(x\Leftrightarrow\mathrm{F})$

$\mathrm{V}\vee\mathrm{F}\Leftrightarrow\mathrm{V}$ é verdadeiro

$\mathrm{V}\vee\mathrm{V}\Leftrightarrow\mathrm{F}$ é falso

27.4. $[(x\Rightarrow\mathrm{F})\Leftrightarrow\mathrm{V}]\Leftrightarrow(x\Leftrightarrow\mathrm{F})$

27.5. $[(x\Rightarrow\sim x)\Leftrightarrow\mathrm{V}]\Leftrightarrow(x\Leftrightarrow\mathrm{F})$

$(\mathrm{V}\Rightarrow\mathrm{F})\Leftrightarrow\mathrm{F}$

28.1. $[\sim(\sim p\wedge q)\Rightarrow p]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sim p\wedge q)\vee p\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sim p\vee p)\wedge(q\vee p)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\mathrm{V}\wedge(q\vee p)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q\vee p\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p\vee q$

28.2. $[p\Rightarrow(p\wedge q)]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sim p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sim p\vee p)\wedge(\sim p\vee q)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\mathrm{V}\wedge(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p\Leftrightarrow q$

28.3. $[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sim p\vee(\sim q\vee r)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sim p\vee\sim q)\vee r\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sim(p\wedge q)\vee r\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p\wedge q\Rightarrow r$