3.1. Referencial ortonormado. Distâncias no plano

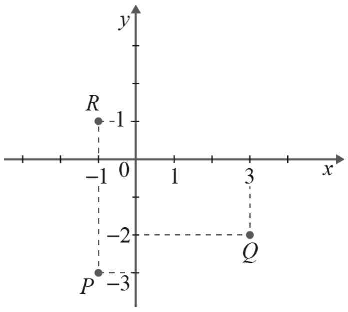
Pág. 150

Atividade de diagnóstico

1.1. $A(0\,,\,3)$, $B(2\,,\,0)$, $C(-2\,,\,0)$, $D(0\,,\,-3)$, $E(0\,,\,0)$, $F(4\,,\,2)$, $G(-3\,,\,2)$

1.2. Não pertencem a qualquer quadrante os pontos *A, B, C, D* e *E*.

1.3.



Os pontos *R, P* e *Q* pertencem aos 2.º, 3.º e 4.º quadrantes, respetivamente.

1.4. $F(4\,,\,2)$

a) $F'(4\,,\,-2)$ **b)** $F''(-4\,,\,2)$

1.5. $F'''(-4\,,\,-2)$

2.1. $(-1\,,\,0)$ e $(2\,,\,-3)$

$$m=\frac{-3-0}{2-(-1)}=\frac{-3}{3}=-1$$

2.2. $(-5\,,\,1)$ e $(0\,,\,-2)$

$$m=\frac{-2-1}{0+5}=-\frac{3}{5}$$

2.3. $(-4\,,\,-3)$ e $(-2\,,\,-1)$

$$m=\frac{-1-(-3)}{-2-(-4)}=\frac{2}{2}=1$$

2.4. $\left(-\frac{1}{2}\,,\,3\right)$ e $\left(-2\,,\,\frac{1}{3}\right)$

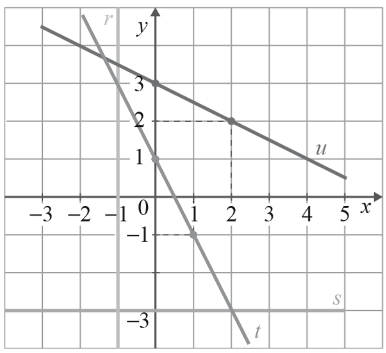
$$m=\frac{\frac{1}{3}-3}{-2-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{9}$$

Pág. 151

3. $t:\ y=-2x+1$ $\qquad u:\ y=-\frac{1}{2}x+3$

x	y
0	1
1	− 1

x	y
0	3
2	2



4. **Reta *r*:**

Sejam os pontos $(-3\,,\,0)$ e $(0\,,\,2)$.

$r:\ y=mx+b$

$$m=\frac{2-0}{0-(-3)}=\frac{2}{3}\ ;\ b=2$$

$$r:\ y=\frac{2}{3}x+2$$

Reta *s*:

Sejam os pontos $(0\,,\,3)$ e $(1\,,\,0)$.

$s:\ y=mx+b$

$$m=\frac{0-3}{1-0}=-3\ ;\ b=3$$

$$s:\ y=-3x+3$$

Assim:

$$r:\ y=\frac{2}{3}x+2\ ;\ s:\ y=-3x+3\ ;\ t:\ x=3\ \text{ e }\ u:\ y=-2$$

5.1.
$$\begin{cases}2x-\frac{1}{2}y=7\\3x-1=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-y=14\\3x-1=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-(3x-1)=14\\y=3x-1\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=13\\y=3\times13-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=13\\y=38\end{cases}$$
$$S=\{(13\,,\,38)\}$$

5.2.
$$\begin{cases}2x+1=\frac{3}{4}\\-2x-\frac{1}{2}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{3}{4}-1\\y=-2x-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=-\frac{1}{4}\\y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{8}\\y=-\frac{1}{4}\end{cases}$$
$$S=\left\{\left(-\frac{1}{8}\,,\,-\frac{1}{4}\right)\right\}$$

5.3.
$$\begin{cases}2(x-1)=1-\frac{y-2}{3}\\3\left(y-\frac{1}{2}\right)-14=\frac{1}{6}-\frac{x+1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2-1+\frac{y-2}{3}=0\\\underset{(6)}{3y}-\underset{(3)}{\frac{3}{2}}-\underset{(6)}{14}-\frac{1}{6}+\underset{(2)}{\frac{x+1}{3}}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x-9+y-2=0\\18y-9-84-1+2x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+y=11\\2x+18y=92\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=11-6x\\x+9(11-6x)=46\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=11-6x\\-53x=-53\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\x=1\end{cases}$$
$$S=\{(1\,,\,5)\}$$

5.4.
$$\begin{cases}\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=y\\\frac{x-1}{3}=y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{x-\frac{1}{2}}{2}\\\frac{x-1}{3}=\frac{x-\frac{1}{2}}{2}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{x-\frac{1}{2}}{2}\\2x-2=3x-\frac{3}{2}+6\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{x-\frac{1}{2}}{2}\\-x=2-\frac{3}{2}+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{-\frac{13}{2}-\frac{1}{2}}{2}\\x=-\frac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\frac{7}{2}\\x=-\frac{13}{2}\end{cases}$$
$$S=\left\{\left(-\frac{13}{2}\,,\,-\frac{7}{2}\right)\right\}$$

6.1. $x^2-6x=-5 \Leftrightarrow x^2-6x+9=-5+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3=2 \vee x-3=-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=5 \vee x=1$

$S=\{1\ ,\ 5\}$

6.2. $x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}-6-\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \vee x-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=-2$

$S=\{-2\ ,\ 3\}$

6.3. $2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \vee x-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{1}{2}$

$S=\left\{\frac{1}{2}\ ,\ 1\right\}$

Pág. 152

Atividade inicial 1

1.1. $d(F\ ,\ C)=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

1.2. $d(F,\ B)=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

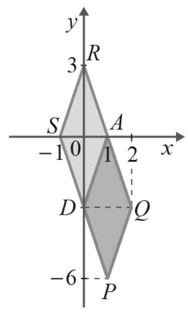
1.3. $d(C\ ,\ E)=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

2.1. $A(1\ ,0)$, $B(4\ ,3)$, $C(-3\ ,5)$, $D(0\ ,-3)$, $E(-4\ ,-1)$ e $F(3\ ,-4)$

a) $A'(1\ ,\ 0)$, $B'(4\ ,\ -3)$, $C'(-3\ ,\ -5)$, $D'(0\ ,\ 3)$, $E'(-4\ ,\ 1)$ e $F'(3\ ,\ 4)$

b) $A'(-1\ ,\ 0)$, $B'(-4\ ,\ 3)$, $C'(3\ ,\ 5)$, $D'(0\ ,\ -3)$, $E'(4\ ,\ -1)$ e $F'(-3\ ,\ -4)$

2.2.



$P(1\ ,\ -6)$ e $Q(2\ ,\ -3)$ **ou** $R(0\ ,\ 3)$ e $S(-1\ ,\ 0)$

2.3. $\left(2x-\frac{1}{2}\ ,\ 3-2y\right)$

a) $2x-\frac{1}{2}>0 \wedge 3-2y>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x>\frac{1}{2} \wedge 2y<3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>\frac{1}{4} \wedge y<\frac{3}{2}$

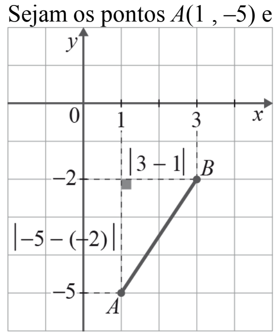
b) $2x-\frac{1}{2}<0 \wedge 3-2y<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x<\frac{1}{2} \wedge 2y>3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<\frac{1}{4} \wedge y>\frac{3}{2}$

Pág. 153

1. Sejam os pontos $A(1\ ,-5)$ e $B(3\ ,-2)$.



$\overline{AB}^2=|3-1|^2+|-5-(-2)|^2=4+9=13$

$d(A\ ,\ B)=\sqrt{13}$

Pág. 154

2.1. Sejam os pontos $A(-4\ ,\ 2)$ e $B(0\ ,\ 5)$.

$d(A\ ,\ B)=\sqrt{(0+4)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=5$

2.2. Sejam os pontos $A(-5\ ,\ 4)$ e $B(-1\ ,\ 0)$.

$d(A\ ,\ B)=\sqrt{(-1+5)^2+(0-4)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

2.3. Sejam os pontos $A(-4\ ,\ 5)$ e $B(-2\ ,\ -3)$.

$d(A\ ,\ B)=\sqrt{(-2+4)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=$

$=\sqrt{4\times17}=2\sqrt{17}$

3. $M(-2\ ,\ 1)$; $A(4\ ,-1)$ e $R(2\ ,\ 5)$

3.1. a) $d(M,\ A)=\sqrt{(4+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{36+4}=$

$=\sqrt{4\times10}=2\sqrt{10}$

b) $d(A\ ,\ R)=\sqrt{(2-4)^2+(5+1)^2}=\sqrt{4+36}=$

$=\sqrt{4\times10}=2\sqrt{10}$

c) $d(M\ ,\ R)=\sqrt{(2+2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{16+16}=$

$=\sqrt{16\times2}=4\sqrt{2}$

3.2. O triângulo $[MAR]$ é isósceles, porque $d(M\ ,\ A)=d(A\ ,\ R)\neq d(M\ ,\ R)$.

Pág. 155

4. $A \curvearrowright -\frac{5}{2}$, $B \curvearrowright 5$, $C \curvearrowright -\frac{1}{5}$ e $D \curvearrowright 1{,}5$

4.1. $\dfrac{-\frac{5}{2}+5}{2}=\dfrac{\frac{5}{2}}{2}=\dfrac{5}{4}$

4.2. $\dfrac{5-\frac{1}{5}}{2}=\dfrac{\frac{24}{5}}{2}=\dfrac{12}{5}$

4.3. $\dfrac{-\frac{1}{5}+1{,}5}{2}=\dfrac{\frac{13}{10}}{2}=\dfrac{13}{20}$

4.4. $\dfrac{-\frac{5}{2}-\frac{1}{5}}{2}=\dfrac{-\frac{27}{10}}{2}=-\dfrac{27}{20}$

Pág. 157

5. Sejam os pontos $A(1\ ,\ 3)$; $B(-1\ ,\ 2)$; $C(-3\ ,\ -10)$ e $D(-5\ ,\ 4)$.

5.1. $\left(\dfrac{-1-3}{2}\ ,\ \dfrac{3+2}{2}\right)=\left(0\ ,\ \dfrac{5}{2}\right)$

5.2. $\left(\dfrac{-1-3}{2}\ ,\ \dfrac{2-10}{2}\right)=(-2\ ,\ -4)$

5.3. $\left(\dfrac{-3-5}{2}\ ,\ \dfrac{-10+4}{2}\right)=(-4\ ,\ -3)$

5.4. $\left(\dfrac{1-3}{2}\ ,\ \dfrac{3+10}{2}\right)=\left(-1\ ,\ -\dfrac{7}{2}\right)$

6. Sejam os pontos $A(0\ ,\ 2)$, $M\left(\dfrac{3}{2}\ ,\ 4\right)$ e $N\left(\dfrac{3}{2}\ ,\ 1\right)$.

6.1. **a)** Seja $B(x_1\ ,\ y_1)$.

$N\left(\dfrac{3}{2}\ ,\ 1\right)$ é o ponto médio de $[AB]$.

$\left(\dfrac{x_1+0}{2}\ ,\ \dfrac{y_1+2}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\ ,\ 1\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{2}=\dfrac{3}{2}\wedge\dfrac{y_1+2}{2}=1\Leftrightarrow x_1=3\wedge y_1+2=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1=3\wedge y_1=0$

Logo, $B\ (3\ ,\ 0)$.

b) Seja $C(x_2\ ,\ y_2)$.

$M\left(\dfrac{3}{2}\ ,\ 4\right)$ é o ponto médio de $[AC]$.

$\left(\dfrac{x_2+0}{2}\ ,\ \dfrac{y_2+2}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\ ,\ 4\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{2}\wedge\dfrac{y_2+2}{2}=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3\wedge y+2=8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3\wedge y=6$

Logo, $C\ (3\ ,\ 6)$.

6.2. Sejam os pontos $A(0\ ,\ 2)$, $B(3\ ,\ 0)$ e $C(3\ ,\ 6)$.

$\overline{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$\overline{AC}=\sqrt{(0-3)^2+(2-6)^2}=\sqrt{9+16}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(3-3)^2+(0-6)^2}=\sqrt{6^2}=6$

Perímetro de $[ABC]$ = $6+5+\sqrt{13}=11+\sqrt{13}$

O perímetro do triângulo $[ABC]$ é $11+\sqrt{13}$.

Pág. 159

7.1. Sejam os pontos $A(-1\ ,\ -1)$, $B(-2\ ,\ -1)$ e $P(x\ ,\ y)$.

$d(P\ ,\ A)=d(P\ ,\ B)$

$(x+1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y+1)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2+4x+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x=3\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

Mediatriz de $[AB]$: $x=-\dfrac{3}{2}$

7.2. Sejam os pontos $B(-2\ ,\ -1)$, $C(-3\ ,\ 4)$ e $P(x\ ,\ y)$.

$d(P\ ,\ B)=d(P\ ,\ C)$

$(x+2)^2(y+1)^2=(x+3)^2+(y-4)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2+2y+1=x^2+6x+9+y^2-8y+16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10y=2x+20\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{5}x+2$

Mediatriz de $[BC]$: $y=\dfrac{1}{5}x+2$

7.3. $A(-1\ ,\ -1)$, $C(-3\ ,\ 4)$; $P(x\ ,\ y)$

$d(P\ ,\ A)=d(P\ ,\ C)$

$(x+1)^2+(y+1)^2=(x+3)^2+(y-4)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1=x^2+6x+9+y^2-8y+16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10y=4x+23\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{23}{10}$

Mediatriz de $[AC]$: $y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{23}{10}$

Pág. 160

8.1. $x^2+y^2=4$

8.2. $(x-2)^2+(y-5)^2=1$

8.3. $(x+2)^2+(y-5)^2=3$

8.4. $(x+2)^2+y^2=\pi^2$

9.1. $(x-5)^2+(y+1)^2=4$

$C\ (5\ ,\ -1)$, $r=2$

9.2. $(x+3)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=5$

$C\left(-3\ ,\ \sqrt{2}\right)$, $r=\sqrt{5}$

9.3. $x^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{4}$

$C(0\ ,\ 2)$; $r=\dfrac{1}{2}$

9.4. $(x-5)^2+y^2=\sqrt{3}$

$C(5\ ,\ 0)$; $r=\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$

9.5. $\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\pi^2$

$C\left(\sqrt{3}\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$; $r=\pi$

10. $(x-1)^2+(y+3)^2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+6y+9=0\Leftrightarrow$

Pág. 161

11.1. $x^2+y^2+10x+8y-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2+10x+25\right)-25+\left(y^2+8y+16\right)-16-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+5)^2+(y+4)^2=49$

Circunferência de centro (–5 , –4) e raio 7

11.2. $4x^2+4y^2-4x-35=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-x-\dfrac{35}{4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+y^2-\dfrac{1}{4}-\dfrac{35}{4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=9$

Circunferência de centro $\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ e raio 3

11.3. $x^2+y^2-4x+4y+20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)-4+\left(y^2-4y+4\right)-4+20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=-12$

A condição é impossível, pelo que define o conjunto vazio.

11.4. $x^2+y^2-6x+2y+10=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-6x+9\right)-9+\left(y^2+2y+1\right)-1+10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=0$

A condição define o ponto de coordenadas (3 , –1).

Pág. 162

12. Por observação da figura:

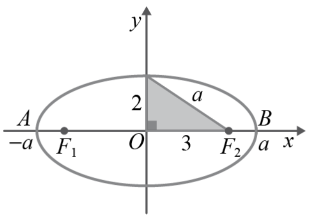
$c=3$ e $b=2$.

$a^2=3^2+2^2 \Leftrightarrow$

$\overset{a>0}{\Leftrightarrow} a=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

Assim:

$A\left(-\sqrt{13}\ ,\ 0\right)$, $B\left(\sqrt{13}\ ,\ 0\right)$



Pág. 164

13.1. Por observação da figura: $a = 3$, $c = 1$ e $a > b$.

$a^2=b^2+c^2$

$9=b^2+1^2 \Leftrightarrow b^2=8 \overset{b>0}{\Leftrightarrow} b=\sqrt{8} \Leftrightarrow b=2\sqrt{2}$

Equação da elipse: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$

Vértices: $A(-3\ ,\ 0)$, $B(3\ ,\ 0)$, $C\left(0,\ -2\sqrt{2}\right)$ e $D\left(0,\ 2\sqrt{2}\right)$

Focos: $F_1(-1\ ,\ 0)$ e $F_2(1\ ,\ 0)$

13.2. Por observação da figura: $b = 6$, $c=2\sqrt{5}$ e $b > a$.

$b^2=a^2+c^2$

$36=a^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow a^2=36-4\times 5 \Leftrightarrow a^2=16$; $b^2=36$

Como $a^2=16$ e $b^2=36$, então, a equação da elipse é:

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$

$a=\sqrt{16}=4$; $b=\sqrt{36}=6$

Vértices: $A(-4\ ,\ 0)$, $B(4\ ,\ 0)$, $C(0\ ,\ -6)$ e $D(0\ ,\ 6)$

Focos: $\left(0\ ,\ -2\sqrt{5}\right)$ e $\left(0\ ,\ 2\sqrt{5}\right)$

Pág. 165

13.3. Por observação da figura: $a > b$ e $c = 3$

$a^2=b^2+c^2$; $a^2=b^2+9$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{b^2+9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Como $P\left(3\ ,\ \dfrac{7}{4}\right)$ pertence à elipse, vem:

$\dfrac{9}{b^2+9}+\dfrac{\left(\dfrac{7}{4}\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow 9b^2+\dfrac{49}{16}\left(b^2+9\right)=b^2\left(b^2+9\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 144b^2+49b^2+441=14b^4+144b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16b^4-49b^2-441=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2=\dfrac{49\pm\sqrt{49^2+4\times 16\times 441}}{32} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2=\dfrac{49\pm 175}{32} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2=7 \vee b^2=-\dfrac{63}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2=7$

$a^2=b^2+9=7+9=16$

Equação da elipse: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$

$a=\sqrt{16}=4$; $b=\sqrt{7}$

Vértices: $A(-4\ ,\ 0)$, $B(4\ ,\ 0)$, $C(0\ ,\ -\sqrt{7}\ )$ e $D(0\ ,\ \sqrt{7}\ )$

Focos: $F_1(-3\ ,\ 0)$ e $F_2(3\ ,\ 0)$

14.1. $x^2+4y^2=4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{4y^2}{4}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$

$a^2=4$ e $b^2=1$; $a>b$

$a^2=b^2+c^2$

$4=1+c^2 \Leftrightarrow c=\sqrt{3}$; $a = 2$ e $b = 1$

Vértices: $A(-2\ ,\ 0)$, $B(2\ ,\ 0)$, $C(0\ ,\ -1)$ e $D(0\ ,\ 1)$

Distância focal: $2c=2\sqrt{3}$

14.2. $4x^2+16y^2=64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{64}+\dfrac{16y^2}{64}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$a^2=16 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a=4$; $b^2=4 \overset{b>0}{\Leftrightarrow} b=2$

$a>b$; $a^2=b^2+c^2$

$16=4+c^2 \overset{c>0}{\Leftrightarrow} c=\sqrt{12} \Leftrightarrow c=2\sqrt{3}$

Vértices: $A(-4\ ,\ 0)$, $B(4\ ,\ 0)$, $C(0\ ,\ -2)$ e $D(0\ ,\ 2)$

Distância focal: $4\sqrt{3}$

14.3. $16x^2+y^2=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{16x^2}{144}\times\dfrac{y^2}{144}-1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{144}=1$

$a^2=9 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a=3$; $b^2=144 \overset{b>0}{\Leftrightarrow} b=12$

$b>a$; $b^2=a^2+c^2$

$144=9+c^2 \Leftrightarrow c^2=135 \Leftrightarrow c=\sqrt{135} \Leftrightarrow c=3\sqrt{15}$

Vértices: $A(-3\ ,\ 0)$, $B(3\ ,\ 0)$, $C(0\ ,\ -12)$, $D(0\ ,\ 12)$

Distância focal: $6\sqrt{15}$

15. $2a = 50 \Leftrightarrow a = 25$

Considerando um referencial adequado, temos:

$$\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Neste referencial, o ponto $P(24\ ;\ 2{,}8)$ pertence à elipse.

Então:

$$\frac{24^2}{625} + \frac{(2{,}8)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 576b^2 + 625 \times 7{,}84 = 625b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49b^2 = 4900 \Leftrightarrow b^2 = 100 \overset{b>0}{\Leftrightarrow} b = 10$$

O pavilhão tem uma altura máxima de 10 m.

Pág. 167

Atividades complementares

16.1. $A \to -5$, $B \to 12$

$d(A\ ,\ B) = |-5 - 12| = 17$

16.2. $A \to -15$ e $B \to -37$

$d(A\ ,\ B) = |-15 - (-37)| = 22$

16.3. $A \to -101$, $B \to \frac{1}{2}$

$d(A\ ,\ B) = \left|-101 - \frac{1}{2}\right| = 101{,}5$

17.1. $d(A\ ,\ B) = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

17.2. $d(B\ ,\ D) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

17.3. $d(C\ ,\ D) = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$

17.4. $d(C\ ,\ B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

18.1. Sejam $A(1\ ,\ -2)$ e $B(-1\ ,\ 5)$.

$d(A\ ,\ B) = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

18.2. Sejam $A\left(0\ ,\ -\frac{1}{4}\right)$ e $B\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$.

$$d(A\ ,\ B) = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16+9}{9 \times 16}}$$

$$= \frac{5}{3 \times 4} = \frac{5}{12}$$

18.3. Sejam $A\left(1\frac{1}{2}\ ,\ -8\right)$ e $B\left(0{,}2\ ;\ \frac{2}{5}\right)$.

$$d(A\ ,\ B) = \sqrt{\left(1\frac{1}{2} - 0{,}2\right)^2 + \left(-8 - \frac{2}{5}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4^2}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{10}\right)^2 + \frac{1764}{24}} =$$

$$= \sqrt{\frac{169}{100} + \frac{1764}{25}} = \sqrt{\frac{169 + 7053}{100}} = \sqrt{\frac{7225}{100}} = 8{,}5$$

19.1. $A(-3\ ,\ 2)$, $B(3\ ,\ 0)$, $C(-1\ ,\ 8)$

$d(A\ ,\ B) = \sqrt{(-3-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$d(A\ ,\ C) = \sqrt{(-3+1)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$d(B\ ,\ C) = \sqrt{(3+1)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$(2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2 = (4\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 2 \times 4 \times 10 = 16 \times 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 80 = 80$

$P_{[ABC]} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 4\sqrt{5} = 4\sqrt{10} + 4\sqrt{5}$

19.2. O triângulo $[ABC]$ é retângulo e isósceles.

20. Sejam os pontos $A(3\ ,\ -1)$, $B(0\ ,\ 6)$ e $C(-4\ ,\ -4)$.

20.1. $\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$\overline{AC} = \sqrt{(3+4)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

$\overline{BC} = \sqrt{(0+4)^2 + (6+4)^2} = \sqrt{16+100} = \sqrt{116} =$

$= \sqrt{4 \times 29} = 2\sqrt{29}$

$\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{58}$

$\overline{BC} = 2\sqrt{29}$

O triângulo $[ABC]$ é isósceles.

20.2. $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \left(\sqrt{58}\right)^2 + \left(\sqrt{58}\right)^2 =$

$= 2 \times 58 = 116$

$\overline{BC}^2 = \left(2\sqrt{29}\right)^2 = 4 \times 29 = 116$

Como $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$, então o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A.

$$A_{[ABC]} = \frac{\sqrt{58} \times \sqrt{58}}{2} = 29$$

Logo, a área do triângulo $[ABC]$ é 29 cm².

21. Sejam os pontos $A(-1\ ,\ 10)$ e $B(5\ ,\ -3)$.

21.1. a) $A'(-1\ ,\ -10)$

b) $B'(-5\ ,\ -3)$

21.2. a) $d(A\ ,\ B) = \sqrt{(-1-5)^2 + (10+3)^2} = \sqrt{36+169} =$

$= \sqrt{205}$

b) $d(A\ ,\ A') = |10 - (-10)| = 20$

c) $d(B\ ,\ B') = |5 + (-5)| = 10$

d) $d(A\ ,\ B') = \sqrt{(-1+5)^2 + (10+3)^2} = \sqrt{16+169} =$

$= \sqrt{185}$

22.1. Sejam os pontos $A \to -3$ e $B \to 2$.

$$\frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$$

22.2. Sejam os pontos $A \to \frac{5}{2}$ e $B \to 10$.

$$\frac{\frac{5}{2} + 10}{2} = \frac{25}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{4}$$

22.3. Sejam os pontos $A \to 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e $B \to -3\frac{1}{5} = -\frac{16}{5}$.

$$\frac{\frac{3}{2} - \frac{16}{5}}{2} = -\frac{17}{10} \times \frac{1}{2} = -\frac{17}{20}$$

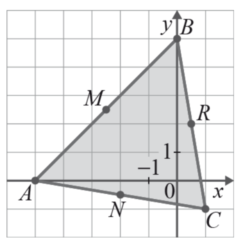
Pág. 168

23. Sejam os pontos $A(-5\ ,\ 0)$, $B(0\ ,\ 5)$ e $C(1\ ,\ -1)$.

$M\left(\frac{-5+0}{2}\ ,\ \frac{0+5}{2}\right)$; $M\left(-\frac{5}{2}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

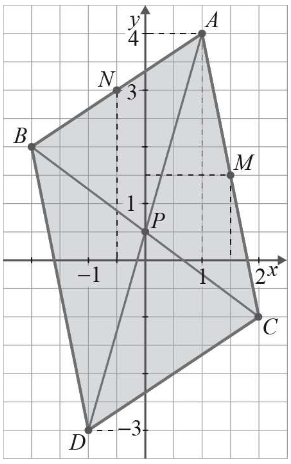
$N\left(\frac{-5+1}{2}\ ,\ \frac{0-1}{2}\right)$; $N\left(-2\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$

$R\left(\frac{0+1}{2}\ ,\ \frac{5-1}{2}\right)$; $R\left(\frac{1}{2}\ ,\ 2\right)$



24. Sejam os pontos $A(1\ ,\ 4)$, $N\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 3\right)$ e $M\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\right)$.

24.1.



24.2. a) Seja $B(x\ ,\ y)$.

$$\left(\frac{x+1}{2}\ ,\ \frac{y+4}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 3\right)\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}=-\frac{1}{2}\wedge\frac{y+4}{2}=3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+1=-1\wedge y+4=6\Leftrightarrow x=-2\wedge y=2$$

Assim, $B(-2\ ,\ 2)$.

Seja $C(x\ ,\ y)$.

$$\left(\frac{x+1}{2}\ ,\ \frac{y+4}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{3}{2}\wedge\frac{y+4}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+1=3\wedge y+4=3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=2\wedge y=-1$$

Assim, $C(2\ ,\ -1)$.

Seja P o ponto médio de $[EC]$.

$P\left(\frac{-2+2}{2}\ ,\ \frac{2-1}{2}\right)$, pelo que $P\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$.

b) P é o ponto médio de $[AD]$ dado que as diagonais de um paralelogramo se bissetam.

Seja $D(x\ ,\ y)$.

$$\left(\frac{x+1}{4}\ ,\ \frac{y+4}{2}\right)=\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{x+1}{4}=0\wedge\frac{y+4}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+1=0\wedge y+4=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-1\wedge y=-3$$
$$D(-1\ ,\ -3)$$

25. Por observação da figura:

$A(-2\ ,\ 2)$, $D(3\ ,\ 2)$, $B(-2\ ,\ -1)$ e $C(3\ ,\ -1)$.

Mediatriz de $[AD]$ e de $[BC]$: $x=\frac{-2+3}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Mediatriz de $[AB]$ e de $[DO]$: $y=\frac{2-1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

26. Sejam $M\left(1\ ,\ \frac{1}{3}\right)$, $A(0\ ,\ 2)$ e $B(x\ ,\ y)$.

$$\left(\frac{x+0}{2}\ ,\ \frac{y+2}{2}\right)=\left(1\ ,\ \frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow \frac{x}{2}=1\wedge\frac{y+2}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=2\wedge 3y+6=2\Leftrightarrow x=2\wedge 3y=-4\Leftrightarrow$$
$$x=2\wedge y=-\frac{4}{3}$$

Assim, $B\left(2\ ,\ -\frac{4}{3}\right)$

Seja $P(x\ ,\ y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$.

$$d(P\ ,\ A)=d(P\ ,\ B)$$
$$(x-0)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2-4x+4+y^2+\frac{8y}{3}+\frac{16}{9}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4y-\frac{8y}{3}=-4x+\frac{16}{9}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{20y}{3}=4x-\frac{16}{9}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=4\times\frac{3}{20}x-\frac{16}{9}\times\frac{3}{20}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x-\frac{4}{15}$$

27. Sejam os pontos $A(3\ ,\ 4)$, $B(3\ ,\ -6)$ e $C(0\ ,\ 4)$.

27.1. a) Mediatriz de $[AB]$: $y=\frac{4-6}{2}\Leftrightarrow y=-1$

b) Mediatriz de $[BC]$:

Seja $P(x\ ,\ y)$ um ponto da mediatriz de $[BC]$

$$d(P\ ,\ B)=d(P\ ,\ C)$$
$$(x-3)^2+(y+6)^2=(x-0)^2+(y-4)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+12y+36=x^2+y^2-8y+16\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20y=6x+16-36-9\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20y=6x-29\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{6}{20}x-\frac{29}{20}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{10}x-\frac{29}{20}$$

A equação reduzida da mediatriz de $[BC]$ é:

$$y=\frac{3}{10}x-\frac{29}{20}$$

27.2. a) Ponto de interseção das mediatrizes de $[AB]$ e de $[BC]$:

$$\begin{cases}y=-1\\ y=\frac{3}{10}x-\frac{29}{20}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ \frac{3}{10}x-\frac{29}{20}=-1\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ 6x-29=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ 6x=9\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ x=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x\ ,\ y)=\left(\frac{3}{2}\ ,\ -1\right)$$

O centro da circunferência é o ponto $D\left(\frac{3}{2}\ ,\ -1\right)$.

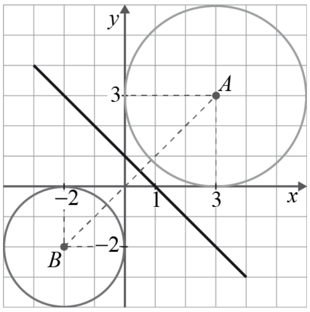
b) $r=\overline{CD}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-0\right)^2+(-1-4)^2}=$

$$=\sqrt{\frac{9}{4}+25}=$$
$$=\sqrt{\frac{109}{4}}=\frac{\sqrt{109}}{2}$$

O raio da circunferência é $\frac{\sqrt{109}}{2}$.

c) A equação reduzida é $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{109}{4}$.

28. Sejam os pontos $A(3\ ,\ 3)$, $B(-2\ ,\ -2)$ e $P(x\ ,\ y)$.



28.1. $\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10y = 10x - 10 \Leftrightarrow y = -x + 1$

28.2. $\overline{AP} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^3 = 4$

28.3. $\overline{BP} = 3 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$

29.1. $C_1(3\ ,\ -1)$, $C_2(0\ ,\ 7)$ e $C_3\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$

29.2. $r_1 = 3$, $r_2 = 1$ e $r_3 = \sqrt{3}$

29.3. Por exemplo:

C_1 : Para $x = 3$:

$(3-3)^2 + (y+1)^2 = 9 \Leftrightarrow y+1 = 3 \vee y+1 = -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = 4$

$A_1(3\ ,\ 2)$ e $B_1(3\ ,\ -4)$

C_2 : Para $y = 7$: $x^2 + (7-7)^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

$A_2(-1\ ,\ 7)$ e $B_2(1\ ,\ 7)$

C_3 : Para $x = -\frac{1}{2}$:

$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \vee y = \sqrt{3}$

$A_3\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\sqrt{3}\right)$ e $B_3\left(-\frac{1}{2}\ ,\ \sqrt{3}\right)$

30. Sejam os pontos $A(1\ ,\ 0)$, $B(2\ ,\ 5)$ e $C(3\ ,\ 4)$.

30.1. a) Ponto médio de $[AB]$:

$M\left(\frac{1+2}{2}\ ,\ \frac{0+5}{2}\right)$, logo $M\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$.

Raio: $r = \overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$r^2 = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$; $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

b) Ponto médio de $[BC]$:

$N\left(\frac{2+3}{2}\ ,\ \frac{5+4}{2}\right)$, logo $N\left(\frac{5}{2}\ ,\ \frac{9}{2}\right)$.

Raio: $r = \overline{BN} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{9}{5}-5\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$r^2 = \frac{1}{2}$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

30.2. $r = \overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

Como $r^2 = 26$ e $C(3\ ,\ 4)$, então:

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 26$

31. $(x+1)^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 1 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 1 = 0$

32.1. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 + \left(y^2 + 4y + 4\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

Circunferência de centro $(1\ ,\ -2)$ e raio 1

32.2. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 13 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + \left(y^2 + 2y + 1\right) - 1 + 13 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = -3$

É uma condição impossível, logo define o conjunto vazio.

32.3. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + y^2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 0$

A condição define o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$.

33.1. O comprimento da corda é igual ao comprimento do eixo maior.

33.2. $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

$2b = 3{,}6 \Leftrightarrow b = 1{,}8$

Pretende-se determinar a distância focal ($2c$).

$a^2 = b^2 + c^2$

$3^2 = (1{,}8)^2 + c^2 \overset{c>0}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{9 - 3{,}24} \Leftrightarrow c = \sqrt{5{,}76} \Leftrightarrow c = 2{,}4$

$2c = 2 \times 2{,}4 = 4{,}8$

A distância entre as estacas é igual a 4,8 m.

34. Por observação da figura: $a = 2$ e $b = \frac{1}{2}$

34.1. Por exemplo, $A(-2\ ,\ 0)$, $B(2\ ,\ 0)$, $C\left(0\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$.

34.2. $a^2 = 4$ e $b^2 = \frac{1}{4}$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

35.1. $F_1(-3\ ,\ 0)$ e $F_2(0\ ,\ 3)$

$2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$; $c = 3$

$a > b$ (focos no eixo Ox)

$a^2 = b^2 + c^2$

$16 = b^2 + 9 \Leftrightarrow b^2 = 7$

Equação da elipse: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

35.2. $F_1(0\ ,\ -5)$, $F_2(0\ ,\ 5)$ (focos no eixo Oy)

$b > a$

$2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

$c = 5$

$b^2 = a^2 + c^2$

$b^2 = 3^2 + 5^2 = 34$

Equação da elipse: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{34} = 1$

35.3. $a = 20$ e $b = 10$

$a^2 = 400$ e $b^2 = 100$

$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{100} = 1$

36.1. $16x^2 + 25y^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{16x^2}{16} + \frac{25y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{\frac{16}{25}} = 1$

Assim, $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{16}{25}$, tal que $a > b$.

$a^2 = b^2 + c^2$

$1 = \frac{16}{25} + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 1 - \frac{16}{25} \overset{c>0}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{\frac{9}{25}} \Leftrightarrow c = \frac{3}{5}$

$F_1\left(-\frac{3}{5}\ ,\ 0\right)$ e $F_2\left(\frac{3}{5}\ ,\ 0\right)$

36.2. $6,25x^2 + 5,76y^2 = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{6,25x^2}{36} + \frac{5,76y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{3,6}{6,25}} + \frac{y^2}{\frac{3,6}{5,76}} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{5,76} + \frac{y^2}{6,25} = 1$

Assim, $a^2 = 5,76$ e $b^2 = 6,25$, tal que $b > a$.

$b^2 = a^2 + c^2$

$6,25 = 5,76 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 0,49 \overset{c>0}{\Leftrightarrow} c = 0,7$

$F_1(0\ ;\ -0,7)$ e $F_2(0\ ;\ 0,7)$

37. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1$

Assim, $a^2 = 81 \Leftrightarrow a = 9$ e $b^2 = 72$, tal que $a > b$.

$a^2 = b^2 + c^2$

$81 = 72 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 9 \overset{c>0}{\Leftrightarrow} c = 3$

$A(3\ ,\ 0)$, $B(9\ ,\ 0)$

$\overline{AB} = |9 - 3| = 6$

O ponto C tem abcissa igual à de A porque AC é perpendicular ao eixo Ox.

$C(3\ ,\ y)$ e C pertence à elipse, logo:

$\frac{3^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{72} = 1 - \frac{9}{81} \Leftrightarrow y^2 = 72 \times \frac{8}{9} \Leftrightarrow y^2 = 64$

Como $y > 0$, então $y = 8$.

$C(3\ ,\ 8)$

A altura do triângulo $[ABC]$ é $\overline{AC} = 8$.

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24$

A área do triângulo $[ABC]$ é 24.

38.1. a) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

Os quadriláteros são losangos porque têm os quatro lados iguais.

b) $\overline{DB} = \overline{EG} = 4$ e $\overline{AC} = \overline{HF} = 6$

A área de cada um dos losangos é $\frac{4 \times 6}{2} = 12$

Os quadriláteros são equivalentes porque têm a mesma área.

38.2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

39.1. $A(-2\ ,\ 1)$, $B(2\ ,\ 0)$, $C(3\ ,\ 4)$, $D(-1\ ,\ 5)$

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$[ABCD]$ é um quadrado porque tem os lados iguais e as diagonais iguais.

39.2. $M\left(\frac{-2+2}{2}\ ,\ \frac{1+0}{2}\right) = M\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$

39.3. Seja $P(x)$ um ponto da mediatriz de $[BC]$.

$d(P\ ,\ B) = d(P\ ,\ C)$

$(x-2)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8y = -2x + 21 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{8}$

40.1. Mediatriz do segmento de reta $[AB]$

40.2. Circunferência de centro A e raio $\sqrt{2}$

40.3. Elipse de focos A e B e eixo maior igual a 12

41.1. A reta de equação $x = 3$ e a reta AC são paralelas e intersetam as retas concorrentes BC e BA nos pontos M, M' e A, C, respetivamente. Logo, pelo Teorema de Tales:

$\frac{\overline{BC}}{\overline{BM'}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} \Leftrightarrow$ | $\overline{BA} = 2\overline{BM}$; $\overline{BC} = \overline{BM'} + \overline{M'C}$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{BM'} + \overline{M'C}}{\overline{BM'}} = \frac{2\overline{BM}}{\overline{BM}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{BM'}}{\overline{BM'}} + \frac{\overline{M'C}}{\overline{BM'}} = 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{\overline{M'C}}{\overline{BM'}} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{M'C}}{\overline{BM'}} = 1 \Leftrightarrow \overline{M'C} = \overline{BM'}$

Como $M' \in [BC]$ e $\overline{M'C} = \overline{BM'}$, então M' é o ponto médio de $[BC]$.

41.2. $M'\left(3\ ,\ \frac{1+4}{2}\right) = M'\left(3\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

42. Sabe-se que:

$A(-2\ ,-4)$, $T(3\ ,\ 2)$, $B(x\ ,\ y)$ e $(x,\ y) \neq (-2,\ -4)$

$\overline{TA} = \overline{TB}$ (T pertence à mediatriz de $[AB]$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3+2)^2 + (2+4)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25 + 36 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y - 48 = 0$

43. Sejam os pontos $E(-2\ ,\ 2)$ e $F\ (0\ ,\ 4)$.

43.1. Seja $P(x\ ,\ y)$ um ponto da mediatriz de $[EF]$

$d(P\ ,\ E)=d(P\ ,\ F)$

$(x+2)^2+(y-2)^2=x^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-4y+4=x^2+y^2-8y+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y=-4x+8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-x+2$

a) $\begin{cases} y=-x+2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=-x+2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\ ,\ y)=(2\ ,\ 0)$

b) $\begin{cases} y=-x+2 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x\ ,\ y)=(0\ ,\ 2)$

43.2. $y=-x+2$

Se $\left(\frac{k}{2}\ ,\ k+1\right)$ pertence à mediatriz de $[AB]$, então:

$k+1=-\frac{k}{2}+2 \Leftrightarrow 2k+2=-k+4 \Leftrightarrow 3k=2 \Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$

44.1. $C_1:\ x^2+y^2+10x-10y-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+10x+25)-25+(y^2-10y+25)-25-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+5)^2+(y-5)^2=58$

$C_2:\ (x-2)^2+(y-2)^2=16$

$C_3:\ x^2+y^2+6x-20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+6x+9)-9+y^2-20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+y^2=29$

Assim, $A(-5\ ,\ 5)$, $B(2\ ,\ 2)$ e $C(-3\ ,\ 0)$.

44.2. O centro de C_2 é o ponto $B(2\ ,\ 2)$.

$(2+5)^2+(2-5)^2=58 \Leftrightarrow 49+9=58$ (V)

Logo, $B \in C_1$.

$(2+3)^2+2^2=29 \Leftrightarrow 25+4=29$ (V)

Logo, $B \in C_3$.

44.3. $\overline{AC}=\sqrt{(-5+3)^2+(5-0)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-3-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

$\overline{AC}=\overline{BC}$. Logo, o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

45.1. $C(2\ ,\ 2)$; $r=2$

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

45.2. $C(3\ ,\ -2)$; $r=\sqrt{(3-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

45.3. $C(-4\ ,\ 3)$; $r=|-4-(-2)|=2$

$(x+4)^2+(y-3)^2=4$

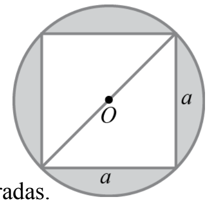
46. $x^2+y^2-2x-2y-6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)-1+(y^2-2y+1)-1-6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=8$

$r^2=8$

Seja a o lado do quadrado.



$a^2+a^2=(2r)^2$

$2a^2=4r^2 \Leftrightarrow a^2=2r^2$

$a^2=2\times 8 \Leftrightarrow a^2=16$

A área do quadrado é 16 unidades quadradas.

$A_{\text{círculo}}=\pi r^2=8\pi$

$A_{\text{colorida}}=(8\pi-16)$ u. a.

47. $x^2+y^2-6y=k,\ k\in\mathbb{R}$

47.1. $x^2+y^2-6y=k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+(y^2-6y+9)-9=k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=k+9$

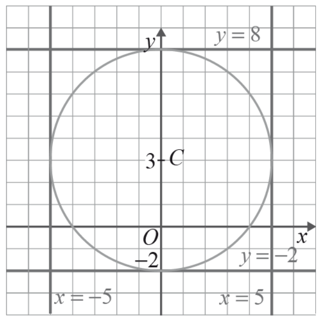
$k+9>0 \Leftrightarrow k>-9 \Leftrightarrow k\in\left]-9\ ,\ +\infty\right[$

47.2. Por **47.1.**, o centro da circunferência é $(0\ ,\ 3)$.

O raio terá de ser igual a 3, pelo que:

$k+9=3^2 \Leftrightarrow k=0$

47.3. $k=16$; $x^2+(y-3)^2=25$; $C(0\ ,\ 3)$; $r=5$



$y=3+5 \Leftrightarrow y=8$ e $y=3-5 \Leftrightarrow y=-2$

Assim, $x=-5$, $x=5$, $y=8$ e $y=-2$.

48. O comprimento do retângulo é igual a $2a$ e a largura é igual a $2b$.

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=12 \Leftrightarrow 2a=12$

$A_{\text{retângulo}}=72 \Leftrightarrow (2a)\times 2b=72 \Leftrightarrow 12\times 2b=72$

$\Leftrightarrow 2b=6$

$P_{\text{retângulo}}=2\times(2a+2b)=2\times(12+6)=36$

O perímetro do retângulo é 36 cm.

49. Sejam os pontos $F_1(-6\ ,\ 0)$, $F_2(6\ ,\ 0)$ e $P(x\ ,\ y)$.

49.1. $d=\sqrt{(x+6)^2+y^2}+\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

$d=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$

Logo, $d=2a$.

49.2. Seja $a=10$, $c=6$ e $a>b$.

$a^2=b^2+c^2$

$100=b^2+36 \Leftrightarrow b^2=64$

Equação da elipse: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

Avaliação 1

1. Ponto B

$\begin{cases} 5x-4y=20 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=20 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases}$; $B(0\ ,\ 5)$

Ponto A

$\begin{cases}5x+4y=20\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=20\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$; $A(4\ ,\ 0)$

$\overline{OA}=4$ e $\overline{OB}=5$

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$

$P_{[OAB]}=4+5+\sqrt{41}=9+\sqrt{41}$

Resposta: (A)

2. O centro da circunferência é um ponto C da forma $C(a\ ,\ -a)$, com $a>0$.

$r=\overline{OC}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{a^2\times 2}=a\sqrt{2}$

Equação da circunferência

$(x-a)^2+(y+a)^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2=2a$

Para $a=1$, temos:

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$

Resposta: (A)

3. $M \curvearrowright \dfrac{-\frac{3}{2}+5}{2}=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{4}$; $M \curvearrowright \dfrac{7}{4}$

Resposta: (D)

4. $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=8$

$2a=8\Leftrightarrow a=4$

$\overline{BF_2}=a=4$

Resposta: (B)

5. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; $P(k\ ,\ 1)$

$(k-1)^2+(1+1)^2=4\Leftrightarrow(k-1)^2+4=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(k-1)^2=0\Leftrightarrow k=1$

Resposta: (A)

6. A mediatriz do segmento de reta $[CD]$ interseta AB no ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

$\overline{AB}=1$; $\overline{OA}=\overline{OB}=x,\ x>0$

$x^2+x^2=1\Leftrightarrow 2x^2=1\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

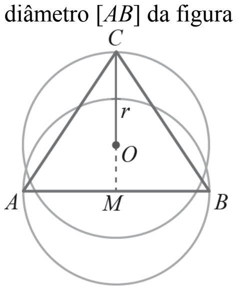
$\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0\right)$, $B\left(0\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$M\left(\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+0}{2}\ ,\ \dfrac{0+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Resposta: (B)

7. A afirmação **(B)** é falsa. Por exemplo, a circunferência de diâmetro $[AB]$ da figura seguinte não passa em C.



Resposta: (B)

Pág. 173

8. Sejam os pontos $A(0\ ,\ 3)$, $B(-3\ ,\ 2)$ e $C(2\ ,\ 2)$.

8.1. Centro

$M\left(\dfrac{0-3}{2}\ ,\ \dfrac{3+2}{2}\right)$; $M\left(-\dfrac{3}{2}\ ,\ \dfrac{5}{2}\right)$

Raio

$r=\overline{AM}=\sqrt{\left(0+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(3-\dfrac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{10}{4}}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

$\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$

8.2. Sejam $A(0\ ,\ 3)$, $B(-3\ ,\ 2)$ e $P(x\ ,\ y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$.

$d(P\ ,\ A)=d(P\ ,\ B)$

$x^2+(y-3)^2=(x+3)^2+(y-2)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9=x^2+6x+9+y^2-4y+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2y=6x+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-3x-2$ (Mediatriz de $[AB]$)

Sejam $A(0\ ,\ 3)$, $C(3\ ,\ 2)$ e $P(x\ ,\ y)$ um ponto da mediatriz de $[AC]$.

$d(P\ ,\ A)=d(P\ ,\ C)$

$x^2+(y-3)^2=(x-3)^2+(y-2)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9=x^2-6x+9+y^2-4y+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2y=-6x+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=3x-2$ (Mediatriz de $[AC]$)

Centro da circunferência:

$\begin{cases}y=-3x-2\\y=3x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2=-3x-2\\y=3x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$

$D(0\ ,\ -2)$

Raio da circunferência:

$r=\overline{DA}=|3+2|=5$

Equação da circunferência: $x^2+(y+2)^2=25$

9. $2a=30\Leftrightarrow a=15$; $15^2=225$; $b=9$

Adotando um referencial conveniente, a equação da semielipse é:

$$\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1\wedge y\geq 0$$

A altura pedida é a ordenada do ponto de abcissa 13.

(15 – 2 = 13)

A altura do túnel no ponto indicado é, aproximadamente, 4,49 m.

10. $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=20$; $2a=20\Leftrightarrow a=10$

$C(0\ ,\ 5)$, $b=5$

$a^2=b^2+c^2$

$100=25+C^2\Leftrightarrow C^2=75\overset{C>0}{\Leftrightarrow}C=\sqrt{75}\Leftrightarrow C=\sqrt{25\times 3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C=5\sqrt{3}$

10.1. a) $A(-10\ ,\ 0)$ **b)** $B(10\ ,\ 0)$

c) $D(-5\ ,\ 0)$

10.2. $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$

10.3. $\overline{F_1F_2}=2c=10\sqrt{3}$

11. Sejam os pontos $A(2\ ,\ -4)$, $B(10\ ,\ 0)$ e $C(3\ ,\ 4)$.

11.1. Consideremos $P(x\,,\,y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$.

$d(P\,,\,A)=d(P\,,\,B)$

$(x-2)^2+(y+4)^2=(x-10)^2+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+8y+16=x^2-20x+100+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8y=-16x+80 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-2x+10$

11.2. $M\left(\dfrac{2+10}{2}\,,\,\dfrac{-4+0}{2}\right)$; $M(6\,,\,-2)$

11.3. $C(3\,,\,4)$, $y=-2x+10$

$4=-2\times 3+10 \Leftrightarrow 4=-6+10$ (V)

Logo, o ponto C pertence à mediatriz de $[AB]$.

11.4. Como C pertence à mediatriz de $[AB]$, tem-se $\overline{AC}=\overline{CB}$.

Logo, o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

11.5. $\overline{AB}=\sqrt{(10-2)^2+(0+4)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=$

$=\sqrt{16\times 5}=4\sqrt{5}$

Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, a altura relativa à base $[AB]$ é $\overline{CM}$.

$\overline{CM}=\sqrt{(6-3)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=$

$=\sqrt{9\times 5}=3\sqrt{5}$

$A_{[ABC]}=\dfrac{4\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}}{2}=2\times 3\times 5=30$

A área do triângulo é 30 u. a..

12. $A(7\,,\,3)$, $B(1\,,\,11)$, $C(-2\,,\,15)$

12.1. $\overline{AB}=\sqrt{(1-7)^2+(11-3)^2}=\sqrt{36+64}=10$

$\overline{BC}=\sqrt{(-2-1)^2+(15-11)^2}=\sqrt{9+16}=5$

12.2. $\overline{AC}=\sqrt{(-2-7)^2+(15-3)^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$

Como $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$, então os pontos *A, B* e *C* são colineares (se fossem vértices de um triângulo teria de ser $\overline{AC}<\overline{AB}+\overline{BC}$).

Logo, o ponto C pertence à reta AB.

12.3. Sejam os pontos $A(7\,,\,3)$, $B(1\,,\,11)$ e $P(x\,,\,y)$ pertencente à mediatriz de $[AB]$.

$d(P\,,\,A)=d(P\,,\,B)$

$(x-7)^2+(y-3)^2=(x-1)^2+(y-11)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-14x+49+y^2-6y+9=$

$=x^2-2x+1+y^2-22y+121 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16y=12x+64 \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x+4$

12.4. a) Se D é equidistante de A e B, então pertence à mediatriz de $[AB]$. Como D pertence a Oy, então a sua abcissa é 0.

$D(0\,,\,y)$; $y=\dfrac{3}{4}\times 0+4 \Leftrightarrow y=4$

$D(0\,,\,4)$

b) $\overline{DA}=\sqrt{(7-0)^2+(3-4)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$

$x^2+(y-4)^2=50$

c) Como D pertence à mediatriz de $[AB]$, então $\overline{DB}=\overline{DA}=r$. Logo, $D\in C_1$.

C é um ponto de reta AB e não pertence a C_1 porque uma reta não pode intersetar uma circunferência em três pontos.

12.5. a) $M\left(\dfrac{7+1}{2}\,,\,\dfrac{3+11}{2}\right)$; $M(4\,,\,7)$

$\overline{DM}=\sqrt{(4-0)^2+(7-4)^2}=\sqrt{16+9}=5$; $D(0,4)$

$C_2:\ x^2+(y-4)^2=25$

b) DM é a mediatriz de $[AB]$. Logo, $[DM]$ é perpendicular a AB.

Como AB é perpendicular ao raio $[DM]$ e interseta a circunferência em M, então AB é tangente à circunferência o ponto M.

12.6. $A=A_1-A_2=\pi\times r_1^2-\pi\times r_2^2=$

$=\pi\times\overline{DA}^2-\pi\times\overline{DM}^2=$

$=50\pi-25\pi=$

$=25\pi$

A área da coroa circular é 25π u. a.

3.2. Semiplanos. Equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano

Pág. 174

Atividade inicial 2

1. a: V ; b: III ; c: VIII ; d: II ; e: VI ; f: IV ; g: I ; h: VII

2. $p: y = x + 2$

x	y
0	2
– 2	0

$q: y = -x + 3$

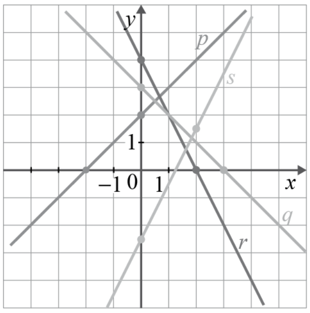
x	y
0	3
3	0

$r: 2x + y = 4$

x	y
0	4
2	0

$s: 4x - 2y = 5$

x	y
0	– 2,5
2	1,5



3. **Reta *a***

(–3, 0) e (0, 2)

$m = \frac{2-0}{0+3} = \frac{2}{3}$; $b = 2$

$a: y = \frac{2}{3}x + 2$

Reta *b*

(3, –1) e (4, 2)

$m = \frac{2+1}{4-3} = 3$

$y + 1 = 3(x - 3) \Leftrightarrow y = 3x - 10$

$b: y = 3x - 10$

Reta *c*

(0, 4) e (4, 2)

$m = \frac{2-4}{4-0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$; $b = 4$

$c: y = -\frac{1}{2}x + 4$

Reta *d*

(2, 0) e (0, 4)

$m = \frac{4-0}{0-2} = -2$; $b = 4$

$d: y = -2x + 4$

Pág. 176

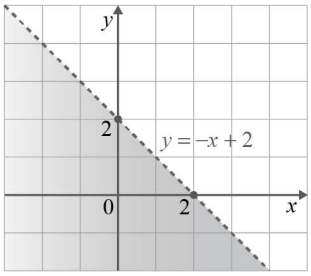
1.1. $x \geq 1 \wedge x < 3$

1.2. $x < -2 \vee x \geq 2$

Pág. 177

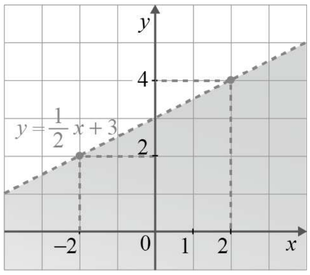
2.1. $y = -x + 2$

x	y
0	2
2	0

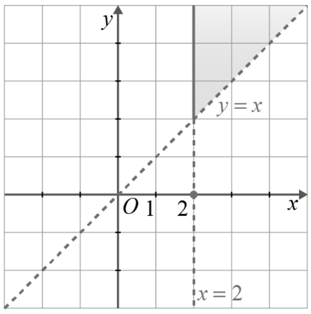


2.2. $y = \frac{1}{2}x + 3$

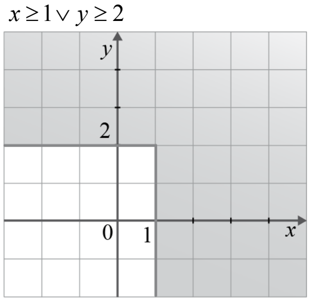
x	y
– 2	2
2	4



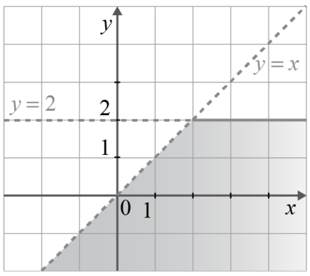
3.1. $x \geq 2 \wedge y > x$



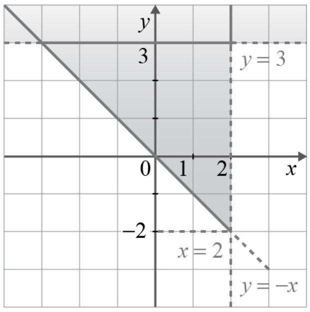
3.2. $x \geq 1 \vee y \geq 2$



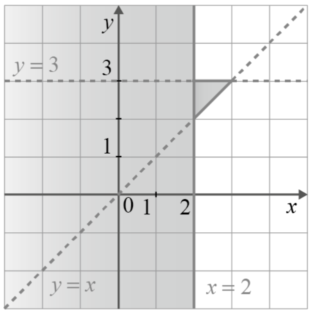
3.3. $y < x \wedge y \leq 2$



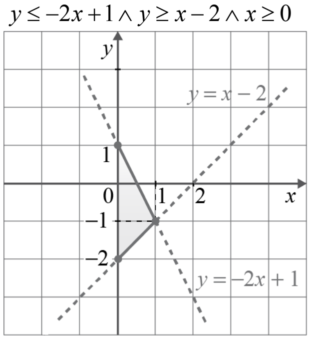
3.4. $(x < 2 \wedge y \geq -x) \vee y > 3$



3.5. $x \leq 2 \vee (y \geq x \wedge y \leq 3)$

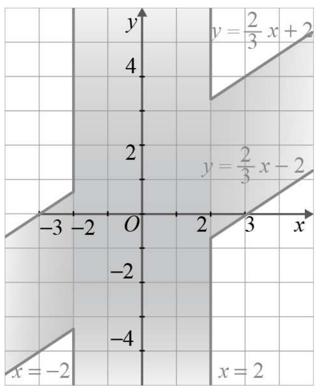


3.6. $y \leq -2x + 1 \wedge y \geq x - 2 \wedge x \geq 0$



3.7. $-2 \leq y - \frac{2}{3}x \leq 2 \vee 2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 2 \leq y \leq \frac{2}{3}x + 2 \vee -2 \leq x \leq 2$



Pág. 178

4. Por exemplo:

4.1. $A(-1\ ,\ 3)$ e $O(0\ ,\ 0)$

$m = \frac{0-3}{0+1} = -3$; $r:\ y = -3x$

Condição: $y \leq -3x \wedge y \geq 0$

4.2. $A(0\ ,\ 2)$ e $B(2\ ,\ 0)$

$m = \frac{0-2}{2-0} = -1$; $r:\ y = -x + 2$

Condição: $y \geq -x + 2 \wedge x < 2$

4.3. $A(2\ ,\ 0)$ e $B(0\ ,\ -2)$

$m = \frac{-2-0}{0-2} = 1$; $r:\ y = x - 2$

Condição: $(y \geq x - 2 \wedge y \leq 0) \vee (y \leq x - 2 \wedge y \geq 0)$

4.4. $A(-6\ ,\ 4)$ e $O(0\ ,\ 0)$

$m = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$; $r:\ y = -\frac{2}{3}x$

Condição:

$\left(y \geq -\frac{2}{3}x \wedge y \geq 0 \wedge y \leq 4 \wedge x \leq 2\right) \vee \left(y \leq -\frac{2}{3}x \wedge x \geq 0\right)$

Pág. 180

5. Por exemplo:

5.1. $4 \leq (x-2)^2 + y^2 \leq 16$

5.2. $C_1(2\ ,\ 1)$ e $C_2(2\ ,\ 0)$

$r_1 = \overline{OC_1} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$r_2 = \overline{C_1C_2} = 1$

Condição:

$y \leq 2 \wedge (x-2)^2 + y^2 \geq 1 \wedge (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 5$

5.3. $A(-2\ ,\ 0)$ e $B(0\ ,\ 2)$

$m = \frac{2-0}{0+2} = 1$

$r:\ y = x + 2$

$C(0\ ,\ -2)$ e $D(2\ ,\ 0)$

$s:\ y = x - 2$

Condição:

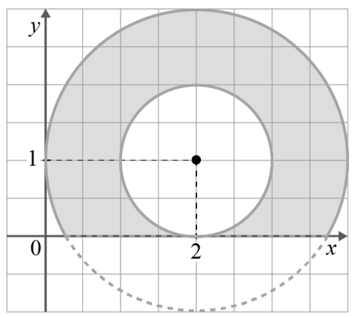
$x^2 + y^2 > 4 \wedge y < x + 2 \wedge y > x - 2$

5.4. $[(x \leq 0 \wedge y \geq 2) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \geq 2 \wedge y \leq 0)] \wedge$

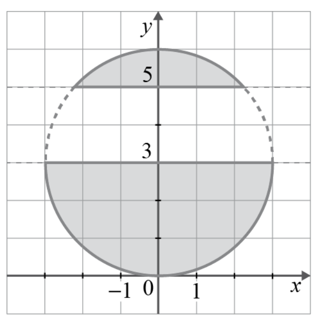
$\wedge x^2 + y^2 \leq 9$

Pág. 181

6.1.



6.2.



7. $A(0\ ,\ 3)$ e $B(-5\ ,\ 0)$

Reta AB:

$$m = \frac{3-0}{0+5} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x + 3$$

Condição:

$$y \le \frac{3}{5}x + 3 \wedge x^2 + y^2 \ge 9 \wedge y \ge 0 \wedge x < 0$$

Pág. 183

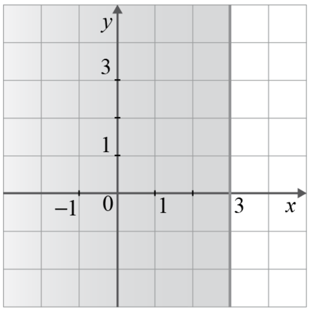
Atividades complementares

8. Por exemplo:

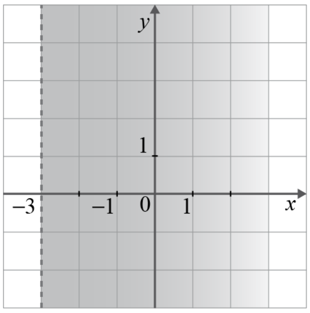
8.1. $-1 < x \le 2$

8.2. $x \le -1 \vee x \ge 0$

9.1.

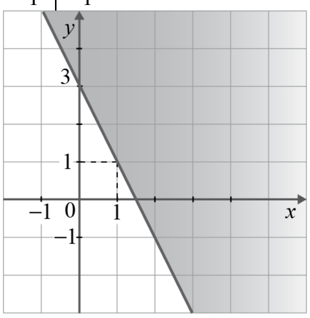


9.2.

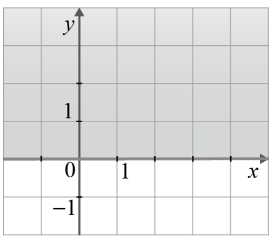


10.1. $y = -2x + 3$

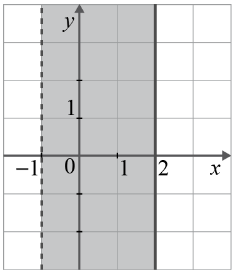
x	y
0	3
1	1



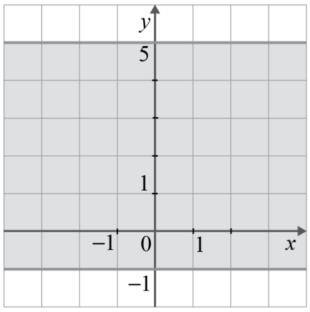
10.2.



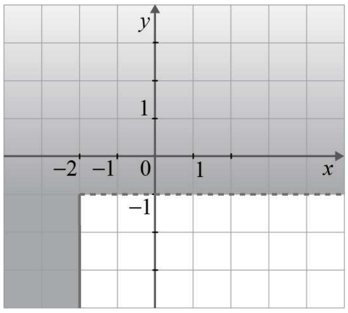
11.1. $-1 < x \le 2$



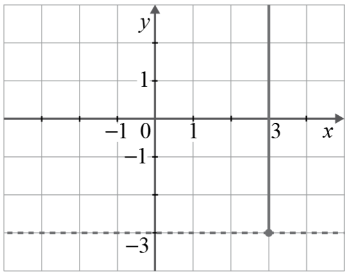
11.2. $-1 \le y \le 5$



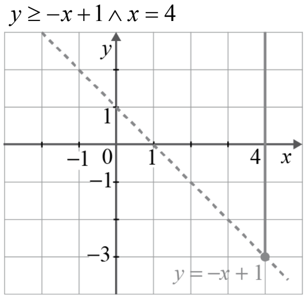
11.3. $\sim\left(x > -2 \wedge y \le -1\right) \Leftrightarrow x \le -2 \vee y > -1$



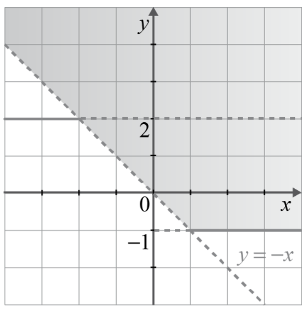
11.4. $\sim\left(y < -3 \vee x \ne 3\right) \Leftrightarrow y \ge -3 \wedge x = 3$



11.5. $y \ge -x + 1 \wedge x = 4$



11.6. $y = 2 \vee \left(y > -x \wedge y + 1 \ge 0\right) \Leftrightarrow y = 2 \vee \left(y > -x \wedge y \ge -1\right)$



12. Por exemplo: $y > x \wedge \left[y \le 0 \vee \left(x \ge 0 \wedge y \le 5\right)\right]$

13.1. Reta AB:

$A(3\ ,\ 3)$ e $B(1\ ,\ 0)$

$m = \frac{0-3}{1-3} = \frac{3}{2}$

$AB:\ y - 0 = \frac{3}{2}\left(x-1\right) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

Condição: $x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge y \le 3 \wedge y \ge \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

13.2. a) $A_{[OBAC]} = \frac{\overline{OB} + \overline{AC}}{2} \times OC = \frac{1+3}{3} \times 6 = 6$

A área do trapézio $[OBAC]$ é 6 u. a.

b) $A_{[ODA]} = \frac{\overline{CD} \times \overline{CA}}{2} = \frac{\left(3 + \frac{3}{2}\right) \times 3}{2} = \frac{\frac{27}{2}}{2} = \frac{27}{4}$

A área do triângulo $[ODA]$ é $\frac{27}{4}$ u. a.

Pág. 184

14.1. $C_1\left(1\ ,\ 0\right)$ e $r_1 = 1$; $C_2\left(2\ ,\ 0\right)$ e $r_2 = 2$

Condição:

$\left(x-1\right)^2 + y^2 \ge 1 \wedge \left(x-2\right)^2 + y^2 \le 4$

14.2. • $C(2\ ,\ 3)$; $r = \overline{OC} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

• Reta r

$O(0\ ,\ 0)$ e $C(2\ ,\ 3)$

$m = \frac{3}{2}$, logo $y = \frac{3}{2}x$

• Reta s

$C(2\ ,\ 3)$ e $D(0\ ,\ 6)$

$m = \frac{6-3}{0-2} = -\frac{3}{2}x$, logo $y = -\frac{3}{2}x + 6$

Condição:

$\left(y \ge \frac{3}{2}x \wedge y \ge -\frac{3}{2}x + 6 \wedge \left(x-2\right)^2 + \left(y-3\right)^2 \le 13\right) \vee$

$\vee \left(\left(x-2\right)^2 + \left(y-3\right)^2 \le 13 \wedge y \le 0\right)$

ou

$\left[\left(y \ge \frac{3}{2}x \wedge y \ge -\frac{3}{2}x + 6\right) \vee y \le 0\right] \wedge \left(x-2\right)^2 + \left(y-3\right)^2 \le 13$

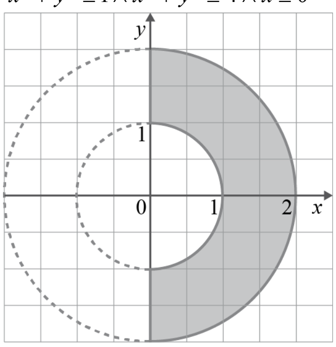
14.3. $(-3\ ,\ 0)$ e $(0\ ,\ 3)$

$m = \frac{3-0}{0+3} = 1$, logo $r:\ y = x + 3$

Condição: $y \le x + 3 \wedge y \ge 0 \wedge x \le 4 \wedge x^2 + \left(y-3\right)^2 > 9$

14.4. $y \ge -x \wedge y \ge x \wedge x^2 + \left(y-3\right)^2 \le 9 \wedge x^2 + \left(y-4\right)^2 \ge 4$

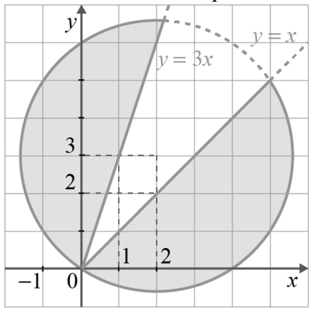
15.1. $x^2 + y^2 \ge 1 \wedge x^2 + y^2 \le 4 \wedge x \ge 0$



15.2. $\left(x-2\right)^2 + \left(y-3\right)^2 \le 13 \wedge y \ge 3x \wedge y \le x$

$C(2\ ,\ 3)$

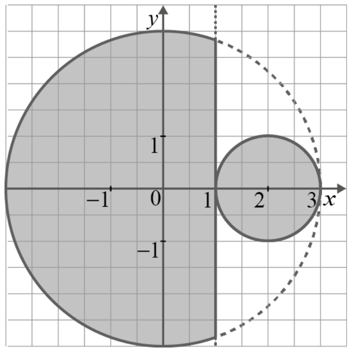
$r = \sqrt{13} = \overline{OC}$ dado que $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$



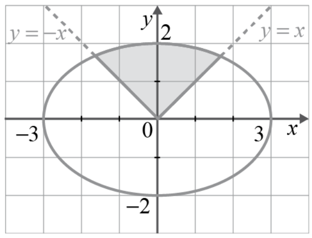
15.3. $\sim\left[\left(x^2 + y^2 > 9 \vee x > 1\right) \wedge \left(x-2\right)^2 + y^2 > 1\right]$

$\Leftrightarrow \sim\left(x^2 + y^2 > 9 \vee x > 1\right) \vee \left(x-2\right)^2 + y^2 \le 1$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 \le 9 \wedge x \le 1\right) \vee \left(x-2\right)^2 + y^2 \le 1$



15.4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} \le 1 \wedge y \ge x \wedge y \ge -x$



16. • $C(-1\ ,\ -3)$

$r = \overline{OC} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Circunferência:

$\left(x+1\right)^2 + \left(y+3\right)^2 = 10$

• Ponto B

$\begin{cases} x = 0 \\ \left(x+1\right)^2 + \left(y+3\right)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \left(y+3\right)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 3 = -3 \vee y + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \vee y = 0 \end{cases}$

Como $y < 0$, temos $B(0\ ,\ -6)$.

• Reta AB

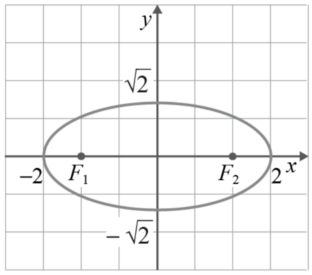
$A(5\ ,\ 0)$, $B(0\ ,\ -6)$

$m = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$; $y = \frac{6}{5}x - 6$

Condição:

$\left(x+1\right)^2 + \left(y+3\right)^2 \ge 10 \wedge y > \frac{6}{5}x - 6 \wedge y \le 0 \wedge x \ge 0$

17.



$a = 2 \Rightarrow a^2 = 4$; $b = \sqrt{2} \Rightarrow b^2 = 2$

$a^2 = b^2 + c^2$, logo $4 = 2 + c^2 \overset{c>0}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{4-2} \Leftrightarrow c = \sqrt{2}$

Assim, $F_1\left(-\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$ e $F_2\left(\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$.

Reta F_1D :

$F_1\left(-\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$ e $D\left(0\ ,\ \sqrt{2}\right)$

$m = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$; $y = x + \sqrt{2}$

Reta DF_2

$F_2\left(\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$ e $D\left(0\ ,\ \sqrt{2}\right)$

$m = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$; $y = -x + \sqrt{2}$

Condição:

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \wedge y \leq 0\right) \vee \left(y \geq 0 \wedge y \leq x + \sqrt{2} \wedge y \leq -x + \sqrt{2}\right)$$

18. $B(0\ ,\ 3)$, $D(0\ ,\ -3)$, $A(3\ ,\ 0)$

• Reta AB

$m = \dfrac{-3}{3} = -1$; $y = -x + 3$

• Reta DE

$y = -3$

• Ponto E

$$\begin{cases} y = -3 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ -3 = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 6 \end{cases}$$

$E(6\ ,\ -3)$

18.1. $\overline{BD} = \overline{DE} = 6$

$$A = \frac{\overline{BD} \times \overline{DE}}{2} - \frac{1}{4}\pi \times r^2 = \frac{6 \times 6}{2} - \frac{1}{4} \times \pi \times r^2 = 18 - \frac{9\pi}{4}$$

A área da parte colorida é $\left(18 - \dfrac{9\pi}{4}\right)$ u. a.

18.2. Por exemplo:

$x \geq 0 \wedge y \leq -x + 3 \wedge y \geq -3 \wedge \left(y \geq 0 \vee x^2 + y^2 \geq 9\right)$

19. • Elipse:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$b = \sqrt{3} \Rightarrow b^2 = 3$; $c = \sqrt{6} \Rightarrow c^2 = 6$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 3 + 6 \Leftrightarrow a^2 = 9$

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

• Circunferência:

Centro: $C\left(0\ ,\ \sqrt{3}\right)$; raio: $\overline{OC} = \sqrt{3}$

$x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 3$

• Condição:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} \leq 1 \wedge y \geq 0 \wedge$$
$$\wedge \left[\left(x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 \geq 3 \wedge x \leq 0\right) \vee \left(x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 \leq 3 \wedge x \geq 0\right)\right]$$

Pág. 185

20.1. Seja M o ponto médio de $[AC]$.

$M\left(\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{18}}{2}\ ,\ 0\right)$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{9 \times 2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$M\left(2\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$

A proposição é falsa, porque a abcissa de D é $2\sqrt{2}$.

20.2. A ordenada de D é $\overline{MD}$ e $\overline{MD} = \overline{AM} = \sqrt{2}$.

$D\left(2\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\right)$ e $A\left(\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$

• Reta AD

$m = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$; $y - 0 = 1\left(x - \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow y = x - \sqrt{2}$

• Reta DC

$D\left(2\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\right)$; $C\left(3\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$

$m = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$; $y - 0 = -\left(x - 3\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + 3\sqrt{2}$

• Condição: $y \leq x - \sqrt{2} \wedge y \leq -x + 3\sqrt{2} \wedge y \geq 0$

A proposição é verdadeira.

21. $A(-4\ ,\ -3)$, $B(0\ ,\ -3)$, $C(4\ ,\ 2)$ e $D(-4\ ,\ 2)$

21.1. $\overline{AB} = 4$; $\overline{CD} = \left|4 - (-4)\right| = 8$; $\overline{AD} = \left|-3 - 2\right| = 5$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} + \overline{AD}}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

A proposição é falsa, porque a área do triângulo $[ABC]$ é 10.

21.2. $A(-4\ ,\ -3)$, $B(0\ ,\ -3)$, $C(4\ ,\ 2)$

• Reta AC

$m = \dfrac{2+3}{4+4} = \dfrac{5}{8}$

$y - 2 = \dfrac{5}{8}(x - 4) \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{8}x - \dfrac{5}{2} + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{5}{8}x - \dfrac{1}{2}$

• Reta BC

$m = \dfrac{2+3}{4-0} = \dfrac{5}{4}$

$y + 3 = \dfrac{5}{4}x \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{4}x - 3$

• Condição: $y \geq -3 \wedge y \leq \dfrac{5}{8}x - \dfrac{1}{2} \wedge y \geq \dfrac{5}{4}x - 3$

Proposição verdadeira

22. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$

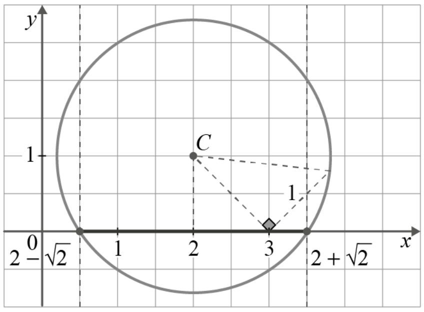
$\Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + \left(y^2 - 2y + 1\right) - 1 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$

22.1. Centro da circunferência: $C(2\ ,\ 1)$

A proposição é verdadeira, porque $1 = \dfrac{1}{2} \times 2$.

22.2.



$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=3\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+1=3\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2=2\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=-\sqrt{2} \vee x-2=\sqrt{2}\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2-\sqrt{2} \vee x=2+\sqrt{2}\\ y=0\end{cases}$$

Condição:

$y=0 \wedge 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$

A proposição é verdadeira.

23.1. O raio da circunferência é:

$r = |\text{ordenada de } C| = 3$

Reta t: $x=-\frac{9}{2}+3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

23.2. $\begin{cases}\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+(y-3)^2=9\\ y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+\frac{9}{2}\right)^2=9\\ y=3\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+\frac{9}{2}=-3 \vee x+\frac{9}{2}=3\\ y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{15}{2} \vee x=-\frac{3}{2}\\ y=3\end{cases}$$

As coordenadas são $\left(-\frac{15}{2}\ ,\ 3\right)$ e $\left(-\frac{3}{2}\ ,\ 3\right)$.

23.3. $\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \geq 9 \wedge -\frac{9}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2} \wedge 0 \leq y \leq 3$

24. Equação da circunferência: $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+4)^2=25\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+16=25\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2=9\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3=3 \vee x-3=-3\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=6 \vee x=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow (x\ ,\ y)=(6\ ,\ 0) \vee (x\ ,\ y)=(0\ ,\ 0)$$

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+4)^2=25\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9+(y+4)^2=25\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y+4)^2=16\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+4=-4 \vee y+4=0\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-8 \vee y=0\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x\ ,\ y)=(0\ ,\ -8) \vee (x\ ,\ y)=(0\ ,\ 0)$$

A circunferência interseta os eixos coordenados nos pontos de coordenadas (6 , 0) , (0 , 0) e (0 , –8).

Avaliação 2

1. Equação da circunferência:

Centro: $C(2\ ,\ 1)$; raio: $\overline{OC}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

Condição: $(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 5 \wedge (x \leq 0 \vee y \leq 0)$

Resposta: (D)

2.1. Sejam os pontos $C(2\ ,\ 1)$, $D(3\ ,\ 2)$, $B(0\ ,\ 1)$ e $A(0\ ,\ 2)$.

$\overline{BC}=|2-0|=2$; $\overline{AD}=|3-0|=3$; $\overline{AB}=|2-1|=1$

$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\times\overline{AB}=\frac{2+3}{2}\times 1=\frac{5}{2}$

Resposta: (C)

2.2. Equação da circunferência:

$r=\overline{CD}=\sqrt{(3-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y+3=0$$

Condição:

$(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 2 \wedge y \geq 0 \wedge \left[(x \leq 2 \wedge y \leq 1) \vee y \geq 2\right]$

Resposta: (D)

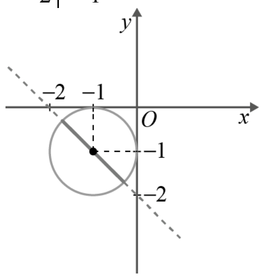
3. $y+x=-2 \Leftrightarrow y=-x-2$

$(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1$

Centro (–1 , –1) ; raio: 1

$y=-x-2$

x	y
0	– 2
– 2	1



Resposta: (A)

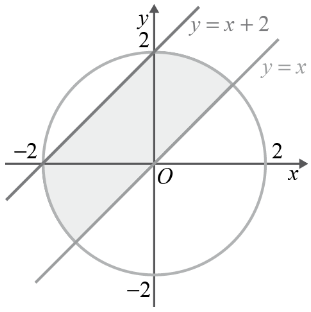
4. $x^2+y^2 \leq 4$

Centro (0 , 0) e raio 2

$y=x+2$

x	y
0	2
– 2	0

A condição $x^2+y^2 \leq 4 \wedge x \leq y \leq x+2$ define o conjunto.



Resposta: (A)

Pág. 187

5.1. Sabe-se que $\overline{OE} = \overline{OF} = 2$ e $E(1\ ,\ y)$.

$1^2 + y^2 = \overline{OE}^2$

$y^2 = 2^2 - 1 \Leftrightarrow y^2 = 3 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{3}$, logo $E\left(1\ ,\ \sqrt{3}\right)$

5.2. $A = \dfrac{\overline{OC} + \overline{ED}}{2} \times \sqrt{3} = \dfrac{4+2}{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

A área do trapézio $[CDEO]$ é $3\sqrt{3}$ u. a.

5.3. $E\left(1\ ,\ \sqrt{3}\right)$, $D\left(3\ ,\ \sqrt{3}\right)$, $A\left(1\ ,\ -\sqrt{3}\right)$ e $B\left(3\ ,\ -\sqrt{3}\right)$

Reta OE: $y = \sqrt{3}x$; reta OA: $y = -\sqrt{3}x$

Reta ED: $y = \sqrt{3}$; reta AB: $y = -\sqrt{3}$

Condição:

$(x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge \left(y \geq \sqrt{3}x \vee y \geq \sqrt{3} \vee y \leq -\sqrt{3}x \vee y \leq -\sqrt{3}\right)$

6.1. Equação da circunferência

Centro $(2\ ,\ 0)$; raio $= 2$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$

Ponto D

A abcissa do ponto D é $x = 1$.

$(1-2)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \vee y = \sqrt{3}$

Como $y < 0$, vem $y = -\sqrt{3}$. Logo, $D\left(1\ ,\ -\sqrt{3}\right)$ e $A\ (4\ ,\ 0)$.

Seja $P(x\ ,\ y)$.

$d(P\ ,\ A) = d(P\ ,\ D)$

$(x-4)^2 + y^2 = (x-1)^2 + \left(y+\sqrt{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}y = -6x + 12 \Leftrightarrow y = -\dfrac{6}{2\sqrt{3}}x + \dfrac{12}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{3\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{6\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

6.2. $0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge (x-2)^2 + y^2 \geq 4$

7. $B(1\ ,\ -2)$

7.1. $A(-3\ ,\ k)$

$\overline{AB} = 4\sqrt{2} \wedge k > 0$

$\sqrt{(-3-1)^2 + (k+2)^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 + (k+2)^2 = 16 \times 2 \Leftrightarrow (k+2)^2 = 16 \Leftrightarrow$

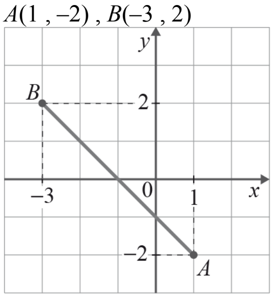
$\Leftrightarrow k + 2 = 4 \vee k + 2 = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -6$

Como $k > 0$, então $k = 2$.

A ordenada do ponto A é 2.

7.2. $A(1\ ,\ -2)$, $B(-3\ ,\ 2)$



Por exemplo:

$y = -x - 1 \wedge -3 \leq x \leq 1$

$B(2\ ,\ -4)$, $C(2\ ,\ 2)$

8.1. Seja M o ponto médio de $[BC]$.

$M(2\ ,\ -1)$

A ordenada do ponto A é -1 (BC é paralela a Oy).

$A(k\ ,\ -1)$, com $k < 0$

$\overline{BC} = |-4-2| = 6$

$\overline{AC} = \overline{BC}$ (o triângulo é equilátero)

$\sqrt{(k-2)^2 + (-1-2)^2} = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k-2)^2 + 9 = 36 \Leftrightarrow (k-2)^2 = 27 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k - 2 = -\sqrt{27} \vee k - 2 = \sqrt{27} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 2 - \sqrt{9 \times 3} \vee k = 2 + \sqrt{9 \times 3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 2 - 3\sqrt{3} \vee k = 2 + 3\sqrt{3}$

Como $k < 0$, vem $k = 2 - 3\sqrt{3}$.

$A\left(2 - 3\sqrt{3}\ ,\ -1\right)$

8.2. Centro: $C(2\ ,\ 2)$

Raio: $\overline{OC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8$

8.3. Centro: $M(2\ ,\ -1)$

Raio: $\overline{MC} = |2+1| = 3$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

8.4. $M(2\ ,\ -1)$

$A\left(2 - 3\sqrt{3}\ ,\ -1\right)$

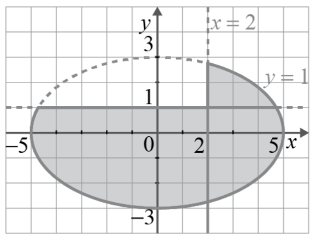
$\overline{MA} = \left|2 - 3\sqrt{3} - 2\right| = 3\sqrt{3}$

$A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{MA}}{2} = \dfrac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

A área do triângulo $[ABC]$ é $9\sqrt{3}$ u. a.

9.1. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \wedge x \geq 2 \vee y \leq 1$

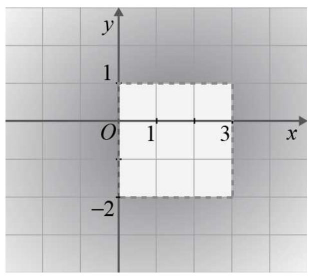
$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$



9.2. $\sim(-2 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim(y \geq -2 \wedge y \leq 1) \vee \sim(x \geq 0 \wedge x \leq 3)$

$\Leftrightarrow y < -2 \vee y > 1 \vee x < 0 \vee x > 3$



3.3. Vetores no plano

Pág. 188

Atividade inicial 3

A: 4 direções; 8 sentidos; 3 comprimentos
B: 4 direções; 8 sentidos; 4 comprimentos
C: 6 direções; 12 sentidos; 2 comprimentos

Pág. 190

1. Segmentos orientados: [A , M], [M , A], [A , I], [I , A], [A , R], [R , A], [M , I], [I , M], [M , R], [R , M], [I , R] e [R , I]
Vetores: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{RA}$, $\overrightarrow{MR}$ e $\overrightarrow{RM}$

Pág. 191

2.1. 8 : 4 = 2. Por exemplo, $\overrightarrow{GE}$.
2.2. $[D, C]$, $[E, G]$ e $[A, B]$

Pág. 194

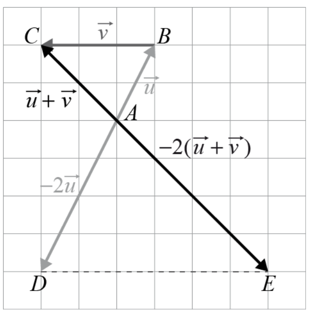
3.1. $A+\overrightarrow{DG}=A+\overrightarrow{AE}=E$
3.2. $I+\overrightarrow{DI}=I+\overrightarrow{IB}=B$
3.3. $I-\overrightarrow{EB}=I+\overrightarrow{BE}=I+\overrightarrow{IH}=H$
3.4. $D+\overrightarrow{DB}=B$
3.5. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}$
3.6. $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}$
3.7. $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DG}$
3.8. $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{HD}$
3.9. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{AF}$
3.10. $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC}$
3.11. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{HF}=\vec{0}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HF}$

Pág. 196

4.1. $3\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JL}=\overrightarrow{KL}$
4.2. $2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}\right)=2\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}$
4.3. $3\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=3\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BI}\right)=3\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{LF}$
4.4. $-3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-3\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}\right)=-3\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{CP}$
4.5. $2\vec{a}+\vec{b}-2\vec{b}-3\vec{a}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{JK}$
$=\left(\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JK}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}\right)=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OP}$
4.6. $-3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=-3\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}\right)+\left(\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{ON}\right)=$
$=-3\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{LF}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{LH}$

Pág. 197

5.



Sejam $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$.

- $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
- Os triângulos [ABC] e [ADE] são semelhantes pelo critério LAL, dado que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\|-2\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{|-2|\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=2$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\|-2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\|}{\|\vec{u}+\vec{v}\|}=\frac{|-2|\times\|\vec{u}+\vec{v}\|}{\|\vec{u}+\vec{v}\|}=2$$

Logo, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$.

Os ângulos DAE e BAC são iguais por serem verticalmente opostos.

- A razão de semelhança da ampliação é 2. Assim, $\overline{DE}=2\overline{BC}=2\|\vec{v}\|$. Como $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DE}$ tem a mesma direção e sentidos contrários, então $\overrightarrow{DE}=-2\overrightarrow{BC}$.

Como $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$, vem que $-2\vec{u}-2\vec{v}=-2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$.

Pág. 198

6.
- $\left(-2\times3\right)\vec{u}=-6\vec{u}$ tem a direção de $\vec{u}$ e sentido contrário ao de $\vec{u}$.
- $3\vec{u}$ tem a direção e sentido de $\vec{u}$. Logo, $-2\left(3\vec{u}\right)$ tem a direção de $\vec{u}$ e sentido contrário ao de $\vec{u}$.
- $\|\left(-2\times3\right)\vec{u}\|=\|-6\vec{u}\|=|-6|\|\vec{u}\|=6\|\vec{u}\|$

$\|-2\left(3\vec{u}\right)\|=|-2|\|3\vec{u}\|=2\times|3|\|\vec{u}\|=2\times3\|\vec{u}\|=6\|\vec{u}\|$

Portanto, os vetores $\left(-2\times3\right)\vec{u}$ e $-2\left(3\vec{u}\right)$ têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma norma. Logo, $\left(-2\times3\right)\vec{u}=-2\left(3\vec{u}\right)$.

7.1. $3\vec{a}-2\vec{b}-3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$
$=3\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}+3\vec{b}=$
$=0\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}$

7.2. $-2\left(3\vec{a}\right)-2\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)=$
$=-6\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{a}=$
$=-2\vec{a}-2\vec{b}$

7.3. $\left(2-3\right)\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=$
$=-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{a}+2\vec{b}=$
$=\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

8. $\left(-\lambda\right)\vec{v}+\lambda\vec{v}=$
$=\left(-\lambda+\lambda\right)\vec{v}=$
$=0\vec{v}=\vec{0}$

Se $\left(-\lambda\right)\vec{v}+\lambda\vec{v}=\vec{0}$, então $\left(-\lambda\right)\vec{v}=-\left(\lambda\vec{v}\right)$.

Pág. 199

9.1. $\vec{b}=-\frac{6}{4}\vec{a}=-\frac{3}{2}\vec{a}$ e $\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{b}$

9.2. $\vec{c}=-2\vec{a}$ e $\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{c}$

9.3. $\vec{d}=\frac{3}{4}\vec{a}$ e $\vec{a}=\frac{4}{3}\vec{d}$

Pág. 200

10.1. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CB}=\vec{y}$

10.2. $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\vec{x}+\vec{y}$

10.3. $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{DC}=-\vec{x}$

10.4. $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{5}\overrightarrow{EB}=\frac{8}{5}\overrightarrow{DC}=\frac{8}{5}\vec{x}$

10.5. $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=$

$=\vec{x}+\vec{y}-\overrightarrow{AB}=\vec{x}+\vec{y}-\frac{8}{5}\overrightarrow{EB}=$

$=\vec{x}+\vec{y}-\frac{8}{5}\vec{x}=\vec{y}-\frac{3}{5}\vec{x}$

Pág. 201

11. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=$

$=2\overrightarrow{FC}+2\overrightarrow{CE}=$

$=2\left(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE}\right)=$

$=2\overrightarrow{FE}=$

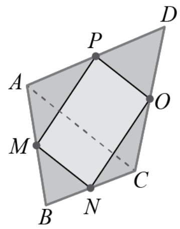
$=\overrightarrow{FD}$

Como $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FD}$, então [*ABDF*] é um paralelogramo.

12. Seja [*ABCD*] um quadrilátero qualquer e *M*, *N*, *O* e *P* os pontos médios de [*AB*], [*BC*], [*CD*] e [*AD*], respetivamente.

$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Logo, $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{MN}$, pelo que [*MNOP*] é um paralelogramo.



Pág. 203

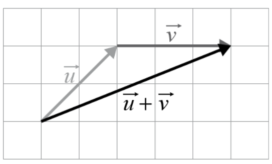
Atividade complementares

13. $[J, H]$ e $[L, M]$; $[G, H]$, $[O, N]$, $[B, A]$ e $[D, C]$; $[K, L]$ e $[F, E]$

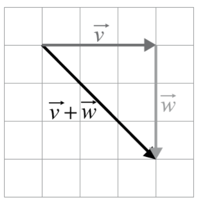
14.1. [*A* , *B*] e [*D* , *C*] ; [*A* , *D*] e [*B* , *C*] ; [*B* , *A*] e [*C* , *D*] ; [*D* , *A*] e [*C* , *B*]

14.2. **a)** Proposição falsa **b)** Proposição verdadeira
c) Proposição falsa **d)** Proposição verdadeira
e) Proposição verdadeira **f)** Proposição falsa

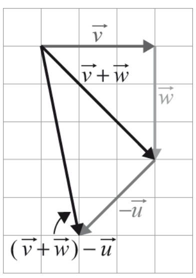
15.1.



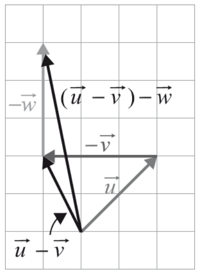
15.2.



15.3.



15.4.



16.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=$ | $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$

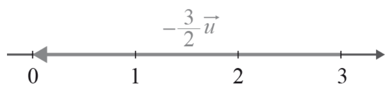
$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}=$ | $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$

$=\vec{0}+\vec{0}=$

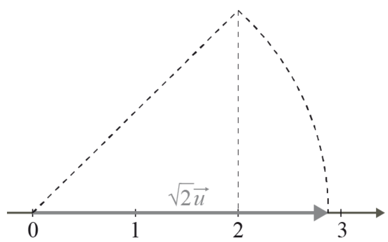
$=\vec{0}$

17.1.

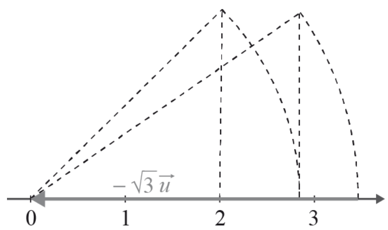
17.2.



17.3.

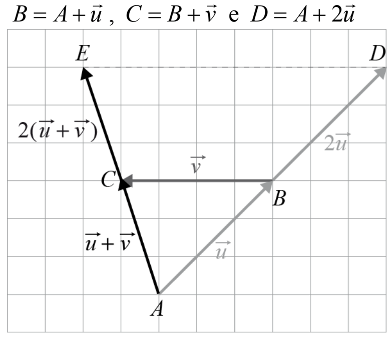


17.4.



18. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não colineares e *A* um ponto do plano.

$B=A+\vec{u}$, $C=B+\vec{v}$ e $D=A+2\vec{u}$



- Pela regra do triângulo: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{u}+\vec{v}$
- Seja $E=A+2(\vec{u}+\vec{v})$.

$$\frac{\|\overrightarrow{AE}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{\|2(\vec{u}+\vec{v})\|}{\|\vec{u}+\vec{v}\|}=\frac{2\|\vec{u}+\vec{v}\|}{\|\vec{u}+\vec{v}\|}=2$$

$$\frac{\|\overrightarrow{AD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{\|2\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{2\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=2$$

Os triângulos [*ABC*] e [*ADE*] são semelhantes porque têm um ângulo comum e os lados que o fornam proporcionais, pois $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=2$.

- A razão de semelhança da ampliação é 2, logo, $\overline{ED}=2\overline{BC}$.

Assim, $\overline{DE}=2\|\vec{v}\|$ e $\overrightarrow{DE}=2\vec{v}$.

Como $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$, então $2\vec{u}+2\vec{v}=2(\vec{u}+\vec{v})$.

19. • $\|2\times(-\vec{v})\|=|-2|\|\vec{v}\|=2\|\vec{v}\|$

$\|-2\vec{v}\|=|-2|\|\vec{v}\|=2\|\vec{v}\|$

$\|2\times(-\vec{v})\|=\|-2\vec{v}\|$

- $2\times(-\vec{v})$ tem a direção e o sentido de $-\vec{v}$ porque $2>0$

$-2\vec{v}$ tem a direção de $\vec{v}$ e o sentido contrário ao de $\vec{v}$, porque $-2<0$. Logo, $-2\vec{v}$ tem a direção e o sentido de $-\vec{v}$.

Portanto, $2\times(-\vec{v})$ e $-2\vec{v}$ tem a mesma direção, o mesmo sentido e módulos iguais, ou seja, $2\times(-\vec{v})=-2\vec{v}$.

20.1. $-a-2(\vec{a}-\vec{b})-\frac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})=$

$=-\vec{a}-2\vec{a}+2\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=$

$=-\frac{7}{2}\vec{a}+3\vec{b}$

20.2. $-(\vec{u}-3\vec{v})-\frac{1}{2}(\vec{u}-4\vec{v})=$

$=-\vec{u}+3\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{v}=$

$=-\frac{3}{2}\vec{u}+5\vec{v}$

20.3. $-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})-\frac{1}{3}(2\vec{v}-3\vec{u}-2\vec{v})=$

$=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{3}(\vec{0}-3\vec{u})=$

$=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

21. $2\times(-3\vec{u})+2(3\vec{u})=2[-3\vec{u}+3\vec{u}]=2\times\vec{0}=\vec{0}$

Se $2\times(-3\vec{u})+2(3\vec{u})=0$, então $2(-3\vec{u})=-2(3\vec{u})$.

Pág. 204

22.1. $\vec{u}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-2(\vec{a}+\vec{b})=\left(-\frac{1}{2}-2\right)(\vec{a}+\vec{b})=$

$=-\frac{5}{2}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{5}{2}\vec{v}$

Como $\vec{u}=-\frac{5}{2}\vec{v}$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

22.2. $\vec{u}=-\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{b})-2(-2\vec{a}-\vec{b})=$

$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+4\vec{a}+2\vec{b}=$

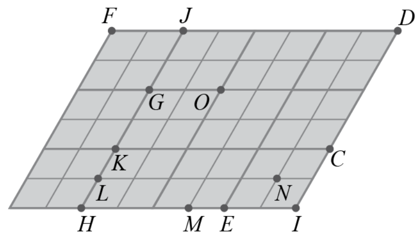
$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{12}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{6}{3}\vec{b}=$

$=\frac{10}{3}\vec{a}+\frac{7}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}(10\vec{a}+7\vec{b})=$

$=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{2}(10\vec{a}+7\vec{b})\right]=\frac{2}{3}\vec{v}$

Como $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{v}$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

23.



24.1. **a)** Como *B* é o ponto médio de [*OC*], então $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}=2\vec{y}$.

b) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=-\vec{y}+\vec{x}=\vec{x}-\vec{y}$

c) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\vec{x}+\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=2\vec{y}-\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}=\vec{x}+\overrightarrow{AM}+2\vec{y}-\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}=\vec{x}+2\vec{y}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{x}+\vec{y}$

24.2. $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}(\vec{x}-\vec{y})$

24.3. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH}=\vec{y}+\frac{1}{3}(\vec{x}-\vec{y})=\vec{y}+\frac{1}{3}\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y}$

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{x}+\vec{y}$

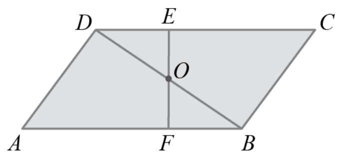
Portanto, $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{x}-\vec{y}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$.

Logo, $\overrightarrow{OH}$ é colinear com $\overrightarrow{OM}$.

Como $\overrightarrow{OH}$ e $\overrightarrow{OM}$ são colineares, podemos concluir que *O*, *H* e *M* são colineares (pertencem à mesma reta).

25. $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$



As diagonais de um paralelogramo bissetam-se.

Logo, $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$.

$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF})=$

$=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{FB}=$ $\quad|\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$

$=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=$

$=\vec{0}-\frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB})-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=$ $\quad|\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

26. $\overline{BE} = \overline{EC}$

$A\hat{E}B = C\hat{E}F$ (ângulos verticalmente opostos)

$E\hat{C}F = E\hat{B}A = 90°$

Logo, os triângulos $[ABE]$ e $[CEB]$ são iguais pelo critério ALA.

Assim, $\overline{EF} = \overline{AE}$ e $\overline{CF} = \overline{AB} = \overline{DC}$.

Portanto, C é o ponto médio de $[DF]$ pelo que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$, ou seja, $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{FC}$.

27.1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$

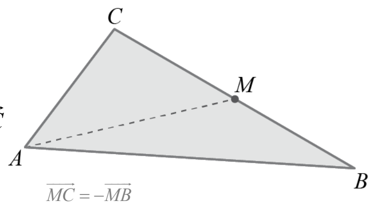
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} =$

$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$

$= 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MB}$

$= 2\overrightarrow{AM} + \vec{0}$

$= 2\overrightarrow{AM}$



27.2. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \left(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC}\right) =$

$= \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MB}$

$= 2\overrightarrow{PM} + \vec{0} = 2\overrightarrow{PM}$

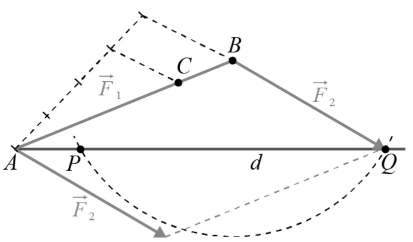
Pág. 205

28. Considera-se o ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{F_1}$ e determina-se o ponto $C \in [AB]$ tal que $\overline{AC} = \frac{3}{4}\|\vec{F_1}\|$.

Com centro em B e raio igual a $\overline{AC}$ traça-se o arco de circunferência que interseta a semirreta d nos pontos P e Q.

Tem-se que $\vec{F_2} = \overrightarrow{BQ}$ ou $\vec{F_2} = \overrightarrow{BP}$ são soluções do problema.

Na representação seguinte optou-se por $\vec{F_2} = \overrightarrow{BQ}$.



29.1. A proposição é verdadeira porque $\vec{d} = -2\vec{a}$.

29.2. A proposição é verdadeira porque $\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{e}$.

29.3. A proposição é falsa porque $\vec{c}$ e $\vec{b}$ não são colineares.

30. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = -\vec{y} + \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \vec{x} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM} = -\vec{y} + \vec{x} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BM} = \vec{x} - \vec{y} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BM} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{y})$

Resposta: (A)

31.1. a) $M + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = M + \overrightarrow{AC} = M + \overrightarrow{MO} = O$

b) $F + \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{PJ}\right) = F + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{JP}\right) =$

$= F + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OT}\right) = F + \overrightarrow{MT} =$

$= F + \overrightarrow{FN} = N$

c) $B + \left(2\overrightarrow{HI} - 3\overrightarrow{OI}\right) = B + \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DT}\right) =$

$= B + \overrightarrow{BT} = T$

d) $T + \frac{1}{4}\overrightarrow{LP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IT} = T + \overrightarrow{TU} + \frac{1}{2}\overrightarrow{TI} =$

$= U + \overrightarrow{TO} = U + \overrightarrow{UP} = P$

e) $G + \frac{3}{4}\overrightarrow{FJ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EU} = G + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JU} =$

$= J + \overrightarrow{JU} = U$

31.2. a) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{LP}$; $k = \frac{1}{4}$

b) $(3k+1)\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{CS}$; $-\frac{3}{2}\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{CS}$

$3k + 1 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 3k = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{6}$

c) $k\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{TF}$

$\overrightarrow{TF} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{IF} =$

$= 2\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{NM} =$

$= -3\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{OI}$

$k = -3$

d) $k\overrightarrow{LC} + 4k\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MS}$

$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{GM}$

Logo, $k = \frac{1}{2} \wedge 4k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$.

e) $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{SJ} = \overrightarrow{DQ}$

$\overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{JS}$ e $\overrightarrow{DQ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{SJ}$

$2k - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2k = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

31.3. a) $\left\|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{TQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}\right\| = \left\|\vec{0}\right\| = 0$

b) $\left\|\overrightarrow{FG}\right\| + \left\|\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{UR}\right\| = \frac{1}{2} + \left\|\overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RS}\right\| =$

$= \frac{1}{8} + \left\|\overrightarrow{US}\right\| = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

c) $\left\|\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{PN} + \frac{1}{4}\overrightarrow{LP}\right\| = \left\|\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{LM}\right\| =$

$= \left\|\overrightarrow{RU} + \overrightarrow{LM}\right\| = \left\|\overrightarrow{QU}\right\| = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Pág. 206

Avaliação 3

1.1. $A - \overrightarrow{HL} = A + \overrightarrow{LH} = A + \overrightarrow{AJ} = J$

Resposta: (C)

1.2. $\overrightarrow{AK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL}$

Resposta: (C)

2. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Resposta: (B)

3. $\vec{u} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 2\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} - 2\vec{b} =$

$= 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} =$

$= \frac{1}{2}\left(4\vec{a} - 3\vec{b}\right)$

Resposta: (B)

4. $(2\lambda+1)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{DH}\Leftrightarrow(2\lambda+1)=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CI}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2\lambda+1)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FI}$

$\overrightarrow{FI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{FI}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$2\lambda+1=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\lambda=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\ \lambda=-\frac{5}{4}$

Resposta: (A)

5.1. 12 + 6 + 2 = 20

Resposta: (B)

5.2. **(A)** A proposição é falsa, porque $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{FJ}$ não são colineares.

(B) A proposição é falsa porque $G+\overrightarrow{DJ}=G+\overrightarrow{GA}=A$.

(C) A proposição é verdadeira porque:

$F-\overrightarrow{CH}=F+\overrightarrow{HC}=F+\overrightarrow{FK}=K$

Resposta: (C)

6. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\ =-\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\vec{x}\ =-\vec{y}+\frac{1}{4}\vec{x}\ =\frac{1}{4}\vec{x}-\vec{y}$

Resposta: (D)

Pág. 207

7. $\vec{u}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})-3\left(\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)=$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-3\vec{a}+\vec{b}=$

$=-\frac{7}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

$\vec{w}$ é colinear com $\vec{u}$. Logo, $w=k\vec{u},\ k\in\mathbb{R}$.

$\|\vec{w}\|=|k|\|\vec{u}\|$

Portanto, $|k|=3$, pelo que $k=3\vee k=-3$.

Tem-se, assim:

$\vec{w}=3\left(-\frac{7}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)=-\frac{21}{2}\vec{a}+\frac{9}{2}\vec{b}$ ou $\vec{w}=\frac{21}{2}\vec{a}-\frac{9}{2}\vec{b}$.

8.1. $B+\frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}=B+\overrightarrow{BF}=F$

8.2. $F-\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{IH}\right)=F-\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)=\ F-\overrightarrow{BC}=F+\overrightarrow{CB}=$

$=F+\overrightarrow{FE}=E$

8.3. $\overrightarrow{AB}=+\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{CG}=\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FI}\ =\overrightarrow{AI}$

8.4. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{CG}=\ \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{IB}$

8.5. $-2\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FE}\right)=\ -2\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=-2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$

8.6. $-2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{DJ}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{IB}=\ -2\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IF}=-\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{JC}$

8.7. $10\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}-\overrightarrow{AJ}\right)=10\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JA}\right)=10\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right)=$

$=10\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}\right)=10\times\vec{0}=\ \vec{0}$

9. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\ =-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CN}$

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

10.1. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=$ Regra do triângulo

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EA}=$ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=$ Propriedade comutativa

$=\overrightarrow{ED}$ Regra do triângulo

10.2. O quadrilátero [*BEDC*] é um paralelogramo, pois tem dois lados paralelos e com o mesmo comprimento: [*ED*] e [*BC*]

11. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

Então:

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

pois $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.

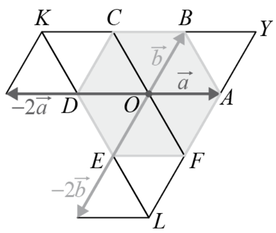
Se $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, podemos concluir que $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares, ou seja, [*PQ*] // [*AB*].

Como [*ABQP*] é um quadrilátero com dois lados paralelos, então é um trapézio.

12.1. $\overrightarrow{AB}+\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{EC}+\vec{a}=2\vec{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{EC}=2\vec{b}-\vec{a}$

12.2.



12.3. $\overrightarrow{OL}=\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{LO}=-\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{LO}+\overrightarrow{OK}=\left(-\vec{a}+2\vec{b}\right)+\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)$

$\overrightarrow{LK}=3\vec{b}-3\vec{a}$

12.4. [*ABKL*] é um trapézio isósceles, porque [*AB*] // [*KL*] e $\|\overrightarrow{BK}\|=\|\overrightarrow{AL}\|$.

3.4. Operações com coordenadas de vetores

Pág. 208

Atividade inicial 4

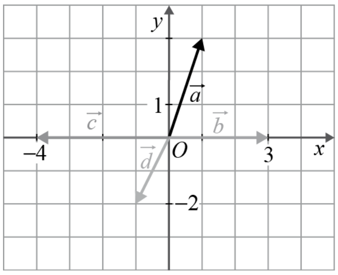
$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$; $\vec{b} = 6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$; $\vec{c} = 0\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$

$\vec{d} = 5\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$; $\vec{e} = -\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$; $\vec{f} = -3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$

$\vec{g} = -4\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$

Pág. 210

1.1.



1.2. $\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$; $\|\vec{b}\| = 3$; $\|\vec{c}\| = 4$;

$\|\vec{d}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

2.1. $\overrightarrow{OA}(-3\ ,\ -3)$, $\overrightarrow{OB}(3\ ,\ -3)$, $\overrightarrow{OC}(3\ ,\ 0)$, $\overrightarrow{OD}(0\ ,\ 3)$ e $\overrightarrow{OE}(-3\ ,\ 0)$

2.2. $\overrightarrow{AB}(6\ ,\ 0)$, $\overrightarrow{BC}(0\ ,\ 3)$, $\overrightarrow{CD}(-3\ ,\ 3)$, $\overrightarrow{DE}(-3\ ,\ -3)$ e $\overrightarrow{EA}(0\ ,\ -3)$

$-\overrightarrow{AB}(-6\ ,\ 0)$, $-\overrightarrow{BC}(0\ ,\ -3)$, $-\overrightarrow{CD}(3\ ,\ -3)$, $-\overrightarrow{DE}(3\ ,\ 3)$ e $-\overrightarrow{EA}(0\ ,\ 3)$

Pág. 212

3. $\vec{u}(0\ ,\ 3)$, $\vec{v}(-5\ ,\ 2)$ e $\vec{w}\left(-\frac{1}{3}\ ,\ 2\right)$

3.1. $\vec{u} + \vec{v} = (0\ ,\ 3) + (-5\ ,\ 2) = (0-5\ ,\ 3+2) = (-5\ ,\ 5)$

3.2. $\vec{u} - \vec{v} = (0\ ,\ 3) - (-5\ ,\ 2) = (0+5\ ,\ 3-2) = (5\ ,\ 1)$

3.3. $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (0\ ,\ 3) + (-5\ ,\ 2) - \left(-\frac{1}{3}\ ,\ 2\right) =$

$= \left(-5 + \frac{1}{3}\ ,\ 3 + 2 - 2\right) = \left(-\frac{14}{3}\ ,\ 3\right)$

3.4. $\vec{u} - (\vec{w} - \vec{v}) = \vec{u} - \vec{w} + \vec{v} =$

$= (0\ ,\ 3) - \left(-\frac{1}{3}\ ,\ 2\right) + (-5\ ,\ 2) =$

$= \left(\frac{1}{3} - 5\ ,\ 3 - 2 + 2\right) =$

$= \left(-\frac{14}{3}\ ,\ 3\right)$

3.5. $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(0\ ,\ 3) - 3(-5\ ,\ 2) =$

$= (0\ ,\ 6) - (-15\ ,\ 6) =$

$= (15\ ,\ 6 - 6) = (15\ ,\ 0)$

3.6. $-\vec{u} - \left[2\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})\right] = -\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{v} - \vec{w} =$

$= -3\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = -3(0\ ,\ 3) + (-5\ ,\ 2) - \left(-\frac{1}{3}\ ,\ 2\right) =$

$= \left(-5 + \frac{1}{3}\ ,\ -9 + 2 - 2\right) = \left(-\frac{14}{3}\ ,\ -9\right)$

3.7. $-3\vec{u} - 2\left(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) + 3\vec{v} =$

$= -3\vec{u} - 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{v} =$

$= -5\vec{u} + 2\vec{v} =$

$= -5(0\ ,\ 3) + 2(-5\ ,\ 2) =$

$= (0 - 10\ ,\ -15 + 4) =$

$= (-10\ ,\ -11)$

3.8. $-\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{u} + \left(3\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{v} =$

$= -3\vec{u} + 2\vec{v} =$

$= -3(0\ ,\ 3) + 2(-5\ ,\ 2) =$

$= (0\ ,\ -9) + (-10\ ,\ 4) =$

$= (-10\ ,\ -5)$

3.9. $\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{w} - 2(2\vec{u} - 3\vec{v}) =$

$= \frac{3}{2}\vec{w} - 4\vec{u} + 6\vec{v} =$

$= \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\ ,\ 2\right) - 4(0\ ,\ 3) + 6(-5\ ,\ 2) =$

$= \left(-\frac{1}{2}\ ,\ 3\right) - (0\ ,\ 12) + (-30\ ,\ 12) =$

$= \left(-\frac{1}{2} - 30\ ,\ 3 - 12 + 12\right) =$

$= \left(-\frac{61}{2}\ ,\ 3\right)$

4.1. $\vec{a}(2\ ,\ 3)$, $\vec{b}(2\ ,\ -2)$, $\vec{c}(-4\ ,\ -4)$ e $\vec{d}(4\ ,\ 0)$

4.2. $\vec{a} + \vec{b} = (2\ ,\ 3) + (2\ ,\ -2) = (4\ ,\ 1)$

4.3. $\vec{a} - \vec{b} = (2\ ,\ 3) - (2\ ,\ -2) = (2 - 2\ ,\ 3 + 2) = (0\ ,\ 5)$

4.4. $\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{d}\right) = \frac{1}{2}\left[(4\ ,\ 1) - (4\ ,\ 0)\right] = \frac{1}{2}(4 - 4\ ,\ 1 - 0) =$

$= \frac{1}{2}(0\ ,\ 1) = \left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$

4.5. $2\vec{a} - 3\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right) + \vec{d} - \vec{c} =$

$= 2\vec{a} - 3\vec{a} - 3\vec{b} + 6\vec{c} + \vec{d} - \vec{c} = -\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} + \vec{d} =$

$-(2\ ,\ 3) - 3(2\ ,\ -2) + 5(-4\ ,\ -4) + (4\ ,\ 0) =$

$= (-2\ ,\ -3) - (6\ ,\ -6) + (-20\ ,\ -20) + (4\ ,\ 0) =$

$= (-2 - 6 - 20 + 4\ ,\ -3 + 6 - 20 + 0) =$

$= (-24\ ,\ -17)$

Pág. 214

5.1. $\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

5.2. $\|\vec{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

5.3. $\|\vec{c}\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$

5.4. $\|\vec{d}\| = \sqrt{0^2 + (-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

5.5. $\|\vec{e}\| = \sqrt{(-5)^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25 + 25 \times 3} = \sqrt{100} = 10$

5.6. $\left\|\vec{f}\right\| = \sqrt{(1{,}1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1{,}21 + 36} = \sqrt{37{,}21} = 6{,}1$

6.1. $\vec{u}\left(-10\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ e $\vec{v}(-5\ ,\ 2)$

$\frac{-10}{-5} = 2\ ;\ \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

6.2. $\vec{u}\left(-3\ ,\ 1\frac{1}{2}\right)$ e $\vec{v}(6\ ,\ -3)$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

6.3. $\vec{u}(2\ ,\ 3)$ e $\vec{v}(0\ ,\ 6)$. Como $2 \neq 0$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

6.4. $\vec{u}(-5\ ,\ 0)$; $\vec{v}(7\ ,\ 0)$ e $\vec{v} = -\frac{7}{5}\vec{u}$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

6.5. $\vec{u}(-5\ ,\ 0)$ e $\vec{v}(0\ ,\ 7)$. Como $-5 \neq 0$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

7. $\vec{u}(-2\ ,\ 5)$ e $\vec{v}(-3\ ,\ m)$

$\frac{m}{5} = \frac{-3}{-2} \Leftrightarrow 2m = 15 \Leftrightarrow m = \frac{15}{2}$

8. $\vec{u}\left(1\ ,\ \sqrt{2}\right)$

$\vec{v} = k\vec{u} \wedge \|\vec{v}\| = 1$

$\vec{v} = k\left(1\ ,\ \sqrt{2}\right) = \left(k\ ,\ \sqrt{2}k\right),\ k \in \mathbb{R}$

$\|\vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow \left\|\left(k\ ,\ \sqrt{2}k\right)\right\| = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + \left(\sqrt{2}k\right)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 2k^2} = 1 \Leftrightarrow 3k^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = -\sqrt{\frac{1}{3}} \vee k = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee k = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ **ou**

$\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Pág. 215

9. Sendo $M(1\ ,2)$ e $N(0\ ,\ -3)$.

9.1. $\overrightarrow{MN} = N - M = (0\ ,\ -3) - (1\ ,\ 2) = (-1\ ,-5)$

9.2. $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN} = (1\ ,5)$

9.3. $M + \overrightarrow{NM} = (1\ ,\ 2) + (1\ ,\ 5) = (2\ ,7)$

9.4. $N + \overrightarrow{MN} = (0\ ,\ -3) + (-1\ ,\ -5) = (-1\ ,-8)$

10. $A(1\ ,2)$ e $\vec{u}(-1\ ,\ 5)$

Seja $P(x\ ,y)$.

$\overrightarrow{PA} = A - P = (1 - x\ ,\ 2 - y)$

$\overrightarrow{PA} = \vec{u} \Leftrightarrow (1 - x\ ,\ 2 - y) = (-1\ ,\ 5) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 1 \\ 2 - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ $\qquad P(2\ ,-3)$

Pág. 217

Atividades complementares

11. $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$; $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$; $\vec{c} = 0\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$; $\vec{d} = 3\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$

12. $A(-2\ ,2)$, $B(-3\ ,-3)$, $C(5\ ,1)$, $D(2\ ,4)$ e $E(1\ ,-1)$

12.1. $\overrightarrow{OA}(-2\ ,\ 2)$, $\overrightarrow{OB}(-3\ ,\ -3)$, $\overrightarrow{OC}(5\ ,\ 1)$, $\overrightarrow{OD}(2\ ,\ 4)$ e $\overrightarrow{OE}(1\ ,\ -1)$

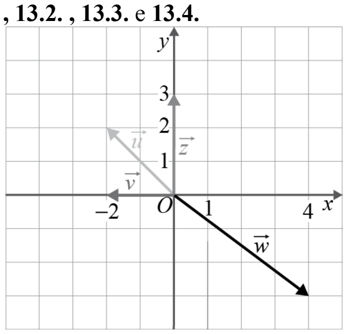
12.2. a) $\overrightarrow{AB}(-1\ ,\ -5)$ **b)** $\overrightarrow{CD}(-3\ ,\ 3)$

c) $\overrightarrow{DA}(-4\ ,\ -2)$ **d)** $\overrightarrow{CA}(-7\ ,\ 1)$

e) $\overrightarrow{AE}(3\ ,\ -3)$ **f)** $\overrightarrow{ED}(1\ ,\ 5)$

12.3. $\overrightarrow{BA}(1\ ,5)$, $\overrightarrow{DC}(3\ ,\ -3)$, $\overrightarrow{AD}(4\ ,\ 2)$, $\overrightarrow{AC}(7\ ,\ -1)$, $\overrightarrow{EA}(-3\ ,3)$, $\overrightarrow{DE}(-1\ ,\ -5)$

13.1. , 13.2. , 13.3. e **13.4.**



14. $\vec{u}(3\ ,\ -4)$ e $\vec{v}(2\ ,\ -1)$

14.1. $\vec{u} + \vec{v} = (3\ ,\ -4) + (2\ ,\ -1) = (5\ ,-5)$

14.2. $\vec{u} - \vec{v} = (3\ ,\ -4) - (2\ ,\ -1) = (1\ ,-3)$

14.3. $\vec{u} - 3\vec{v} = (3\ ,\ -4) + 3(2\ ,\ -1) =$

$= (3\ ,\ -4) + (6\ ,\ -3) = (9\ ,\ -7)$

14.4. $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = -2(3\ ,\ -4) + \frac{1}{2}(2\ ,\ -1) =$

$= (-6\ ,\ 8) + \left(1\ ,\ -\frac{1}{2}\right) = \left(-5\ ,\ \frac{15}{2}\right)$

14.5. $\vec{u} - \left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{v} =$

$= \frac{1}{2}(3\ ,\ -4) - \frac{3}{4}(2\ ,\ -1) =$

$= \left(\frac{3}{2}\ ,\ -2\right) - \left(\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{3}{4}\right) =$

$= \left(0\ ,\ -\frac{5}{4}\right)$

14.6. $\vec{e}_1 + \vec{u} - (2\vec{e}_2 - \vec{v}) = \vec{e}_1 + \vec{u} - 2\vec{e}_2 + \vec{v} =$

$= (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) + \vec{u} + \vec{v} = (1\ ,\ -2) + (5\ ,\ -5) = (6\ ,-7)$

15. $\vec{a}(8\ ,\ 2)$, $\vec{b}\left(\frac{2}{3}\ ,\ -1\right)$, $\vec{c}(-4\ ,\ -1)$ e $\vec{d}\left(-1\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

15.1. a) $\vec{a}(8\ ,\ 2)$ e $\vec{c}(-4\ ,\ -1)$

$\frac{8}{-4} = \frac{2}{-1} = 2$. Logo, $\vec{a}$ e $\vec{c}$ são colineares.

b) $\vec{b}\left(\frac{2}{3}\ ,\ -1\right)$ e $\vec{d}\left(-1\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

$\frac{\frac{2}{3}}{-1} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$. Logo, $\vec{b}$ e $\vec{d}$ são colineares.

15.2. $\vec{a}(8\ ,\ 2)$ e $\vec{b}\left(\frac{2}{3}\ ,\ -1\right)$

$\frac{8}{\frac{2}{3}} = 8 \times \frac{3}{2} = 12$ e $\frac{2}{-1} = -2$

$\frac{8}{\frac{2}{3}} \neq \frac{2}{-1}$. Logo, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares.

16. $\vec{a}(3\ ,\ 5)$ e $\vec{b}(\lambda + 2\ ,\ -2)$

$\frac{\lambda+2}{3} = \frac{-2}{5} \Leftrightarrow 5\lambda + 10 = -6 \Leftrightarrow 5\lambda = -16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{16}{5} \Leftrightarrow \lambda = -3{,}2$

Pág. 218

17. $\vec{v} = (\lambda - 3)\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$; $\vec{v}(\lambda - 3\ ,\ -2)$

17.1. $\vec{u}(2\ ,\ -1)$

$\vec{v}$ e $\vec{u}$ são colineares $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\lambda-3}{2} = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow \lambda - 3 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 7$

17.2. $\vec{u}(0\ ,\ -3)$

$\vec{v}$ e $\vec{u}$ são colineares $\Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$

18. $\vec{a}(0\ ,\ 3)$, $\vec{b}\left(-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right)$ e $\vec{c}(1\ ,\ 1)$

$\vec{d} = 4\vec{b} - 2\vec{a} = 4\left(-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right) - 2(0\ ,\ 3) =$

$= (-6\ ,\ 0) - (0\ ,\ 6) = (-6\ ,\ -6)$

$\frac{-6}{1} = \frac{-6}{1}$. Logo, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são colineares.

19.1. $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$; $\vec{a}\left(\frac{3}{2}\ ,\ -2\right)$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

19.2. $\vec{b} = -2\sqrt{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $\vec{b}\left(-2\sqrt{2}\ ,\ 1\right)$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{8+1} = 3$

19.3. $\vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2$; $\vec{c}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$

$\|\vec{c}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

19.4. $\vec{d} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2$; $\vec{d}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\|\vec{d}\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

19.5. $\vec{e} = \frac{\sqrt{5}}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2$; $\vec{e}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\ ,\ -\frac{2}{3}\right)$

$\|\vec{e}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9} + \frac{4}{9}} = 1$

20. $\vec{a}(2\ ,\ 3)$ e $\vec{b}(1\ ,\ 1)$

20.1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{13} \wedge \vec{u} = k\vec{a}$, com $k < 0$

$\vec{u} = k\vec{a} = k(2\ ,\ 3) = (2k\ ,\ 3k)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (3k)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k^2 + 9k^2 = 13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13k^2 = 13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 = 1$

Como $k < 0$, então $k = -1$.

$\vec{u}(-2\ ,\ -3)$

20.2. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2\ ,\ 3) + (1\ ,\ 1) = (3\ ,\ 4)$

$\vec{v} = k\vec{c} \wedge \|\vec{v}\| = 1$

$\vec{v} = k(3\ ,\ 4) = (3k\ ,\ 4k)$

$\|\vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 1 \Leftrightarrow 9k^2 + 16k^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5} \vee k = \frac{1}{5}$

$\vec{v}\left(\frac{3}{5}\ ,\ \frac{4}{5}\right)$ ou $\vec{v}\left(-\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{4}{5}\right)$

20.3. $\vec{a} + \lambda\vec{e}_1 = (2\ ,\ 3) + \lambda(1\ ,\ 0) = (2\ ,\ 3) + (\lambda\ ,\ 0)$

$= (2 + \lambda\ ,\ 3)$

$\|\vec{a} + \lambda\vec{e}_1\| = 5 \Leftrightarrow \|2 + \lambda\ ,\ 3\| = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2+\lambda)^2 + 3^2} = 5 \Leftrightarrow (2+\lambda)^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2+\lambda)^2 = 16 \Leftrightarrow 2 + \lambda = 4 \vee 2 + \lambda = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -6$

21. $A(0\ ,-2)$, $B(-1\ ,\ 3)$ e $\vec{u}(3\ ,\ 2)$

21.1. $P = A - \frac{1}{2}\vec{u} = (0\ ,\ -2) - \frac{1}{2}(3\ ,\ 2) = (0\ ,\ -2) - \left(\frac{3}{2}\ ,\ 1\right) =$

$= \left(-\frac{3}{2}\ ,\ -3\right)$

$P\left(-\frac{3}{2}\ ,\ -3\right)$

$Q = B - 2\vec{u} = (-1\ ,\ 3) - 2(3\ ,\ 2) = (-1\ ,\ 3) - (6\ ,\ 4) =$

$= (-7\ ,\ -1)$

$Q(-7\ ,\ -1)$

21.2. $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-7\ ,\ -1) - \left(-\frac{3}{2}\ ,\ -3\right) = \left(-7 + \frac{3}{2}\ ,\ -1 + 3\right)$

$= \left(-\frac{11}{2}\ ,\ 2\right)$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(-\frac{11}{2}\ ,\ 2\right) = \left(-\frac{11}{4}\ ,\ 1\right)$

21.3. $\vec{u}(3\ ,\ 2)$; $\vec{v} = \vec{e}_1 - (k-2)\vec{e}_2$; $\vec{v}(1\ ,\ -k+2)$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares $\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{-k+2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = -3k + 6 \Leftrightarrow 3k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$

22. $A(-2\ ,\ 3)$, $B(1\ ,\ -1)$ e $D(4\ ,\ 5)$

22.1. a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (1\ ,\ -1) - (-2\ ,\ 3) = (3\ ,\ -4)$

b) $\overrightarrow{AD} = D - A = (4\ ,\ 5) - (-2\ ,\ 3) = (6\ ,\ 2)$

c) $\overrightarrow{BD} = D - B = (4\ ,\ 5) - (1\ ,\ -1) = (3\ ,\ 6)$

22.2. a) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (-3\ ,\ 4)$

$M = D + \overrightarrow{BA} = (4\ ,\ 5) + (-3\ ,\ 4) = (1\ ,\ 9)$

$M(1\ ,9)$

b) $N = A + \overrightarrow{BD} = (-2\ ,\ 3) + (3\ ,\ 6) = (1\ ,\ 9)$

$N(1\ ,9)$

c) $P = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (4\ ,\ 5) + \frac{1}{2}(3\ ,\ -4) =$

$= (4\ ,\ 5) + \left(\frac{3}{2}\ ,\ -2\right) =$

$= \left(\frac{11}{2}\ ,\ 3\right)$

22.3. $C = D + \overrightarrow{DC} = D + \overrightarrow{AB} = (4\ ,\ 5) + (3\ ,\ -4) = (7\ ,\ 1)$

$C(7\ ,1)$

23. $A(-1\ ,2)$ e $B(-3\ ,-4)$

23.1. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 20$

O centro P da circunferência tem coordenadas $(1\ ,-2)$.

23.2. $A(-1\ ,2)$

$(-1-1)^2 + (2+2)^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

$B(-3\ ,-4)$

$(-3-1)^2 + (-4+2)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

23.3. $C = P + \overrightarrow{PC}$

$= P + \overrightarrow{AP}$

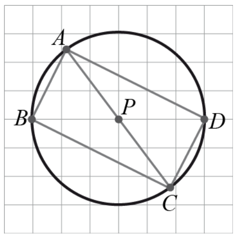
$P(1\ ,-2)$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (1\ ,\ 2) - (-1\ ,\ 2) =$

$= (2\ ,\ -4)$

$C = P + \overrightarrow{AP} = (1\ ,\ -2) + (2\ ,\ -4) =$

$= (3\ ,\ -6)$



$C(3\ ,\ -6)$

23.4. $D = C + \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BA} = A - B = (-1\ ,\ 2) - (-3\ ,\ -4) = (2\ ,\ 6)$

$D = (3\ ,\ -6) + (2\ ,\ 6) = (5\ ,\ 0)$

$D(5\ ,0)$

23.5. $C\hat{B}A = 90°$ porque $[AC]$ é um diâmetro e um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

$A\hat{D}C = 90°$ porque os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.

$D\hat{C}B = B\hat{A}D = 90°$ porque, num paralelogramo, os ângulos adjacentes ao mesmo lado são suplementares.

Logo, $[ABCD]$ é um retângulo.

$\overline{AB} = \sqrt{(-3+1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-4+6)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\overline{AB} = \overline{BC}$

Um retângulo com dois lados consecutivos iguais é um quadrado. Logo, $[ABCD]$ é um quadrado.

Pág. 219

24. $B(6\ ,1)$; $\overrightarrow{AC} = (16\ ,\ 14)$ e $M(2\ ,2)$

24.1. M é o ponto médio de $[DB]$.

$D = M + \overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{BM} = M - B = (2-6\ ,\ 2-1) = (-4\ ,\ 1)$

$D = (2\ ,\ 2) + (-4\ ,\ 1) = (-2\ ,\ 3)$

$D(-2\ ,3)$

As diagonais de um paralelogramo bissetam-se.

Então:

$C = M + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (2\ ,\ 2) + \frac{1}{2}(16\ ,\ 14) =$

$= (2\ ,\ 2) + (8\ ,\ 7) = (10\ ,\ 9)$

$C(10\ ,9)$

$A = M + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = M - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (2\ ,\ 2) - (8\ ,\ 7) = (-6\ ,\ -5)$

$A(-6\ ,-5)$

24.2. $\overrightarrow{DA} = A - D = (-6\ ,\ -5) - (-2\ ,3) = (-4\ ,\ -8)$

$\|\overrightarrow{DA}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$

$\overrightarrow{DC} = C - D = (10\ ,\ 9) - (-2\ ,\ 3) = (12\ ,\ 6)$

$\overrightarrow{DF} = k\overrightarrow{DC} \wedge \|\overrightarrow{DF}\| = \|\overrightarrow{DA}\| = \sqrt{80}\ \ (k > 0)$

$\overrightarrow{DF} = k(12\ ,\ 6) = (12k\ ,\ 6k)$

$\|\overrightarrow{DF}\| = \sqrt{80} \Leftrightarrow$

$\sqrt{(12k)^2 + (6k)^2} = \sqrt{80} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 144k^2 + 36k^2 = 80 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 180k^2 = 80 \Leftrightarrow k^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \vee k = -\frac{2}{3}$

Como $k > 0$, então $k = \frac{2}{3}$.

$\overrightarrow{DF} = \left(12 \times \frac{2}{3}\ ,\ 6 \times \frac{2}{3}\right) = (8\ ,\ 4)$

$F = D + \overrightarrow{DF} = (-2\ ,\ 3) + (8\ ,\ 4) = (6\ ,\ 7)$

$F(6\ ,7)$

25.1. $A(1\ ,-2)$, $B(4\ ,-8)$

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4\ ,\ -8) - (1\ ,\ -2) = (3\ ,\ -6)$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(3\ ,\ -6) = (2\ ,\ -4)$

$P = A + \overrightarrow{AP} = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (1\ ,\ -2) + (2\ ,\ -4) = (3\ ,\ -6)$

A proposição é falsa porque $P(3\ ,-6)$.

25.2. $\vec{a}(5\ ,\ -2)$ e $\vec{b}(3\ ,\ 8)$

$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} =$

$= \frac{3}{2}(5\ ,\ -2) - \frac{1}{2}(3\ ,\ 8) =$

$= \left(\frac{15}{2}\ ,\ -3\right) - \left(\frac{3}{2}\ ,\ 4\right) =$

$= (6\ ,\ -7)$

Logo, $P(6\ ,-7)$.

A proposição é verdadeira.

26. $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B=C$

A proposição é verdadeira se $B = C$.

27. $M(2\ ,\ -1)$; $I(3\ ,\ -4)$; $R(9\ ,\ -2)$ e $A(8\ ,\ 1)$

Ponto médio de $[MR]$: $\left(\frac{9+2}{2}\ ,\ \frac{-1-2}{2}\right)$; $N\left(\frac{11}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}\right)$

Ponto médio de $[IA]$: $\left(\frac{8+3}{2}\ ,\ \frac{-4+1}{2}\right)$; $N\left(\frac{11}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}\right)$

As diagonais bissetam-se.

$\overline{MR}=\sqrt{(9-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$

$\overline{IA}=\sqrt{(8-3)^2+(1+4)^2}=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}$

$\overline{MR}=\overline{IA}$

$[MIRA]$ é um quadrilátero em que as diagonais são iguais e bissetam-se. Logo, o quadrilátero é um retângulo.

28. $A(1\ ,\ 2)$, $B(-1\ ,\ 1)$, $C(-5\ ,\ -1)$ e $D(-1\ ,\ 4)$

28.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-1\ ,\ 1)-(1\ ,\ 2)=(-2\ ,\ -1)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(-5\ ,\ -1)-(1\ ,\ 2)=(-6\ ,\ -3)=$

$=3(-2\ ,\ -1)=3\overrightarrow{AB}$

Como $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$, os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares.

Logo, os pontos A, B e C também são colineares.

28.2. Se $\overline{AE}=\overline{ED}$, o ponto E pertence à mediatriz de $[AD]$.

Seja $P(x\ ,\ y)$ um ponto da mediatriz de $[AD]$:

$d(P\ ,\ A)=d(P\ ,\ D)$

$(x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-8y+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y=4x+12 \Leftrightarrow y=x+3$

Mediatriz de $[AD]$: $y=x+3$

Reta CB

$C(-5\ ,\ -1)$ e $B(-1\ ,\ 1)$

$m=\frac{1+1}{-1+5}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$y-1=\frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

Interseção mediatriz de $[AB]$ com a reta CB:

$\begin{cases} y=x+3 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ x+3=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ 2x+6=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow (x\ ,\ y)=(-3\ ,\ 0)$

Como $-5<-3<-1$, o ponto $(-3\ ,\ 0)$ pertence ao segmento de reta $[BC]$. Portanto, $E\ (-3\ ,\ 0)$.

29. $A(2\ ,\ -1)$; $B(3\ ,\ 7)$ e $C(4\ ,\ k)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(3\ ,\ 7)-(2\ ,\ -1)=(1\ ,\ 8)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(4\ ,\ k)-(2\ ,\ -1)=(2\ ,\ k+1)$

$\frac{2}{1}=\frac{k+1}{8} \Leftrightarrow k+1=16 \Leftrightarrow k=15$

30. $\vec{u}\left(\frac{1}{2}\ ,\ a\right)$; $\vec{v}\left(b\ ,\ \frac{3}{4}\right)$ e $\vec{w}(-1\ ,\ 3)$

30.1. a) $\frac{\frac{1}{2}}{-1}=\frac{9}{3} \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$

b) $\frac{b}{-1}=\frac{\frac{3}{4}}{3} \Leftrightarrow b=-\frac{3}{3\times 4} \Leftrightarrow b=-\frac{1}{4}$

30.2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\ ,\ a\right)+\left(b\ ,\ \frac{3}{4}\right)=(-1\ ,\ 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}+b=-1 \\ a+\frac{3}{4}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{9}{4} \end{cases}$

$\vec{u}=\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{9}{4}\right)$ e $\vec{v}=\left(-\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{4}\right)$

$\vec{u}-\vec{v}=\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{9}{4}\right)-\left(-\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{4}\right)=\left(2\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

31. $A(-3\ ,\ 3)$, $B(5\ ,\ -1)$, $C(3\ ,\ 4)$ e $D(7\ ,\ a)$

31.1. $A(-3\ ,\ 3)$ e $D(7\ ,\ a)$

O declive de AO terá de ser igual ao declive de AD:

$\frac{3-0}{-3-0}=\frac{a-3}{7+3} \Leftrightarrow -1=\frac{a-3}{10} \Leftrightarrow a-3=10 \Leftrightarrow a=-7$

31.2. AB terá de ser paralela a CD pelo que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ terão de ser colineares.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(5\ ,\ -1)-(-3\ ,\ 3)=(8\ ,\ -4)$

$\overrightarrow{CD}=D-A=(7\ ,\ a)-(3\ ,\ 4)=(4\ ,\ a-4)$

$\frac{4}{8} \Leftrightarrow \frac{a-4}{-4} \Leftrightarrow \frac{a-4}{-4}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a-4=-2 \Leftrightarrow a=2$

Avaliação 4

1. $\vec{u}(-1\ ,\ 2)$

$A \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}:(-1) \neq \frac{\sqrt{5}}{4}:2$; $B \rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{4}:(-1)=\frac{\sqrt{5}}{2}:2$

$\left\|\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\ ,\ \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right\|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{16}+\frac{5}{4}}=$

$=\sqrt{\frac{5}{16}+\frac{20}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

Resposta: (B)

2.1. $A(2\ ,\ 0)$, $B(-2\ ,\ 2)$ e $C(0\ ,\ -2)$

$\vec{w}=2(A-C)=2[(2\ ,\ 0)-(0\ ,\ -2)]=$

$=2(2\ ,\ 2)=2\sqrt{4+4}=$

$=2\sqrt{8}=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Resposta: (D)

2.2. $\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=(2,0)-\frac{1}{2}(2,-4)=$

$=(2,0)-(1,-2)=$

$=(1,2)$

Resposta: (C)

3. $A(-2\ ,\ 0)$, $B(1\ ,\ 5)$, $C(4\ ,\ 3)$ e $P(x\ ,\ y)$

$-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AP}=P-A=(x+2\ ,\ y)$

$\overrightarrow{CA}=A-C=(-6\ ,\ -3)$

$\overrightarrow{BA}=A-B=(-3\ ,\ -5)$

$-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+2\ ,\ y)=(-6\ ,\ -3)-2(-3\ ,\ -5)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+2\ ,\ y)=(-6\ ,\ -3)-(-6\ ,\ -10)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+2\ ,\ y)=(0\ ,\ 7)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=0\\y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=7\end{cases}$

$P(-2\ ,\ 7)$

Resposta: (D)

4. Se $2\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{BC}$, então $\overrightarrow{AB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$.

Logo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares pelo que *A, B* e *C* também são colineares.

Resposta: (B)

5.1. $D+\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{ED}\right)=D+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DE}\right)=$

$=D+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)=D+\overrightarrow{CA}=$

$=D+\overrightarrow{DF}=F$

Resposta: (A)

5.2. $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OE}\neq\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}$

Resposta: (D)

6. $\vec{u}(5\ ,\ 2)$; $A(k\ ,\ k+4)$ e $B(2\ ,\ 3)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(2-k\ ,\ 3-k-4)=(2-k\ ,\ -1-k)$

$\frac{2-k}{5}=\frac{-1-k}{2}\Leftrightarrow 4-2k=-5-5k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k=-9\Leftrightarrow k=-3$

Resposta: (A)

7. $\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{BR}$

$\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{BR}$

Logo:

$\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PA}$

Resposta: (A)

Pág. 221

8. $A(-4\ ,-1)$, $B(5\ ,\ 2)$ e $C(14\ ,\ 15)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(5\ ,\ 2)-(-4\ ,\ -1)=(9\ ,\ 3)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(14\ ,\ 15)-(-4\ ,\ -1)=(18\ ,\ 16)$

$\frac{18}{9}\neq\frac{16}{3}$

Logo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares pelo que os pontos *A, B* e *C* não são colineares.

9. $A\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 5\right)$, $B\left(\frac{5}{2}\ ,\ 1\right)$ e $C(-1\ ,\ 1)$

9.1. $D\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{2}\ ,\ \frac{5+1}{2}\right)$; $D\ (1\ ,\ 3)$

$E\left(\frac{\frac{5}{2}-1}{2}\ ,\ \frac{1+1}{2}\right)$; $E\left(\frac{3}{4}\ ,\ 1\right)$

9.2. $\overrightarrow{DE}=E-D=\left(\frac{3}{4}\ ,\ 1\right)-(1\ ,\ 3)=\left(-\frac{1}{4}\ ,\ -2\right)$

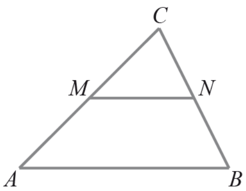
$\overrightarrow{AC}=C-A=(-1\ ,\ 1)-\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 5\right)=$

$=\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -4\right)=2\left(-\frac{1}{4}\ ,\ -2\right)=2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{AC}$

Logo, $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares.

9.3. Seja [*ABC*] um triângulo e *M* e *N* os pontos médios de [*AC*] e de [*BC*], respetivamente.



$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=$

$=-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CN}$

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CN}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Logo, [*MN*] é paralelo a [*AB*] e $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AB}$.

10. $A(-2\ ,\ 5)$, $B(-4\ ,-1)$ e $C(4\ ,\ 3)$

10.1. $\overline{AB}=\sqrt{(-4+2)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$

$\overline{AC}=\sqrt{(4+2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$

$\overline{BC}=\sqrt{(4+4)^2+(3+1)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ e $\overline{AB}=\overline{AC}$

Logo, o triângulo [*ABC*] é isósceles e retângulo em *A*.

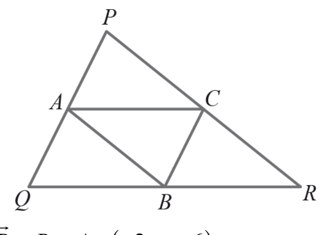
10.2. A mediana é [*AM*] sendo *M* o ponto médio de [*BC*].

$M\left(\frac{-4+4}{2}\ ,\ \frac{-1+3}{2}\right)$, logo $M(0\ ,\ 1)$.

$\overline{AM}=\sqrt{(-2-0)^2+(5-1)^2}=\sqrt{4+16}=$

$=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$

10.3. Sabemos que:



$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}QR$

$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}PR$

$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}QP$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(6\ ,\ -2)$; $\overrightarrow{AB}=B-A=(-2\ ,\ -6)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(8\ ,\ 4)$

$Q=B+\overrightarrow{CA}=(-4\ ,\ -1)+(-6\ ,\ 2)=(-10\ ,\ 1)$

$Q\ (-10\ ,\ 1)$

$R=B+\overrightarrow{AC}=(-4\ ,\ -1)+(6\ ,\ -2)=(2\ ,\ -3)$

$R\ (2\ ,-3)$

$P=A+\overrightarrow{BC}=(-2\ ,\ 5)+(8\ ,\ 4)=(6\ ,\ 9)$

$P\ (6\ ,\ 9)$

11. $A(-3\ ,\ 2)$, $B(5\ ,\ 4)$, $C(7\ ,\ -6)$ e $D(-5\ ,\ -4)$

11.1. $M\left(\frac{-3+5}{2}\ ,\ \frac{2+4}{2}\right)$; $M\,(1\ ,\ 3)$

$N\left(\frac{5+7}{2}\ ,\ \frac{4-6}{2}\right)$; $N\,(6\ ,\ -1)$

$P\left(\frac{7-5}{2}\ ,\ \frac{-6-4}{2}\right)$; $P\,(1\ ,\ -5)$

$Q\left(\frac{-3-5}{2}\ ,\ \frac{2-4}{2}\right)$; $Q\,(-4\ ,\ -1)$

11.2. $\overline{MN} = \sqrt{(6-1)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$\overline{NP} = \sqrt{(6-1)^2+(-1+5)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$\overline{PQ} = \sqrt{(1+4)^2+(-5+1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$\overline{QM} = \sqrt{(1+4)^2+(3+1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$P_{[MNPQ]} = 4\times\sqrt{41}$

$\overline{AC} = \sqrt{(7+3)^2+(-6-2)^2} = \sqrt{100+64} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

$\overline{BD} = \sqrt{(-5-5)^2+(-4-4)^2} = \sqrt{100+64} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

$\overline{AC}+\overline{BD} = 4\sqrt{41}$

Logo, $P_{[MNPQ]} = \overline{AC}+\overline{BD} = 4\sqrt{41}$.

12.1. a) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $a = \frac{1}{4}$

b) $\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$; $b = \frac{3}{7}$

c) $\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $c = -\frac{1}{3}$

12.2. $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AP}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PR} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

12.3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{BC}\right) =$

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) =$

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) =$

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC} =$

$= \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{7}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC} =$

$= \frac{9}{28}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

12.4. $\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PQ} = -\frac{9}{7}\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{PR}$

Logo, $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são colineares pelo que os ponto P, Q e R são colineares.

13. $2\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ e $2\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{DE} = 2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right) =$

$= 2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AE} =$

$= -2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AE} =$

$= -3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC} =$

$= 3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC} =$

$= 3\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) =$

$= 3\overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$

Logo, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DE}$ são colineares.

14. $A(-1\ ,\ 4)$, $B(-1\ ,\ 1)$, $C(5\ ,\ -2)$ e $D(5\ ,\ 1)$

14.1. $M\left(\frac{-1+5}{2}\ ,\ \frac{1+1}{2}\right)$; $M\,(2\ ,\ 1)$

14.2. Reta AM

$m = \frac{1-4}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1$

$y-1 = -(x-2) \Leftrightarrow y = -x+3$

$AM:\ y = -x+3$

$C(5\ ,\ -2)$

$-2 = -5+3 \Leftrightarrow -2 = -2$ (Verdadeiro)

Portanto, $C \in AM$.

14.3. $\overrightarrow{AB} = B-A = (0\ ,\ -3)$

$\overrightarrow{CD} = D-A = (0\ ,\ 3)$

$\overrightarrow{AC} = C-A = (6\ ,\ -6)$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

A, B, C e D não são colineares; $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares com sentidos opostos e $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$.

Logo, $[ABCD]$ é um paralelogramo.

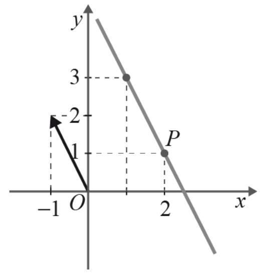
3.5. Equações de uma reta no plano

Pág. 222

Atividade inicial 5

1.1. Uma infinidade **1.2.** Uma reta

1.3.



2.1. $A(-2\ ,\ 0)$ e $B(0\ ,\ 1)$; $m_{AB}=\dfrac{1-0}{0+2}=\dfrac{1}{2}$

2.2. Reta AB: $y=\dfrac{1}{2}x+1$

Para $x=2$: $y=\dfrac{1}{2}\times 2+1=1+1=2$.

Logo, a ordenada do ponto C é 2.

2.3. $A(-2\ ,\ 0)$, $B(0\ ,\ 1)$, $C(2\ ,\ 2)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(2\ ,\ 1)$; $\overrightarrow{BC}=C-B=(2\ ,\ 1)$;

$\overrightarrow{AC}=C-A=(4\ ,\ 2)$; $\overrightarrow{CB}=B-C=(-2\ ,\ -1)$;

$\overrightarrow{CA}=A-C=(-4\ ,\ -2)$

2.4. $\dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2}$

As razões são todas iguais a $\dfrac{1}{2}$.

Pág. 224

1. $y=-3x+1$; $m=-3$

Por exemplo: $\vec{u}(1\ ,\ -3)$, $\vec{v}(2\ ,\ -6)$ e $\vec{w}(-1\ ,\ 3)$

2. $A\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 2\right)$ e $\vec{v}(-1\ ,\ 5)$

$m=\dfrac{5}{-1}=-5$

$y=mx+b\Leftrightarrow 2=-5\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+b\Leftrightarrow b=2-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow b=-\dfrac{1}{2}$

$y=-5x-\dfrac{1}{2}$

3. Por exemplo, $\vec{u}(0\ ,\ 1)$, $\vec{v}(0\ ,\ -1)$ e $\vec{w}(0\ ,\ 2)$

Pág. 225

4. $A(1\ ,\ 2)$ e $B(-7\ ,\ 0)$

4.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-7\ ,\ 0)-(1\ ,\ 2)=(-8\ ,\ -2)=-2(4\ ,\ 1)$

$(x\ ,y)=(1\ ,\ 2)+k(4\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

4.2. $(-3\ ,\ 4)=(1\ ,\ 2)+k(4\ ,\ 1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(-3\ ,\ 4)=(1+4k\ ,\ 2+k)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-3=1+4k\\4=2+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\k=2\end{cases}$

O sistema é impossível. Logo, o ponto C não pertence à reta AB.

Pág. 226

5. $A\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 2\right)$ e $B(3\ ,\ 0)$

5.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(3\ ,\ 0)-\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 2\right)=$

$=\left(\dfrac{7}{2}\ ,\ -2\right)=\dfrac{1}{2}(7\ ,\ -4)$

$(x\ ,\ y)=(3\ ,\ 0)+k(7\ ,\ -4),\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x\ ,\ y)=(3+7k\ ,\ -4k),\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+7k\\y=-4k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

5.2. $C(x\ ,\ -2)$ e $y=-2$

$$\begin{cases}x=3+7k\\y=-4k\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+7k\\-2=-4k\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+\dfrac{7}{2}\\k=\dfrac{1}{2}\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{13}{2}\\y=-2\end{cases}$$

A abcissa do ponto C é $\dfrac{13}{2}$.

5.3. $D(10\ ,\ -4)$

$\begin{cases}10=3+7k\\-4=-4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\k=1\end{cases}\Leftrightarrow k=1$

O sistema é possível. Logo, $D\in AB$.

5.4. $\begin{cases}x=3+7k\\y=-4k\\y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+7k\\y=-4k\\-4k=-3-7k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=4\\k=-1\end{cases}$

$E(-4\ ,\ 4)$

Pág. 228

6. $\begin{cases}x=-1+2k\\y=-3+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=k\\y+3=k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

Equações cartesianas:

$\dfrac{x+1}{2}=y+3\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=y+3\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$

7.1. $r:\ -2x+3y-1=0\ \Leftrightarrow 3y=2x+1\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$

$m=\dfrac{2}{3}$. Logo, $\vec{u}(3\ ,\ 2)$ é um vetor diretor da reta r.

Por exemplo, o ponto $A(1\ ,\ 1)$ pertence à reta r.

$(x\ ,\ y)=(1\ ,\ 1)+k(3\ ,\ 2),\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+3k\\y=1+2k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

7.2. $s:\ \dfrac{-x+3}{2}=\dfrac{3-y}{3}\Leftrightarrow\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-3}$

$B(3\ ,\ 3)$ é um ponto de s e $\vec{v}(-2\ ,\ -3)$ um vetor diretor.

$(x\ ,\ y)=(3\ ,\ 3)+k(-2\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

7.3. $t:\ \begin{cases}x=k\\2y=1+3k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\\\dfrac{2y-1}{3}=k\end{cases}$

$t:\ x=\dfrac{2y-1}{3}\Leftrightarrow 3x=2y-1\Leftrightarrow 2y=3x+1\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

8.1. $r: 3x-y-2=0$

$\begin{cases} x=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow (x\ ,\ y)=(0\ ,\ -2)$

$\begin{cases} y=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (x\ ,\ y)=\left(\frac{2}{3}\ ,\ 0\right)$

$(0\ ,\ -2)$ e $\left(\frac{2}{3}\ ,\ 0\right)$ são os pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados.

8.2. $r: 3x-y-2=0 \Leftrightarrow y=3x-2$

$m=3$; $\vec{v}(1\ ,\ 3)$ é um vetor diretor de r.

(0 , –2) é um ponto de r.

$r: (x\ ,y)=(0\ ,\ -2)+k(1\ ,\ 3),\ k\in\mathbb{R}$

8.3. $P(k\ ,\ k^2)\in r$

$3k-k^2-2=0 \Leftrightarrow k^2-3k+2=0 \Leftrightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{3\pm 1}{2} \Leftrightarrow k=1 \vee k=2$

Os valores são $k=1$ ou $k=2$.

8.4. $s: (x\ ,\ y)=(1\ ,\ 3)+k(2\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

$(x\ ,\ -2)=(1+2k\ ,\ 3+k) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2k \\ -2=3+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ k=-5 \end{cases}$

O ponto de s de ordenada – 2 tem abcissa -9.

8.5. $(x\ ,y)=(1\ ,\ 3)+k(2\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2k \\ y=3+k \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2}=k \\ y-3=k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

$s: \frac{x-1}{2}=y-3 \Leftrightarrow x-1=2y-6 \Leftrightarrow x-2y+5=0$

8.6. $t: \begin{cases} x=1-2\lambda \\ 2y=-4\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} 0=1-2\lambda \\ 2\times(-1)=-4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{1}{2} \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

O sistema é possível. Logo, $A\in t$.

8.7. $t: \begin{cases} x=1-2\lambda \\ 2y=-4\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{-2}=\lambda \\ \frac{2y}{-4}=\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$

$t: \frac{x-1}{-2}=\frac{2y}{-4} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-2} \Leftrightarrow y=x-1$

8.8. $B(-1\ ,\ 3)\in p$; $m=1$

$y=x+b$

$3=-1+b \Leftrightarrow b=4$

p: $y=x+4$

Atividades complementares

9. $r: y=x-1\ \ (m=1)$

Por exemplo, $\vec{r}_1(1\ ,\ 1)$, $\vec{r}_2(2\ ,\ 2)$ e $\vec{r}_3(3\ ,\ 3)$.

$s: 2x+y=3 \Leftrightarrow y=-2x+3\ \ (m=-2)$

Por exemplo, $\vec{s}_1(1\ ,\ -2)$, $\vec{s}_2(2\ ,\ -4)$ e $\vec{s}_3(-1\ ,\ 2)$

$t: y=5$

Por exemplo, $\vec{t}_1(1\ ,\ 0)$, $\vec{t}_2(2\ ,\ 0)$ e $\vec{t}_3(-1,\ 0)$

10.1. $P(0\ ,\ 1)$ e $\vec{v}(2\ ,\ -5)$

$m=-\frac{5}{2}$; $r: y=-\frac{5}{2}x+1$

10.2. $P(-2\ ,\ 5)$ e $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\right)$

$m=\frac{2}{-\frac{1}{2}}=-4$

$r: y-5=-4(x+2) \Leftrightarrow y=-4x-3$

10.3. $P(-1\ ,\ 2)$ e $\vec{v}(\sqrt{2}\ ,\ 0)$

m = 0 (reta horizontal)

$r: y=2$

11. Por exemplo, para as quatro retas verticais:
$\vec{u}(0\ ,\ 1)$, $\vec{v}(0\ ,\ 2)$ e $\vec{w}(0\ ,\ -7)$.

12. $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\right)$ e $A(2\ ,\ 3)$

$(x\ ,\ y)=(2\ ,\ 3)+k\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\right),\ k\in\mathbb{R}$

$(0\ ,\ 1)=(2\ ,\ 3)+k\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0\ ,\ 1)=\left(2-\frac{k}{2}\ ,\ 3+2k\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\frac{k}{2}=0 \\ 3+2k=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ k=-1 \end{cases}$

Como o sistema é impossível, $B\notin r$.

13.1. $A(-1\ ,\ 0)$ e $\vec{u}(2\ ,\ -4)$

$(x\ ,\ y)=(-1\ ,\ 0)+k(2\ ,\ -4),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2k \\ y=-4k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

13.2. $B\left(\frac{1}{2}\ ,\ -1\right)$ e $\vec{v}=\vec{e}_1+\vec{e}_2=(1\ ,\ 1)$

$(x\ ,\ y)=\left(\frac{1}{2}\ ,\ -1\right)+k(1\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}+k \\ y=-1+k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

13.3. $C(0\ ,\ 2)$ e $\vec{v}(0\ ,\ 1)$

$(x\ ,\ y)=(0\ ,\ 2)+k(0\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2+k \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

13.4. $D\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 3\right)$ e $\vec{v}(-2\ ,\ -1)$

$(x\ ,\ y)=\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 3\right)+k(-2\ ,\ -1),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}-2k \\ y=3-k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

14. $t:\begin{cases}x=3p\\y=1-p\end{cases},\ p\in\mathbb{R}$

14.1. Por exemplo, $\vec{v}(3\ ,\ -1)$, $A\,(0\ ,1)$ e $B\,(3\ ,0)$.

14.2. $(x\ ,\ y)=(0\ ,\ 1)+k(3\ ,\ -1),\ k\in\mathbb{R}$

14.3. $m=-\frac{1}{3}$ e $A(0\ ,1)$

Por exemplo, $y=-\frac{1}{3}x+1$

15. $r:\begin{cases}x-2=3k\\2y=2k+1\end{cases},\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+3k\\y=\frac{1}{2}+k\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$

15.1. Por exemplo, $A\left(2\ ,\ \frac{1}{2}\right)$, $B\left(5\ ,\ \frac{3}{2}\right)$, $\vec{v}(3\ ,\ 1)$ e $\vec{u}(6\ ,\ 2)$

15.2. $\begin{cases}x=0\\x-2=3k\\2y=2k+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\3k=-2\\2y=2k+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\k=-\frac{2}{3}\\2y=-\frac{4}{3}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-\frac{2}{3}\\y=-\frac{1}{6}\end{cases}$

Ponto de interseção com *Oy*: $\left(0\ ,\ -\frac{1}{6}\right)$

$\begin{cases}y=0\\x-2=3k\\2y=2k+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=2-\frac{3}{2}\\k=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=\frac{1}{2}\\k=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Ponto de interseção com *Ox*: $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$

15.3. $\begin{cases}x=2+3k\\y=\frac{1}{2}+k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(x\ ,\ y)=\left(2\ ,\ \frac{1}{2}\right)+k(3\ ,\ 1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5=2+3k\\\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\k=1\end{cases}\Leftrightarrow k=1$

$\begin{cases}-1=2+3k\\-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\k=-1\end{cases}\Leftrightarrow k=-1$

Os pontos *P* e *Q* pertencem a *r*, porque:

$\left(5\ ,\ \frac{3}{2}\right)=\left(2\ ,\ \frac{1}{2}\right)+(3\ ,\ 1)$

$\left(-1\ ,\ -\frac{1}{2}\right)=\left(2\ ,\ \frac{1}{2}\right)-(3\ ,\ 1)$

15.4. a) $\overrightarrow{PQ}=Q-P=\left(-1\ ,\ -\frac{1}{2}\right)-\left(5\ ,\ \frac{3}{2}\right)=$

$=(-6\ ,\ -2)$

$\dot{P}Q:\ (x\ ,\ y)=\left(5\ ,\ \frac{3}{2}\right)+k(-6\ ,\ -2),\ k\in\mathbb{R}_0^+$

b) $[PQ]:\ (x\ ,\ y)=\left(5\ ,\ \frac{3}{2}\right)+k(-6\ ,\ -2),\ k\in[0\ ,\ 1]$

Pág. 232

16. $r:\ \frac{x-3}{2}=\frac{2-y}{3}\Leftrightarrow\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-3}$

16.1. $A(3\ ,2)$ é um ponto de r

$\vec{r}=(2\ ,\ -3)$ é um vetor diretor de r

$r:\ (x\ ,\ y)=(3\ ,\ 2)+k(2\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

16.2. $B(x\ ,1)$

$\frac{x-3}{2}=\frac{2-1}{3}\Leftrightarrow\frac{x-3}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x-3=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=\frac{11}{3}$

A abcissa do ponto é $\frac{11}{3}$.

16.3. $C(3\ ,\ -1)$

$\frac{3-3}{2}=\frac{2+1}{3}\Leftrightarrow 0=1$ (Falso)

O ponto não pertence à reta.

17.1. Reta *s*: $A(0\ ,3)$ e $B(4\ ,0)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(4\ ,\ -3)$

$\vec{v}_3=(8\ ,\ -6)=2(4\ ,\ -3)$

Reta *r*: $C(-3\ ,3)$ e $D(4\ ,1)$

$\overrightarrow{CD}=D-C=(7\ ,\ -2)$

$\vec{v}_1=(7\ ,\ -2)$

Reta *t*: $E(-3\ ,1)$ e $F(0\ ,-2)$

$\overrightarrow{EF}=F-E=(3\ ,\ -3)$

$\vec{v}_2=(-1\ ,\ 1)=-\frac{1}{3}(3\ ,\ -3)$

$r:\ \vec{v}_1\ ;\ s:\ \vec{v}_3\ ;\ t:\ \vec{v}_2$

17.2. $r:\ (x\ ,\ y)=(-3\ ,\ 3)+k(7\ ,\ -2),\ k\in\mathbb{R}$

$r:\ \begin{cases}x=-3+7k\\y=3-2k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

$s:\ (x\ ,y)=(0\ ,\ 3)+k(4\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

$s:\ \begin{cases}x=4k\\y=3-3k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

$t:\ (x\ ,\ y)=(-3\ ,\ 1)+k(-1\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

$t:\ \begin{cases}x=-3-k\\y=1+k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

17.3. $A(0\ ,3)$; $v_1(7\ ,\ -2)$

$u:\ \frac{x-0}{7}=\frac{y-3}{-2}\Leftrightarrow -2x=7y-21\Leftrightarrow 2x+7y-21=0$

17.4. $\vec{u}(5\ ,\ k)$. O vetor $\vec{u}$ é colinear em $\vec{v}_3(8\ ,\ -6)$.

$\frac{5}{8}=\frac{k}{-6}\Leftrightarrow -30=8k\Leftrightarrow k=\frac{-30}{8}\Leftrightarrow k=-\frac{15}{4}$

17.5. $r:\ \begin{cases}x=-3+7k\\y=3-2k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

$r:\ \frac{x+3}{7}=\frac{y-3}{-2}\Leftrightarrow -2x-6=7y-21\Leftrightarrow 2x+7y-15=0$

$\begin{cases}x=0\\2x+7y-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\frac{15}{7}\end{cases}\Leftrightarrow(x,\ y)=\left(0\ ,\ \frac{15}{7}\right)$

$\begin{cases}y=0\\2x+7y-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=\frac{15}{2}\end{cases}\Leftrightarrow(x\ ,\ y)=\left(\frac{15}{2}\ ,\ 0\right)$

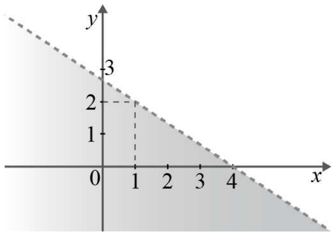
A reta *r* interseta os eixos coordenados nos pontos $\left(0\ ,\ \frac{15}{7}\right)$ e $\left(\frac{15}{2}\ ,\ 0\right)$.

17.6. $s:\ (x\ ,\ y)=(0\ ,\ 3)+k(4\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

$y=mx+b$; $m=-\frac{3}{4}$; $b=3$

$s:\ y=-\frac{3}{4}x+3$

18.



19. $r:\ \begin{cases}x=-3+3k\\ y=6-2k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$; $E(1\ ,-1)$

19.1. $r:\ \begin{cases}x=-3+3k\\ y=6-2k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+3}{3}=k\\ \frac{y-6}{-2}=k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

$\frac{x+3}{3}=\frac{y-6}{-2}\Leftrightarrow -2x-6=3y-18\Leftrightarrow 3y=-2x+12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+4$

$y=-\frac{2}{3}x+4$

19.2. Ponto A

$\begin{cases}x=0\\ y=-\frac{2}{3}x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$

$A(0\ ,\ 4)$

Ponto B

$\begin{cases}y=0\\ y=-\frac{2}{3}x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ -\frac{2}{3}x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ -2x=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=6\end{cases}$

$B(6\ ,\ 0)$

19.3. Se $[AB]$ é um diâmetro, o centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$.

$M\left(\frac{0+6}{2}\ ,\ \frac{4+0}{2}\right)$, logo $M(3\ ,\ 2)$.

19.4. O raio da circunferência é:

$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(6-0)^2+(4-0)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+16}=$

$=\frac{1}{2}\sqrt{52}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{13}=\sqrt{13}$

$(x-3)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+4-13=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x-4y=0$

19.5. Sendo F o centro da circunferência: $F(3\ ,2)$

$C=F+\overrightarrow{EF}$

Para $E(1\ ,-1)$ e $F(3\ ,2)$ e sendo $\overrightarrow{EF}=F-E=(2\ ,\ 3)$:

$C=(3\ ,\ 2)+(2\ ,\ 3)=(5\ ,\ 5)$

$C\ (5\ ,5)$

19.6. Reta DC: $y=5$

Condição: $(x-3)^2+(y-2)^2\le 13\wedge y\ge-\frac{2}{3}x+4\wedge y\le 5$

20.1. $x+y=0\Leftrightarrow y=-x$ e $x-y=0\Leftrightarrow y=x$

Se B e C pertencem às bissetrizes dos respetivos quadrantes e têm abcissa 1, então:

$A(-1\ ,\ -1)$, $B(1\ ,\ -1)$, $C(1\ ,\ 1)$ e $D(-1\ ,\ 1)$

20.2. $4\overrightarrow{OM}+\vec{e}_1=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OM}=-\vec{e}_1\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{4}\vec{e}_1+0\vec{e}_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{1}{4}\ ,\ 0\right)$

Logo, $M\left(-\frac{1}{4}\ ,\ 0\right)$.

$3\overrightarrow{ON}+\vec{e}_2=0\Leftrightarrow 3\overrightarrow{ON}=-\vec{e}_2\Leftrightarrow\overrightarrow{ON}=-\frac{1}{3}\vec{e}_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{ON}=0\vec{e}_1-\frac{1}{3}\vec{e}_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{ON}=\left(0\ ,\ -\frac{1}{3}\right)$

Logo, $N\left(0\ ,\ -\frac{1}{3}\right)$.

20.3. a) $\overrightarrow{DM}=M-D=\left(-\frac{1}{4}\ ,\ 0\right)-(-1\ ,\ 1)=\left(\frac{3}{4}\ ,\ -1\right)$

$\overrightarrow{DN}=N-D=\left(0\ ,\ -\frac{1}{3}\right)-(-1\ ,\ 1)=\left(1\ ,\ -\frac{4}{3}\right)=$

$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\ ,\ -1\right)$

$\overrightarrow{DN}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DM}$. Como $\overrightarrow{DN}$ e $\overrightarrow{DM}$ são colineares, os pontos D, M e N também são colineares.

b) $\overrightarrow{AM}=M-A=\left(-\frac{1}{4}\ ,\ 0\right)-(-1\ ,\ -1)=\left(\frac{3}{4}\ ,\ 1\right)$

$\overrightarrow{NC}=C-N=(1\ ,\ 1)-\left(0\ ,\ -\frac{1}{3}\right)=\left(1\ ,\ \frac{4}{3}\right)$

$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\ ,\ 1\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{NC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}$. Como os vetores $\overrightarrow{NC}$ e $\overrightarrow{AM}$ são colineares, as retas NC e AM são paralelas.

21. $r:\ ax+by+c=0$; $s:\ a'x+b'y+c'=0$

21.1. a) $ax+by+c=0\Leftrightarrow by=-ax+c\Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}\quad(b\neq 0)$

O declive da reta r é $m=-\frac{a}{b}$.

Logo, um vetor diretor de r é, por exemplo, $\vec{r}(-b\ ,\ a)$.

b) $a'x+b'y+c'=0\Leftrightarrow y'=-\frac{a'}{b'}x+\frac{c'}{b'}\quad(b'\neq 0)$

O declive da reta s é $m'=\frac{a'}{b'}$.

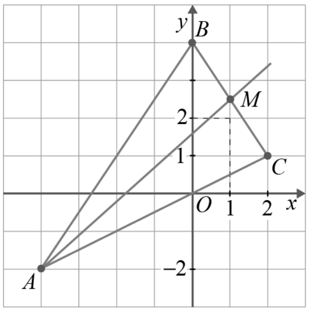
Logo, um vetor diretor da reta s é, por exemplo, $\vec{s}(-b'\ ,a')$.

21.2. As retas r e s são paralelas se e só se os vetores diretores $\vec{r}(-b\ ,\ a)$ e $\vec{s}(-b'\ ,\ a')$ forem colineares.

$\frac{-b}{-b'}=\frac{a}{a'}\Leftrightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\quad(a'\neq 0\wedge b'\neq 0)$

22. $A(-4\ ,-2)$, $B(0\ ,4)$ e $C(2\ ,1)$.

Seja M o ponto médio de $[BC]$:



$M\left(\frac{0+2}{2}\ ,\ \frac{4+1}{2}\right)$

$M\left(1\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{AM} = M - A =$

$=\left(1\ ,\ \frac{5}{2}\right) - (-4\ ,\ -2) =$

$=\left(5\ ,\ \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2}(10\ ,\ 9)$

$AM:\ (x\ ,\ y) = (-4\ ,\ -2) + k(10\ ,\ 9),\ k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

23. $(p-1)x + (2p+3)y = 1,\ p \in \mathbb{R}$

23.1. A reta é paralela ao eixo Oy (vertical) se:

$2p+3 \Leftrightarrow p = -\frac{3}{2}$

23.2. A reta é paralela ao eixo Ox (horizontal) se

$p-1=0 \Leftrightarrow p=1$

23.3. $x=1$ e $y=2$

$(p-1)\times 1 + (2p+3)\times 2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p-1+4p+6=1 \Leftrightarrow 5p=-4 \Leftrightarrow p=-\frac{4}{5}$

23.4. • Se $2p+3 \neq 0$.

$(p-1)x+(2p+3)y=1 \Leftrightarrow\ y = \frac{-(p-1)}{2p+3}x + \frac{1}{2p+3}$

$\vec{u}(2p+3\ ,\ -p+1)$ é um vetor diretor da reta

• $2x-3y=5 \Leftrightarrow 3y=2x-5 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

$\vec{v}(3\ ,\ 2)$ é um vetor diretor da reta

As retas são paralelas se os vetores diretores forem colineares:

$\frac{2p+3}{3} = \frac{-p+1}{2} \Leftrightarrow\ 4p+6=-3p+3 \Leftrightarrow 7p=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p = -\frac{3}{7}$

24. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 6$

24.1. Pontos A e B

$\begin{cases} y=0 \\ (x+2)^2+(y-2)^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x+2)^2+4=6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x+2)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+2=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-2-\sqrt{2} \vee x=-2+\sqrt{2} \end{cases}$

$A\left(-2-\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$ e $B\left(-2+\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$

Pontos C e D

$\begin{cases} x=0 \\ (x+2)^2+(y-2)^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (y-2)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y-2=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2-\sqrt{2} \vee y=2+\sqrt{2} \end{cases}$

$C\left(0\ ,\ 2+\sqrt{2}\right)$ e $D\left(0\ ,\ 2-\sqrt{2}\right)$

24.2. $P(-2\ ,2)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = \left(0\ ,\ 2+\sqrt{2}\right) - \left(-2-\sqrt{2}\ ,\ 0\right) =$

$= \left(2+\sqrt{2}\ ,\ 2+\sqrt{2}\right) =$

O vetor $\vec{u}(1\ ,\ 1)$ é colinear com AC.

$r:\ (x\ ,\ y) = (-2\ ,\ 2) + k(1\ ,\ 1),\ k \in \mathbb{R}$

24.3. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{OC}}{2}$

$\overline{AB} = \left|-2+\sqrt{2}-\left(-2\sqrt{2}\right)\right| = \left|-2+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}$

$\overline{OC} = 2+\sqrt{2}$

$A_{[ABC]} = \frac{2\sqrt{2}\times\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} = 2\sqrt{2}+2$

A área do triângulo $[ABC]$ é $\left(2\sqrt{2}+2\right)$ u. a.

24.4. a) $A\left(-2-\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$, $C\left(0\ ,\ 2+\sqrt{2}\right)$ e $Q(x\ ,y)$

$d(Q\ ,\ A) = d(Q\ ,C)$

$\left(x-\left(-2-\sqrt{2}\right)\right)^2 + y^2 = x^2 + \left(y-\left(2+\sqrt{2}\right)\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\left(2+\sqrt{2}\right)x + \left(2+\sqrt{2}\right)^2 + y^2 =$

$= x^2 + y^2 - 2\left(2+\sqrt{2}\right)y + \left(2+\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(2+\sqrt{2}\right)x = -2\left(2+\sqrt{2}\right)y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-y \Leftrightarrow y=-x$

$m: y = -x$

b) $B\left(-2+\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$

O ponto B não pertence a m. Logo, $\overline{BA} \neq \overline{BC}$ pelo que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \neq \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

c) $[AC]$ e $[BC]$ são duas cordas da circunferência. As suas mediatrizes encontram-se no centro da circunferência, ou seja, em $P(-2\ ,\ 2)$.

24.5. $P(-2\ ,2)$ e $D\left(0\ ,\ 2-\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{DP} = P - D = \left(-2\ ,\ 2-\left(2-\sqrt{2}\right)\right) = \left(-2\ ,\ \sqrt{2}\right)$

$E = P + \overrightarrow{DP} = (-2\ ,\ 2) + \left(-2\ ,\ \sqrt{2}\right) = \left(-4\ ,\ 2+\sqrt{2}\right)$

$E\left(-4\ ,\ 2+\sqrt{2}\right)$

Avaliação 5

1. $r: \begin{cases} x=t \\ 2y-3t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ 2y-1=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ \frac{2y-1}{3}=t \end{cases}$

$\frac{2y-1}{3} = x \Leftrightarrow 2y-1=3x \Leftrightarrow 2y=3x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\ ;\ \vec{u}(2\ ,\ 3)$

Resposta: (D)

2. $s:\ 2x - \pi y + 3 = 0 \Leftrightarrow \pi y = 2x+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{2}{\pi}x + \frac{3}{\pi}\ ;\ \vec{u}(\pi\ ,\ 2)$

Resposta: (C)

3. $2x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ define um reta vertical.

Um vetor diretor é da forma (0 , k) com $k \neq 0$.

Resposta: (A)

4. $r:\ (x\ ,\ y) = (1\ ,\ 2) + k(3\ ,\ 2),\ k \in \mathbb{R}$

$\vec{r}(3\ ,\ 2)$ é um vetor diretor de r.

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ 3y = 2 + 2k \end{cases},\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = k \\ \dfrac{3y-2}{2} = k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{3y-2}{2} = x - 3 \Leftrightarrow 3y - 2 = 2x - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y = 2x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$\vec{u}(3\ ,\ 2) = \vec{r}$ é um vetor diretor.

Resposta: (D)

5. $A(-3\ ,\ 6)$ e $B(3\ ,\ 2)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (6\ ,\ -4) = 2(3\ ,\ -2)$

$r:\ y = mx + b$

$m = -\frac{2}{3}$

$2 = -\frac{2}{3} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 4$

$y = -\frac{2}{3}x + 4 \Leftrightarrow 3y + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 12 = 0$

Resposta: (B)

6. $C(4\ ,\ 3)$

$\overrightarrow{AB} = (4\ ,\ 1)$; $\overrightarrow{AD} = (1\ ,\ 4)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (4\ ,\ 1) + (1\ ,\ 4) = (5\ ,\ 5) = 5(1\ ,\ 1)$

$\vec{u}(1\ ,\ 1)$ é um vetor diretor da reta AC

$\overline{AC}:\ y = mx + b$

$m = \frac{1}{1} = 1$; $C(4\ ,\ 3)$ é um ponto da reta

$3 = 1 \times 4 + b \Leftrightarrow b = -1$

$AC:\ y = x - 1 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$

Resposta: (A)

7. $A(7\ ,\ 2)$ e $B(2\ ,\ -3)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-5\ ,\ -5)$

$C(-5\ ,\ 2)$ e $D(5\ ,\ y)$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (10\ ,\ y - 2)$

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares se:

$\frac{10}{-5} = \frac{y-2}{-5} \Leftrightarrow 10 = y - 2 \Leftrightarrow y = 12$

Resposta: (C)

8. $A(1\ ,\ -2)$, $B(5\ ,\ 3)$

$AB:\ y = mx + b$; $m = \frac{3+2}{5-1} = \frac{5}{4}$

$-2 = \frac{5}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -2 - \frac{5}{4} \Leftrightarrow b = -\frac{13}{4}$

$y = \frac{5}{4}x - \frac{13}{4} \Leftrightarrow 4y = 5x - 13 \Leftrightarrow 5x - 4y - 13 = 0$

Resposta: (A)

9. $r:\ \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

$\vec{r}(3\ ,\ 2)$ é um vetor diretor da reta r.

$A(7\ ,\ 6)$

$s:\ y = mx + b$; $m = \frac{2}{3}$

$6 = \frac{2}{3} \times 7 + b \Leftrightarrow b = 6 - \frac{14}{3} \Leftrightarrow b = \frac{4}{3}$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

$(1\ ,\ 2) \in s$?

$2 = \frac{2}{3} \times 1 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2 = \frac{6}{3}$ (verdadeiro)

Como $(1\ ,\ 2) \in s$, uma equação de s é:

$$(x\ ,\ y) = (1\ ,\ 2) + \lambda(3\ ,\ 2),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Resposta: (C)

10.1. a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (7\ ,\ -1)$

$AB:\ (x\ ,\ y) = (-3\ ,\ 2) + k(7\ ,\ -1),\ k \in \mathbb{R}$

b) $y = mx + b$; $m = -\frac{1}{7}$

$1 = -\frac{1}{7} \times 4 + b \Leftrightarrow b = 1 + \frac{4}{7} \Leftrightarrow b = \frac{11}{7}$

$y = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7}$

10.2. a) $\dot{A}B:\ (x\ ,\ y) = (-3\ ,\ 2) + k(7\ ,\ -1),\ k \in \mathbb{R}_0^+$

$[AB]:\ (x\ ,\ y) = (-3\ ,\ 2) + k(7\ ,\ -1),\ k \in [0\ ,\ 1]$

b) $\dot{A}B:\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7} \wedge x \geq -3$

$[AB]:\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7} \wedge -3 \leq x \leq 4$

11.1. a) Por exemplo: $R_1(-1\ ,\ 3)$, $R_2(1\ ,\ 8)$, $S_1(0\ ,\ 3)$, $S_2(-4\ ,\ 0)$, $T_1(0\ ,\ 1)$ e $T_2(1\ ,\ 5)$

b) $(0\ ,\ y) = (-1\ ,\ 3) + k(2\ ,\ 5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -1 + 2k \\ y = 3 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ y = 3 + \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{11}{2}$$

$r:\ y = \frac{11}{2}$, $s:\ y = 3$ e $t:\ y = 1$

c) $\vec{r}(2\ ,\ 5)$

$3x - 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow 4y = 3x + 12 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 3$

$\vec{s}(4\ ,\ 3)$; $\vec{t}(1\ ,\ 4)$

11.2. $\vec{t}(1\ ,\ 4)$ e $m = 4$

$y = 4x$

11.3. $\vec{r}(2\ ,\ 5)$; $s(4\ ,\ 3)$ e $\frac{2}{4} \neq \frac{5}{3}$

r e s são retas do mesmo plano e não são paralelas.

Logo, r e s são concorrentes.

12. $kx - y = 4 \Leftrightarrow y = kx - 4$; $y = 2x + p$

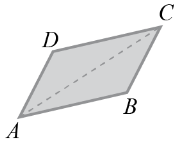
12.1. $k \neq 2 \wedge p \in \mathbb{R}$

12.2. $k = 2 \wedge p \neq -4$

12.3. $k = 2 \wedge p = -4$

13. $A(-2\ ,-1)$ e $D(3\ ,1)$

$\overrightarrow{AC} = (9\ ,\ 1)$



$C = A + \overrightarrow{AC} =$

$= (-2\ ,\ -1) + (9\ ,\ 1) =$

$= (7\ ,\ 0)$

$C(7\ ,0)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = D - A = (5\ ,\ 2)\ ;\ m = \frac{2}{5}$

$BC:\ y = mx + b$

$0 = \frac{2}{5} \times 7 + b \Leftrightarrow b = -\frac{14}{5}$

$BC:\ y = \frac{2}{5}x - \frac{14}{5}$

14. $h:\ \begin{cases} \frac{1}{3}x = t \\ y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

14.1. $\left(3\ ,\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(6\ ,\ 1)$

$\vec{t}\,(6\ ,\ 1)$ é um vetor diretor da reta t

$i:\ 2x + y - 3 = 0$

Se $y = 1$, então $2x + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$A(1\ ,1)$

$r:\ (x\ ,\ y) = (1\ ,\ 1) + k(6\ ,\ 1),\ k \in \mathbb{R}$

14.2. $h:\ \begin{cases} \frac{x}{3} = t \\ 2y = 3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = t \\ 2y - 3 = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

$h:\ \frac{x}{3} = 2y - 3$

O ponto de coordenadas $(p^2\ ,\ p)$ pertence à reta h se e só se

$\frac{p^2}{3} = 2p - 3 \Leftrightarrow p^2 = 6p - 9 \Leftrightarrow p^2 - 6p + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p-3)^2 = 0 \Leftrightarrow p = 3$

14.3. $A(3\ ,0)$

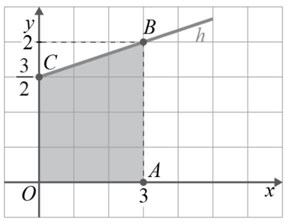
$h:\ \frac{x}{3} = 2y - 3 \Leftrightarrow x = 6y - 9 \Leftrightarrow 6y = x + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{9}{6} \Leftrightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

Se $x = 0$: $y = \frac{3}{2}$

Se $x = 3$: $y = \frac{3}{6} + \frac{3}{2} = 2$

$C\left(0\ ,\ \frac{3}{2}\right)$ e $B(3\ ,2)$



$[OABC]$ é um trapézio retângulo

$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{OA} =$

$= \frac{\frac{3}{2} + 2}{2} \times 3 = \frac{\frac{7}{2}}{2} \times 3 = \frac{7}{4} \times 3 = \frac{21}{4}$

A área do quadrilátero $[OABC]$ é $\frac{21}{4}$ u. a.

15.1. a) $A(0\ ,2)$

$h:\ (x\ ,\ y) = (1\ ,\ 1) + k(1\ ,\ -1),\ k \in \mathbb{R}$

$(0\ ,\ 2) = (1\ ,\ 1) + k(1\ ,\ -1) \Leftrightarrow 0 = 1 + k \wedge 2 = 1 - k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -1 \wedge k = -1 \Leftrightarrow k = -1$

Proposição verdadeira

b) $A(0\ ,2)$

$r:\ 3x - y = 1$

$3 \times 0 - 2 = 1 \Leftrightarrow -2 = 1$

Proposição falsa

c) $B(-1\ ,-4)$

$s:\ \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 - 9\lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$

$-1 = 2 - 3\lambda \wedge -4 = 1 - 9\lambda \Leftrightarrow 3\lambda = 3 \wedge 9\lambda = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \wedge \lambda = \frac{5}{9}$

Proposição falsa

d) $C(1\ ,2)$

$t:\ \frac{-x-1}{2} = \frac{y+5}{2}$

$\frac{-1-1}{2} = \frac{2+5}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{7}{2}$

Proposição falsa

15.2. $s:\ \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 - 9\lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ s: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-9}$

$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{x-2}{-3} = \frac{y-}{-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{2}{3} = \frac{y-1}{-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x-2}{-3} = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

Os pontos são $(0\ ,\ -5)$ e $\left(\frac{5}{3}\ ,\ 0\right)$.

15.3. $\frac{-x-1}{2} = \frac{y+5}{2} \wedge y = \frac{1}{2}$

$\frac{-x-1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 5}{2} \Leftrightarrow -x - 1 = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{13}{2}$

15.4. • $r:\ 3x - y = 1 \Leftrightarrow y = 3x + 1\ ;\ m_r = 3$

• $\vec{s}(-3\ ,\ -9)\ ;\ m_s = \frac{-9}{-3} = 3$

• $t:\ \frac{-x-1}{2} = \frac{y+5}{2} \Leftrightarrow y + 5 = -x - 1 \Leftrightarrow y = -x - 6$

$m_t = -1$

• $\vec{h}(1\ ,\ -1)\ ;\ m_h = -1$

r é paralela a s e t é paralela a h.

15.5. A reta s tem declive 3.

Por exemplo: $y = 3x + b$

Avaliação global

1. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$

$C(1\ ,-3)$ e $r = \sqrt{5}$

Resposta: (A)

2. $a^2 = 16$, $b^2 = 25$, tal que $b > a$

$b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow 25 = 16 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 9 \overset{c>0}{\Leftrightarrow} c = 3$

$F_1(0\ ,\ -3)$ e $F_2(0\ ,\ 3)$

Resposta: (D)

3. $1 \le x^2 + y^2 \le 4 \wedge y \ge x \wedge y \ge 0$

Resposta: (D)

4. $\vec{r}(1\ ,\ a-3)$, é um vetor diretor de *r*.

$\vec{s}(2\ ,\ 1)$ é um vetor diretor de *s*.

$\vec{r}$ e $\vec{s}$ são vetores colineares.

$\frac{1}{2} = \frac{a-3}{1} \Leftrightarrow a - 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 3 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{7}{2}$

Resposta: (C)

5. $A(1\ ,4)$, $B(-3\ ,0)$, $I(1\ ,-1)$

$\overrightarrow{AI} = I - A = (0\ ,\ -5)$

$\overrightarrow{BI} = I - B = (4\ ,\ -1)$

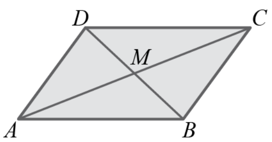
$C = I + \overrightarrow{AI} = (1\ ,\ -1) + (0\ ,\ -5) = (1\ ,\ -6)$

$D = I + \overrightarrow{BI} = (1\ ,\ -1) + (4\ ,\ -1) = (5\ ,\ -2)$

Resposta: (B)

Pág. 237

6. Seja [*ABCD*] um trapézio e *M* o ponto médio da diagonal [*AC*].



$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} =$

$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MC} =$ $\quad | \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} =$ $\quad | \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$

$= \overrightarrow{MD}$

Se $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, então $\overline{BM} = \overline{MD}$.

Portanto, se *M* é o ponto médio de [*AC*] também é o ponto médio de [*BD*], ou seja, as diagonais do paralelogramo bissetam-se.

7.1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} =$

$= \left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD}\right) + \left(\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{QC}\right) =$ $\quad | \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PD}$

$= 2\overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{DQ} =$ $\quad | \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC}$

$= 2\left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}\right) =$

$= 2\overrightarrow{PQ}$

7.2. **a)** $A(9\ ,0)$, $P(6\ ,4)$ e $Q(11\ ,14)$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (-3\ ,\ 4)$

$D = P + \overrightarrow{AP} = (6\ ,\ 4) + (-3\ ,\ 4) = (3\ ,\ 8)$

$D\ (3\ ,8)$

$\overrightarrow{DQ} = Q - D = (8\ ,\ 6)$

$C = Q + \overrightarrow{DQ} = (11\ ,\ 14) + (8\ ,\ 6) = (19\ ,\ 20)$

$C\ (19\ ,20)$

b) $\overrightarrow{DC} = C - D = (16\ ,\ 12)$

$\left\|\overrightarrow{DC}\right\| = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20$

c) Se [*ABCD*] é um trapézio, então as bases [*AB*] e [*CD*] são paralelas. Logo $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são vetores colineares, pelo que $\exists k \in \mathbb{R}:\ \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

$\overline{DC} = 20$

$\overline{AD} = \sqrt{(9-3)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = 10$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{AD}$$

$$250 = \frac{\overline{AB} + 20}{2} \times 10 \Leftrightarrow \overline{AB} + 20 = 50$$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 30$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = k\left\|\overrightarrow{DC}\right\| \Leftrightarrow$ $\quad | \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ têm o mesmo sentido

$\Leftrightarrow 30 = k \times 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

d) $B = A + \overrightarrow{AB} = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} = (9\ ,\ 0) + \frac{3}{2}(16\ ,\ 12) =$

$= (9\ ,\ 0) + (24\ ,\ 18) = (33\ ,\ 18)$

$B(33\ ,\ 18)$

8. $r:\ \begin{cases} x - 5k = 13 \\ y - 7 = 12k \end{cases},\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 + 5k \\ y = 7 + 12k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$

8.1. $s: \frac{x-13}{5} = \frac{y-7}{12} \Leftrightarrow 12x - 156 = 5y - 35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x - 5y - 121 = 0$

$$\begin{cases} 12x - 5y - 121 = 0 \\ 5x + 12y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\left(-\frac{12}{5}y - 4\right) - 5y - 121 = 0 \\ x = -\frac{12}{5}y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{144}{5}y - 48 - 5y - 121 = 0 \\ x = -\frac{12}{5}y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{169}{5}y = 169 \\ x = -\frac{12}{5}y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = 12 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = 8 \end{cases}$$

As retas *r* e *s* intersetam-se no ponto (8 , –5).

8.2. $\frac{x-1}{-3} = \frac{-y+3}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-2}$

$t:\ (x\ ,\ y) = (8\ ,\ -5) + k(-3\ ,\ -2),\ k \in \mathbb{R}$

9. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) =$

$= 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 3\overrightarrow{AC}$

Como $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$, os vetores $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares.

Logo, os pontos *A*, *C* e *F* também são colineares.

Pág. 238

10. $A(2\ ,-1)$, $B(5\ ,3)$ e $C(-2\ ,0)$

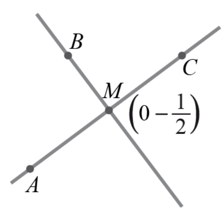
10.1. $\overrightarrow{BC} = C - B = (-7\ ,\ -3)$

$(x\ ,\ y) = (2\ ,\ -1) + k(-7\ ,\ -3),\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 7k \\ y = -1 - 3k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$

10.2. $M\left(\frac{2-2}{2}\ ,\ \frac{-1+0}{2}\right)$

$M\left(0\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ e $B(5\ ,3)$



$\overrightarrow{MB} = B - M = \left(5\ ,\ \frac{7}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}(10\ ,\ 7)$

$m:\ (x\ ,\ y) = (5\ ,\ 3) + k\left(5\ ,\ \frac{7}{2}\right),\ k \in \mathbb{R}$

10.3. $A(2\ ,-1)$ e $y = x + 1$

$(x\ ,\ y) = (1\ ,\ 3) + k(0\ ,\ 1),\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + k \end{cases},\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 1$

$\begin{cases} y = x + 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x\ ,\ y) = (1\ ,\ 2)$

$D(1\ ,\ 2)$; $m = \frac{2+1}{1-2} = -3$

$y = mx + b$

$2 = -3 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 5$

$y = -3x + 5$

11. $r:\ \begin{cases} x = k \\ y = 3k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$

$\vec{r}(1\ ,\ 3)$ é um vetor diretor da reta r

$s:\ (2m-1)x + (m-3)y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (m-3)y = -(2m-1)x + 1$

Se $m = 3$, as retas r e s não são paralelas (s é uma reta vertical).

Se $m \neq 3$:

$y = \frac{-(2m-1)}{m-3}x + \frac{1}{m-3}$

$\vec{s}(m-3\ ,\ -2m+1)$ é um vetor diretor de s.

r e s são paralelas se:

$\frac{m-3}{1} = \frac{-2m+1}{3} \Leftrightarrow 3m - 9 = -2m + 1 \Leftrightarrow 5m = 10 \Leftrightarrow m = 2$

12. $P\left(1\ ,\ \frac{3}{2}\right)$ e $B(0\ ,-1)$

12.1. $r = \overline{PB} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{3}{2}+1\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

12.2. $(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} - \frac{29}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y - 5 = 0$

12.3. $\begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 + \frac{9}{4} = \frac{29}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 = \frac{20}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 1 = \pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 - \sqrt{5} \vee x = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$

Os pontos são $A\left(1-\sqrt{5}\ ,\ 0\right)$ e $C\left(1+\sqrt{5}\ ,\ 0\right)$.

12.4. $\begin{cases} x = 0 \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \vee y = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$

As coordenadas do ponto D são $D\ (0\ ,\ 4)$.

12.5. $EF:\ x = k$

O ponto $G\left(k\ ,\ \frac{3}{2}\right)$ pertence à circunferência.

Sendo $G = P + \overrightarrow{PG}$:

$\overrightarrow{PG} = (r\ ,\ 0) = \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\ ,\ 0\right)$ porque $PG\ //\ Ox$.

$G = \left(1\ ,\ \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\ ,\ 0\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{29}}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

Portanto, $E\left(1 + \frac{\sqrt{29}}{2}\ ,\ 0\right)$ e $F\left(1 + \frac{\sqrt{29}}{2}\ ,\ 4\right)$.

12.6. $\left(x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 \le 0 \wedge y \le 0\right) \vee$

$\vee \left(x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 \ge 0 \wedge 1 \le x \le \frac{\sqrt{29}}{4} \wedge \frac{3}{2} \le y \le 4\right)$

12.7. $A_{[ADC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{OD}}{2}$

$\overline{AC} = \left|1 + \sqrt{5} - \left(1 - \sqrt{5}\right)\right| = \left|2\sqrt{5}\right| = 2\sqrt{5}$; $\overline{OD} = 4$

$A_{[ADC]} = \frac{2\sqrt{5} \times 4}{2} = 4\sqrt{5}$

A área do triângulo $[ADC]$ é $4\sqrt{5}$ u. a.

13. $r:\ x + 2y - 5 = 0$; $s:\ \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$

13.1. $s:\ \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \lambda \\ \frac{y-5}{-1} = \lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$

$s:\ \frac{y-5}{-1} = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow y - 5 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

$s:\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

13.2. $r:\ x + 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow 2y = -x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$\vec{r}(2\ ,\ -1)$ é um vetor diretor da reta r ; $(1\ ,\ 2) \in r$

$r:\ (x\ ,\ y) = (1\ ,\ 2) + k(2\ ,\ -1),\ k \in \mathbb{R}$

13.3. Declive de r : $m_r = -\frac{1}{2}$

Declive de s : $m_s = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

As retas r e s são estritamente paralelas (têm o mesmo declive e ordenadas na origem diferentes).

Logo, o quadrilátero [$PQRS$] tem dois lados paralelos porque [PQ] está contido em r e [SR] está contido na reta s.
Assim, [$PQRS$] é um trapézio de bases [PQ] e [SR].

13.4. Pontos P e Q

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} ; \ P\left(0 \ , \ \frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=5 \end{cases} ; \ Q(5 \ , \ 0)$$

Pontos S e R

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{9}{2} \end{cases} ; \ S\left(0 \ , \ \frac{9}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=9 \end{cases} ; \ R(9 \ , \ 0)$$

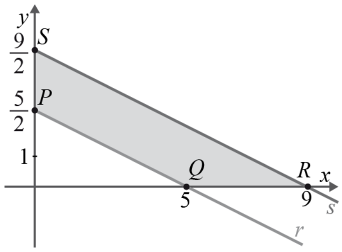
$$A_{[PQRS]} = A_{[ORS]} - A_{[OQP]} =$$

$$= \frac{\overline{OR}\times\overline{OS}}{2} - \frac{\overline{OQ}\times\overline{OP}}{2} =$$

$$= \frac{9\times\frac{9}{2}}{2} - \frac{5\times\frac{5}{2}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{81}{2}}{2} - \frac{\frac{25}{2}}{2} =$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{25}{4} = \frac{56}{4} = 14$$



A área do quadrilátero [$PQRS$] é 14 u. a.

13.5. $A(1 \ , 2)$ e $\overrightarrow{OA}(1 \ , \ 2)$

Declive da reta $t: m_t = \frac{2}{1} = 2$

A reta r interseta Ox em $Q(5 \ , 0)$.

$$y = mx + b$$

$$0 = 2\times5 + b \Leftrightarrow b = -10$$

$$y = 2x - 10$$

13.6. $r: \ x + 2y - 5 = 0$ e $A(1 \ , 2)$

$1 + 2\times2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 5 - 5 = 0$ (verdadeiro)

$A \in r$

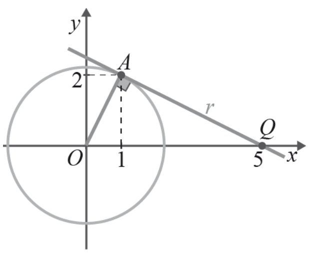
13.7. $x^2 + y^2 = 5$

$A(1 \ , 2)$ e $Q(5 \ , 0)$

$1^2 + 2^2 = 5$ (verdadeiro)

O ponto A pertence à circunferência e à reta r

$\overline{OA} = \sqrt{5}$ e $\overline{OQ} = 5$



$$\overline{AQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (0-2)^2} =$$

$$= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$\overline{AQ}^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 = 20 \ ; \ \overline{OA}^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5 \ ; \ \overline{OQ}^2 = 5^2 = 25$$

$$\overline{OQ}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{OA}^2$$

Logo, o triângulo [AOQ] é retângulo em A. Assim, $[OA] \perp AQ$. Portanto, $A \in r$ e $[OA] \perp r$, pelo que a reta r é perpendicular à circunferência no ponto A.

14. Seja [$ABCD$] um quadrilátero em que as diagonais [AC] e [BD] se bissetam e seja M o ponto de interseção das diagonais.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \ \text{ e } \ \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC}$$

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, o quadrilátero [$ABCD$] é um paralelogramo.

15.1. Se [AB] é um diâmetro da circunferência, então o triângulo [AOB] é retângulo em O.

$$A_{[ACB]} = \frac{\overline{AO}\times\overline{OB}}{2} \ \text{ donde } \ \frac{\overline{AO}\times\overline{OB}}{2} = 10 \ \ (1)$$

Sabemos que A pertence à reta de equação $y = -\frac{1}{2}x$.

$A\left(-a \ , \ \frac{1}{2}a\right)$, com $a > 0$

A ordenada de B é o dobro da ordenada de A: $2\times\frac{1}{2}a = a$

$B(x \ , \ a)$

Como B pertence à reta de equação $y = 2x$.

$$a = 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Logo, $B\left(\frac{9}{2} \ , \ a\right)$.

Temos, portanto:

$A\left(-a \ , \ \frac{1}{2}a\right)$ e $B\left(\frac{9}{2} \ , \ a\right)$, com $a > 0$

$$\overline{AD} = \sqrt{(-a)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}a \ \text{ porque } a > 0$$

$$\overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}a \ \text{ porque } a > 0$$

De (1): $\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}a\times\frac{\sqrt{5}}{2}a}{2} = 10 \Leftrightarrow \frac{5}{4}a^2 = 20 \Leftrightarrow a^2 = 16$

Como $a > 0$, vem $a = 4$.

Logo, $A(-4 \ , \ 2)$ e $B(2 \ , \ 4)$.

15.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (6 \ , \ 2) = 2(3 \ , \ 1)$

$AB: \ (x \ , \ y) = (-4 \ , \ 2) + k(3 \ , \ 1), \ k \in \mathbb{R}$

15.3. Centro: $C\left(\frac{-4+2}{2} \ , \ \frac{2+4}{2}\right)$; $C(-1 \ , \ 3)$

$$r = \overline{AC} = \sqrt{(-4+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Equação da circunferência: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$