Pág. 6

Atividade de diagnóstico

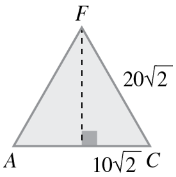
1.1. Por exemplo:

a) *EA* e *FB*

b) *HD* e *AD*

c) *BF* e *HG* **ou** *AC* e *HB*

1.2. **a)** $\overline{AC} = \overline{AF} = \overline{FC} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}$



$h^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2 = \left(20\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2 = 800 - 200 \Leftrightarrow$

$\underset{h>0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{600} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = 10\sqrt{6}$

$A_{[ACF]} = \dfrac{20\sqrt{2} \times 10\sqrt{6}}{2} = 100\sqrt{12} =$

$= 100\sqrt{4 \times 3} = 200\sqrt{3}$

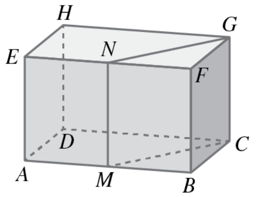
$A_{[ACF]} = 200\sqrt{3}$ cm²

b) $V_{[ABCF]} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{20 \times 20}{2} \times 20 = \dfrac{4000}{3}$

$V_{[ABCF]} = \dfrac{4000}{3}$ cm³

2.1. Por exemplo:

a) *FD* **b)** *HG*



2.2. $V = \left(\dfrac{10+5}{2} \times 5\right) \times 7 = 262{,}5$

$V = 262{,}5$ cm³

Pág. 7

3.1. Por exemplo:

a) *EFG* **b)** *ADF*

3.2. Os sólidos [*ACDH*] e [*STRH*] são semelhantes.

A razão de semelhança é $\dfrac{1}{3}$.

$V_{[ABCDH]} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{6 \times 6}{2} \times 6 = 36$

$V_{[STRH]} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times V_{[ABCDH]} = \dfrac{1}{27} \times 36 = \dfrac{4}{3}$

$V_{[ACDSTR]} = 36 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{104}{3}$

$V_{[ACDSTR]} = \dfrac{104}{3}$ cm³

4.1. A reta *EF* é paralela à reta *AB*. Logo, a reta *EF* é paralela ao plano *ABC*.

4.2. As retas *EF* e *FG* do plano *EFG* são paralelas às retas *AB* e *BC*, respetivamente, do plano *ABC*. Então, os planos *ABC* e EFG são paralelos.

4.3. A reta *AB* do plano *ABC* é perpendicular ao plano *BCG*. Logo, o plano *ABC* é perpendicular ao plano *BCG*.

4.4. A reta *AB* é perpendicular às retas *BC* e *BF*. Então, a reta *AB* é perpendicular ao plano *BCF*.

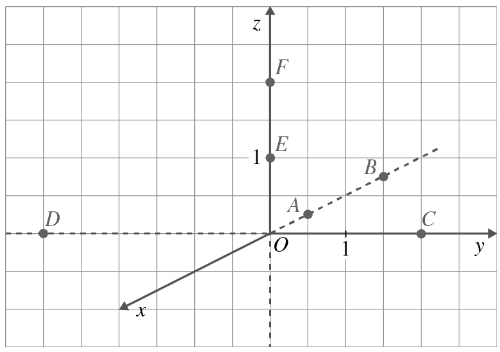
Pág. 8

Atividade inicial 1

2. *O*(0 , 0 , 0)

Pág. 11

1.



2. *A*(2 , 0 , –2), *B*(2 , 2 , –2), *C*(0 , 2 , –2), *D*(0 , 0 , –2), *E*(2 , 0 , 0), *F*(2 , 2 , 0), *G*(0 , 2 , 0) e *O*(0 , 0 , 0)

3. *O*(0 , 0 , 0), *A*(3 , 0 , 0), *B*(3 , 10 , 0), *C*(0 , 10 , 0), *D*(0, 0, 6), *E*(3 , 0 , 6), *F*(3 , 10 , 6) e *G*(0 , 10 , 6)

Pág. 12

4.1. Plano *ABO*: *z* = 0 ; plano *DEF*: *z* = 7 ; plano *BOF*: *y* = 0 ; plano *ACG*: *y* = –5 ; plano *COF*: *x* = 0 ; plano *ABE*: *x* = 5

4.2. *A*(5 , –5 , 0), *B*(5 , 0 , 0), *O*(0 , 0 , 0), *C*(0 , –5 , 0), *D*(5 , –5 , 7), *E*(5 , 0 , 7), *F*(0 , 0 , 7) e *G*(0 , –5 , 7)

Pág. 14

5.1. **a)** *A*(2 , –2 , 0), *B*(2 , 2 , 0), *C*(–2 , 2 , 0), *D*(–2 , –2 , 0), *E*(2 , –2 , 4), *F*(2 , 2 , 4), *G*(–2 , 2 , 4) e *H*(–2 , –2 , 4)

b) Plano *ABF*: *x* = 2 ; plano *DCG*: *x* = –2 ; plano *BCG*: *y* = 2 ; plano *ADH*: *y* = –2 ; plano *ABC*: *z* = 0 e plano *EFG*: *z* = 4

c) $AB:\ x = 2 \wedge z = 0$; $BF:\ x = 2 \wedge y = 2$

$AE:\ x = 2 \wedge y = -2$; $EF:\ x = 2 \wedge z = 4$

$DC:\ x = -2 \wedge z = 0$; $CG:\ x = -2 \wedge y = 2$

$DH:\ x = -2 \wedge y = -2$; $HG:\ x = -2 \wedge z = 4$

$BC:\ y = 2 \wedge z = 0$; $FG:\ y = 2 \wedge z = 4$

$EH:\ y = -2 \wedge z = 4$; $AD:\ y = -2 \wedge z = 0$

d) $[EF]:\ x = 2 \wedge z = 4 \wedge -2 \leq y \leq 2$

$[CG]:\ x = -2 \wedge y = 2 \wedge 0 \leq z \leq 4$

$[AD]:\ y = -2 \wedge z = 0 \wedge -2 \leq x \leq 2$

$\dot{H}G:\ x = -2 \wedge z = 4 \wedge y \geq -2$

$\dot{B}C:\ y = 2 \wedge z = 0 \wedge x \leq 2$

$\dot{H}D:\ x = -2 \wedge y = -2 \wedge z \leq 4$

5.2. **a)** (2 , 0 , 4)

b) *C* (–2 , 2 , 0)

c) (0 , 2 , 4)

Pág. 15

6. *A*(1 , 2 , 3) ; *B*(–2 , 2 , 2) e *C*(2 , 2 , 0)

6.1. $\overline{AB} = \sqrt{(1+2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+0+1} = \sqrt{10}$

$\overline{AC} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+0+4} =$

$= \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

6.2. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 + 10 = 20$

$\overline{BC}^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$. Pelo recíproco do Teorema de Pitágoras, o triângulo [*ABC*] é retângulo em *A*.

Pág. 16

7.1. $D(3 , 0 , 0)$; $A(3 , 2 , 0)$ e $P(x , y , z)$

$d(D, P) = d(A, P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + z^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 = y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y = 4 \Leftrightarrow y - 1 = 0$

7.2. $A(3 , 2 , 0)$; $B(0 , 2 , 0)$ e $P(x , y , z)$

$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x + 9 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$

7.3. $F(3 , 2 , 4)$; $A(3 , 2 , 0)$ e $P(x , y , z)$

$d(F, P) = d(A, P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 + 8z + 16 = z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8z + 16 = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0$

7.4. $O(0 , 0 , 0)$; $F(3 , 2 , 4)$ e $P(x , y , z)$

$d(O, P) = d(F, P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x + 4y + 8z - 29 = 0$

7.5. $E(3 , 0 , 4)$; $G(0 , 2 , 4)$ e $P(x , y , z)$

$d(E, P) = d(G, P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 4y - 5 = 0$

7.6. $B(0 , 2 , 0)$, $E(3 , 0 , 4)$, $P(x , y, z)$

$d(B, P) = d(E, P)$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-3)^2 + y^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + z^2 - 8z + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 4y + 8z - 21 = 0$

Pág. 17

8.1. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$ define a superfície esférica de centro (3 , 1 , 1) e raio $\sqrt{3}$

8.2. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \le 25$ define a esfera de centro (–1 , –2 , 0) e raio 5

9. $A(1 , 2 , -3)$ e $B(-3 , 6 , -1)$

9.1. Centro: $A(1 , 2 , -3)$

Raio: $r = \overline{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (2-6)^2 + (-3+1)^2} =$

$= \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$

Equação da superfície esférica:

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 36$

9.2. Centro: $B(-3 , 6 , -1)$

Raio: $\frac{1}{2} d(A , B) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

Inequação da esfera:

$(x+3)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 \le 9$

Pág. 18

10.1. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 30 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + \left(y^2 - 2y + 1\right) - 1 + \left(z^2 + 2z + 1\right) -$

$-1 - 30 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 36$

Superfície esférica de centro $(2 , 1 , -1)$ e raio 6

10.2. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 - 9 \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-3)^2 \le 9$

Esfera de centro $(0 , 0 , 3)$ e raio 3

11. $x^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 \le 100$

11.1. Centro $(0 , 8 , -1)$ e raio 10

11.2. **a)** O plano de equação $y = 8$ passa no centro de esfera.

Logo, a interseção desse plano com a esfera é um círculo de centro $C(0 , 8 , -1)$ e raio igual ao da esfera, ou seja, é o círculo de centro $C(0 , 8 , -1)$ e raio igual a 10 contido no plano de equação $y = 8$.

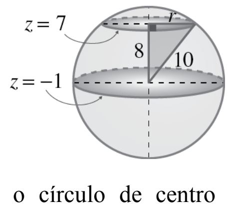
b) $z = -1$ é a equação do plano que passa no centro da esfera e é paralelo ao plano de equação $z = 7$.

$|7 - (-1)| = 8$

$r^2 + 8^2 = 10^2$

$r^2 = 36$

$r = 6$



A secção produzida na esfera é o círculo de centro $(0 , 8 , 7)$ e raio 6 contido no plano de equação $z = 7$.

Pág. 19

12. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \le 5$

12.1. Raio: $\sqrt{5}$; centro: $(1 , -2 , 0)$

12.2. Os planos paralelos ao plano *yOz* são perpendiculares ao eixo *Ox*.

Os planos tangentes à esfera perpendiculares ao eixo *Ox* são os planos definidos por $x = 1 - r$ e $x = 1 + r$. Como $r = \sqrt{5}$, então $x = 1 - \sqrt{5}$ e $x = 1 + \sqrt{5}$.

12.3. $x = 0 \wedge (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \le 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge (0-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \le 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge (y+2)^2 + z^2 \le 4$

Trata-se do círculo de centro no ponto $(0 , -2 , 0)$ e raio 2, contido no plano de equação $x = 0$.

13. $C(1,1,1)$

13.1. $r = \overline{OC} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$C : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$

13.2. Os planos paralelos ao plano xOy são perpendiculares ao eixo Oz, ou seja, são da forma $z = k$.

Como o plano de equação $z = 1$ passa no centro, os planos pedidos são $z = 1 - r$ e $z = 1 + r$, ou seja, $z = 1 - \sqrt{3}$ e $z = 1 + \sqrt{3}$.

13.3. Seja $P(a , a , a)$ um ponto da superfície esférica.

$(a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-1)^2 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(a-1)^2 = 3 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - 1 = 1 \vee a - 1 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 2 \vee a = 0$

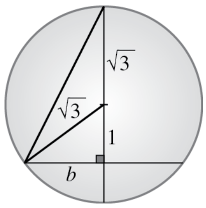
Logo, o ponto $P(2 , 2 , 2)$ também pertence à superfície esférica.

13.4. $b^2 + 1^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 = 3 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = \sqrt{2}$

A base da pirâmide é um quadrado cuja diagonal mede $2b = 2\sqrt{2}$.



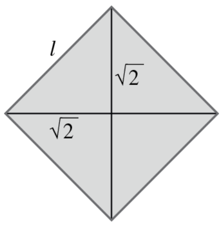
$A_{\text{base}} = l^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 =$

$= 2 + 2 =$

$= 4$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 4 \times \left(1 + \sqrt{3}\right)$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{4}{3}\left(1 + \sqrt{3}\right)$ u. v.



Pág. 22

Atividades complementares

14.1. Seja a o comprimento da aresta do cubo.

$a^3 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\sqrt{4 \times 2}} = \sqrt[6]{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \sqrt[6]{2^3} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$

14.2. $O(0 , 0 , 0)$; $A\left(\sqrt{2} , 0 , 0\right)$; $B\left(\sqrt{2} , \sqrt{2} , 0\right)$;

$C\left(0 , \sqrt{2} , 0\right)$; $D\left(0 , 0 , \sqrt{2}\right)$; $E\left(\sqrt{2} , 0 , \sqrt{2}\right)$;

$F\left(\sqrt{2} , \sqrt{2} , \sqrt{2}\right)$ e $G\left(0 , \sqrt{2} , \sqrt{2}\right)$

15. $A(3 , 0 , -3)$; $B(3 , 3 , -3)$; $C(0 , 3 , -3)$; $D(0 , 0 , -3)$; $E(3 , 0 , 0)$; $G(0 , 3 , 0)$ e $O(0 , 0 , 0)$

16. Seja a o comprimento da aresta do cubo.

$a^3 = 8 \Leftrightarrow a = 2$

ABF: $x = 1$; DCG: $x = -1$; BCG: $y = 1$; ADH: $y = -1$; ABC: $z = -1$ e EFG: $z = 1$

17.1. $B(1 , 2 , -1)$; $C(0 , 2 , -1)$; $D(0 , -1 , 0)$; $E(1 , -1 , 0)$; $F(1 , 0 , 0)$; $G(0 , 2 , 0)$; $H(-2 , 2 , 0)$; $I(0 , -1 , 1)$; $J(0 , 0 , 1)$; $K(-1 , 0 , 1)$; $L(-1 , 1 , 1)$; $M(-2 , 1 , 1)$ e $N(-2 , -1 , 1)$

17.2. **a)** $AFE : x = 1$ **b)** $BCG : y = 2$

c) $ABC : z = -1$ **d)** $NMH : x = -2$

e) $DIN : y = -1$ **d)** $JKL : z = 1$

Pág. 23

18. Seja a o comprimento da aresta da base e h a altura do prisma.

$a^2 = 16 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 4$

$4a \times h = 96 \Leftrightarrow 4 \times 4 \times h = 96 \Leftrightarrow h = 6$

18.1. $A(4 , -4 , 0)$; $B(4 , 0 , 0)$; $O(0 , 0 , 0)$; $C(0 , -4 , 0)$ $D(4 , -4 , 6)$; $E(4 , 0 , 6)$; $F(0 , 0 , 6)$ e $G(0 , -4 , 6)$

18.2. ABE: $x = 4$; COF: $x = 0$; BOF: $y = 0$; ACG: $y = -4$; ABO: $z = 0$ e DEF: $z = 6$

18.3. $[AB]: x = 4 \wedge z = 0 \wedge -4 \leq y \leq 0$

$[CO]: x = 0 \wedge z = 0 \wedge -4 \leq y \leq 0$

$[OB]: y = 0 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq x \leq 4$

$[CA]: y = -4 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq x \leq 4$

$[DE]: x = 4 \wedge z = 6 \wedge -4 \leq y \leq 0$

$[GF]: x = 0 \wedge z = 6 \wedge -4 \leq y \leq 0$

$[EF]: y = 0 \wedge z = 6 \wedge 0 \leq x \leq 4$

$[GD]: y = -4 \wedge z = 6 \wedge 0 \leq x \leq 4$

$[OF]: x = 0 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq z \leq 6$

$[CG]: x = 0 \wedge y = -4 \wedge 0 \leq z \leq 6$

$[AD]: x = 4 \wedge y = -4 \wedge 0 \leq z \leq 6$

$[BE]: x = 4 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq z \leq 6$

19. $A(-3 , -1 , 2)$; $B(1 , -1 , 0)$ e $C(1 , 3 , -2)$

19.1. $\overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1+1)^2 + (2-1)^2} =$

$= \sqrt{16 + 0 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

$\overline{AC} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-3)^2 + (2+2)^2} =$

$= \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{16 \times 3} =$

$= 4\sqrt{3}$

$\overline{BC} = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-3)^2 + (0+2)^2} =$

$= \sqrt{(0 + 16 + 4)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{AB} = \overline{BC} = 2\sqrt{5}$ e $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$

O triângulo $[ABC]$ é isósceles porque $\overline{AB} = \overline{BC}$.

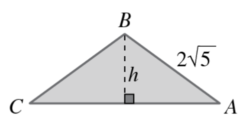
19.2. $h^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = 20 - 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = \sqrt{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = 2\sqrt{2}$

$A_{[ABC]} = \frac{4\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2}$

$A_{[ABC]} = 4\sqrt{6}$ u. a.



20. $B(2 ; -1{,}5 ; 0)$; $C(2 , 0 , 0)$; $E(0 ; -1{,}5 ; 6)$ e $G(2 , 0 , 6)$

20.1. **a)** $\overline{EC} = \sqrt{(2-0)^2 + (0+1{,}5)^2 + (0-6)^2} =$

$= \sqrt{4 + 2{,}25 + 36} = \sqrt{42{,}25} =$

$= 6{,}5$

b) $\overline{BE} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1{,}5+1{,}5)^2 + 6^2} =$

$= \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

c) $\overline{BG} = \sqrt{(2-2)^2 + (-1{,}5-0)^2 + (0-6)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 36} = \sqrt{\frac{9}{4} + 36} =$

$= \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{\sqrt{9 \times 17}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

20.2. $\overline{BE} = 2\sqrt{10}$ e $\overline{BG} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

O ponto B não pertence ao plano mediador de [GE] porque $\overline{BG} \neq \overline{BE}$.

20.3. $G(2\,,0\,,6)\,;\,E(0\,;-1{,}5\,;6)$ e $P(x\,,y\,,z)$

$d(G\,,P) = d(E\,,P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-6)^2 = x^2 + (y+1{,}5) + (z-6)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 3y + 2{,}25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x - 3y + 4 - 2{,}25 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x + 3y - 1{,}75 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 + 12y - 7 = 0$

21. $A\left(1\,,\sqrt{3}\,,0\right)$; $B(-2\,,0\,,0)$; $C\left(1\,,-\sqrt{3}\,,0\right)$ e $D\left(0\,,0\,,2\sqrt{2}\right)$

21.1. $\overline{AB} = \sqrt{(1+2)^2 + \left(\sqrt{3}-0\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\overline{AC} = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$

$\overline{AD} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\sqrt{3}-0\right)^2 + \left(0-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+3+8} = 2\sqrt{3}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + \left(0+\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$\overline{BD} = \sqrt{(-2-0)^2 + 0^2 + \left(0-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$

$\overline{CD} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(-\sqrt{3}-0\right)^2 + \left(0-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+3+8} = 2\sqrt{3}$

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 2\sqrt{3}$

21.2. $\overline{AC} = \overline{AD}$ e $\overline{BC} = \overline{BD}$. Logo, A e B pertencem ao plano mediador de [CD]. Assim, [AB] está contido no plano mediador de [CD].

22. $A(4\,,0\,,0)\,;\,B(2\,,1\,,3)$ e $C(0\,,2\,,0)$

22.1. $r = \overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

Centro: $B(2\,,1\,,3)$

Equação da superfície esférica $\mathcal{E}$:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 14$

22.2. $A(4\,,0\,,0)\,;\,C(0\,,2\,,0)$ e $P(x\,,y\,,z)$

$d(A\,,P) = d(C\,,P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8x + 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$

$\alpha:\ 2x - y - 3 = 0$

22.3. $\alpha:\ 2x - y - 3 = 0\,;\,B(2\,,1\,,3)$

$2 \times 2 - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (proposição verdadeira)

Logo, $B \in \alpha$.

23.1. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + \left(y^2 + 10y + 25\right) - 25 +$

$+\left(z^2 - 4z + 4\right) - 4 + 13 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (4+5)^2 + (z-2)^2 = 25$

Centro: $C(3\,,-5\,,2)$; raio: 5

23.2. Eixo *Ox*

$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ (x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ (x-3)^2 + 25 + 4 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ (x-3)^2 = -4 \end{cases}$

A superfície esférica não interseta o eixo *Ox*.

Eixo *Oy*

$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ (x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 9 + (y+5)^2 + 4 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ (y+5)^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y + 5 = \sqrt{12} \vee y + 5 = -\sqrt{12} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = -5 + 2\sqrt{3} \vee y = -5 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\,,y\,,z) = \left(0\,,-5+2\sqrt{3}\,,0\right) \vee$

$\vee (x\,,y\,,z) = \left(0\,,-5-2\sqrt{3}\,,0\right)$

Eixo *Oz*

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ (x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 9 + 25 + (z-2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ (z-2)^2 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow$

A superfície esférica não interseta o eixo *Oz*.

23.3. $A(3\,,-1\,,-1)$

$(3-3)^2 + (-1+5)^2 + (-1-2)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 + 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25$. Proposição verdadeira

Logo, $A(3\,,-1\,,-1)$ pertence à superfície esférica.

$\overline{AC} = \sqrt{25} = 5$

$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \leq 25$

Pág. 24

24. $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+4\le 0$

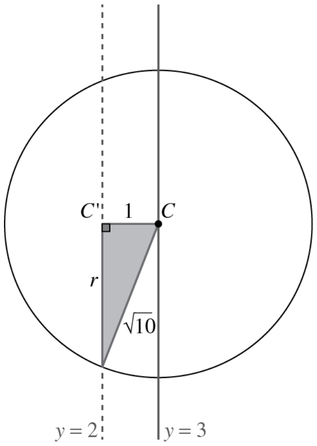
24.1. $\left(x^2-4x+4\right)-4+\left(y^2-6y+9\right)-9+\left(z^2+2z+1\right)-1+4\le 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2\le 10$

Centro: $C(2\,,3\,,-1)$

Raio: $r=\sqrt{10}$

24.2.



O plano de equação $y=3$ passa no centro da esfera.

O plano de equação $y=2$ dista 1 unidade do plano de equação $y=3$.

$r^2+1=\left(\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow r^2=9 \overset{r>0}{\Leftrightarrow} r=3$

A interseção da esfera com o plano de equação $y=2$ é o círculo de centro em $(2\,,2\,,-1)$ e raio 3 e está contido no plano de equação $y=2$.

Outro processo:

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2\le 10 \wedge y=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(2-3)^2+(z+1)^2\le 10 \wedge y=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+1+(z+1)^2\le 10 \wedge y=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(z+1)^2\le 9 \wedge y=2$

Esta condição define o círculo de centro $(2\,,2\,,-1)$ e raio 3 e está contido no plano de equação $y=2$.

24.3. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2\le 10 \wedge z=c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(c+1)^2\le 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2\le 10-(c+1)^2$

$10-(c+1)^2=1 \Leftrightarrow (c+1)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c+1=-3 \vee c+1=3 \Leftrightarrow$

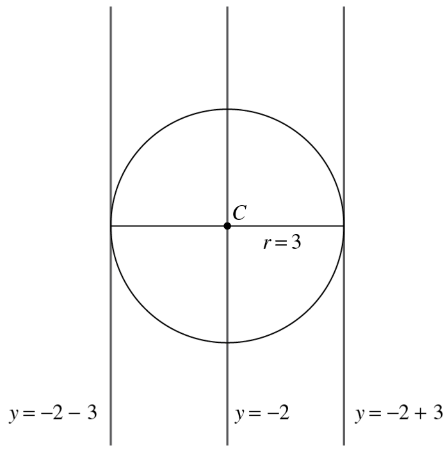
$\Leftrightarrow c=-4 \vee c=2$

25. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$

25.1. Centro: $C(1\,,-2\,,-3)$

Raio: $r=3$

O plano de equação $y=-2$ passa no centro da superfície esférica.



Como a superfície esférica tem raio 3, os planos tangentes a S e perpendiculares a Oy são os planos paralelos ao plano $y=-2$ e que distam deste 3 unidades:

$y=-2+3 \Leftrightarrow y=1$

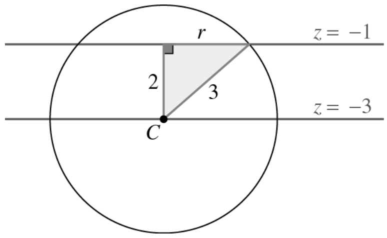
$y=-2-3 \Leftrightarrow y=-5$

Os plano pedidos são definidos por $y=1$ e $y=-5$.

25.2. O plano de equação $x=1$ passa no centro da superfície esférica.

Como $r=3$, os planos de equação $x=a$ intersetam a superfície esférica se $1-3\le a\le 1+3 \Leftrightarrow -2\le a\le 4$

25.3.



$r^2+2^2=3^2 \Leftrightarrow r^2=9-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r=\sqrt{5}$

A interseção de S com o plano $z=-1$ é a circunferência de centro $(1\,,-2\,,-1)$ e raio $\sqrt{5}$ contida no plano de equação $z=-1$.

Outro processo

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9 \wedge z=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(-1+3)^2=9 \wedge z=-1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+4=9 \wedge z=-1$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2+(y+2)^2=5 \wedge z=-1}_{\substack{\text{Circunferência de centro } (1\,,-2\,,-1) \text{ e raio } \sqrt{5} \\ \text{contida no plano } z\,=\,-1}}$

25.4. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9 \wedge y=b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(b+2)^2+(z+3)^2=9 \wedge y=b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(z+3)^2=9-(b+2)^2 \wedge y=b$

$9-(b+2)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2 \Leftrightarrow (b+2)^2=9-8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b+2=-1 \vee b+2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=-3 \vee b=-1$

26. $A(1,-1,2)$ e $B(-2,2,-4)$

26.1. $P(x,y,z)$

$\overline{AP}=\overline{BP}$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=(x+2)^2+(y-2)^2+(z+4)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+2y+1+\cancel{z^2}-4z+4=$

$=\cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}+8z+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x-4x+2y+4y-4z-8z+6-24=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6z+6y-12z-18=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-y+2z+3=0$

26.2. P é equidistante de A e B $\Leftrightarrow$ P pertence ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$

$\alpha:\ x-y+2z+3=0$

$P(k-1,2k,k)$

$P\in\alpha \Leftrightarrow (k-1)-(2k)+2k+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-2$

26.3. a) $x-y+2z+3=0 \wedge (x=1\wedge z=0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-y+2\times 0+3=0 \wedge x=1\wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=4\wedge x=1\wedge z=0$

Ponto $(1,4,0)$

b) $x-y+2z+3=0 \wedge (y=0\wedge z=0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-0+0+3=0\wedge y=0\wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-3\wedge y=0\wedge z=0$

Ponto $(-3,0,0)$

27. $P(2,2,2)$ e $O(0,0,0)$

27.1. $X(x,y,z)$

$\overline{PX}=\overline{OX}$

$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2-4z+4=x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x-4y-4z+12=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y+z=3$

27.2. Ponto A:

$x+y+z=3\wedge y=0\wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3\wedge y=0\wedge z=0$

$A(3,0,0)$

Ponto B:

$x+y+z=3\wedge x=0\wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=3\wedge x=0\wedge z=0$

$B(0,3,0)$

Ponto V:

$x+y+z=3\wedge x=0\wedge y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=3\wedge x=0\wedge y=0$

$V(0,0,3)$

27.3. $\overline{AB}=\sqrt{3^2+3^2+0^2}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{18}$

Área da base: $\left(\sqrt{18}\right)^2=18$

Altura: $\overline{OV}=3$

$V=\dfrac{1}{3}\times 18\times 3=18$

27.4. O diâmetro é igual à distância entre os planos de equações $z=0$ e $z=2$, ou seja, é igual a 2. Logo, o raio é 1.

O centro é o ponto de coordenadas $(0,0,1)$.

$x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$

27.5. Seja A a pirâmide dada de altura igual a 3.

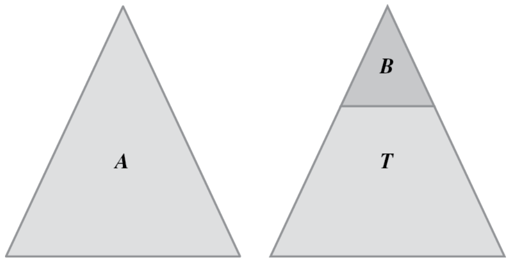
Seja B a pirâmide formada pelos pontos da pirâmide A de cota maior ou igual a k. A altura da pirâmide B é $3-k$.

As duas pirâmides são semelhantes.

A razão de semelhança que transforma B em A é $r=\dfrac{3}{3-k}$.

Seja V_T o volume do tronco da pirâmide.

$V_T=V_A-V_B$



Como $V_B=\dfrac{1}{7}V_T$, então:

$V_B=\dfrac{1}{7}(V_A-V_B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7V_B=V_A-V_B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8V_B=V_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{V_A}{V_B}=8$

Como $\dfrac{V_A}{V_B}=r^3$, $r^3=8 \Leftrightarrow r=2$.

Então, $\dfrac{3}{3-k}=2$.

$3-k=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow k=\dfrac{3}{2}$

Pág. 25

28.1. A abcissa de V é igual a $\dfrac{\overline{OA}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

A ordenada de V é igual a $2\times\overline{AB}=2\times 2=4$.

A cota de V é igual a $\dfrac{\overline{OG}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

Assim, o vértice V tem coordenadas $(1,4,1)$.

28.2. $V_{\text{sólido}}=V_{\text{cubo}}+V_{\text{pirâmide}}=2^3+\dfrac{2^2\times 2}{3}=8+\dfrac{8}{3}=\dfrac{24}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{32}{3}$

Logo, o volume do sólido é $\dfrac{32}{3}$ cm^3.

28.3. $A_{\text{total do sólido}}=5\times A_{[ABED]}+4A_{[BVE]}$

$A_{[ABED]}=2^2=4$

Seja b a altura do triângulo $[BVE]$.

$h^2=2^2+1^2 \overset{h>0}{\Leftrightarrow} h=\sqrt{5}$

$A_{[BVE]}=\dfrac{2\times\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

Daqui resulta que:

$A_{\text{total sólido}}=5\times 4+4\times\sqrt{5}=20+4\sqrt{5}$

Logo, a área total do sólido é $\left(20+4\sqrt{5}\right)$ cm^2.

28.4. O centro da esfera é o centro do cubo.
Centro do cubo: $(1,1,1)$

O raio é metade da aresta, ou seja, é igual a 1.
Uma condição que define a esfera tangente a todas as faces do cubo é $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leq 1$.

28.5. O centro da superfície esférica é o centro do cubo.
Centro do cubo: $(1,1,1)$

O raio é metade da diagonal espacial do cubo.
Seja d a medida de comprimento da diagonal espacial do cubo:

$d^2 = 2^2+2^2+2^2 \overset{d>0}{\Leftrightarrow} d^2 = 12 \Leftrightarrow d = \sqrt{12} \Leftrightarrow d = 2\sqrt{3}$

$r = \frac{d}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Uma equação da superfície esférica é:
$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 3$

28.6. $V_{\text{sólido}} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{V_{\text{sólido}}}{2} = \frac{32}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{32}{6}$

$(2\times a)\times 2 = \frac{32}{6} \Leftrightarrow 4a = \frac{32}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{32}{24} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$

Logo, o plano de equação $y = \frac{4}{3}$ divide o sólido em duas partes com volumes iguais. Assim, $a = \frac{4}{3}$.

28.7. $\overline{GP} = \overline{BP}$; $P(x,y,z)$; $G(0,0,2)$ e $B(2,2,0)$

$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-2)^2} =$

$= \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-0)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-4z+4 = z^2-4z+4+y^2-4y+4+z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4z+4 = -4x-4y+8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x+4y-4z = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y-z = 1$

29. $A(0,3,4)$; $B(4,3,4)$ e $R\left(\sqrt{3}, k+2, 4-k\right)$

29.1. Centro: $A(0,3,4)$

Raio: $r=4$, pois se a esfera é tangente ao plano *xOy*, o raio é igual ao módulo da cota do centro.

$x^2+(y-3)^2+(z-4)^2 \leq 16$

29.2. $B(4,3,4)$

$4^2+(3-3)^2+(4-4)^2 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16$ (verdadeiro)

Logo, o ponto *B* pertence à superfície esférica.

29.3. $A(0,3,4)$ e $B(4,3,4)$

$P(x,y,z)$

a) $\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow$

$x^2+\cancel{(y-3)^2}+\cancel{(z-4)^2} =$

$= (x-4)^2+\cancel{(y-3)^2}+\cancel{(z-4)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} = \cancel{x^2}-8x+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2$

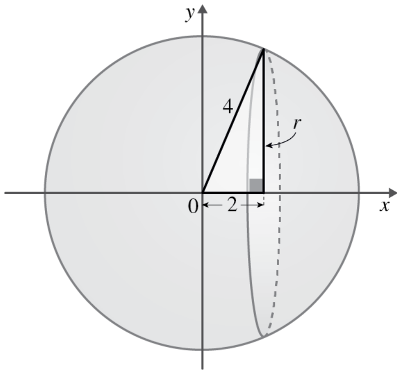
$\alpha:\ x=2$

b) A esfera tem centro em $A(0,3,4)$ e raio 4.

O plano de equação $x=2$ dista duas unidades do centro da esfera, cuja abcissa é $x=0$.

$r^2+2^2 = 4^2 \Leftrightarrow r^2 = 16-4$

Logo, $r = \sqrt{12}$.



Círculo de centro em $(2,3,4)$ e raio $\sqrt{12}$ contido no plano de equação $x=2$:

$x^2+(y-3)^2+(z-4)^2 \leq 16 \wedge x=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^2+(y-3)^2+(z-4)^2 \leq 16 \wedge x=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-3)^2+(z-4)^2 \leq 12 \wedge x=2$

Área = $\pi\times\left(\sqrt{12}\right)^2 = 12\pi$

c) Em $B(4,3,4)$, $x>2$.

$\alpha:\ x=2$

$x^2+(y-3)^2+(z-4)^2 \leq 16 \wedge x \geq 2$

29.4. $R\left(\sqrt{3}, k+2, 4-k\right)$

$x^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = 16$

$\left(\sqrt{3}\right)^2+(k+2-3)^2+(4-k-4)^2 = 16 \Leftrightarrow$

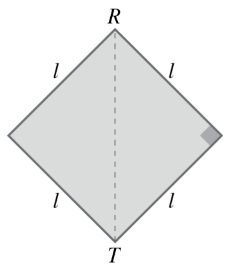
$\Leftrightarrow 3+(k-1)^2+k^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3+k^2-2k+k^2-16 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k^2-2k-12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-2 \vee k=3$

29.5. $R\left(\sqrt{3}, k+2, 4-k\right)$



$T\left(\sqrt{3}, k+2, -4+k\right)$

$A = l^2$

$l^2+l^2 = \overline{RT}^2$

$2l^2 = |4-k+4-k|^2$

$2l^2 = (8-2k)^2$

$2l^2 = 64+4k^2-32k$

$l^2 = 2k^2-16k+32$

Como $l^2 = A$, $A = 2k^2-16k+32$.

30. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+k=0$

$A(-3,6,-4)$ e $B(3,-2,-2)$

30.1. $x^2+y^2+z^2+2z-4y+k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+1\right)-1+\left(y^2-4y+4\right)-4+z^2+k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+z^2 = 5-k$

$5-k = 6^2 \Leftrightarrow k = 5-36 \Leftrightarrow k = -31$

30.2. Para $k=-31$, $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=36$ é uma equação da superfície esférica. Assim, *C* tem coordenadas $(-1,2,0)$.

30.3. A reta definida por $x=-1 \wedge y=2$ passa no centro de *S*. Logo, [*MN*] é um diâmetro de *S*, pelo que $\overline{MN}=12$.

30.4. $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=36$

$A(-3,6,-4)$

$(-3+1)^2+(6-2)^2+(-4)^2=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+16+16=36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36=36$ (verdadeiro)

$B(3,-2,-2)$

$(3+1)^2+(-2-2)^2+(-2)^2=36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16+16+4=36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36=36$ (verdadeiro)

Os pontos *A* e *B* pertencem à superfície esférica *S*.

30.5. $A(-3,6,-4)$; $B(3,-2,-2)$ e $P(x,y,z)$

$d(A,P)=d(B,P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-6)^2+(z+4)^2=$

$=(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2-12y+36+z^2+8z+16=$

$=x^2-6x+9+y^2+4y+4+z^2+4z+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x-16y+4z+44=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-4y+z+11=0$

Pág. 26

Avaliação 1

1.1. A face [*ABFE*] está contida no plano de equação $x=3$.

Resposta: (A)

1.2. $A(3,0,0)$; $C(0,3,0)$ e $P(x,y,z)$

$d(A,P)=d(C,P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+z^2=x^2+(y-3)^2+z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2=x^2+y^2-6y+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x+6y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-y=0$

Resposta: (A)

1.3. EA: $x=3 \wedge y=0$

Resposta: (B)

1.4. $A(3,0,0)$

$(x-3)^2+y^2+z^2 \leq 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+z^2 \leq 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x-7 \leq 0$

Resposta: (B)

2. $P(a^3-3,b,a)$

$a^3-3=0 \wedge b=0 \wedge a>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2=3 \wedge b=0 \wedge a>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a=-\sqrt{3} \vee a=\sqrt{3}) \wedge b=0 \wedge a>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=\sqrt{3} \wedge b=0$

Resposta: (C)

3. Os planos de equações $x=1$, $y=-2$ e $z=3$ passam no centro $C(1,-2,3)$ da esfera. Intersetam, assim, a esfera segundo um círculo de raio 5 (igual ao raio da esfera).

Resposta: (B)

4. $P(0,-1,0)$; $Q(1,0,0)$ e $X(x,y,z)$

$d(P,X)=d(Q,x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2+z^2=(x-1)^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1=x^2-2x+1+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+2y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y=0$

No ponto $A(0,0,-3)$ tem-se $x+y=0$.

Resposta: (A)

5. Os pontos *A* e *C* pertencem ao plano mediador de [*DF*] porque $\overline{AD}=\overline{AF}$ e $\overline{CD}=\overline{CF}$.

$A(x,0,0)$

$x+0=4 \Leftrightarrow x=4$, logo $A(4,0,0)$. Assim, $\overline{OA}=4$.

O cubo tem aresta 4. O seu volume é $4^3=64$.

Resposta: (D)

Pág. 27

6.1. $x^2+y^2+z^2-2x-6y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)-1+(y^2-6y+9)-9+z^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2+z^2=10$

Centro: $(1,3,0)$; raio: $\sqrt{10}$

6.2. $(x-1)^2+(y-3)^2+0=10 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0-1)^2+(y-3)^2+0=10 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+(y-3)^2=10 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-3)^2=9 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-3=-3 \vee y-3=3) \wedge x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y=0 \vee y=6) \wedge x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0) \vee (x,y,z)=(0,6,0)$

A superfície esférica *S* interseta o eixo *Oy* nos pontos de coordenadas $(0,0,0)$ e $(0,6,0)$.

6.3. $(x-1)^2+(y-3)^2+z^2=10 \wedge x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4-1)^2+(y-3)^2+z^2=10 \wedge x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9+(y-3)^2+z^2=10 \wedge x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-3)^2+z^2=1 \wedge x=4$

Trata-se da circunferência de centro $(4,3,0)$ e raio 1 contida no plano de equação $x=4$.

6.4. **a)** $A(3,1,\sqrt{2})$ e $B(4,4,0)$

$(x-1)^2+(y-3)^2+z^2=10$

$(3-1)^2+(1-3)^2+(\sqrt{2})^2=10 \Leftrightarrow 4+4+2=10$

(verdadeiro)

$(4-1)^2+(4-3)^2+0^2=10 \Leftrightarrow 9+1+0=10$

(verdadeiro)

$\overline{AB} = \sqrt{(4-3)^2 + (4-1)^2 + (\sqrt{2})^2} =$

$= \sqrt{1+9+2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\overline{AB} = 2\sqrt{3} < 2\sqrt{10}$ Logo, $\overline{AB} < 2r$.

b) $(x-4)^2 + (y-4)^2 + z^2 \leq 12$

7. $S: x^2 + y^2 + z^2 = 25$

7.1. $yOz: x = 0$

$B(0, y, 4)$, então $B \in S$.

$0^2 + y^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 9 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y = 3$

$B(0, 3, 4)$; $A(0, -3, 4)$; $C(0, -3, 4)$ e $D(0, 3, -4)$

7.2. **a)** $[AB]: x = 0 \wedge z = 4 \wedge -3 \leq y \leq 3$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \wedge z = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 16 \leq 25 \wedge z = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9 \wedge z = -4$

(círculo de centro $(0, 0, -4)$ e raio 3 contido no plano de equação $z = -4$)

7.3. $V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \pi \times 3^2 \times (2 \times 4) = 72\pi$ u. v.

8.1. $x^2 + y^2 + z^2 - 8z - 16y + 55 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 - 16y + 64) - 64 + z^2 + 55 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-8)^2 + z^2 = 25$

Centro: $D(4, 8, 0)$; raio: 5

Os pontos *E* e *F* têm abcissa nula e ordenada igual a 8.

$(x-4)^2 + (y-8)^2 + z^2 = 25 \wedge x = 0 \wedge y = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 + 0 + z^2 = 25 \wedge x = 0 \wedge y = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -3 \vee z = 3$

Então, $E(0, 8, -3)$ e $F(0, 8, 3)$.

Vértices do prisma:

$A(4, 0, 0)$; $B(0, 0, -3)$; $C(0, 0, 3)$; $D(4, 8, 0)$;

$E(0, 8, -3)$ e $F(0, 8, 3)$

8.2. A altura do triângulo [*ABC*] é igual à abcissa de *A*:

$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times \text{altura} =$

$= \dfrac{\overline{BC} \times \overline{OA}}{2} \times 8 = \dfrac{6 \times 4}{2} \times 8 = 96$

8.3. $F(0, 8, 3)$ e $A(4, 0\ 0)$

Raio: $r = \overline{AF} = \sqrt{4^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{89}$

$x^2 + (y-8)^2 + (z-3)^2 = 89$

8.4. $D(4, 8, 0)$; $F(0, 8, 3)$ e $P(x, y, z)$

$\overline{DP} = \overline{FP}$

$(x-4)^2 + \cancel{(y-8)^2} + z^2 = z^2 + \cancel{(y-8)^2} + (z-3)^2 \Leftrightarrow$

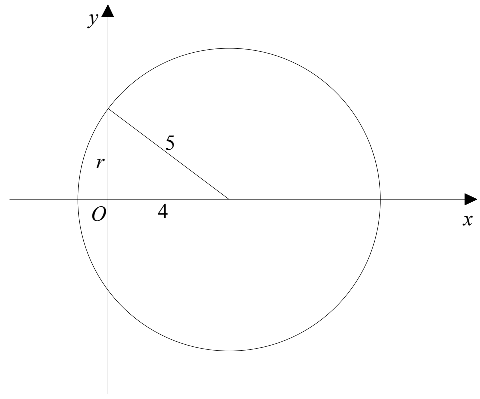
$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} + \cancel{z^2} - 6z + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x - 6z - 7 = 0$

$8x - 6z - 7 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow 8x = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{8}$

Ponto pedido: $\left(\dfrac{7}{8}, 0, 0\right)$

8.5. **a)** O plano *EFB* é o plano de equação $x = 0$.



A abcissa do centro da superfície esférica é 4 e o raio é igual a 5.

$r^2 + 4^2 = 5^2$

$r = 3$

A interseção da superfície esférica com o plano *EFB* é uma circunferência de centro (0 , 8 , 0) e raio igual a 3 contida no plano de equação $x = 0$.

b) Trata-se da circunferência de centro *A* e raio igual a 8 contida no plano de equação $x = 4$.

$(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 64 \wedge x = 4$

Pág. 28

Atividade inicial 2

1. Por exemplo:

1.1. $[A , B]$ e $[D , C]$ **1.2.** $[E , H]$ e $[F , G]$

1.3. $[A , E]$ e $[D , H]$ **1.4.** $[B , C]$ e $[F , G]$

2.1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$, porque os segmentos orientados $[A , B]$, $[D , C]$ e $[H , G]$ são equipolentes.

2.2. $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{FB}$, porque os segmentos orientados $[E , A]$, $[H , D]$ e $[G , C]$ são equipolentes.

3.1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$

3.2. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH}$

3.3. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

3.4. $A + \overrightarrow{DC} = A + \overrightarrow{AB} = B$

3.5. $E + \overrightarrow{BC} = E + \overrightarrow{EH} = H$

3.6. $A + \overrightarrow{CG} = A + \overrightarrow{AE} = E$

3.7. $A + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EH} = A + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HE} = D + \overrightarrow{DA} = A$

ou

$A + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EH} = A + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HE} = A + \vec{0} = A$

3.8. $A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = B + \overrightarrow{BC} = C$

3.9. $F - G + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GB}$

4.1. $A + \left(-\overrightarrow{BC}\right) =$

$= D + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} =$ $\quad A = D + \overrightarrow{DA}$

$= D + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} =$ $\quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$

$= D + 2\overrightarrow{DA} =$

$= D + 0\overrightarrow{DC} + 2\vec{D}$

As coordenadas do ponto $A + \left(-\overrightarrow{BC}\right)$ no referencial $\left(D , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{DA}\right)$ são (0 , 2).

4.2. $B - C + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} =$

$= -\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} =$

$= -1\overrightarrow{DC} + 1\overrightarrow{DA}$

O vetor $B - C + \overrightarrow{BA}$ no referencial $\left(D , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{DA}\right)$ tem coordenadas (–1 , 1).

Pág. 29

1.1. Por exemplo: $[A , B]$ e $[D , C]$; $[B , F]$ e $[D , H]$; $[E , B]$ e $[H , C]$

1.2. $[E , F]$ e $[C , G]$ não são equipolentes porque não são complanares.

1.3. Por exemplo: $[E , F]$, $[H , G]$ e $[D , C]$

Pág. 30

2.1. $\overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 3$ e $\overline{AJ} = \frac{1}{2}\overline{AE} = 2$

$\overline{JI}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{AJ}^2$

$\overline{JI}^2 = 3^2 + 2^2$

$\overline{JI} = \sqrt{9+4} \Leftrightarrow \overline{JI} = \sqrt{13}$

Logo, $\left\|\overrightarrow{JI}\right\| = \sqrt{13}$

2.2. $D + \overrightarrow{BF} = D + \overrightarrow{DH} = H$

2.3. $E + \left(-\overrightarrow{CF}\right) = E + \overrightarrow{FC} = E + \overrightarrow{ED} = D$

2.4. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC}$

2.5. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

2.6. $T_{\overrightarrow{EA}}\left(G\right) = G + \overrightarrow{EA} = G + \overrightarrow{GC} = C$

2.7. $A + \overrightarrow{HG} = A + \overrightarrow{AB} = B$

$D + \overrightarrow{HG} = D + \overrightarrow{DC} = C$

$E + \overrightarrow{HG} = E + \overrightarrow{EF} = F$

$T_{\overrightarrow{HG}}\left[ADE\right] = \left[BCF\right]$

2.8. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} =$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$

2.9. $2\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$

Pág. 31

3.1. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} =$

$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} =$

$= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE} =$

$= \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

3.2. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} =$

$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} =$

$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} =$

$= \overrightarrow{DD} + \overrightarrow{AA} =$

$= \vec{0}$

3.3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} =$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} =$

$= \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{GA}$

3.4. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA} =$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} =$

$= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{EF} =$

$= \vec{0} + \overrightarrow{EF} =$

$= \overrightarrow{EF} =$

$= -\overrightarrow{FE}$

4.1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} =$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

4.2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} =$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} =$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} =$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

4.3. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) =$

$= \left(2\overrightarrow{JD} + 2\overrightarrow{DI}\right) + \left(2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AJ}\right) =$

$= 2\left(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DI}\right) + 2\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AJ}\right) =$

$= 2\overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{KJ} = 2\left(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{KJ}\right) =$

$= 2\left(\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JI}\right) = 2\overrightarrow{KI}$

Pág. 32

5.1. $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$

5.2. Plano BCD

6. $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$

6.1. **a)** $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=-\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$

6.2. $3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AK}$

Como $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{AK}$ são colineares, então os pontos *A*, *K* e *G* também o são.

Pág. 34

7.1. $\overrightarrow{OA}(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$

7.2. $\overrightarrow{CB}(2\ ,\ 3\ ,\ 0)$

7.3. $\overrightarrow{OC}(0\ ,\ 3\ ,\ 0)$

7.4. $\overrightarrow{OD}(0\ ,\ 0\ ,\ 4)$

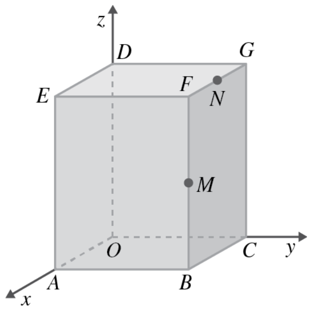
7.5. $\overrightarrow{OE}(2\ ,\ 0\ ,\ 4)$

7.6. $\overrightarrow{OF}(2\ ,\ 3\ ,\ 4)$

7.7. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OG}=(0\ ,\ 3\ ,\ 4)$

7.8. $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OE}=(2\ ,\ 0\ ,\ 4)$

7.9. $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OB}=(2\ ,\ 3\ ,\ 0)$



7.10. $\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GC}=$

$=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GC}=$

$=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}=$

$=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FB}=$

$=\overrightarrow{OB}=(2\ ,\ 3\ ,\ 0)$

7.11. $\overrightarrow{DF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{MG}=$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MG}=$

$=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=$

$=\overrightarrow{OG}=(0\ ,\ 3\ ,\ 4)$

7.12. $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=$

$=\overrightarrow{OB}=(2\ ,\ 3\ ,\ 0)$

7.13. $2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=$

$=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GN}=$

$=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{ON}=(1\ ,\ 3\ ,\ 4)$

7.14. $\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}-2\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FM}+2\overrightarrow{NF}+\overrightarrow{AF}=$

$=\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{AF}=$

$=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{AF}=$

$=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM}=$

$=\overrightarrow{OM}=(2\ ,\ 3\ ,\ 2)$

Pág. 36

8. $A(-1\ ,\ 1\ ,\ 2)$, $B(2\ ,\ -1\ ,\ 6)$, $\vec{u}(4\ ,\ 0\ ,\ -1)$

8.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(3\ ,\ -2\ ,\ 4)$

$P=B+2\overrightarrow{AB}+\vec{u}=$

$=(2\ ,\ -1\ ,\ 6)+2(3\ ,\ -2\ ,\ 4)+(4\ ,\ 0\ ,\ -1)=$

$=(2\ ,\ -1\ ,\ 6)+(6\ ,\ -4\ ,\ 8)+(4\ ,\ 0\ ,\ -1)=$

$=(8\ ,\ -5\ ,\ 14)+(4\ ,\ 0\ ,\ -1)=$

$=(12\ ,\ -5\ ,\ 13)$

8.2. $\vec{v}=-\frac{1}{2}(3\vec{u})-\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{2}\vec{u}+\overrightarrow{AB}=$

$=-\frac{3}{2}(4\ ,\ 0\ ,\ -1)+(3\ ,\ -2\ ,\ 4)=$

$=\left(-6\ ,\ 0\ ,\ \frac{3}{2}\right)+(3\ ,\ -2\ ,\ 4)=$

$=\left(-3\ ,\ -2\ ,\ \frac{11}{2}\right)$

8.3. $2\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\vec{w}\Leftrightarrow 2\vec{w}=2\vec{u}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{w}=\vec{u}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{w}=(4\ ,\ 0\ ,\ -1)-\frac{1}{4}(3\ ,\ -2\ ,\ 4)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{w}=(4\ ,\ 0\ ,\ -1)+\left(-\frac{3}{4}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -1\right)$

$\Leftrightarrow \vec{w}=\left(\frac{13}{4}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -2\right)$

9. $\vec{u}(1\ ,\ a\ ,\ 2)$; $\vec{v}(b-1\ ,\ 2\ ,\ 4)$

9.1. $\vec{v}=2\vec{u}\Leftrightarrow(b-1\ ,\ 2\ ,\ 4)=2(1\ ,\ a\ ,\ 2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(b-1\ ,\ 2\ ,\ 4)=(2\ ,\ 2a\ ,\ 4)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b-1=2\\2=2a\\4=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\a=1\end{cases}$

$a=1$ e $b=3$

9.2. $\|\vec{u}\|=3\Leftrightarrow\sqrt{1^2+a^2+2^2}=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+a^2+4=9\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-2\vee a=2$

9.3. $\vec{u}+\vec{v}=(1\ ,\ a\ ,\ 2)+(b-1\ ,\ 2\ ,\ 4)=$

$=(b\ ,\ a+2\ ,\ 6)$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|=6\Leftrightarrow\sqrt{b^2+(a+2)^2+6^2}=6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2+(a+2)^2+36=36\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2+(a+2)^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=0\wedge a+2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=0\wedge a=-2$

10.1. $\vec{c}(2\ ,\ -2\ ,\ 6)$ e $\vec{d}(-1\ ,\ -2\ ,\ 3)$

$\frac{2}{-1}=-2$; $\frac{-2}{-2}=1$

$\frac{2}{-1}\neq\frac{-2}{-2}$. Logo, os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ não são colineares.

10.2. $\vec{e}(0{,}1\ ;\ 0{,}2\ ;\ 0{,}3)$ e $\vec{f}(5\ ,\ 10\ ,\ 15)$

$\frac{5}{0{,}1} = 5\times 10 = 50$

$\frac{10}{0{,}2} = 10\times\frac{10}{2} = 50$

$\frac{15}{0{,}3} = 15\times\frac{10}{3} = 50$

$\frac{5}{0{,}1} = \frac{10}{0{,}2} = \frac{15}{0{,}3}$. Os vetores $\vec{e}$ e $\vec{f}$ são colineares.

11. $\vec{z}\left(1\ ,\ 1\ ,\ \sqrt{2}\right)$

$\vec{t} = k\vec{z} = k\left(1\ ,\ 1\ ,\ \sqrt{2}\right) = \left(k\ ,\ k\ ,\ \sqrt{2}k\right)$

$\|\vec{t}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + k^2 + \left(\sqrt{2}k\right)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 + k^2 + 2k^2 = 1 \Leftrightarrow 4k^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \vee k = \frac{1}{2}$

Logo, $\vec{t}\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\vec{t}\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Pág. 37

12.1. $A(-1\ ,\ 2\ ,\ 3)$ e $B(3\ ,\ -4\ ,\ 5)$

$M\left(\frac{-1+3}{2}\ ,\ \frac{2-4}{2}\ ,\ \frac{3+5}{2}\right)$

$M(1\ ,\ -1\ ,\ 4)$

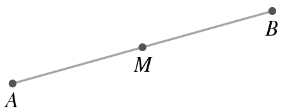
12.2. $A\left(-1\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(-3\ ,\ -2\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

$M\left(\frac{-1-3}{2}\ ,\ \frac{0-2}{2}\ ,\ \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right)$

$M(-2\ ,\ -1\ ,\ 1)$

13. $M(2\ ,\ 1\ ,\ 5)$ e $A(-2\ ,\ 3\ ,\ 4)$

13.1.



$B = M + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM} = M - A = (4\ ,\ -2\ ,\ 1)$

$B = (2\ ,\ 1\ ,\ 5) + (4\ ,\ -2\ ,\ 1) = (6\ ,\ -1\ ,\ 6)$

Assim, $B(6\ ,\ -1\ ,\ 6)$.

13.2. Centro: $M(2\ ,\ 1\ ,\ 5)$

Raio: $r = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$

Equação: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 21$

Pág. 38

14. $A(-1\ ,\ 0\ ,\ 3)$; $B(4\ ,\ 0\ ,\ 8)$ e $C(-2\ ,\ 3\ ,\ 0)$

14.1. a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (5\ ,\ 0\ ,\ 5)$

$AB: (x\ ,\ y\ ,\ z) = (-1\ ,\ 0\ ,\ 3) + k(5\ ,\ 0\ ,\ 5),\ k\in\mathbb{R}$

b) $\overrightarrow{BC} = C - B = (-6\ ,\ 3\ ,\ -8)$

$BC: (x\ ,\ y\ ,\ z) = (4\ ,\ 0\ ,\ 8) + k(-6\ ,\ 3\ ,\ -8),\ k\in\mathbb{R}$

c) $\overrightarrow{AC} = C - A = (-1\ ,\ 3\ ,\ -3)$

$AC: (x\ ,\ y\ ,\ z) = (-1\ ,\ 0\ ,\ 3) + k(-1\ ,\ 3\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

14.2. a) $(x\ ,\ y\ ,\ z) = (-1\ ,\ 0\ ,\ 3) + k(5\ ,\ 0\ ,\ 5),\ k\in[0\ ,\ 1]$

b) $(x\ ,\ y\ ,\ z) = (4\ ,\ 0\ ,\ 8) + k(-6\ ,\ 3\ ,\ -8),\ k\in\left]-\infty\ ,\ 1\right]$

c) $(x\ ,\ y\ ,\ z) = (-1\ ,\ 0\ ,\ 3) + k(-1\ ,\ 3\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}_0^+$

Pág. 39

15. $A(1\ ,\ 0\ ,\ 2)$; $B(-1\ ,\ 4\ ,\ 8)$ e $\vec{u}(1\ ,\ -2\ ,\ -3)$

15.1. $r: (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1\ ,\ 0\ ,\ 2) + k(1\ ,\ -2\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

15.2. $(-1\ ,\ 4\ ,\ 8) = (1\ ,\ 0\ ,\ 2) + k(1\ ,\ -2\ ,\ -3) \Leftrightarrow$

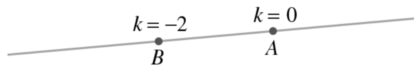
$\Leftrightarrow -1 = 1 + k \wedge 4 = -2k \wedge 8 = 2 - 3k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -2 \wedge k = -2 \wedge k = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -2$

Logo, $B \in r$.

15.3. $r: P = A + k\vec{u},\ k\in\mathbb{R}$



$[AB]: (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1\ ,\ 0\ ,\ 2) + k(1\ ,-2\ ,-3),\ k\in[-2\ ,0]$

15.4. $\dot{B}A: (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1\ ,0\ ,2) + k(1\ ,-2\ ,-3),\ k\in\left[-2\ ,+\infty\right[$

15.5. $yOz: x = 0$

$r: (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1\ ,\ 0\ ,\ 2) + k(1\ ,\ -2\ ,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

$(x\ ,\ y\ ,\ z) = (1+k\ ,\ -2k\ ,\ 2-3k),\ k\in\mathbb{R}$

O ponto da reta r que pertence ao plano de equação $x = 0$ é obtido para o valor de k tal que $1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Então, $(x\ ,\ y\ ,\ z) = (0\ ,\ 2\ ,\ 5)$.

16. $A(2\ ,\ -2\ ,\ 0)$; $B(2\ ,\ 2\ ,\ 0)$; $G(-2\ ,\ 2\ ,\ 2)$ e $E(2\ ,\ -2\ ,\ 2)$

16.1. $C = G + \overrightarrow{GC} = G + \overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{EA}(0\ ,\ 0\ ,\ -2)$

$C = (-2\ ,\ 2\ ,\ 2) + (0\ ,\ 0\ ,\ -2) = (-2\ ,\ 2\ ,\ 0)$

Logo, $C(-2\ ,\ 2\ ,\ 0)$.

$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}(-4\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$D = (2\ ,\ -2\ ,\ 0) + (-4\ ,\ 0\ ,\ 0) = (-2\ ,\ -2\ ,\ 0)$

Logo, $D(-2\ ,\ -2\ ,\ 0)$.

$F = B + \overrightarrow{BF} = B + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{EA} = (0\ ,\ 0\ ,\ 2)$

$F = (2\ ,\ 2\ ,\ 0) + (0\ ,\ 0\ ,\ 2) = (2\ ,\ 2\ ,\ 2)$

Logo, $F(2\ ,\ 2\ ,\ 2)$.

16.2. a) $M\left(\frac{2+2}{2}\ ,\ \frac{-2+2}{2}\ ,\ \frac{0+0}{2}\right)$

$M(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{MG} = G - M = (-4\ ,\ 2\ ,\ 2)$

$r: (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 0\ ,\ 0) + k(-4\ ,\ 2\ ,\ 2),\ k\in\mathbb{R}$

b) Plano mediador de $[EG]$

$E(2\ ,\ -2\ ,\ 2)$; $G(-2\ ,\ 2\ ,\ 2)$ e $P(x\ ,\ y\ ,\ z)$

$d(E\ ,\ P) = d(G\ ,\ P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = (x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4} = \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4}$

$\Leftrightarrow -8x + 8y = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$

$\alpha: x - y = 0$

$r:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 0\ ,\ 0) + k(-4\ ,\ 2\ ,\ 2),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 4k \\ y = 2k \\ z = 2k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$

$R(2-4k\ ,\ 2k\ ,\ 2k),\ k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta r

$\alpha: x - y = 0$

$R \in \alpha \Leftrightarrow (2-4k) - (2k) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - 4k - 2k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

$x = 2 - 4k = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$y = z = 2k = \frac{2}{3}$

O ponto de interseção de r com α tem coordenadas $\left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\right)$.

Pág. 42

Atividades complementares

17.1. a) Por exemplo: $[E\ ,\ L]$

b) Por exemplo: $[D\ ,\ L]$, $[I\ ,\ F]$ e $[J\ ,\ G]$

17.2. a) Os segmentos orientados $[F\ ,\ G]$ e $[J\ ,\ C]$ não são equipolentes porque não são complanares.

b) Os segmentos orientados $[H\ ,\ G]$ e $[I\ ,\ B]$ não são equipolentes porque não têm o mesmo comprimento.

18.1. a) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BE}$

b) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{AN}$

c) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AF}$

d) $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{BG}$

e) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH}$

f) $-3\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CO} = 3\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN}$

18.2. As retas paralelas BG e DE intersetam as retas concorrentes AD e AE nos pontos B , V e D , E, respetivamente.

Então, pelo Teorema de Tales:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BV}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AV}}$

Como $\overline{AD} = 3\overline{AB}$, temos:

$\frac{3\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AV}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AV}} = 3 \Leftrightarrow \overline{AE} = 3\overline{AV}$

19.1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DF}$

Logo, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}$.

19.2. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BF} + \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{EA} \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{EA} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EA} \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{GA}$

20.1. A afirmação é falsa. Por exemplo, se $[ABCD]$ é um paralelogramo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares e os quatro vértices não pertencem à mesma reta.

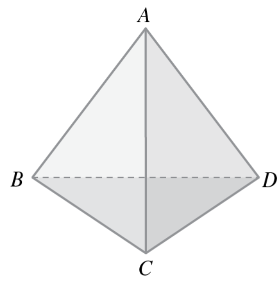
20.2. Se os pontos A, B, C e D não pertencem à mesma reta, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ não são colineares.

A afirmação é falsa. A contrarrecíproca de uma proposição falsa é uma proposição falsa.

21. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$



21.1. $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AE} =$

$= -\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} =$

$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} =$

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} =$

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} =$

$= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$

21.2. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KL} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

21.3. $\overrightarrow{KE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$

$= 3\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}\right) \Leftrightarrow$

$= 3\overrightarrow{KL}$

Como $\overrightarrow{KE} = 3\overrightarrow{KL}$, os vetores $\overrightarrow{KE}$ e $\overrightarrow{KL}$ são colineares.

Logo, os pontos K, L e E são colineares.

Pág. 43

22.1. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

22.2. $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$

22.3. $\overrightarrow{AK} + \frac{17}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

a) $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AK} =$

$= -\overrightarrow{AE} + \frac{17}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} =$

$= \frac{17}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{EK} = \frac{17}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AE} =$

$= \frac{5}{4}\overrightarrow{EA} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} =$

$= \frac{5}{4}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) =$

$= \frac{5}{4}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} =$

$= \frac{1}{6}\overrightarrow{EG} + \frac{5}{4}\overrightarrow{EB}$

23.1. $\overrightarrow{OA}(0\ ,\ -2\ ,\ 0)$

23.2. $\overrightarrow{OB}(2\ ,\ -2\ ,\ 0)$

23.3. $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}=(2\ ,\ -2\ ,\ 3)$

23.4. $\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=$
$=\overrightarrow{OD}=(0\ ,\ -2\ ,\ 3)$

23.5. $\overrightarrow{CB}-\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{GB}\right)=\overrightarrow{OA}-\left(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GB}\right)=$
$=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BF}=$
$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=$
$=\overrightarrow{OG}=(0\ ,\ 0\ ,\ 3)$

23.6. $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{DA}=$
$=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GO}=$
$=\overrightarrow{OO}=\vec{0}=(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$

24. $A\ (2\ ,3\ ,0)\ ;\ B\ (-1\ ,0\ ,2)\ ;\ \vec{u}(0\ ,\ 1\ ,\ 3)$ e $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\right)$

24.1. $\overrightarrow{AB}+\vec{u}-\vec{v}=B-A+(0\ ,\ 1\ ,\ 3)-\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\right)=$
$=(-3\ ,\ -3\ ,\ 2)+\left(\frac{1}{2}\ ,\ -1\ ,\ 3\right)=$
$=\left(-\frac{5}{2}\ ,\ -4\ ,\ 5\right)$

24.2. $\overrightarrow{BA}+2(-3\vec{u})+2\vec{v}=$
$=A-B-6\vec{u}+2\vec{v}=$
$=(3\ ,\ 3\ ,\ -2)-6(0\ ,\ 1\ ,\ 3)+2\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\right)=$
$=(3\ ,\ 3\ ,\ -2)-(0\ ,\ 6\ ,\ 18)+(-1\ ,\ 4\ ,\ 0)=$
$=(2\ ,\ 1\ ,\ -20)$

24.3. $-2\overrightarrow{AB}-\frac{5}{3}\vec{u}-2(3\vec{v})=$
$=-2(-3\ ,\ -3\ ,\ 2)-\frac{5}{2}(0\ ,\ 1\ ,\ 3)-6\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\right)=$
$=(6\ ,\ 6\ ,\ -4)-\left(0\ ,\ \frac{5}{3}\ ,\ 5\right)-(-3\ ,\ 12\ ,\ 0)=$
$=\left(6+3\ ,\ 6-\frac{5}{3}-12\ ,\ -4-5\right)=$
$=\left(9\ ,\ -\frac{23}{3}\ ,\ -9\right)$

24.4. $A-3\left(\overrightarrow{AB}+2\vec{v}\right)=$
$=(2\ ,\ 3\ ,\ 0)-3\left[(-3\ ,\ -3\ ,\ 2)+2\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\right)\right]=$
$=(2\ ,\ 3\ ,\ 0)-3\left[(-3\ ,\ -3\ ,\ 2)+(-1\ ,\ 4\ ,\ 0)\right]=$
$=(2\ ,\ 3\ ,\ 0)-3(-4\ ,\ 1\ ,\ 2)=$
$=(2\ ,\ 3\ ,\ 0)+(12\ ,\ -3\ ,\ -6)=$
$=(14\ ,\ 0\ ,\ -6)$

24.5. $\vec{u}-2\overrightarrow{AB}=3\vec{w}-(\vec{u}-\vec{v})\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\vec{u}-2\overrightarrow{AB}=3\vec{w}-\vec{u}+\vec{v}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3\vec{w}=\vec{u}-2\overrightarrow{AB}+\vec{u}-\vec{v}\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\vec{w}=\frac{1}{3}\left(2\vec{u}-2\overrightarrow{AB}-\vec{v}\right)\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\vec{w}=\frac{1}{3}\left[2(0\ ,\ 1\ ,\ 3)-2(-3\ ,\ -3\ ,\ 2)-\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\right)\right]$
$\Leftrightarrow\vec{w}=\frac{1}{3}\left[(0\ ,\ 2\ ,\ 6)+(6\ ,\ 6\ ,\ -4)+\left(\frac{1}{2}\ ,\ -2\ ,\ 0\right)\right]$
$\Leftrightarrow\vec{w}=\frac{1}{3}\left(\frac{13}{2}\ ,\ 6\ ,\ 2\right)\Leftrightarrow\vec{w}=\left(\frac{13}{6}\ ,\ 2\ ,\ \frac{2}{3}\right)$

25. $\vec{u}(1\ ,\ 2\ ,\ a)$ e $\vec{v}(2\ ,\ b-3\ ,\ 6)$

25.1. $\vec{v}=2\vec{u}\Leftrightarrow(2\ ,\ b-3\ ,\ 6)=2(1\ ,\ 2\ ,\ a)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(2\ ,\ b-3\ ,\ 6)=(2\ ,\ 4\ ,\ 2a)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\begin{cases}2=2\\ b-3=4\Leftrightarrow a=3\wedge b=7\\ 6=2a\end{cases}$

25.2. $\|\vec{v}\|=7\Leftrightarrow\sqrt{2^2+(b-3)^2+6^2}=7\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4+(b-3)^2+6^2=49\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(b-3)^2=9\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b-3=-3\vee b-3=3\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b=0\vee b=6$

25.3. $\|\vec{u}-\vec{v}\|=1\Leftrightarrow\|(-1\ ,\ 5-b\ ,\ a-6)\|=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\sqrt{(-1)^2+(5-b)^2+(a-6)^2}=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1+(5-b)^2+(a-6)^2=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(5-b)^2+(a-6)^2=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5-b=0\wedge a-6=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b=5\wedge a=6$

26. $\vec{u}(a\ ,\ b\ ,\ 0)$ e $\vec{v}(2\ ,\ c\ ,\ 0)$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{4+c^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4+c^2=5\Leftrightarrow c^2=1\Leftrightarrow c=-1\vee c=1$

Como $c\in\mathbb{R}^+$, temos $c=1$ e $\vec{v}(2\ ,\ 1\ ,\ 0)$.

$\vec{u}=k\vec{v}\wedge\|\vec{u}\|=5$

$\vec{u}(2k\ ,\ k\ ,\ 0)$

$\|\vec{u}\|=5\Leftrightarrow\sqrt{(2k)^2+k^2+0^2}=5\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4k^2+k^2=25\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5k^2=25\Leftrightarrow k^2=5$
$k=-\sqrt{5}\vee k=\sqrt{5}$

Como $k>0$, vem $k=\sqrt{5}$.

Logo, $\vec{u}\left(2\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ 0\right)$ e $a=2\sqrt{5}$ e $b=\sqrt{5}$.

Portanto, $a=2\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}$ e $c=1$.

27. $\vec{v}(2\ ;\ 2\ ;\ 3{,}5)\ ;\ \vec{u}=k\vec{v}\wedge\|\vec{u}\|=1{,}5\ ;\ \vec{u}(2k\ ;\ 2k\ ;\ 3{,}5k)$

$\|\vec{u}\|=1{,}5\Leftrightarrow\sqrt{(2k)^2+(2k)^2+(3{,}5k)^2}=1{,}5\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4k^2+4k^2+12{,}25k^2=1{,}5^2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 20{,}25k^2=2{,}25\Leftrightarrow k^2=\frac{2{,}25}{20{,}25}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k^2=\frac{225}{2025}\Leftrightarrow k^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow k=-\frac{1}{3}\vee k=\frac{1}{3}$

$\vec{u}\left(-\frac{2}{3}\ ,\ -\frac{2}{3}\ ,\ -\frac{7}{6}\right)$ ou $\vec{u}\left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{7}{6}\right)$ pois $3{,}5\times\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$.

Pág. 44

28. $A(2\ ,\ 3\ ,\ 2)$ e $\overline{AB}=3$

28.1. $B\ (2\ ,6\ ,2)$; $C\ (-1\ ,6\ ,2)$; $D\ (-1\ ,3\ ,2)$; $E\ (2\ ,3\ ,5)$; $F\ (2\ ,6\ ,5)$; $G\ (-1\ ,6\ ,5)$ e $H\ (-1\ ,3\ ,5)$

28.2. a) $M\left(\frac{2-1}{2}\ ,\ \frac{3+6}{2}\ ,\ \frac{2+5}{2}\right)$, logo $M\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{9}{2}\ ,\ \frac{7}{2}\right)$

b) $\overrightarrow{AC}=C-A=(-3\ ,\ 3\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{BF}=F-B=(0\ ,\ 0\ ,\ 3)$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BF}=(-3\ ,\ 3\ ,\ 3)$

c) $A+\overrightarrow{BG}=A+\overrightarrow{AH}=H=(-1\ ,\ 3\ ,\ 5)$

d) $\overrightarrow{EF}=F-E=(0\ ,\ 3\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{FC}=C-F=(-3\ ,\ 0\ ,\ -3)$

$\overrightarrow{EF}+3\overrightarrow{FC}=(0\ ,\ 3\ ,\ 0)+3(-3\ ,\ 0\ ,\ -3)=$

$=(0\ ,\ 3\ ,\ 0)+(-9\ ,\ 0\ ,\ -9)=$

$=(-9\ ,\ 3\ ,\ -9)$

e) $A-2\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{FG}\right)=A-2\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GF}\right)=$

$=A-2\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=$

$=A-2\vec{0}=A-\vec{0}=$

$=A=$

$=(2\ ,\ 3\ ,\ 2)$

28.3. a) $\overrightarrow{AG}=G-A=(-3\ ,\ 3\ ,\ 3)$

$\left\|\overrightarrow{AG}\right\|=\sqrt{(-3)^2+3^2+3^2}=\sqrt{3\times 9}=3\sqrt{3}$

b) $\overrightarrow{AB}=B-A=(0\ ,\ 3\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{CG}=G-C=(0\ ,\ 0\ ,\ 3)$

$\overrightarrow{EF}=F-E=(0\ ,\ 3\ ,\ 0)$

$\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EF}\right\|=$

$=\|(0\ ,\ 3\ ,\ 0)-(0\ ,\ 0\ ,\ 3)+(0\ ,\ 3\ ,\ 0)\|$

$=\|(0\ ,\ 3\ ,\ -3)+(0\ ,\ 3\ ,\ 0)\|$

$=\|(0\ ,\ 6\ ,\ -3)\|=\sqrt{0^2+6^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=3\sqrt{5}$

29. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=1$

29.1. $A(1\ ,\ -2\ ,\ 4)$

$(1-1)^2+(-2+2)^2+(4-3)^2=1 \Leftrightarrow 0+0+1=1$ (verdadeiro)

$A\in S$

29.2. Centro: $C\ (1\ ,-2\ ,3)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(0\ ,\ 0\ ,\ -1)$

$B=C+\overrightarrow{AC}=$

$=(1\ ,\ -2\ ,\ 3)+(0\ ,\ 0\ ,\ -1)=$

$=(1\ ,-2\ ,2)$

$B\ (1\ ,-2\ ,2)$

30. $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1\ ,\ 2\ ,\ 2)$

30.1. $\dot{P}Q:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(-2\ ,\ 0\ ,\ 1)+k(1\ ,\ 2\ ,\ 2),\ k\in\mathbb{R}_0^+$

30.2. $[PQ]:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(-2\ ,\ 0\ ,\ 1)+k(1\ ,\ 2\ ,\ 2),\ k\in[0\ ,\ 1]$

31. $A(2\ ,\ -5\ ,\ 4)$, $B(4\ ,\ 2\ ,\ -1)$, $C(8\ ,\ 1\ ,\ 0)$

31.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(2\ ,\ 7\ ,\ -5)$

$r:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(8\ ,\ 1\ ,\ 0)+k(2\ ,\ 7\ ,\ -5),\ k\in r$

$$r:\ \begin{cases} x=8+2k \\ y=1+7k\ ,\ k\in\mathbb{R} \\ z=-5k \end{cases}$$

31.2. Um ponto da reta r é da forma:

$P_k(8+2k\ ,\ 1+7k\ ,\ -5k),\ k\in\mathbb{R}$

a) $xOy:\ z=0$

$-5k=0 \Leftrightarrow k=0$

Para $k=0$, temos $P_0(8\ ,\ 1\ ,\ 0)$.

b) $yOz:\ x=0$

$8+2k=0 \Leftrightarrow 2k=-8 \Leftrightarrow k=-4$

$P_{-4}(0\ ,\ -27\ ,\ 20)$

c) $xOz:\ y=0$

$1+7k=0 \Leftrightarrow 7k=-1 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{7}$

$8+2\times\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{54}{7}$

$-5\times\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{5}{7}$

Então, $P_{-\frac{1}{7}}\left(\frac{54}{7}\ ,\ 0\ ,\ \frac{5}{7}\right)$.

31.3. a) $x=3$

$8+2k=3 \Leftrightarrow 2k=-5 \Leftrightarrow k=-\frac{5}{2}$

$1+7\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{33}{2}$

$-5\times\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{2}$

Logo, $P_{-\frac{5}{2}}\left(3\ ,\ -\frac{33}{2}\ ,\ \frac{25}{2}\right)$.

b) $y=-2$

$1+7k=-2 \Leftrightarrow 7k=-3 \Leftrightarrow k=-\frac{3}{7}$

$8+2\times\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{50}{7}$; $-5\times\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{15}{7}$

Logo, $P_{-\frac{3}{7}}\left(\frac{50}{7}\ ,\ -2\ ,\ \frac{15}{7}\right)$.

c) $z=1$

$-5k=1 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{5}$

$8+2\times\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{38}{5}$; $1+7\times\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

Então, $P_{-\frac{1}{5}}\left(\frac{38}{5}\ ,\ -\frac{2}{5}\ ,\ 1\right)$

32. $P\ (-2\ ,0\ ,1)$ e $Q\ (-1\ ,2\ ,3)$

$$r:\ \begin{cases} x=1+2k \\ y=-2-3k\ ,\ k\in\mathbb{R} \\ z=-3-k \end{cases}$$

32.1.

$$\begin{cases} -2 = 1 + 2k \\ 0 = -2 - 3k \\ 1 = -3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{3}{2} \\ k = -\dfrac{2}{3} \\ k = -4 \end{cases}$$

O sistema é impossível. Logo, $P \notin r$.

32.2. $\vec{r}(2\ ,\ -3\ ,\ -1)$ é um vetor diretor de *r*.

$s:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (-2\ ,\ 0\ ,\ 1) + k(2\ ,\ -3\ ,\ -1),\ k \in \mathbb{R}$

32.3.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -2 - 3k \\ z = -3 - k \end{cases}$$

$xOy:\ z = 0$, logo $-3 - k = 0 \Leftrightarrow k = -3$.

Para $k = -3$, temos: $x = -5 \wedge y = 7 \wedge z = 0$

Assim, $P(-5\ ,\ 7\ ,\ 0)$.

32.4. *Ox* tem a direção de $\vec{e}_1(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$t:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (0\ ,\ 0\ ,\ 0) + k(1\ ,\ 0\ ,\ 0),\ k \in \mathbb{R}$

33. *A* (2 , –1 , –1) e *B* (0 , 9 , –15)

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2\ ,\ 10\ ,\ -14)$, logo $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1\ ,\ -5\ ,\ 7)$

$AB:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ -1\ ,\ -1) + k(1\ ,\ -5\ ,\ 7),\ k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 - 5k,\ k \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 7k \end{cases}$$

Qualquer ponto *P* de *AB* é da forma

$P(2 + k\ ,\ -1 - 5k\ ,\ -1 + 7k),\ k \in \mathbb{R}$

Pretendemos determinar *k* tal que $\|\overrightarrow{OP}\| = 9$.

$\overrightarrow{OP}(2 + k\ ,\ -1 - 5k\ ,\ -1 + 7k)$

$\|\overrightarrow{OP}\| = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2+k)^2 + (-1-5k)^2 + (-1+7k)^2} = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 + 4k + k^2 + 1 + 10k + 25k^2 + 1 - 14k + 49k^2 = 81 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 75k^2 - 75 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = 1 \vee k = -1$

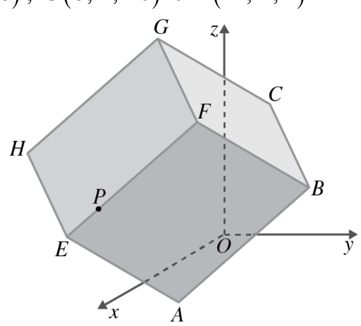
Para $k = 1$ temos: $P_1(3\ ,\ -6\ ,\ 6)$

Para $k = -1$ temos: $P_2(1\ ,\ 4\ ,\ -8)$

Os pontos da reta *AB* que distam 9 unidades da origem do referencial têm coordenadas (3 , –6 , 6) e (1 , 4 , –8).

Pág. 45

34. $C(2, 3, 6)$; $G(6,\ 1,\ 10)$ e $E(12,\ 1, 4)$



34.1. $\overrightarrow{GC} = C - G = (2,\ 3,\ 6) - (6, 1, 10) = (-4,\ 2,\ -4)$,

$A = E + \overrightarrow{EA} = E + \overrightarrow{GC} =$ $(\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC})$

$= (12,\ 1,\ 4) + (-4,\ 2,\ -4) = (8,\ 3,\ 0)$

$A(8,\ 3,\ 0)$

34.2. a) $CG: (x, y, z) = (2, 3,\ 6) + k(-4,\ 2,\ -4),\ k \in \mathbb{R}$

b) $yOz: x = 0$

$$\begin{cases} CG: (x, y, z) = (2, 3, 6) + k(-4,\ 2,\ -4),\ k \in \mathbb{R} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

A reta *CG* interseta o plano *yOz* no ponto $(0, 4, 4)$.

Cálculo auxiliar:

$(0, y, z) = (2, 3, 6) + k(-4, 2, -4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0, y, z) = (2, 3, 6) + (-4k,\ 2k,\ -4k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0, y, z) = (2 - 4k,\ 3 + 2k,\ 6 - 4k) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 - 4k \\ y = 3 + 2k \\ z = 6 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ y = 3 + 2 \times \frac{1}{2} \\ z = 6 - 4 \times \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3 + 1 \\ z = 6 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

34.3. a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 4z = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 8x) + (y^2 + 2y) + (z^2 - 4z) = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 4^2) - 16 + (y^2 + 2y + 1^2) -$

$-1 + (z^2 - 4z + 2^2) - 4 = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 15 + 21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 36$

Trata-se da superfície esférica de centro em $(4,\ -1,\ 2)$ e raio 6. O ponto *D* tem coordenadas $(4,\ -1,\ 2)$.

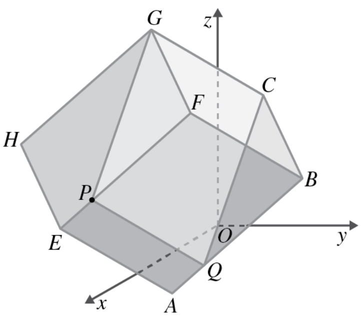
b) $\overrightarrow{GC}(-4,\ 2,\ -4)$

$\|\overrightarrow{GC}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$

O cubo tem aresta igual a 6.

Se a superfície esférica tem centro no ponto *D* e raio igual a 6, então *H* é um ponto da superfície esférica, porque, sendo [*DH*] uma aresta do cubo, $\overline{DH} = 6$.

34.4. A secção produzida no cubo pelo plano [*PGC*] é o retângulo [*PQCG*].



$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GC} = 6$

$\overline{PF} = \overline{EF} - \overline{EP} = 6 - 1{,}5 = 4{,}5$

$\overline{PG}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FG}^2$ (Teorema de Pitágoras)

Como $\overline{PG} > 0$, vem:

$\overline{PG} = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} \Leftrightarrow \overline{PG} = \sqrt{56{,}25} \Leftrightarrow \overline{PG} = 7{,}5$

$A_{[PQCG]} = \overline{PG} \times \overline{GC} = 7{,}5 \times 6 = 45$

35. $A(-2, 1, 0)$; $B(0, 3, -1)$; $\vec{u}(-1, -1, 1)$

35.1. $B - 2\vec{u} = (0, 3, -1) - 2(-1, -1, 1) =$

$= (0, 3, -1) + (2, 2, -2) =$

$= (2, 5, -3)$

35.2. $\overrightarrow{BA} = A - B = (-2, -2, 1)$

$2\overrightarrow{BA} - 3\vec{u} = 2(-2, -2, 1) - 3(-1, -1, 1) =$

$= (-4, -4, 2) + (3, 3, -3) =$

$= (-1, -1, -1)$

35.3. $\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = (-k, -k, k)$

a) $\|\vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-k)^2 + (-k)^2 + k^2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\vec{v}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ou $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\|\vec{v}\| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{3k^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 3k^2 = 2 \Leftrightarrow k^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\vec{v}\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ou $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

36.1. $B(2, 3, 1)$; $C(-2, 3, 1)$; $D(-2, -1, 1)$; $E(2, -1, 6)$; $F(2, 3, 6)$ e $H(-2, -1, 6)$

36.2. a) $y = 3$ **b)** $-2 \le x \le 2 \wedge -1 \le y \le 3 \wedge 1 \le z \le 6$

36.3. Aresta $[AE]$

36.4. $\overline{BC} = |2 + 2| = 4$

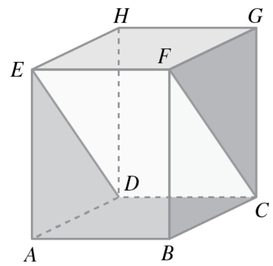
$\overline{BF} = |1 - 6| = 5$

$\overline{DC} = |3 + 1| = 4$

$\overline{FC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BF}^2$

$\overline{FC} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

$A_{[DCFE]} = 4\sqrt{41}$ u. a.



36.5. $F(2, 3, 6)$, $D(-2, -1, 1)$, $P(x, y, z)$

$d(F, P) = d(D, P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 =$

$= (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 12z + 36 =$

$= x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8x - 8y - 10z + 43 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x + 8y + 10z - 43 = 0$

36.6. $B(2, 3, 1)$, $F(2, 3, 6)$, $M\left(2, 3, \frac{7}{2}\right)$

$C(-2, 3, 1)$, $G(-2, 3, 6)$, $N\left(-2, 3, \frac{7}{2}\right)$

$\overrightarrow{MN} = (-4, 0, 0) = -4(1, 0, 0)$

$MN: (x, y, z) = \left(2, 3, \frac{7}{2}\right) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

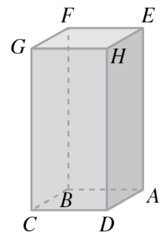
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 \\ z = \frac{7}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Pág. 46

37. $A(2, 1, -1)$

$B(0, -1, -1)$

$C(2, -3, -1)$



37.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -2, 0)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (2, -2, 0)$

$D = A + \overrightarrow{BC} =$

$= (2, 1, -1) + (2, -2, 0) = (4, -1, -1)$

37.2. a) A base $[ABCD]$ está contida no plano de equação $z = -1$. Como a altura do prisma é 6 e E tem cota positiva, a base $[EFGH]$ está contida no plano $z = 5$, dado que $-1 + 6 = 5$.

b) $A(2, 1, -1)$; $B(0, -1, -1)$ e $P(x, y, z)$

$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 =$

$= x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y - 1 = 0$

c) $B(0, -1, -1)$ e $F(0, -1, 5)$

$\overrightarrow{BF} = (0, 0, 6) = 6(0, 0, 1)$

$(x, y, z) = (0, -1, -1) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

d) $P(x, y, z)$

$d(B, P) = d(F, P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 + 2z + 1 = z^2 - 10z + 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12z = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 2$

e) G tem a mesma abcissa e ordenada de C.

$G(2, -3, 5)$ e $F(0, -1, 5)$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = (2, -2, 0)$

$(x, y, z) = (0, -1, 5) + k(2, -2, 0), k \in [0, 1]$

f) Trata-se da superfície esférica de centro A e raio 3.

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$

37.3. $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4 + 4 + 0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$V_{\text{prisma}} = (2\sqrt{2})^2 \times 6$ u. v. $= 48$ u. v.

38.1. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 10 \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + \left(y^2 + 2y + 1\right) - 1 +$

$+\left(z^2 + 4z + 4\right) - 4 + 10 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - 3\right)^2 + \left(y + 1\right)^2 + \left(z - 2\right)^2 \leq 4$

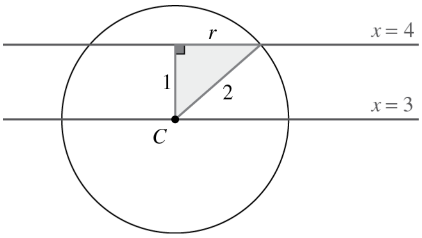
Centro: C (3 , –1 , 2) ; raio: 2

38.2. a) O plano de equação $y = 1$ passa no centro da esfera.

O plano de equação $y = 1 - 2 \Leftrightarrow y = -1$ é tangente à esfera porque $r = 2$.

A interseção é o ponto de coordenadas (3 , 1 , 2).

b)

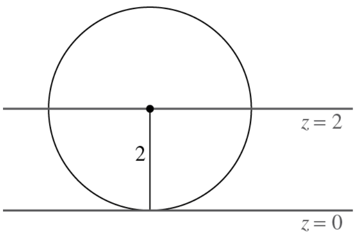


O plano de equação $x = 3$ passa no centro da esfera.

O plano de equação $x = 4$ interseta a esfera segundo um círculo de centro (4 , –1 , 2) e raio r, sendo $r^2 + 1^2 = 2^2 \Leftrightarrow r^2 = 3 \Leftrightarrow r = \sqrt{3}$

Logo, a interseção é o círculo de centro (4 , –1 , 2) e raio $\sqrt{3}$ contido no plano de equação $x = 4$.

c) xOy: $z = 0$



O plano de equação $z = 0$ é tangente à esfera no ponto (3 , –1 , 0).

38.3. A (–1 , 0 , 0)

$\left(x - 3\right)^2 + \left(y + 1\right)^2 + \left(z - 2\right)^2 \leq 4$

$\left(-1 - 3\right)^2 + \left(0 + 1\right)^2 + \left(0 - 2\right)^2 \leq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 + 1 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 21 \leq 4$ (falso)

Então, A não pertence à esfera.

C (3 , –1 , 2)

Raio: $\overline{AC} = \sqrt{\left(3+1\right)^2 + \left(-1-0\right)^2 + \left(2-0\right)^2} =$

$= \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$

$\left(x + 1\right)^2 + y^2 + z^2 = 21$

39. A (4 , 0 , 0) ; B (1 , 3 , 0) ; C (–2 , 0 , 0) e F (1 , 3 , 6)

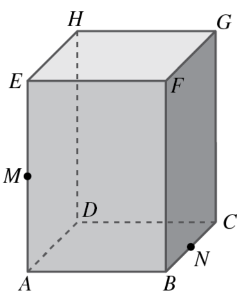
39.1. $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} =$

$= \left(4 , 0 , 0\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} =$

$= \left(4 , 0 , 0\right) + \frac{1}{2}\left(0 , 0 , 6\right) =$

$= \left(4 , 0 , 0\right) + \left(0 , 0 , 3\right) =$

$= (4 , 0 , 3)$



$N\left(\frac{1-2}{2} , \frac{3}{2} , 0\right)$, logo $N\left(-\frac{1}{2} , \frac{3}{2} , 0\right)$.

$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2} - 4 , \frac{3}{2} , -3\right) = \left(-\frac{9}{2} , \frac{3}{2} , -3\right)$

39.2. $\overrightarrow{BC} = C - B = \left(-3 , -3 , 0\right)$

$\overrightarrow{BF} = F - B = \left(0 , 0 , 6\right)$

$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = \left(4 , 0 , 0\right) + \left(-3 , -3 , 0\right)$

Assim, $D\left(1 , -3 , 0\right)$.

$H = D + \overrightarrow{DH} = D + \overrightarrow{BF} = \left(1 , -3 , 0\right) + \left(0 , 0 , 6\right)$

Então, H (1 , –3 , 6).

$\overrightarrow{DN} = N - D = \left(-\frac{1}{2} , \frac{3}{2} , 0\right) - \left(1 , -3 , 0\right)$

$\overrightarrow{DN} = \left(-\frac{3}{2} , \frac{9}{2} , 0\right)$

$\overrightarrow{MF} = F - M = \left(1 , 3 , 6\right) - \left(4 , 0 , 3\right) = \left(-3 , 3 , 3\right)$

$\overrightarrow{HB} = B - H = \left(1 , 3 , 0\right) - \left(1 , -3 , 6\right)$

$\overrightarrow{HB} = \left(0 , 6 , -6\right)$

$\overrightarrow{DN} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{MF} + c\overrightarrow{HB}$

$\left(-\frac{3}{2} , \frac{9}{2} , 0\right) = a\left(-3 , -3 , 0\right) + b\left(-3 , 3 , 3\right) +$

$+c\left(0 , 6 , -6\right) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -3a - 3b = -\frac{3}{2} \\ -3a + 3b + 6c = \frac{9}{2} \\ 3b - 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ a - b - 2c = -\frac{3}{2} \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} - b \\ \frac{1}{2} - b - b - 2c = -\frac{3}{2} \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} - b \\ \frac{1}{2} - 2b - b = -\frac{3}{2} \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} - b \\ -3b = -2 \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{2}{3}$ e $c = \frac{1}{3}$

39.3. $P = D + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{HF} = D + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HF} =$

$= D + \overrightarrow{AF} = = D + DG = G$

$P \equiv G$

39.4. $E = A + \overrightarrow{BF} = (4 , 0 , 0) + (0 , 0 , 6) = (4 , 0 , 6)$

a) $\vec{e}_2\left(0 , 1 , 0\right)$ tem a direção de Oy

$\left(x , y , z\right) = \left(4 , 0 , 6\right) + k\left(0 , 1 , 0\right)$, $k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = k , \ k \in \mathbb{R} \\ z = 6 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{FE} = E - F = (4\ ,\ 0\ ,\ 6) - (1\ ,\ 3\ ,\ 6) =$

$= (3\ ,\ -3\ ,\ 0)$

$(x\ ,\ y\ ,\ z) = (4\ ,\ 0\ ,\ 6) + k(3\ ,\ -3\ ,\ 0),\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = -3k \quad ,\ k \in \mathbb{R} \\ z = 6 \end{cases}$$

39.5. a) $G = C + \overrightarrow{BF} = (-2\ ,\ 0\ ,\ 0) + (0\ ,\ 0\ ,\ 6) = (-2\ ,\ 0\ ,\ 6)$

Seja $P\ (x\ ,\ y\ ,\ z)$.

$d(A\ ,\ P) = d(G\ ,\ P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 + z^2 = (x+2)^2 + y^2 + (z-6)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + z^2 = x^2 + 4x + 4 + z^2 - 12z + 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12x + 12z - 24 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - z + 2 = 0$

b) $\overline{MN} = \left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2} =$

$= \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{126}{4}} = \frac{\sqrt{9 \times 14}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$

40. $A\ (2\ ,-1\ ,3)$; $B\ (3\ ,-1\ ,-1)$; $C\ (1\ ,1\ ,3)$ e $D\ (x\ ,y\ ,z)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (x-2\ ,\ y+1\ ,\ z-3)$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(C - B) = \frac{1}{2}(-2\ ,\ 2\ ,\ 4) = (-1\ ,\ 1\ ,\ 2)$

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x-2\ ,\ y+1\ ,\ z-3) = (-1\ ,\ 1\ ,\ 2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -1 \\ y + 1 = 1 \\ z - 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

$D\ (1\ ,0\ ,5)$

Pág. 47

41. $\overrightarrow{EA}(2\ ,\ -4\ ,\ -4)$; $\overrightarrow{EH}(2\ ,\ 2\ ,\ -1)$; $\overrightarrow{GH}(-2\ ,\ 1\ ,\ -2)$ e $C\ (4\ ,1\ ,1)$

41.1. A reta CG passa em C e tem a direção do vetor $\overrightarrow{EA}(-2\ ,\ 4\ ,\ 4)$

$(x\ ,\ y\ ,\ z) = (4\ ,\ 1\ ,\ 1) + k(-2\ ,\ 4\ ,\ 4),\ k \in \mathbb{R}$

41.2. $G = C + \overrightarrow{CG} = C + \left(-\overrightarrow{EA}\right) = (4\ ,\ 1\ ,\ 1) + (-2\ ,\ 4\ ,\ 4) =$

$= (2\ ,\ 5\ ,\ 5)$

$G\ (2\ ,5\ ,5)$

41.3. $\overrightarrow{EH}(2\ ,\ 2\ ,\ -1)$; $\overrightarrow{GH}(-2\ ,\ -2\ ,\ 1)$

$A = C + \overrightarrow{CA} = C + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GH} = (-2\ ,\ 1\ ,\ -2)$ e $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{EH} = (-2\ ,\ -2\ ,\ 1)$

$A = (4\ ,\ 1\ ,\ 1) + (-2\ ,\ 1\ ,\ -2) + (-2\ ,\ -2\ ,\ 1) =$

$= (4 - 2 - 2\ ,\ 1 - 2\ ,\ 1 - 2 + 1) = (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$

Logo, o vértice A é a origem do referencial.

42.1. • $I\left(\frac{1-2}{2}\ ,\ \frac{2+4}{2}\ ,\ \frac{-3-1}{2}\right) = I\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 3\ ,\ -2\right)$

• $J\left(\frac{-2+2}{2}\ ,\ \frac{4+3}{2}\ ,\ \frac{-1+3}{2}\right) = J\left(0\ ,\ \frac{7}{2}\ ,\ 1\right)$

• $K\left(\frac{-2+0}{2}\ ,\ \frac{4+1}{2}\ ,\ \frac{-1+1}{2}\right) = k\left(-1\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ 0\right)$

42.2. • $\overrightarrow{IJ} = J - I = \left(0\ ,\ \frac{7}{2}\ ,\ 1\right) - \left(-\frac{1}{2}\ ,\ 3\ ,\ -2\right) =$

$= \left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 3\right)$

• $\overrightarrow{JK} = K - J = \left(-1\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ 0\right) - \left(0\ ,\ \frac{7}{2}\ ,\ 1\right) =$

$= (-1\ ,\ -1\ ,\ -1)$

• $\overrightarrow{KI} = I - K = \left(-\frac{1}{2}\ ,\ 3\ ,\ -2\right) - \left(-1\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ 0\right) =$

$= \left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -2\right)$

42.3. • $\overrightarrow{AD} = D - A = (2\ ,\ 3\ ,\ 3) - (1\ ,\ 2\ ,\ -3) = (1\ ,\ 1\ ,\ 6)$

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{IJ}$. Os vetores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{IJ}$ são colineares.

• $\overrightarrow{DC} = C - D = (0\ ,\ 1\ ,\ 1) - (2\ ,\ 3\ ,\ 3) = (-2\ ,\ -2\ ,\ -2)$

$\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{JK}$. Os vetores $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{JK}$ são colineares.

• $\overrightarrow{AC} = C - A = (0\ ,\ 1\ ,\ 1) - (1\ ,\ 2\ ,\ -3) = (-1\ ,\ -1\ ,\ 4)$

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{KI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IK}$

Os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{IK}$ são colineares.

43.1. Vértices E, F, C e D

43.2. $F\ (2\ ,4\ ,2)$

$A\ (2\ ,0\ ,-2)$; $H\ (-2\ ,0\ ,2)$ e $G\ (-2\ ,4\ ,2)$

$M\ (0\ ,4\ ,2)$ e $L\ (2\ ,4\ ,0)$

$\overrightarrow{HG} = G - H = (0\ ,\ 4\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{ML} = L - M = (2\ ,\ 0\ ,\ -2)$

$S = A + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HG} - 2\overrightarrow{ML}\right) =$

$= (2\ ,\ 0\ ,\ -2) + \frac{1}{2}\left[(0\ ,\ 4\ ,\ 0) - 2(2\ ,\ 0\ ,\ -2)\right] =$

$= (2\ ,\ 0\ ,\ -2) + \frac{1}{2}(-4\ ,\ 4\ ,\ 4) =$

$= (2\ ,\ 0\ ,\ -2) + (-2\ ,\ 2\ ,\ 2) =$

$= (0\ ,\ 2\ ,\ 0)$

$S\ (0\ ,2\ ,0)$ é o centro do cubo.

Raio: $\left\|\overrightarrow{SF}\right\| = \sqrt{(2-0)^2 + (4-2)^2 + (2-0)^2} =$

$= \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$

Condição: $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 12$

43.3. $A\ (2\ ,0\ ,-2)$

$\overline{QA} = 1$

$Q\ (2\ ,0\ ,-1)$ e $M\ (0\ ,4\ ,2)$

$\overrightarrow{QM} = M - Q = (-2\ ,\ 4\ ,\ 3)$

$QM:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1) + k(-2\ ,\ 4\ ,\ 3),\ k \in \mathbb{R}$

43.4. $I\ (x\ ,\ y\ ,\ 0)$ é um ponto do plano xOy.

$(x\ ,\ y\ ,\ 0) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1) + k(-2\ ,\ 4\ ,\ 3)$

$(x\ ,\ y\ ,\ 0) = (2 - 2k\ ,\ 4k\ ,\ -1 + 3k)$

$$\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 4k \\ 0 = -1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ k = \frac{1}{3} \end{cases},\ \text{logo } I\left(\frac{4}{3}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ 0\right).$$

43.5. $A\,(2\,,0\,,-2)$ e $M\,(0\,,4\,,2)$

$\overrightarrow{AM} = M - A = (-2\ ,\ 4\ ,\ 4)$

$AM:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 0\ ,\ -2) + k(-2\ ,\ 4\ ,\ 4),\ k \in \mathbb{R}$

$P\,(0\,,y\,,0)$ é um ponto de Oy.

$(0\ ,\ y\ ,\ 0) = (2\ ,\ 0\ ,\ -2) + k(-2\ ,\ 4\ ,\ 4)$

$$\begin{cases} 0 = 2 - 2k \\ y = 0 + 4k \\ 0 = -2 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 4k \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

O sistema é impossível.

Não existe $k \in \mathbb{R}$, tal que:

$(0\ ,\ y\ ,\ 0) = (2\ ,\ 0\ ,\ -2) + k(-2\ ,\ 4\ ,\ 4)$

43.6. Reta FG:

$\overrightarrow{FG} = G - F = (-2\ ,\ 4\ ,\ 2) - (2\ ,\ 4\ ,\ 2)$

$\overrightarrow{FG}(-4\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$FG:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 4\ ,\ 2) + k(-4\ ,\ 0\ ,\ 0),\ k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico da reta FG: $X\,(2 - 4k\,,4\,,2)$

Reta QX:

$Q\,(2\,,0\,,-1)$ e $X\,(2 - 4k\,,4\,,2)$

$\overrightarrow{QX} = (-4k\ ,\ 4\ ,\ 3)$

$QX:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1) + \lambda(-4k\ ,\ 4\ ,\ 3)$

Seja $Y\,(0\,,y\,,0)$ o ponto de Oy que pertence a QX.

$(0\ ,\ y\ ,\ 0) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1) + \lambda(-4k\ ,\ 4\ ,\ 3)$

$$\begin{cases} 0 = 2 - 4k\lambda \\ y = 4\lambda \\ 0 = -1 + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 - \dfrac{4}{3}k \\ y = \dfrac{4}{3} \\ \lambda = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{3}k = 2 \\ y = \dfrac{4}{3} \\ \lambda = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{4}{3} \\ \lambda = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Para $k = \dfrac{3}{2}$, $X = (2 - 6\ ,\ 4\ ,\ 2) = (-4\ ,\ 4\ ,\ 2)$

Tem-se $X(-4\ ,\ 4\ ,\ 2)$ e $Y\left(0\ ,\ \dfrac{4}{3}\ ,\ 0\right)$.

O segmento de reta $[FG]$ pode ser definido pela condição $y = 4 \wedge z = 2 \wedge -2 \le x \le 2$.

Como a abcissa de X é igual a -4, não pertence a $[-2\ ,\ 2]$.

Então, X não pertence ao segmento de reta $[FG]$.

43.7. a) $[FB]:\ x = 2 \wedge y = 4 \wedge -2 \le z \le 2$ **ou**

$(x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 4\ ,\ 2) + k(0\ ,\ 0\ ,\ -4),\ k \in [0\ ,\ 1]$

b) $\overrightarrow{LM}(-2\ ,\ 0\ ,\ 2)$; $L\,(2\,,4\,,0)$

$[LM]:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 4\ ,\ 0) + k(-2\ ,\ 0\ ,\ 2),\ k \in [0\ ,\ 1]$

Pág. 48

Avaliação 2

1. $\overline{BD}^2 = 10^2 + 10^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 200 \Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{200} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BD} = 10\sqrt{2}$

A ordenada de D é $\dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

A cota de D é 5 e a abcissa é 0.

Logo, $D\left(0\ ,\ 5\sqrt{2}\ ,\ 5\right)$

A ordenada de F é $-5\sqrt{2}$, a abcissa é 0 e a cota de F é -5.

Assim, $F\left(0\ ,\ -5\sqrt{2}\ ,\ -5\right)$.

Resposta: **(B)**

2. Como o ponto $P\left(a^2 - 3\ ,\ 2b\ ,\ a\right)$ pertence ao eixo Oz e tem cota positiva, temos que:

$$\begin{cases} a^2 - 3 = 0 \\ 2b = 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{3} \vee a = \sqrt{3} \\ b = 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 0 \end{cases}$$

Resposta: (C)

3. Uma condição que define a reta AB é $x = 4 \wedge z = -8$.

A equação do plano ODC é $x = 0$.

O plano ABC é definido pela condição $z = -8$.

Resposta: (C)

4. $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 3^2 = 25 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 3 \end{cases}$$

Trata-se da circunferência de centro (0, 0, 3) e raio 4 contida no plano de equação $z = 3$.

Resposta: (A)

5. A equação do plano xOz é $y = 0$. O ponto B é simétrico do ponto A relativamente ao plano xOz. Assim, $B\,(3\,,2\,,-1)$.

Resposta: (B)

6. $P\,(0\,,-1\,,0)$; $Q\,(1\,,0\,,0)$ e $A\,(x\,,y\,,z)$

$\overline{PA} = \overline{QA}$

$x^2 + (y+1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1} = \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -x$

Apenas em $(0\,,0\,,-3)$ se verifica a condição $y = -x$.

Resposta: (A)

Pág. 49

7.1. $B\,(-2\,,2\,,0)$; $C\,(-2\,,-2\,,0)$; $E\,(2\,,2\,,4)$ e $G\,(-2\,,-2\,,4)$

7.2. $\overline{AP} = \overline{BP}$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2 + \cancel{(y-2)^2} + \cancel{z^2} = (x+2)^2 + \cancel{(y-2)^2} + \cancel{z^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x = 4x \Leftrightarrow -8x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$

7.3. $\overrightarrow{CE} = E - C = (2\ ,\ 2\ ,\ 4) - (-2\ ,\ -2\ ,\ 0) = (4\ ,\ 4\ ,\ 4)$

Por exemplo, $(x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 2\ ,\ 0) + k(4\ ,\ 4\ ,\ 4),\ k \in \mathbb{R}$

7.4. O centro da superfície esférica é o centro do cubo.

Centro do cubo: $(0\,,0\,,2)$

O raio da superfície esférica é metade da diagonal espacial do cubo. Seja d a medida do comprimento dessa diagonal.

$d^2 = 4^2 + 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow d^2 = 48 \Leftrightarrow d = \sqrt{48} \Leftrightarrow d = 4\sqrt{3}$, donde $r = 2\sqrt{3}$.

Uma equação da superfície esférica pedida é:

$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 12$

8.1. a) $AB:\ x = 1 \wedge z = 0$ **b)** $CT:\ x = 0 \wedge y = 2$

c) $BG:\ y = 1 \wedge z = 0$

8.2. **a)** $[FG]$: $x=-1 \wedge z=0 \wedge 0 \leq y \leq 1$

b) $[AP]$: $x=1 \wedge y=-1 \wedge -2 \leq z \leq 0$

c) $[JN]$: $y=0 \wedge z=1 \wedge -2 \leq x \leq 0$

8.3. $[LGHM]$: $-2 \leq x \leq -1 \wedge y=1 \wedge 0 \leq z \leq 1$

8.4. $0 \leq x \leq 1 \wedge 1 \leq y \leq 2 \wedge -2 \leq z \leq -1$

9. $C(-1, 0, 3)$; $E(9, -2, 1)$ e $F(7, 2, 5)$

9.1. $D = C + \overrightarrow{CD} = C + \overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{FE} = E - F = (2, -4, -4)$

$D = (-1, 0, 3) + (2, -4, -4) = (1, -4, -1)$

$D(1, -4, -1)$

9.2. **a)** $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6z - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 10x + 25) - 25 + y^2 + (z^2 + 6z + 9) - 9 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 36$

Como A é o centro da superfície esférica, vem $A(5, 0, -3)$

b) $\overrightarrow{FE}(2, -4, -4)$

$\|\overrightarrow{FE}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$

O cubo tem aresta igual a 6.

A superfície esférica tem centro no ponto A e raio igual a 6. Como 3 é um ponto da superfície esférica, porque $[AB]$ uma aresta do cubo, então $\overline{AB} = 6$.

9.3. **a)** $M\left(\frac{9+7}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$

$M(8, 0, 3)$; $A(5, 0, -3)$ e $P(x, y, z)$

$d(M, P) = d(A, P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-8)^2 + y^2 + (z-3)^2 = (x-5)^2 + y^2 + (z+3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + z^2 - 6z + 9 =$

$= x^2 - 10x + 25 + z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x - 12z + 39 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4z - 13 = 0$

α: $2x + 4z - 13 = 0$

b) α é o conjunto de ponto do espaço equidistantes de M e A.

Interseção de α com Ox: $y = 0 \wedge z = 0$

$$\begin{cases} 2x+4z-13=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=13 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{2} \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$N\left(\frac{13}{2}, 0, 0\right)$ é o ponto do eixo Ox equidistante de M e de A.

9.4. $V_{[ABCF]} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} =$

$= \frac{1}{3} \times \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} \times \overline{BF} =$

$= \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 6}{2} \times 6 = 36$

$V_{[ABCF]} = 36$ u. v.

9.5. $E(9, -2, 1)$

a) $\overrightarrow{EF}(-2, 4, 4)$

$r: (x, y, z) = (9, -2, 1) + k(-2, 4, 4), k \in \mathbb{R}$

b) xOz: $y = 0$

$$r: \begin{cases} x = 9 - 2k \\ y = -2 + 4k, \ k \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 4k \end{cases}$$

Um ponto genérico da reta r tem coordenadas:

$(9-2k, -2+4k, 1+4k), k \in \mathbb{R}$

O ponto da reta r que pertence a xOz tem de satisfazer a condição $y = 0$:

$-2 + 4k = 0 \Leftrightarrow 4k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

As coordenadas do ponto são:

$x = 9 - 2 \times \frac{1}{2} \wedge y = 0 \wedge z = 1 + 4 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 8 \wedge y = 0 \wedge z = 3$

As coordenadas pedidas são $(8, 0, 3)$.

c) $(x, y, z) = (9, -2, 1) + k(-2, 4, 4), k \in [0, 1]$

Um ponto genérico de $[EF]$ é:

$P(9-2k, -2+4k, 1+4k), k \in [0, 1]$

$G = C + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE} = E - A = (9, -2, 1) - (5, 0, -3) =$

$= (4, -2, 4)$

$G = (-1, 0, 3) + (4, -2, 4) = (3, -2, 7)$

Pretendemos determinar k de tal modo que $\overline{GP} = 7{,}5$

$\overline{GP} = 7{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(9-2k-3)^2 + (-2+4k+2)^2 + (1+4k-7)^2} = 7{,}5$

$\Leftrightarrow (6-2k)^2 + (4k)^2 + (4k-6)^2 = 7{,}5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k^2 - 24k + 36 + 16k^2 + 16k^2 - 48k + 36 - 56{,}25 = 0$

$\Leftrightarrow 36k^2 - 72k + 15{,}75 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k^2 - 8k + 1{,}75 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{8 \pm 6}{8} \Leftrightarrow k = \frac{1}{4} \vee k = \frac{7}{2}$

Como $k \in [0, 1]$, temos $k = \frac{1}{4}$.

Para $k = \frac{1}{4}$, vem $P\left(9 - \frac{2}{4}, -2 + \frac{4}{4}, 1 + \frac{4}{4}\right)$.

Assim, $P\left(\frac{17}{2}, -1, 2\right)$.

10. $\vec{u}(5k+8, 0, 5)$ e $\vec{v}(2, k^2-4, k-3)$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5k+8}{2} = \frac{5}{k-3} \wedge k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5k^2 + 8k - 15k - 24 = 10 \wedge (k = -2 \vee k = 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5k^2 - 7k - 34 = 0 \wedge (k = -2 \vee k = 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{7 \pm \sqrt{49+680}}{10} \wedge (k = -2 \vee k = 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{7 \pm 27}{10} \wedge (k = -2 \vee k = 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(k = -2 \vee k = \frac{17}{5}\right) \wedge (k = -2 \vee k = 2) \Leftrightarrow k = -2$

Pág. 50

Avaliação global

1. Centro da esfera: (2, 3 ,–1)

O plano de equação $x = 2$ passa no centro da esfera. Logo, divide essa esfera em dois sólidos com o mesmo volume.

Resposta: (C)

2. $\vec{r}(-1,3)$ é um vetor diretor da reta *r*.

O declive da reta *r* é $m_r = \frac{3}{-1} = -3$.

O declive da reta *s* é $m_s = m_r = -3$.

Como a reta *s* passa no ponto de coordenadas $(0,1)$, a ordenada na origem é 1.

$s: y = -3x + 1$

Resposta: (A)

3. $C(1, -1, 2)$ e $D(-1, 0, 1)$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (-1\ ,\ 0\ ,\ 1) - (1\ ,\ -1\ ,\ 2) = (-\ 2\ ,\ 1\ ,-1)$

$\vec{u}(a, 2, b)$

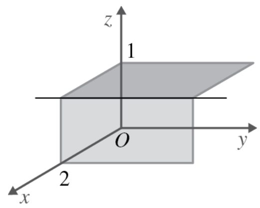
$\vec{u}$ é colinear com $\overrightarrow{CD}$ se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k\overrightarrow{CD}$.

$\vec{u} = k\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (a\ ,2\ ,b) = k(-2\ ,\ 1\ ,-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a\ ,\ 2\ ,\ b) = (-2k\ ,\ k\ ,\ -k) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2k \\ 2 = k \\ b = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ k = 2 \\ b = -2 \end{cases}$

Resposta: (C)

4. $x = 2 \wedge z = 1$



Resposta: (B)

5.1. $\overrightarrow{GB} = B - G \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = (3\ ,\ 3\ ,\ 0) - (0\ ,\ 0\ ,\ 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = (3\ ,\ 3\ ,\ -3)$

Resposta: (C)

5.2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} =$

$= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

Resposta: (D)

Pág. 51

6. Dos dados podemos concluir que:

A (2 , 2 , 0) ; *B* (2 , 4 , 0) ; *C* (0 , 4 , 0) ; *D* (0 , 2 , 0) ;
E (2 , 2 , 2) ; *F* (2 , 4 , 2) ; *G* (0 , 4 , 2) e *H* (0 , 2 , 2)

6.1. $\overrightarrow{BH} = H - B = (-2\ ,\ -2\ ,\ 2)$

$BH:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 4\ ,\ 0) + k(-2\ ,\ -2\ ,\ 2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 4 - 2k,\ k \in \mathbb{R} \\ z = 2k \end{cases}$

6.2. $\overline{AG} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4+4} =$

$= \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3}$

6.3. $I = D + \overrightarrow{HF} - \overrightarrow{GB} = D + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BG} = D + \overrightarrow{DG} =$

$= G(0\ ,\ 4\ ,\ 2)$

7.1. Seja *a* o comprimento da aresta do cubo.

A cota de *V* é igual à altura da pirâmide, ou seja, é igual à aresta do cubo. Como *V* é um ponto do eixo *Oz*, temos $V(0, 0, a)$.

$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirâmide}}$

$a^3 + \frac{1}{3}a^2 a = 288 \Leftrightarrow a^3 + \frac{1}{3}a^3 = 288 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a^3 + a^3 = 864 \Leftrightarrow\Leftrightarrow 4a^3 = 864 \Leftrightarrow a^3 = \frac{864}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{216} \Leftrightarrow a = 6$

$V(0,0,6)$

$A(0,0,-6)$; $B(6,0,-6)$; $C(6,6,-6)$; $D(0,6,-6)$;

$E(6,0,0)$; $F(6,6,0)$; $G(0,6,0)$ e $O(0,0,0)$

7.2. Proposição verdadeira.

A reta *EF* é perpendicular ao plano *xOz*. Logo, a reta *EF* é perpendicular a todas as retas contidas no plano *xOz* que passam em *E,* em particular à reta *EV*.

Portanto, o triângulo [*VEF*] é retângulo em *E*.

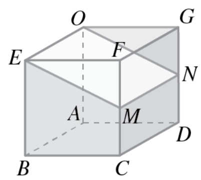
7.3. O simétrico do ponto $C(6,6,-6)$ relativamente ao plano *xOz* é o ponto $P(6,-6,-6)$.

7.4. $y = 0 \wedge z = 6$

7.5. $EBC:\ \ x = 6$

7.6. $[FG]: y = 6 \wedge z = 0 \wedge 0 \le x \le 6$

7.7. [*EMNO*] é um retângulo.



$\overline{EM}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FM}^2$

$\overline{EM}^2 = 6^2 + 3^2$

$\overline{EM}^2 = 45$

$\overline{EM} = \sqrt{45}$

$\overline{EM} = 3\sqrt{5}$

$P_{[EMNO]} = 2\overline{EM} + 2\overline{EO} =$

$= 2 \times 3\sqrt{5} + 2 \times 6 = 6\sqrt{5} + 12$

$P_{[EMNO]} = \left(6\sqrt{5} + 12\right)$ u. c.

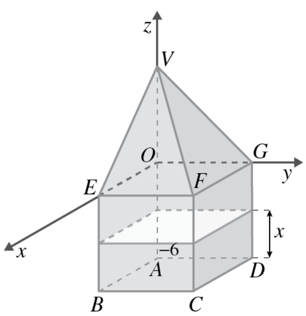
7.8. $V_{\text{sólido}} = 288$

Seja *x* a altura do sólido abaixo do plano *z* = *k*.

$6 \times 6 \times x = \frac{288}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36x = 144 \Leftrightarrow x = 4$

Logo, $k = -6 + 4 = -2$.



Pág. 52

8. *E* (5 , 1 , –1) e *F* (5 , 7 , 7)

8.1. *P* (*x* , *y* , *z*)

$d(E\ ,\ P) = d(F\ ,\ P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = (x-5)^2 + (y-7)^2 + (z-7)^2$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = y^2 - 14y + 49 + z^2 - 14z + 49$

$\Leftrightarrow 12y + 16z - 96 = 0$

$\Leftrightarrow 3y + 4z - 24 = 0$

8.2. Ponto A

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 3y+4z-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 4z=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases}$$

$A\ (0\ ,0\ ,6)$

Ponto D

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ 3y+4z-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ 3y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y=8 \end{cases}$$

$D\ (0\ ,8\ ,0)$

8.3. $C = B + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (0\ ,\ 8\ ,\ 0) - (0\ ,\ 0\ ,\ 6) = (0\ ,\ 8\ ,\ -6)$

$C = (10\ ,\ 0\ ,\ 6) + (0\ ,\ 8\ ,\ -6) = (10\ ,\ 8\ ,\ 0)$

$C\ (10\ ,8\ ,0)$

9. $A\ (2\ ,-1\ ,3)$; $B\ (-1\ ,0\ ,2)$ e $\vec{u}(2\ ,\ -1\ ,\ 5)$

9.1. a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1\ ,\ 0\ ,\ 2) - (2\ ,\ -1\ ,\ 3) = (-3\ ,\ 1\ ,\ -1)$

b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \vec{u} = \frac{1}{2}(-3\ ,\ 1\ ,\ -1) - (2\ ,\ -1\ ,\ 5) =$

$= \left(-\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right) + (-2\ ,\ 1\ ,\ -5) =$

$= \left(-\frac{7}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ -\frac{11}{2}\right)$

c) $C + \vec{u} = B \Leftrightarrow C = B - \vec{u} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = (-1\ ,\ 0\ ,\ 2) - (2\ ,\ -1\ ,\ 5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = (-3\ ,\ 1\ ,\ -3)$

$C\ (-3\ ,1\ ,-3)$

d) $\vec{v} = k\vec{u} \wedge \|\vec{v}\| = 2$

$\vec{v} = k\vec{u} = (2k\ ,\ -k\ ,\ 5k)$

$\|\vec{v}\| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (-k)^2 + (5k)^2} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k^2 + k^2 + 25k^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30k^2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = \frac{4}{30} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{2}{15}} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{30}}{15}$

$\vec{v}\left(\frac{2\sqrt{30}}{15}\ ,\ -\frac{\sqrt{30}}{15}\ ,\ \frac{\sqrt{30}}{3}\right)$

ou

$\vec{v}\left(-\frac{2\sqrt{30}}{15}\ ,\ \frac{\sqrt{30}}{15}\ ,\ -\frac{\sqrt{30}}{3}\right)$

e) $M\left(\frac{2-1}{2}\ ,\ \frac{-1+0}{2}\ ,\ \frac{3+2}{2}\right)$; $M\left(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

f) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

9.2. $(x\ ,y\ ,z) = (2\ ,\ -1\ ,\ 3) + k(2\ ,\ -1\ ,\ 5),\ k \in \mathbb{R}$

9.3. $(x\ ,y\ ,z) = (-3\ ,1\ ,\ -3) + k(-3\ ,1\ ,\ -1),\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3-3k \\ y = 1+k \\ z = -3-k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

10. $A\ (2\ ,0\ ,-1)$

r: $(x\ ,y\ ,z) = (1\ ,\ 4\ ,\ -1) + k(1\ ,\ -4\ ,\ 3),\ k \in \mathbb{R}$

10.1. $\vec{e}_1(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ tem a direção de Ox.

$(x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1) + k(1\ ,\ 0\ ,\ 0),\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+k \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

10.2. $P(1+k\ ,\ 4-4k\ ,\ -1+3k),\ k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta r.

yOz: $x = 0$

$1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -1$

Para $k = -1$ obtemos o ponto de coordenadas $(0\ ,8\ ,-4)$

10.3. Pretende-se determinar o valor de k para o qual $\overline{OP} = 12$

$\overline{OP} = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1+k)^2 + (4-4k)^2 + (-1+3k)^2} = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 2k + k^2 + 16 - 32k + 16k^2 + 1 - 6k + 9k^2 = 144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 26k^2 - 36k - 126 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13k^2 - 18k - 63 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{18 \pm \sqrt{324+3276}}{26} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{18 \pm \sqrt{3600}}{26} \Leftrightarrow k = \frac{18 \pm 60}{26} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 3 \vee k = -\frac{21}{13}$

Para $k = 3$	Para $k = -\frac{21}{13}$
$1+3=4$	$1-\frac{21}{13} = -\frac{8}{13}$
$4-4\times3=-8$	$4-4\times\frac{21}{13} = \frac{136}{13}$
$-1+3\times3=5$	$-1+3\times\frac{21}{13} = -\frac{76}{13}$

$P(4\ ,\ -8\ ,\ 8)$ ou $P\left(-\frac{8}{13}\ ,\ \frac{136}{13}\ ,\ -\frac{76}{13}\right)$

Pág. 53

11.1. a) $B + \overrightarrow{\boldsymbol{BF}} = F$

b) $\overrightarrow{CG} - \_?\_ = \overrightarrow{AF}$

Como $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$, temos $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AF}$.

Dado que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$, vem $\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{\boldsymbol{FE}} = \overrightarrow{AF}$

c) $F + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FH} =$

$= F + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FH} =$ ($\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA}$)

$= B + \overrightarrow{BD} = D$ $\left(\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}\right)$

11.2. $A(16\ ,\ -3\ ,\ 10)$; $B(20\ ,\ 1\ ,\ 3)$; $C(12\ ,\ 2\ ,\ -1)$ e $E(14\ ,\ 13\ ,\ 18)$

a) $G = C + \overrightarrow{CG} =$

$= C + \overrightarrow{AE} =$

$= (12\ ,\ 2\ ,\ -1) + (-2\ ,\ 16\ ,\ 8) =$

$= (12-2\ ,\ 2+16\ ,\ -1+8) =$

$= (10\ ,\ 18\ ,\ 7)$

Cálculo auxiliar

$\overrightarrow{AE} = E - A =$

$= (14\ ,\ 13\ ,\ 18) - (16\ ,\ -3\ ,\ 10) =$

$= (14-16\ ,\ 13+3\ ,\ 18-10) = (-2\ ,\ 16\ ,\ 8)$

b) $\overrightarrow{AB} = B - A = (20,\ 1,\ 3) - (16, -3,\ 10) =$

$= (20 - 16,\ 1 + 3,\ 3 - 10) = (4,\ 4, -7)$

$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} =$

$= \sqrt{81} = 9$

A base do prisma é um quadrado de lado 9.

$\overrightarrow{AE}(-2\ ,\ 16\ ,\ 8)$

$\left\| \overrightarrow{AE} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 16^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 256 + 64} = \sqrt{324} = 18$

A altura do prisma é igual a 18.

$V_{prisma} = A_{base} \times$ altura $= 9 \times 9 \times 18 = 1458$

$V_{prisma} = 1458$ u. v.

c) Centro: $A(16, -3,\ 10)$

Raio: $r = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = 9$

Equação: $(x - 16)^2 + (y + 3)^2 + (z - 10)^2 = 81$

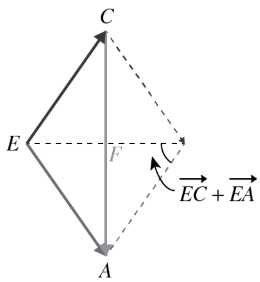
d) $A(16, -3,\ 10)$; $\overrightarrow{AB} = (4,\ 4, -7)$

$AB:\ P = A + k\overrightarrow{AB}\ ,\ k \in \mathbb{R}$

$AB:\ (x,\ y,\ z) = (16,\ -3,\ 10) + k(4,\ 4,\ -7)\ ,\ k \in \mathbb{R}$

12.1. Atendendo a que [*ABCDE*] é uma pirâmide quadrangular regular e *F* é o centro da base [*ABCD*], podemos concluir que *E*, *A*, *C* e *F* são complanares e *F* é o ponto médio de [*AC*].

Pela regra do paralelogramo, para a adição de vetores temos que:



$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EA}\right) = \frac{1}{2}\left[(-5,\ 1,\ 1) + (1,\ 1,\ -5)\right] =$

$= \frac{1}{2}(-4\ ,\ 2\ ,\ -4)$

Logo, $\overrightarrow{EF}(-2\ ,\ 1\ ,\ -2)$.

12.2. Altura da pirâmide:

$\left\| \overrightarrow{EF} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$

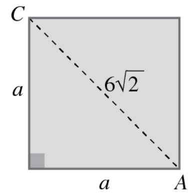
A base da pirâmide é um quadrado e [*AC*] é uma das diagonais.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = (-1\ ,\ -1\ ,\ 5) + (-5\ ,\ 1\ ,\ 1) =$

$= (-6\ ,\ 0\ ,\ 6)$

$\left\| \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{36 + 0 + 36} = \sqrt{2 \times 36} = 6\sqrt{2}$

Seja *a* o comprimento da aresta da base.



$a^2 + a^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 72 \Leftrightarrow a^2 = 36$

$A_{base} = a^2 = 36$

$V = \frac{1}{3} A_{base} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times a^2 \times \left\| \overrightarrow{EF} \right\| =$

$= \frac{1}{3} \times 36 \times 3$ u. a. = 36 u. a.