Pág. 56

Atividade de diagnóstico

1. Correspondências ***g*** (a 3 não corresponde qualquer elemento de *D*) e ***h*** (ao elemento 1 de *E* correspondem dois elementos em *F*).

2.1. $D_f = \{-4 , 0 , 1 , 2\} = A$

2.2. $D'_f = \{0 , 1 , 4\}$ **2.3.** $B = \{0 , 1 , 4 , 7\}$

2.4. $f(1) = 1$ **2.5.** $f(x) = 4 \Leftrightarrow x = 2$

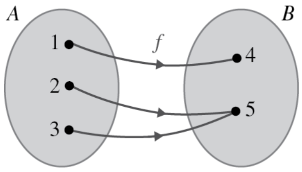
3. $g(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 3$

4.1. $f(x) = 2$ e $i(x) = 0$ **4.2.** $h(x) = \frac{1}{3}x$ e $i(x) = 0$

Pág. 57

5. $\left(-\frac{1}{2}, a\right) = \left(b, 1\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \wedge a = 1\frac{1}{3}$

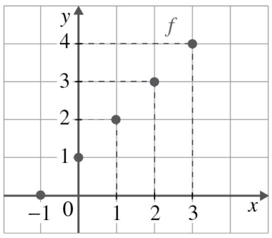
6.1.



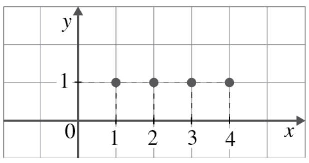
6.2. **a)** $D_f = A = \{1 , 2 , 3\}$ **b)** $D'_f = \{4 , 5\}$

c) $B = \{4 , 5\}$

7.1.



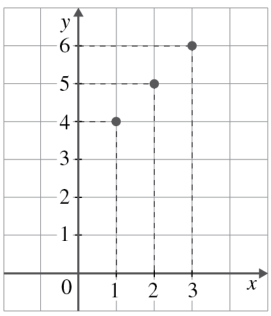
7.2.



8.1.

x	1	2	3
$f(x)$	**4**	**5**	**6**

8.2.



8.3. $G_f = \{(1 , 4) , (2 , 5) , (3 , 6)\}$

8.4. $f(x) = x + 3$

Pág. 58

Atividade inicial 1

1.1. $D_f = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

1.2. $D'_f = \{2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

1.3. $f(3) = 4$

1.4. $f(x) = 5 \Leftrightarrow x = 4$

2. $f(x) = x + 1$

Resposta: (B)

3.1.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

3.2. $G_f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$

4.1. $G_h = \{(1 , 2), (2 , 3), (3 , 4)\}$

4.2. $G_h = \{(1 , 3), (4 , 6)\}$

$h(1) = 2f(1) = 2 \times 2 = 4$

$h(2) = 2f(2) = 2 \times 3 = 6$

4.3. $G_h = \{(1 , 3), (4 , 6)\}$

$h(1) = f(1) + 1 = 2 + 1 = 3$

$h(4) = f(4) + 1 = 5 + 1 = 6$

4.4. $G_h = \{(1 , 3), (2 , 5)\}$

$h(1) = f(2 \times 1) = f(2) = 3$

$h(2) = f(2 \times 2) = f(4) = 5$

4.5. $G_h = \{(1 , 4), (2 , 6)\}$

$h(1) = 2f(1) = 2 \times 2 = 4$

$h(2) = 2f(2) = 2 \times 3 = 6$

Pág. 60

1. $A = \{-1 , 0 , 2\}$ e $B = \{2 , 3\}$

1.1. **a)** $A \times B = \{(-1, 2), (-1, 3), (0, 2), (0, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

b $B \times A = \{(2, -1), (2, 0), (2, 2), (3, -1), (3, 0), (3, 2)\}$

c) $A^2 = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 2), (0, -1), (0, 0), (0, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 2)\}$

d) $B^2 = \{(2 , 2), (2 , 3), (3 , 2), (3 , 3)\}$

1.2. $C = \{-1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

$\# A \times C = \# A \times \# C = 3 \times 5 = 15$ elementos

Pág. 61

2. $A = \{-1 , 0 , 1 , 2\}$

$B = \{-3 , 0 , 3 , 6 , 9 , 10\}$

$F = \{(-1 , 3) , (0 , 0) , (1 , 3) , (2 , 6)\}$

F é o gráfico de uma função. A cada elemento de *A* corresponde um e um só de *B*.

$G = \{(-1 , 10) , (0 , 10) , (1 , 10) , (2 , 10)\}$

G é o gráfico de uma função. A cada elemento de *A* corresponde um, e um só, de *B*.

$H = \{(-1 , 0) , (0 , 0) , (-1 , 9) , (2 , 10) , (1 , 3)\}$

H não é o gráfico de uma função. Ao elemento – 1 de A correspondem dois elementos de B.

$I = \{(-1, -3), (1, 3), (2, 9)\}$

I não é o gráfico de uma função. Ao elemento 0 de A não corresponde qualquer elemento de B.

$J = \{(-1, -3), (2, 0), (0, 3), (3, 6), (1, 9)\}$

J não é o gráfico de uma função de A em B porque $3 \notin A$.

3. • $F = \{(x, y) \in A \times B : y = 3x^2\}$

$F = \{(-3, 27), (-1, 3), (0, 0), (1, 3), (3, 27)\}$

• $G = \{(x, y) \in A \times B : y = x\}$

$G = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$

• $H = \{(x, y) \in A \times B : x > y + 3\}$

$= \{(x, y) \in A \times B : y < x - 3\}$

$H = \{(-3, 9), (-1, -9), (0, -9), (1, -3),$

$(1, -9), (3, -3), (3, -9)\}$

• $I = \{(x, y) \in A \times B : y = 3\}$

$I = \{(-3, 3), (-1, 3), (0, 3), (1, 3), (3, 3)\}$

F e I são gráficos de funções de A em B porque a cada elemento de A associam um e um só elemento de B. G não é o gráfico de uma função de A em B porque $(-1, -1) \notin A \times B$.

H não é o gráfico de uma função porque, por exemplo, ao elemento 1 de A associa dois elementos de B.

Pág. 62

4. $g : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{Z}$

$x \mapsto x^2$

4.1. **a)** $D_g = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b) O conjunto de chegada de g é $\mathbb{Z}$.

c) $g(-2) = g(2) = 4$; $g(-1) = g(1) = 1$; $g(0) = 0$

$D'_g = \{0, 1, 4\}$

4.2. **a)** $G_{g|_C} = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

b) $G_{g|_D} = \{(-2, 4), (-1, 1), (1, 1)\}$

4.3. $f(E) = \{0, 1, 4\}$

Pág. 64

5.1. $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

$3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

$f : \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{3x-2}$

5.2. $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

$g : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-4}$

5.3. $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$D_h = \mathbb{R}$ dado que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \neq 0$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

5.4. $i(x) = \dfrac{-x+2}{x^2-6x+5}$

$D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

$i : \mathbb{R} \setminus \{1, 5\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{-x+2}{x^2-6x+5}$

5.5. $j(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x}}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \neq 0\} =]0, +\infty[$

$j :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2x}{\sqrt{x}}$

5.6. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0 \wedge x \neq 0\} = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$

$x + 1 \geq 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x \neq 0$

$k : [-1, +\infty[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

5.7. $l(x) = \sqrt{\dfrac{-2x-5}{3}}$

$D_l = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{-2x-5}{3} \geq 0\right\} = \left]-\infty, -\dfrac{5}{2}\right]$

$\dfrac{-2x-5}{3} \geq 0 \Leftrightarrow -2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{2}$

$l : \left]-\infty, -\dfrac{5}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{\dfrac{-2x-5}{3}}$

5.8. $m(x) = \sqrt{x(x^2-1)}$

$D_m = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - 1) \geq 0\} = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$

$x(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) > 0$

$\Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty[$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x^2-1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$m:\ [-1\ ,\ 0]\cup[1\ ,\ +\infty[\ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x(x^2-1)}$

5.9. $n(x)=\sqrt{x(x^2+2x+1)}$

$D_n=\{x\in\mathbb{R}: x(x^2+2x+1)\geq 0\}=\{-1\}\cup[0\ ,+\infty[$

$x(x^2+2x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\{-1\}\cup[0\ ,+\infty[$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x(x+1)^2$	$-$	0	$-$	0	$+$

$n:\ \{-1\}\cup[0\ ,\ +\infty[\ \to\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x(x^2+2x+1)}$

Pág. 65

6.1. $f(x)=x^2-1$

Por exemplo: $f(1)=1^2-1=0$

$f(-1)=(-1)^2-1=0$

Logo, existem objetos diferentes com a mesma imagem, pelo que *f* é uma função não injetiva.

6.2. $g(x)=-3x+\dfrac{1}{2}$

$g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow -3x_1+\dfrac{1}{2}=-3x_2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x_1=-3x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$

Portanto:

$\forall x_1\ ,x_2\in\mathbb{R}, g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

g é uma função injetiva.

6.3. $h(x)=x^3-x$

$h(x)=0\Leftrightarrow x(x^2-1)=0\Leftrightarrow x=0\vee x^2-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee=x-1\vee x=1$, logo $h(0)=h(-1)=0$.

Como existem objetos diferentes com a mesma imagem, *h* é uma função não injetiva.

6.4. $i(x)=x^3+1$

$i(x_1)=i(x_2)\Leftrightarrow x_1^3+1=x_2^3+1\Leftrightarrow x_1^3=x_2^3\Leftrightarrow x_1=x_2$

$\forall x_1\ ,x_2\in\mathbb{R}, i(x_1)=i(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

i é uma função injetiva.

Pág. 66

7. $A=\{-2\ ,-1\ ,1\ ,2\}$

$B=\{1\ ,2\ ,4\ ,5\}$

$f:A\to B$ $\qquad$ $g:A\to B$

$x\mapsto x+3$ $\qquad$ $x\mapsto |x|$

$f(-2)=-2+3=1$; $f(-1)=-1+3=2$

$f(1)=1+3=4$; $f(2)=2+3=5$

$D'f=f(A)=\{1\ ,2\ ,4\ ,5\}=B$

f é uma função sobrejetiva porque $D'_f=B$.

$g(-2)=|-2|=2$, $g(-1)=|-1|=1$; $g(1)=|1|=1$

$g(2)=|2|=2$

$D'_g=g(A)=\{1\ ,2\}\neq B$

g é uma função não sobrejetiva porque $D'_g=\{1\ ,2\}\neq B$

8. $h:\mathbb{N}\ \to\ \mathbb{N}$

$n\mapsto 2n$

O contradomínio de *h* é o conjunto dos números pares. Logo, *h* é não sobrejetiva porque o seu contradomínio é diferente do conjunto de chegada.

9. $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+$

$x\mapsto x^2$

$i(x)=y\Leftrightarrow x^2=y\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y}$

Para cada $y\in\mathbb{R}_0^+$ existe pelo menos um $x\in\mathbb{R}$ tal que $y=i(x)$. Logo, *i* é uma função sobrejetiva.

Pág. 68

10.1. *f* é não injetiva , porque $f(a)=f(b)$.

f é não sobrejetiva, porque $D'_f=\{x\ ,y\ ,z\}\neq B$.

A função *f* não é injetiva, logo não é bijetiva. Também não é sobrejetiva.

10.2. $g:\{-1\ ,0\ ,1\ ,4\}\to\{0\ ,1\ ,16\}$

$x\mapsto x^2$

$g(-1)=g(1)=1$, $g(0)$ e $g(4)=16$

g é não injetiva, porque $g(-1)=g(1)$.

g é sobrejetiva, porque $D'_g=\{0\ ,1\ ,16\}$.

g é sobrejetiva e não injetiva, logo é não bijetiva.

10.3. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto h(x)=\dfrac{x-1}{3}$

h é bijetiva (função afim não constante).

10.4. $i:[1\ ,4]\to[0\ ,4]$

i é não injetiva dado que, por exemplo, $h(1)=h(4)$.

i é não sobrejetiva, porque $D'_i=[1\ ,4]\neq[0\ ,4]$.

i é não injetiva e não sobrejetiva, então é não bijetiva.

11. *f* é não injetiva, porque $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$.

f é não sobrejetiva, porque, se $a<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $ax^2\leq 0$ e se $a>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $ax^2\geq 0$. Logo, $D'_f\neq\mathbb{R}$.

Pág. 70

12.1. **a)** $D'_g=\{2\ ,\ 5\ ,\ 10\}$ $\qquad$ **b)** $D'_f=\{0\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 9\}$

c) $D_{g\circ f}=\{-1\ ,\ -2\ ,\ -3\}$ $\qquad$ **d)** $D'_{g\circ f}=\{2\ ,\ 5\ ,\ 10\}$

12.2. **a)** $g\circ f(-1)=g(f(-1))=g(1)=2$

b) $(g\circ f)(x)=10\Leftrightarrow x=-3$

13. $f(x)=2x^2$ e $g(x)=x-1$

13.1. a) $(g\circ f)(-1)=f(g(1))=f(0)=0$

b) $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(2)=1$

c) $(f\circ f)(-2)=f(f(-2))=f(8)=128$

d) $(g\circ g)(0)=g(g(0))=g(-1)=-2$

13.2. $D_f=D_g=\mathbb{R}$

a) $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1)=2(x-1)^2$

$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 2(x-1)^2$

b) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x^2)=2x^2-1$

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 2x^2-1$

Pág. 72

14. $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3$ e $g(x)=\dfrac{1-x}{3}$

14.1. $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=y\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x+3=y\Leftrightarrow -x+6=2y\Leftrightarrow x=-2y+6$

$f^{-1}(x)=-2x+6$ e $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto -2x+6$

14.2. $D_g=\mathbb{R}$

$g(x)=y\Leftrightarrow \dfrac{1-x}{3}=y\Leftrightarrow 1-x=3y\Leftrightarrow x=1-3y$

$g^{-1}(x)=2-3x$

$g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1-3x$

15. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x\mapsto \dfrac{3}{x}$

$f(x)=y\Leftrightarrow \dfrac{3}{x}=y\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}3=xy\overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow}x=\dfrac{3}{y}$

$f^{-1}(x)=\dfrac{3}{x}=f(x)$

Pág. 73

16. $f(x)=\dfrac{x}{2}-1$

16.1. Uma função afim não constante é uma função bijetiva.

16.2. $f(x)=y\Leftrightarrow \dfrac{x}{2}-1=y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=2y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2y+2$

$f^{-1}(x)=2x+2$

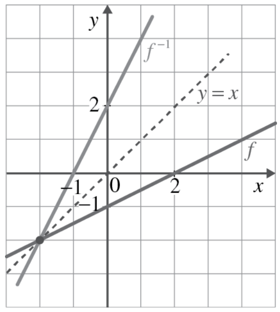
$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 2x+2$

16.3.

x	$y=\dfrac{x}{2}-1$
0	–1
2	0

x	$y=2x+2$
–1	0
0	2



16.4. $f(2)=0$ e $f(4)=\dfrac{4}{2}-1=1$

$A(2\,,0)$ e $B(4\,,1)$

$A'(0\,,2)$ e $B'(1\,,4)$

$f'(0)=2$ e $f'(1)=4$

Pág. 75

17. $f^{-1}(2x+4)=5\Leftrightarrow f(f^{-1}(2x+4))=f(5)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+4=10\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3$, logo $S=\{3\}$

Pág. 78

Atividades complementares

18. $A=\{1\,,0\,,2\}$ e $B=\{3\,,5\}$

18.1. a) $A\times B=\{(1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (0,\ 3),\ (0,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5)\}$

b) $B\times A=\{(3,\ 1),\ (3,\ 0),\ (3,\ 2),\ (5,\ 1),\ (5,\ 0),\ (5,\ 2)\}$

c) $A^2=\{(1, 1), (1, 0), (1, 2), (0, 1), (0, 0), (0, 2), (2, 1), (2, 0), (2, 2)\}$

d) $B^2=\{(3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$

18.2. $\#A\times C=\#A\times\#C=3\times 6=18$ elementos

19. G representa o gráfico de uma função porque a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.

H não representa o gráfico de uma função porque ao elemento 1 de A correspondem dois elementos de B.

20. $A=\{-1\,,0\,,1\,,2\}$ e $B=\{-3\,,-2\,,-1\,,0\}$

$E=\{(x\,,y)\in A\times B: y=0\}=$

$=\{(-1\,,0)\,,(0\,,0)\,,(1\,,0)\,,(2\,,0)\}$

$F=\{(x\,,y)\in A\times B: y=x-2\}=$

$=\{(-1\,,3)\,,(0\,,-2)\,,(1\,,-1)\,,(2\,,0)\}$

$G=\{(x\,,y)\in A\times B: y=x\}=\{(-1\,,-1)\,,(0\,,0)\}$

E e F representam funções de A em B porque a cada elemento de A associam um e um só elemento de B.

G não representa uma função de A em B porque aos elementos 1 e 2 de A não corresponde qualquer elemento de B.

21.1. a) $D_g=\{0\ ,1\ ,4\ ,9\}$

b) O conjunto de chegada de g é $\mathbb{R}$.

c) $D'_g=\{0\ ,1\ ,2\ ,3\}$

21.2. $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$

$f(C)=\{0\,,1\,,2\}$

21.3. $G_{f|_D}=\{(1\,,1)\,,(4\,,2)\,,(9\,,3)\}$

dado que $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$ e $\sqrt{9}=3$.

22.1. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-6x+9}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x^2-6x+9\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$

$f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-6x+9}$

22.2. $g(x)=\dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-4\geq 0 \wedge \sqrt{x^2-4}\neq 0\right\}=$

$=]-\infty\,,-2[\,\cup\,]2\,,+\infty[$

$x^2-4\geq 0 \wedge \sqrt{x^2-4}\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,-2[\,\cup\,]2\,,+\infty[$

	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	–	–	–	0	+
$x+2$	–	0	+	+	+
x^2-4	+	0	–	0	+

$g:]-\infty\,,2[\,\cup\,]2\,,+\infty[\,\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$

22.3. $h(x)=\dfrac{3}{x\sqrt{x+2}}$

$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}: x+2\geq 0 \wedge x\sqrt{x+2}\neq 0\right\}=$

$=]-2\,,0[\,\cup\,]0\,,+\infty[$

$x+2\geq 0 \wedge x\sqrt{x+2}\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geq -2 \wedge \left(x\neq 0 \wedge \sqrt{x+2}\neq 0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geq -2 \wedge x\neq 0 \wedge x+2\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>-2 \wedge x\neq 0$

$h:]-2\,,0[\,\cup\,]0\,,+\infty[\,\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3}{x\sqrt{x+2}}$

22.4. $i(x)=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$

$D_i=\left\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0 \wedge \sqrt[3]{x-1}\neq 0\right\}=\mathbb{R}_0^+\setminus\{1\}$

$\sqrt[3]{x-1}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$i:\mathbb{R}_0^+\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$

$j(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-2x+3}}$

$D_j=\left\{x\in\mathbb{R}: -2x+3\geq 0 \wedge \sqrt{-2x+3}\neq 0\right\}=\left]-\infty\,,\dfrac{3}{2}\right[$

$-2x+3\geq 0 \wedge \sqrt{-2x+3}\neq 0 \Leftrightarrow -2x+3>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$

$j:\left]-\infty\,,\dfrac{3}{2}\right[\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-2x+3}}$

23.1. $f(x)=\dfrac{1-x}{2}$; $D_f=\mathbb{R}$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{1-x_1}{2}=\dfrac{1-x_2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-x_1=1-x_2 \Leftrightarrow -x_1=-x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

$\forall x_1\,,x_2\in\mathbb{R}\,,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

Logo, *f* é injetiva.

23.2. $g(x)=ax+b,\ a\neq 0$; $D_g=\mathbb{R}$

$g(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow ax_1+b=ax_2+b \Leftrightarrow ax_1=ax_2 \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x_1=x_2$

$\forall x_1, x_2\in\mathbb{R}\,,\ g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Então, *g* é injetiva.

24. *f* e *h* não são injetivas porque existem objetos diferentes com a mesma imagem.

Pág. 79

25. $A=\{1\,,2\,,3\,,4\}$ e $B=\{2\,,4\,,6\,,8\}$

25.1. $D'_h=\{2\,,4\,,6\,,8\}=B$

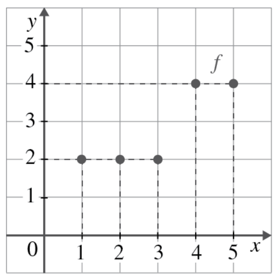
h é injetiva e sobrejetiva.

25.2. $D'_i=\{2\,,6\,,8\}\neq B$ e $i(1)=i(2)$

i é não injetiva e não sobrejetiva.

26. $A=\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\}$

26.1. $f(1)=f(2)=f(3)=2$ e $f(4)=f(5)=4$



26.2. **a)** *f* é não injetiva porque existem objetos diferentes com a mesma imagem (*f* (1) = *f* (2), por exemplo).

b) $D'_f=\{2\,,4\}\neq A$

f é não sobrejetiva porque $D'_f\neq A$.

27.1. $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1-1=2x_2-2 \Leftrightarrow 2x_1=2x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

$\forall x_1\,,x_2\in\mathbb{N}\,,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Logo, *f* é injetiva.

$\forall x\in\mathbb{N},\ 2x-1$ é um número natural ímpar.

D'_f é o conjunto dos números naturais ímpares.

Como $D'_f\neq\mathbb{R}$, *f* é não sobrejetiva.

27.2. $A=\{2\,,3\,,4\,,5\}$

$f(2)=2\times 2-1=3$; $f(3)=2\times 3-1=5$

$f(4)=2\times 4-1=7$; $f(5)=2\times 5-1=9$

$f(A)=\{3\,,5\,,7\,,9\}$

27.3. $G_{f|_B}=\{(1\,,1)\,,(2\,,3)\,,(3\,,5)\,,(4\,,7)\}$

28. $g:\{0,1,2,3\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto(-1)^x$

28.1. $g(0)=(-1)^0=1$; $g(1)=(-1)^1=-1$; $g(2)=(-1)^2=1$;

$g(3)=(-1)^3=-1$, logo $D'_g=\{-1,1\}$.

28.2. g é não injetiva porque, por exemplo, $g(0)=g(2)$.

28.3. $G_g=\{(0,1),(1,-1),(2,1),(3,-1)\}$

29. $A=\{1,2,3,4\}$

$G_f=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$G_g=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$

29.1. a) Proposição falsa. Por exemplo, $f(1)=g(2)\wedge 1\neq 2$

b) Proposição verdadeira. Por exemplo, $1\neq 2\wedge f(1)=g(2)$

29.2. a) f é injetiva porque objetos diferentes têm imagens diferentes.

b) g é injetiva (não existem objetos diferentes com imagens iguais) e sobrejetiva $(D'_g=A)$. Logo, g é bijetiva.

30. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x+1$ $\quad$ $x\mapsto x^2$

$h:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{1}{2}$

30.1. $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge x^2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$f(g(x))=f(x^2)=x^2+1$

$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x^2+1$

30.2. $D_{f\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_f\wedge f(x)\in D_f\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+1)=(x+1)+1=x+2$

$f\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x+2$

30.3. $D_{g\circ h}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_h\wedge h(x)\in D_g\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}:x\neq 0\wedge\frac{1}{x}\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\neq 0\wedge x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$

$g\circ h:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{1}{x^2}$

30.4. $D_{h\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g\wedge g(x)\in D_h\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge x^2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x^2)=\frac{1}{x^2}$

$h\circ g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{1}{x^2}$

31. $f(x)=2x+6,\ D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=-3(x+8),\ D_g=\mathbb{R}$

$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge -3(x+8)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f[-3(x+8)]=2[-3(x+8)]+6=$

$=-6x-48+6=-6x-42$

$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto -6x-42$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge 2x+6\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+6)=-3(2x+6+8)=$

$=-6x-42$

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto -6x-42$

$f\circ g=g\circ f$. Logo, f e g são permutáveis.

32. $f(x)=x^2,\ D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=x-1,\ D_g=\mathbb{R}$

$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge x-1\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1)=(x-1)^2=x^2-2x+1$

$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x^2-2x+1$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge x^2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2-1$

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x^2-1$

Como $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$, f e g não são permutáveis.

Pág. 80

33.1. $f(x)=4-2x$

$g(x)=\frac{1}{2}(4-x)=2-\frac{1}{2}x$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(2-\frac{1}{2}x\right)=4-2\left(2-\frac{1}{2}x\right)=$

$=4-4+x=x$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4-2x)=2-\frac{1}{2}(4-2x)=$

$=2-2+x=x$

$\forall x\in\mathbb{R},(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$

33.2. $f(x)=2x+b$

$g(x)=\frac{1}{2}(x-b)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}b$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}b\right)=2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}b\right)+b=$

$=x-b+b=x$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+b) = \frac{1}{2}(2x+b) - \frac{1}{2}b =$$

$$= x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b = x$$

$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

34. A função afim $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = ax + b$ é bijetiva se $a \neq 0$. As funções *f* e *h* são bijetivas.

34.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 = y \Leftrightarrow x + 2 = 2y \Leftrightarrow x = 2y - 2$

$f^{-1}(x) = 2x - 2$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x - 2$

34.2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{2x+1}{3}$

$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3} = y \Leftrightarrow 2x + 1 = 3y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 3y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}$

$h^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

35. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

- $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, porque $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$

  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\{0\}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  Logo, *f* é injetiva.

- $y = \frac{1}{x} \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} xy = 1 \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{y}$

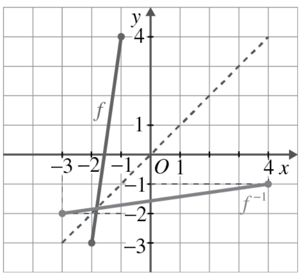
  Para qualquer $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe um $x \in \mathbb{R}\{0\}$ tal que $y = f(x)$.

  Logo, *f* é sobrejetiva.

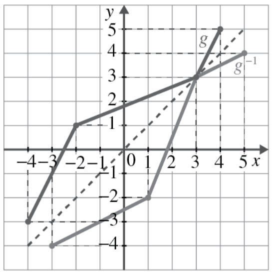
- Como *f* é injetiva e sobrejetiva, então *f* é bijetiva.

  $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{y}$, logo $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} = f(x)$.

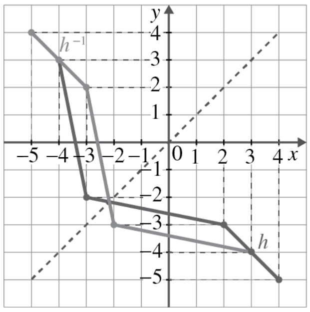
36.1.



36.2.



36.3.



37.1. $f(x) = \frac{x-1}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

A função afim $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = ax + b$ é bijetiva se $a \neq 0$. Logo, *f* é bijetiva.

37.2. $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = y \Leftrightarrow x - 1 = 3y \Leftrightarrow x = 3y + 1$

$f^{-1}(x) = 3x + 1$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3x + 1$

37.3. $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(3x+1) =$

$= \frac{1}{3}(3x+1) - \frac{1}{3} = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) = 3\left(\frac{x-1}{3}\right) + 1 =$

$= x - 1 + 1 = x$

38. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\{0\}$

$x \mapsto \frac{2}{x}$

38.1. $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} = \frac{2}{x_2} \Leftrightarrow 2x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Então, *f* é injetiva.

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2}{x} \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} xy = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{y}$

Para cada $y \in \mathbb{R}\{0\}$, existe $x \in \mathbb{R}\{0\}$ tal que $y = f(x)$.

38.2. $f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$

$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \mapsto \frac{2}{x}$

38.3. $f(x) = 0{,}1 \Leftrightarrow x = f^{-1}(0{,}1) \Leftrightarrow x = \frac{2}{0{,}1} \Leftrightarrow x = 20$

39. $f(x) = \frac{x}{5},\ D_f = \mathbb{R}$; $\quad g(x) = \frac{2x+1}{3},\ D_g = \mathbb{R}$

$h(x) = 2x,\ D_h = \mathbb{R}$

39.1. $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x+1}{3}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{3}\right) = \frac{2x+1}{15}$$

$$(f\circ g)(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+1}{15} = y \Leftrightarrow 2x+1 = 15y$$

$$\Leftrightarrow 2x = 15y-1 \Leftrightarrow x = \frac{15y-1}{2}$$

$$(f\circ g)(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{15x-1}{2}$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3} = y \Leftrightarrow x = \frac{3y-1}{2}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = y \Leftrightarrow x = 5y$$

$$f^{-1}(x) = 5x$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(5x) =$$

$$= \frac{3\times 5x-1}{2} = \frac{15x-1}{2}$$

$$g^{-1}\circ f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{15x-1}{2}$$

39.2. $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{5}\right) = \dfrac{2\frac{x}{5}+1}{3}$

$$= \frac{\frac{2x+5}{5}}{3} = \frac{2x+5}{15}$$

$$(g\circ f)(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+5}{15} = y \Leftrightarrow 2x+5 = 15y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 15y-5 \Leftrightarrow x = \frac{15y-5}{2}$$

$$(g\circ f)^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{15x-5}{2}$$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x-1}{2}\right) = 5\times\frac{3x-1}{2}$$

$$= \frac{15x-5}{2}$$

$$f^{-1}\circ g^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{15x-5}{2}$$

39.3. Como $D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$, $D_{(f\circ g)\circ h} = D_{f\circ(g\circ h)} = \mathbb{R}$.

$$[(f\circ g)\circ h](x) = (f\circ g)(h(x)) =$$

$$= (f\circ g)(2x) = \frac{2\times(2x)+1}{15} = \frac{4x+1}{15}$$

$$(g\circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x) = \frac{2\times(2x+1)}{3} = \frac{4x+1}{3}$$

$$[f\circ(g\circ h)](x) = f[(g\circ h)(x)] = f\left(\frac{4x+1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\times\frac{4x+1}{3} = \frac{4x+1}{15}$$

$$D_{(f\circ g)\circ h} = D_{f\circ(g\circ h)} = \mathbb{R}$$

$$[(f\circ g)\circ h](x) = [f\circ(g\circ h)](x) = \frac{4x+1}{15}$$

Pág. 81

40. $f(x) = \dfrac{2x-1}{2}$, $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

40.1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{2} = x - \dfrac{1}{2}$

A função afim $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = ax+b$ é bijetiva se $a \neq 0$. Logo, *f* é bijetiva.

40.2. $f(x) = y \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{2} = y \Leftrightarrow x = y + \dfrac{1}{2}$

$$f^{-1}(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + \frac{1}{2}$$

40.3. *g* não é injetiva porque, por exemplo, $g(-1) = g(1)$.

Assim, *g* não admite inversa.

41.1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{2x-1}{5}$$

f é bijetiva.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x-1}{5} = y \Leftrightarrow 2x-1 = 5y \Leftrightarrow x = \frac{5y+1}{2}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{5x+1}{2}$$

41.2. $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ e *g* é bijetiva
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$, porque $y > 0$

$$f^{-1}(x) = x^2$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto x^2$$

42.1. **a)** $D_h = [-3, 4]$ **b)** $D'_h = [-3, 2]$

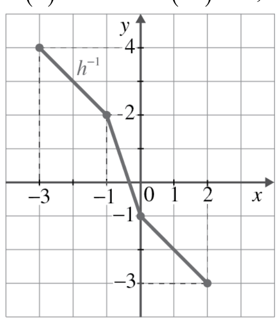
42.2. **a)** $h(4) = -3 \Leftrightarrow h^{-1}(-3) = 4$

b) $h(-1) = 0 \Leftrightarrow h^{-1}(0) = -1$

c) $(h\circ h^{-1})\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

42.3. $h(-3) = 2 \Leftrightarrow h^{-1}(2) = 3$; $h(-1) = 0 \Leftrightarrow h^{-1}(0) = -1$

$h(2) = -1 \Leftrightarrow h^{-1}(-1) = 2$; $h(4) = -3 \Leftrightarrow h^{-1}(-3) = 4$



43.1. $D_f = [-5, 6]$; $D'_f = [0, 4]$

43.2. $g(x) = \sqrt{3x+4}$

a) $(g\circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(4) = \sqrt{3\times 4+4} = \sqrt{16} = 4$

b) $(f\circ g)(7)=f(g(7))=f(\sqrt{21+4})=f(5)=4$

c) $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=\sqrt{0+4}=2$

44. Por exemplo:

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x-1$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(2x-1)=(2x-1)^2$

Logo, $f(x)=(2x-1)^2$

45. $f(x)=\dfrac{x-1}{3}$ e $g(x)=1-2x$

45.1. a) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1-2)=f(-1)=\dfrac{-1-1}{3}=-\dfrac{2}{3}$

b) $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$

45.2. $D_f=D_g=\mathbb{R}$

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1-2x)=\dfrac{1-2x-1}{3}=-\dfrac{2}{3}x$

$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\wedge 1-2x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -\dfrac{2}{3}x$

b) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{x-1}{3}\right)=1-2\times\dfrac{x-1}{3}=$

$=1-\dfrac{2x-2}{3}=\dfrac{3-2x+2}{3}=\dfrac{5-2x}{3}$

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{5-2x}{3}$

Pág. 82

Avaliação 1

1. • Se $G_f=\{(2,3),(5,5)\}$, $G_{f^{-1}}=\{(3,2),(5,5)\}$.

• Se $f(x)=-3$ e $D_f=\mathbb{R}$, *f* não é injetiva. Logo, *f* não tem inversa.

• Se $g(x)=x^2$ e $D_g=\mathbb{R}$, *g* não é injetiva pelo que *g* não admite inversa.

• $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -x$

$g(x)=y\Leftrightarrow -x=y\Leftrightarrow x=-y$, logo $g^{-1}(x)=-x$.

Resposta: (D)

2. • $f(x)=x^3$

$f\circ f(x)=f(f(x))=f(x^3)=(x^3)^3=x^9$

• $G_f=\{(2,3),(3,5)\}$

$f\circ f(2)=f(f(2))=f(3)=5$

Resposta: (B)

3. $f(x)=-x$, $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=y\Leftrightarrow -x=y\Leftrightarrow x=-y$

$f^{-1}(x)=-x$

$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow -x=-x\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ (condição universal)

Resposta: (C)

4. $f(x)=\dfrac{3x}{5}$, $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{3x}{5}=y\Leftrightarrow 3x=5y\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}y$

$f^{-1}(x)=\dfrac{5x}{3}$

$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow\dfrac{3x}{5}=\dfrac{5x}{3}\Leftrightarrow 9x=25x\Leftrightarrow 16x=0\Leftrightarrow x=0$

Reposta: (A)

5. $(f\circ f^{-1})(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ e $(f\circ f^{-1})(\sqrt{3})=\sqrt{3}$

Resposta: (C)

6. $7+f^{-1}(x-1)=9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x-1)=2\Leftrightarrow$ $\quad\left|\ f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow y=f(x)\right.$

$\Leftrightarrow x-1=f(2)\Leftrightarrow x=f(2)+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=6+1\Leftrightarrow x=7$

Resposta: (A)

7.1. $D_f=D'_{f^{-1}}=[-2\ ,\ 2]$

Resposta: (D)

7.2. $f^{-1}(0)=1\Leftrightarrow 0=f(1)$

Resposta: (B)

8. $(f\circ g)(1)+g^{-1}(2)=$

$=f(g(1))+1=$ $\quad\left|\ g(1)=2\right.$

$=f(2)+1=$

$=0+1=1$

Resposta: (A)

Pág. 83

9. $f^{-1}(5)=1$ e $f^{-1}(1)=-1$

$g(x)=\dfrac{x+1}{3}$

9.1. $(g\circ f)(1)=g(f(1))=$ $\quad\left|\ f^{-1}(5)=1\Leftrightarrow 5=f(1)\right.$

$=g(5)=\dfrac{5+1}{3}=2$

9.2. $g(x)+f(-1)=(g\circ g^{-1})(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{3}+1=x\Leftrightarrow$ $\quad\left|\ f^{-1}(1)=-1\Leftrightarrow 1=f(-1)\right.$

$\Leftrightarrow x+1+3=3x\Leftrightarrow 2x=4\Leftrightarrow x=2$

$S=\{2\}$

10. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x+3}{2}$

10.1. $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{x_1+3}{2}=\dfrac{x_2+3}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1+3=x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2$

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

Logo, *f* é injetiva.

$y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{x+3}{2}\Leftrightarrow 2y=x+3\Leftrightarrow x=2y-3$

Portanto, para cada $y\in\mathbb{R}$ existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $y=f(x)$.

Assim, *f* é sobrejetiva.

Como *f* é injetiva e sobrejetiva, então *f* é bijetiva.

10.2. $f^{-1}(x) = 2x - 3$

$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{2} = 2x - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 3 = 4x - 6 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

11.1. $3 + f^{-1}(x-1) = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x-1) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 + f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 - 2 \Leftrightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

11.2. $g(1-2x) = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2x = g^{-1}(-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 1 - g^{-1}(-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 1 - (-5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

12.1. **a)** $D_f = [-2\ ,\ 2]$

b) $D'_f = \left[-2\ ,\ \dfrac{1}{2}\right]$

12.2. **a)** $f(1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 1$

b) $f(2) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$

c) $\left(f \circ f^{-1}\right)(-2) = -2$

12.3. $g(x) = \dfrac{1}{x}$

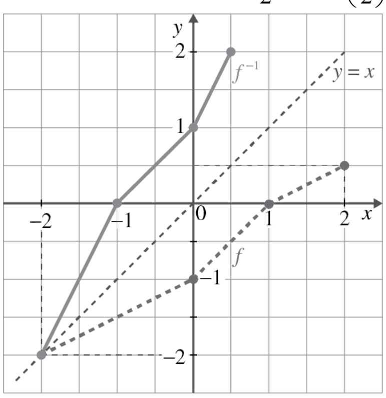
$\left(f^{-1} \circ g\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right) = f^{-1}\left(g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) =$

$= f^{-1}(-2) =$

$= -2$ porque $f(-2) = -2 \Leftrightarrow -2 = -f^{-1}(-2)$

12.4. $f(-2) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -2$; $f(0) = -1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1) = 0$

$f(1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 1$; $f(2) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$



13. $y = \dfrac{9}{5}x + 32 \Leftrightarrow \dfrac{9}{5}x = y - 32 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{9}(y - 32)$

Para converter y graus Fahrenheit em x graus Celsius pode usar-se a fórmula $x = \dfrac{5}{9}(y - 32)$.

14. $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = -3x + 2$

$g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}x$

$D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}x\right) = -3\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}x\right) + 2 =$

$= -2 + x + 2 = x$

$f \circ g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-3x + 2) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}(-3x + 2) =$

$= \dfrac{2}{3} + x - \dfrac{2}{3} = x$

Como $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x,\ g = f^{-1}$

15. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x^2$

15.1. *f* não é injetiva $[f(-1) = f(1)$, por exemplo$]$.

Logo, *f* não tem inversa.

15.2. Por exemplo:

$g:\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ é uma restrição de *f* a $\mathbb{R}_0^+$ e é bijetiva

$x \mapsto 2x^2$

$g(x) = y \Leftrightarrow 2x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{y}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{y}{2}}$, porque $x,\ y \in \mathbb{R}_0^+$

$g^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

$x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{2}}$

16.1. $f(x) = y \Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$

$f^{-1}:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x}{2}$

16.2. $B(a\ ,\ f(a))$ pertence ao gráfico de *f*.

$C(f(a)\ ,\ a)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

$D(b\ ,\ f^{-1}(b))$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

$E(f^{-}(b)\ ,\ b)$ pertence ao gráfico de *f*.

Portanto, *B* e *E* pertencem ao gráfico de *f* e *C* e *D* pertencem ao gráfico de f^{-1}.

17. $f(x) = ax + b,\ a\ ,\ b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

$f(2) = 5$ e $f^{-1}(-4) = -1 \Leftrightarrow f(-1) = -4$

$\begin{cases} f(2) = 5 \\ f(-1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ -a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 2a \\ -a + 5 - 2a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 2a \\ 3a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 3 \end{cases}$

Logo, $f(x) = 3x - 1$ e $f(3) = 3 \times 3 - 1 = 8$.

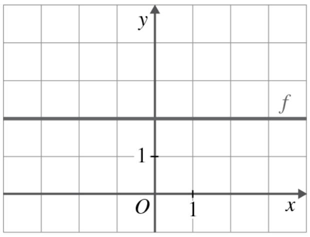
Pág. 84

Atividade inicial 2

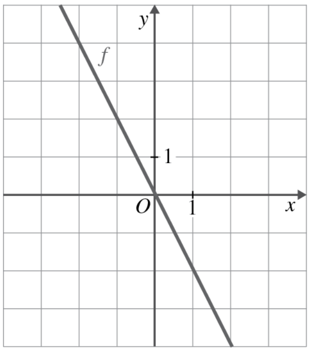
1.1. Gráficos 1 e 6

1.2. Gráficos 2, 4 e 5

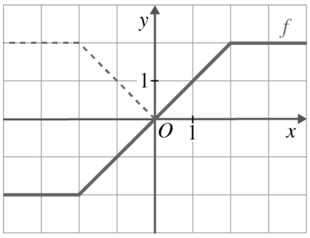
2.1.



2.2.



2.3.



Pág. 85

1.1. $f(x) = 2x^2 + 3$

$D_f = \mathbb{R}$

Se $x \in D_f$, então $-x \in D_f$.

$f(-x) = 2(-x)^2 + 3 = 2x^2 + 3$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R} \wedge f(-x) = f(x)$.

Portanto, a função *f* é par.

1.2. $g(x) = x^3 - x$

Se $x \in D_g$, então $-x \in D_g$.

$g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$

$\exists x \in \mathbb{R} : g(-x) \neq g(x)$

A função *g* não é par.

1.3. $h(x) = x\left(x + x^3\right)$

$h(x) = x^2 + x^4$ e $D_h = \mathbb{R}$

Se $x \in D_h$, então $-x \in D_f$.

$h(-x) = (-x)^2 + (-x)^4 = x^2 + x^4 = h(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ e $h(-x) = h(x)$

A função *h* é par.

1.4. $i(x) = \dfrac{1}{x+2}$

$D_i = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

A função *i* não é par $\left(2 \in D_i \wedge -2 \notin D_i\right)$.

Pág. 86

2.1. $f(x) = x^3 + x$

$D_f = \mathbb{R}$

Se $x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$.

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -\left(x^3 + x\right) = -f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R} \wedge f(-x) = -f(x)$

A função *f* é ímpar.

2.2. $g(x) = x^3 - x^2$

$D_g = \mathbb{R}$

Se $x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$.

$g(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2$

$\exists x \in \mathbb{R} : g(-x) \neq g(x) \wedge g(-x) \neq -g(x)$

A função *g* não é par nem ímpar.

2.3. $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{4}$

Se $x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$.

$h(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 1}{4} = \dfrac{x^2 + 1}{4} = h(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R} \wedge h(-x) = h(x)$

Logo, a função *h* é par.

3. Se *f* é uma função ímpar e se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$.

$f(0) = 1$, então *f* não é uma função ímpar.

Pág. 88

4. $D_f = [-1\ ,\ 4]$

4.1. $D'_f = [0\ ,\ 2]$

Zeros de *f*: {–1}

4.2. $h(x) = f(x - 5)$

$\vec{u}(5\ ,\ 0)$

$D_n = [-1 + 5\ ,\ 4 + 5] = [4\ ,\ 9]$

4.3. $g(x) = f(x) + 2$

$\vec{v}(0\ ,\ 2)$

$D'_g = [0 + 2\ ,\ 2 + 2] = [2\ ,\ 4]$

4.4. $p(x) = f(x - a)$

$\vec{w}(a\ ,\ 0)$

$D_p = [-1 + a\ ,\ 4 + a]$

$D_p = [-6\ ,\ b]$

$$\begin{cases} -1 + a = -6 \\ 4 + a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ 4 - 5 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -1 \end{cases}$$

$a = -5$ e $b = -1$

4.5. $r(x) = f(x) + b$

r não tem zeros se $b < -2 \vee b > 0$.

4.6. $m(x) = f(x+3) - \frac{1}{2}$

O gráfico de m obtém-se do gráfico de f por uma translação de vetor $\vec{u}\left(-3\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$.

5. $D_f = [-1\ ,\ 3]$

$g(x) = 2 + f(x+3)$

$\vec{u}(-3\ ,\ 2)$

$D_g = [-1-3\ ,\ 3-3] = [-4\ ,\ 0]$

Pág. 90

6. $G_f = \{(2\ ,\ 6)\ ,\ (3\ ,\ 9)\ ,\ (4\ ,\ -1)\}$

$g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

$g(2) = \frac{1}{2}f(2) = \frac{1}{2}\times 6 = 3$

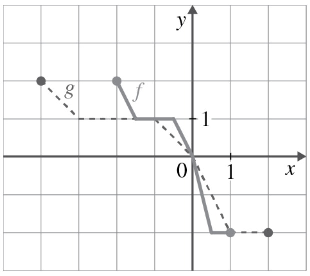
$g(3) = \frac{1}{2}f(3) = \frac{1}{2}\times 9 = \frac{9}{2}$

$g(4) = \frac{1}{2}\times f(4) = \frac{1}{2}\times(-1) = -\frac{1}{2}$

$G_g = \left\{(2\ ,\ 3)\ ,\ \left(3\ ,\ \frac{9}{2}\right)\ ,\ \left(4\ ,\ -\frac{1}{2}\right)\right\}$

Pág. 91

7.



$g(-4) = f\left(\frac{1}{2}\times(-4)\right) \Leftrightarrow f(-2) = g(-4) \Leftrightarrow f(-2) = 2$

$g(-3) = f\left(\frac{1}{2}\times(-3)\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = g(-3) \Leftrightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$

$g(-1) = f\left(\frac{1}{2}\times(-1)\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = g(-1) \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

$g(0) = f\left(\frac{1}{2}\times 0\right) \Leftrightarrow f(0) = g(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

$g(1) = f\left(\frac{1}{2}\times 1\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = g(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

$g(2) = f\left(\frac{1}{2}\times 2\right) \Leftrightarrow f(1) = g(2) \Leftrightarrow f(1) = -2$

Pág. 92

8. $f:\ [0\ ,\ 5] \to [-3\ ,\ 7]$

$x \mapsto 2x-3$

8.1. $g:\ [0\ ,\ 5] \to [-7\ ,\ 3]$

$x \mapsto -f(x) = -2x+3$

$h:\ [-5\ ,\ 0] \to [-3\ ,\ 7]$

$x \mapsto f(-x) = -2x-3$

8.2. $f(2) + g(4) + h(-3) =$

$= (4-3) + (-8+3) + (6-3) =$

$= 1 - 5 + 3 = -1$

Pág. 93

9.1. O gráfico de g pode ser obtido do gráfico de f por uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$ seguida de uma reflexão de eixo Ox.

9.2. O gráfico de h pode ser obtido do gráfico de f por uma reflexão de eixo Oy seguida de uma dilatação vertical de fator 4.

10. Como f é ímpar, $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.

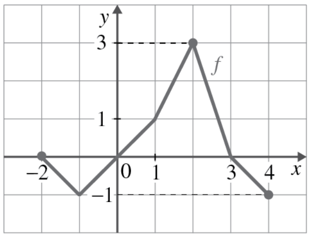
Logo:

$f(-3) = 2 \Leftrightarrow -f(3) = 2 \Leftrightarrow f(3) = -2$

$f(2) = -5 \Leftrightarrow -f(-2) = -5 \Leftrightarrow f(-2) = 5$

$f(3) + f(-2) = -2 + 5 = 3$

11. A função f pode ter o gráfico seguinte:



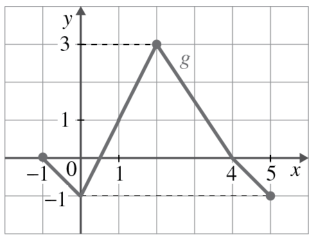
11.1. $g(x) = f(x-1)$

$\vec{u}(1\ ,\ 0)$

$D_g = [-1\ ,\ 5]$

$D'_g = [-1\ ,\ 3]$

Zeros de g : $\{-1\ ,\ 1\ ,\ 4\}$

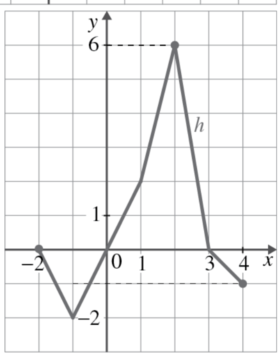


11.2. $h(x) = 2f(x)$

$D_h = [-2\ ,\ 4]$

$D'_h = [-2\ ,\ 6]$

Zeros de h : $\{-2\ ,\ 0\ ,\ 3\}$

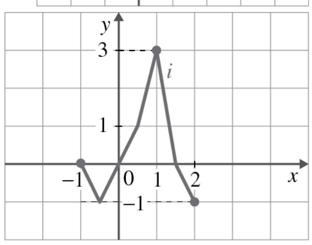


11.3. $i(x) = f(2x)$

$D_i = [-1\ ,\ 2]$

$D'_i = [-1\ ,\ 3]$

Zeros de i : $\left\{-1\ ,\ 0\ ,\ \frac{3}{2}\right\}$



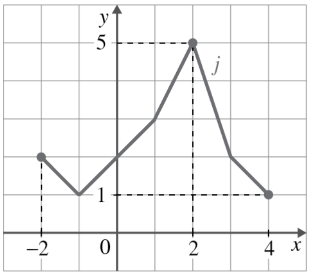
11.4. $j(x) = f(x) + 2$

$\vec{u}(0\ ,\ 2)$

$D_j = [-2\ ,\ 4]$

$D'_j = [1\ ,\ 5]$

j não tem zeros.



12. $A\,(-2\ ,4)$

$f(-2) = 4$

12.1. $g(x) = f(x+1)$

O gráfico de *g* é obtido do gráfico de *f* pela $T_{\vec{u}}$, sendo $\vec{u}(-1\ ,\ 0)$.

$A' = A + \vec{u} = (-2\ ,\ 4) + (-1\ ,\ 0) = (-3\ ,\ 4)$

$A'(-3\ ,\ 4)$

12.2. $h(x) = f(-x) + 2$

O gráfico de *h* obtém-se do gráfico de *f* por uma reflexão de eixo *Oy* seguida de $T_{\vec{u}}$, sendo $\vec{u}(0\ ,\ 2)$.

$A(-2\ ,\ 4) \curvearrowright (2\ ,\ 4) \curvearrowright (2\ ,\ 4) + (0\ ,\ 2) = (2\ ,\ 6)$

$A'(2\ ,\ 6)$

12.3. $i(x) = 1 + f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

O gráfico de *i* obtém-se do gráfico de *f* por uma dilatação horizontal de coeficiente 2 seguida da $T_{\vec{u}}$, sendo $\vec{u}(0\ ,\ 1)$.

$A(-2\ ,\ 4) \curvearrowright (-2 \times 2\ ,\ 4) = (-4\ ,\ 4)$

$(-4\ ,\ 4) \curvearrowright (-4\ ,\ 4+1) = (-4\ ,\ 5)$

$A'(-4\ ,\ 5)$

12.4. $j(x) = -2 + 2f(x)$

O gráfico de *j* obtém-se do gráfico de *f* por uma dilatação vertical de coeficiente 2 seguida da $T_{\vec{u}}$, sendo $\vec{u}(0\ ,\ -2)$.

$A(-2\ ,\ 4) \curvearrowright (-2\ ,\ 8)$

$(-2\ ,\ 8) \curvearrowright (-2\ ,\ 8-2) = (-2\ ,\ 6)$, logo $A'(-2\ ,\ 6)$.

Pág. 95

Atividades complementares

13.1. $D_f = A = \{-2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\}$

$\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$

$f(-2) = f(2),\ f(-1) = f(1)$

$\forall x \in D_f,\ -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$

f é par.

13.2. $D_g = \{-3\ ,\ -1\ ,\ 1\ ,\ 3\}$

$g(-1) = -3$ e $g(1) = 3$

$\exists x \in D_g :\ g(-x) \neq g(x)$

g não é par.

13.3. $3 \in D_h$ e $-3 \notin D_h$. *h* não é par.

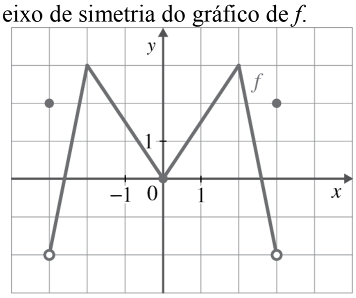
13.4. $D_i = \mathbb{R}$

$i(-x) = -(-x)^2 + 1 = -x^2 + 1 = i(x)$

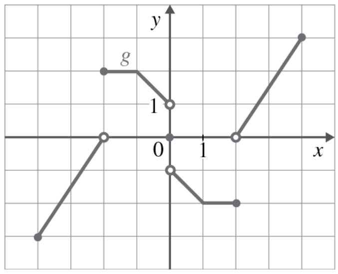
$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R} \wedge i(-x) = i(x)$

i é par.

14.1. *Oy* é um eixo de simetria do gráfico de *f*.



14.2. O gráfico de *g* é a imagem de si próprio pela reflexão central de centro *O*.



15. $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = -2 + f(x-3)$

15.1. O gráfico da função *g* obtém-se do gráfico da função *f* por uma translação de vetor $\vec{u}(3\ ,\ -2)$.

15.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

$-2 + 3 = 1,\ 2 + 3 = 5$

Zeros de *g* : {1 , 5}

16. $D_f = [-1\ ,\ +\infty[$

$D'_f = [-2\ ,\ 5]$

16.1. $g(x) = f(x - 10)$

$\vec{u}(10\ ,\ 0)$

$-1 + 10 = 9$

$D_g = [9\ ,\ +\infty[$

$D'_g = [-2\ ,\ 5]$

16.2. $g(x) = f(x) + 3$

$\vec{v}(0\ ,\ 3)$

$-2 + 3 = 1\ ,\ 5 + 3 = 8$

$D_g = [-1\ ,\ +\infty[$

$D'_g = [1\ ,\ 8]$

16.3. $g(x) = -2 + f(x-1)$

$\vec{w}(1\ ,\ -2)$

$-1 + 1 = 0$

$-2 + (-2) = -4\ ,\ 5 + (-2) = 3$

$D_g = [0\ ,\ +\infty[$

$D'_g = [-4\ ,\ 3]$

17. $G_f = \{(-2\ ,\ 1),\ (-1\ ,\ 2),\ (0\ ,\ -1),\ (1\ ,\ 2),\ (2\ ,\ 0)\}$

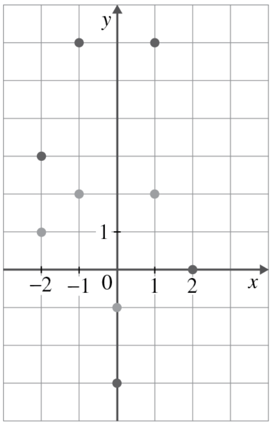
17.1. a) $\phi(-2\ ,\ 1) = (-2\ ,\ 3)$

$\phi(-1\ ,\ 2) = (-1\ ,\ 6)$

$\phi(0\ ,\ -1) = (0\ ,\ -3)$

$\phi(1\ ,\ 2) = (1\ ,\ 6)$

$\phi(2\ ,\ 0) = (2\ ,\ 0)$



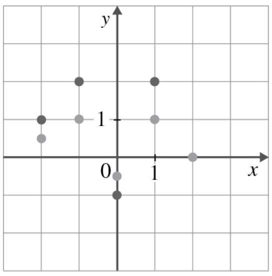
b) $\theta(-2\ ,\ 1)=\left(-2\ ,\ \frac{1}{2}\right)$

$\theta(-1\ ,\ 2)=(-1\ ,\ 1)$

$\theta(0\ ,\ -1)=\left(0\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$

$\theta(1\ ,\ 2)=(1\ ,\ 1)$

$\theta(2\ ,\ 0)=(2\ ,\ 0)$



17.2. a) $g(x)=3f(x)$

b) $h(x)=\frac{1}{2}f(x)$

Pág. 96

18. $G_f=\{(-3\ ,\ 1),\ (-2\ ,\ 0),\ (0\ ,\ 1),\ (1\ ,\ -2),\ (3\ ,\ 2)\}$

18.1. a) O gráfico cartesiano de g é a imagem do gráfico cartesiano de f pela transformação ϕ.

b) $D_g=\left\{-1\ ,\ -\frac{2}{3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ 1\right\}$

$g(-1)=f(3\times(-1))=f(-3)=1$

$g\left(-\frac{2}{3}\right)=f\left(3\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right)=f(-2)=0$

$g(0)=f(3\times 0)=f(0)=1$

$g\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(3\times\frac{1}{3}\right)=f(1)=-2$

$g(1)=f(3\times 1)=f(3)=2$

$G_g=\left\{(-1\ ,\ 1),\ \left(-\frac{2}{3}\ ,\ 0\right),\ (0\ ,\ 1),\ \left(\frac{1}{3}\ ,\ -2\right),\ (1\ ,\ 2)\right\}$

18.2. a) O gráfico cartesiano de h é a imagem do gráfico cartesiano de f pela transformação θ.

b) $h(-6)=f\left(\frac{-6}{2}\right)=f(-3)=1$

$h(-4)=f\left(\frac{-4}{2}\right)=f(-2)=0$

$h(0)=f\left(\frac{0}{2}\right)=f(0)=1$

$h(2)=f\left(\frac{2}{2}\right)=f(1)=-2$

$h(6)=f\left(\frac{6}{2}\right)=f(3)=2$

$G_h=\{(-6\ ,\ 1),\ (-4\ ,\ 0),\ (0\ ,\ 1),\ (2\ ,\ -2),\ (6\ ,\ 2)\}$

19. $G_f=\{(-2\ ,\ 1),\ (-1\ ,\ 2),\ (0\ ,\ 0),\ (2\ ,\ -1),\ (3\ ,\ 3)\}$

19.1. O gráfico cartesiano de g é a imagem do gráfico cartesiano de f pela transformação ϕ.

19.2. $g(-2)=-1,\ g(-1)=-2,\ g(0)=0,\ g(2)=1$ e $g(3)=-3$

$G_g=\{(-2\ ,\ -1),\ (-1\ ,\ -2),\ (0\ ,\ 0),\ (2\ ,\ 1),\ (3\ ,\ -3)\}$

20. $G_f=\{(-2\ ,\ 0),\ (-1\ ,\ 3),\ (0\ ,\ 1),\ (1\ ,\ -1),\ (2\ ,\ 0)\}$

$D_g=\{-4\ ,\ -2\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 4\}$

$g(-4)=-2f\left(\frac{-4}{2}\right)=-2f(-2)=-2\times 0=0$

$g(-2)=-2f\left(\frac{-2}{2}\right)=-2f(-1)=-2\times 3=-6$

$g(0)=-2f\left(\frac{0}{2}\right)=-2f(0)=-2\times 1=-2$

$g(2)=-2f\left(\frac{2}{2}\right)=-2f(1)=-2\times(-1)=2$

$g(4)=-2f\left(\frac{4}{2}\right)=-2f(2)=-2\times 0=0$

$G_g=\{(-4\ ,\ 0),\ (-2\ ,\ -6),\ (0\ ,\ -2),\ (2\ ,\ 2),\ (4\ ,\ 0)\}$

21. $f(-2)=1$ e $f(2)=3$

$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=-f(-x)$

$g(-2)-3g(2)=-f(2)+3f(-2)=-3+3\times 1=0$

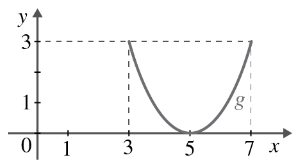
22.1. $g(x)=-f(x)$; $h(x)=-f(x+7)-1$;

$i(x)=f(x+9)+1$

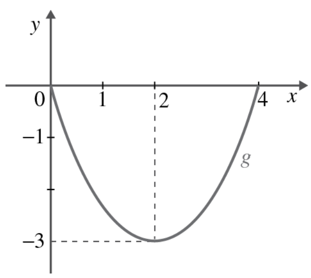
22.2. $g(x)=f(x-2)+2$; $h(x)=-f(x)$

$i(x)=g(-x)=f(-x-2)+2$ ou $i(x)=-f(x+4)+2$

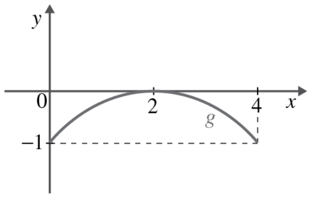
23.1.



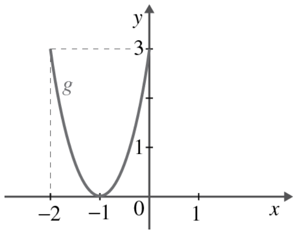
23.2.



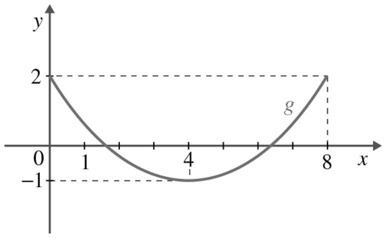
23.3.



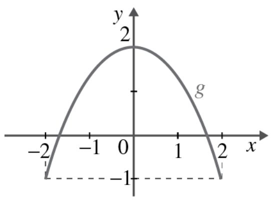
23.4.



23.5.



23.6.



Pág. 97

24. $f(x) = -x^2 + \frac{k}{2}x + k$

$D_f = \mathbb{R}$

Se $x \in D_f$, $-x \in D_f$

$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(-x)^2 + \frac{k}{2}(-x) + k = -x^2 + \frac{k}{2}x + k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 - \frac{k}{2}x + k = -x^2 + \frac{k}{2}x + k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{k}{2} = \frac{k}{2} \Leftrightarrow -k = k \Leftrightarrow 2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$

25.1. $g(x) = a\,f(x) + b$

$\begin{cases} g(0) = a \times f(0) + b \\ g(1) = a \times f(1) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = a \times 0 + b \\ -1 = a \times 1 + b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ -1 = a - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases}$

$g(x) = f(x) - 2$, também se verifica para $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$, pois $4 - 2 = 2$, $9 - 7 = 2$ e $16 - 2 = 14$

Logo, $a = 1$ e $b = -2$.

25.2. $g(x) = x^2 - 2$

25.3. O gráfico de g obtém-se do gráfico de f pela translação $T_{\vec{u}}$, sendo $\vec{u}(0\ ,\ -2)$.

26.

x	1	3	5	8	9
$f(x)$	− 2	5	7	− 3	10
$f(x) - 3$	− 5	2	4	− 6	7
$-2f(x) - 3$	1	− 13	− 17	3	− 23
$4f(x) + 7$	− 1	27	35	− 5	47

27. $g(1) = -5 = -1 - 4$; $g(3) = -4 = 0 - 4$

$g(5) = -2 = 2 - 4$; $g(8) = 1 = 5 - 4$

$g(9) = 5 = 9 - 4$

$g(x) = f(x) - 4$

$h(1) = 1 = 2 \times (-1) + 3$; $h(3) = 3 = 2 \times 0 + 3$

$h(5) = 7 = 2 \times 2 + 3$; $h(8) = 13 = 2 \times 5 + 3$

$h(9) = 21 = 2 \times 9 + 3$

$h(x) = 2f(x) + 3$

28. $D_f = [-6\ ,\ -2]$, $D'_f = [-10\ ,\ -4]$

28.1. $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

$D_g = [-6\ ,\ -2]$, $D'_g = [-5\ ,\ -2]$

28.2. $g(x) = f(2x)$

$D_g = [-3\ ,\ -1]$, $D'_g = [-10\ ,\ -4]$

28.3. $g(x) = f(x-2) + 5$

$\vec{u}(2\ ,\ 5)$

$D_g = [-4\ ,\ 0]$, $D'_g = [-5\ ,\ 1]$

28.4. $g(x) = f(x+4) - 1$

$\vec{u}(-4\ ,\ -1)$

$D_g = [-10\ ,\ -6]$, $D'_g = [-11\ ,\ -5]$

28.5. $g(x) = f(-x)$

$D_g = [2\ ,\ 6]$, $D'_g = [-10\ ,\ -4]$

28.6. $g(x) = -f(x)$

$D_g = [-6\ ,\ -2]$, $D'_g = [4\ ,\ 10]$

29.1. $f(x) = 5x^3 + 2x$, $D_f = \mathbb{R}$

Se $x \in D_f$, $-x \in D_f$

$f(-x) = 5(-x)^3 + 2(-x) = -5x^3 - 2x =$

$= -(5x^3 + 2x) = -f(x)$

$\forall x \in D_f,\ -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$

A função f é ímpar.

29.2. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$

Se $x \in D_f$, $-x \in D_f$.

$f(-x) = 3(-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 = 3x^4 + 2x^2 - 1 = f(x)$

$\forall x \in D_f,\ -x \in \mathbb{R} \wedge f(-x) = f(x)$

A função f é par.

29.3. $f(x) = 2x^5 - 4x^3$, $D_f = \mathbb{R}$

Se $x \in D_f$, $-x \in D_f$

$f(-x)=2(-x)^5-4(-x)^3=2x^5+4x^3=-\left(2x^5-4x^3\right)=$

$=-f(x)$

$\forall x\in D_f,\ -x\in\mathbb{R}\wedge f(-x)=-f(x)$

A função *f* é ímpar.

29.4. $f(x)=7x^3-x^2$, $D_f=\mathbb{R}$

Se $x\in D_f$, $-x\in D_f$.

$f(-x)=7(-x)^3-(-x)^2=-7x^3-x^2$

$\exists x\in D_f: f(-x)\neq f(x)\wedge f(-x)\neq -f(x)$

A função *f* não é par nem ímpar.

29.5. $f(x)=9$, $D_f=\mathbb{R}$

Se $x\in D_f$, $-x\in D_f$.

$f(-x)=9=f(x)$

$\forall x\in D_f$, $-x\in D_f\wedge f(-x)=f(x)$

A função *f* é par.

29.6. $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+4\geq 0\right\}=\mathbb{R}$

Se $x\in D_f$, $-x\in D_f$.

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+4}=\sqrt{x^2+4}=f(x)$

$\forall x\in D_f,\ -x\in D_f\wedge f(-x)=f(x)$

A função *f* é par.

29.7. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$, $D_f=\mathbb{R}$

Se $x\in D_f$, $-x\in D_f$.

$f(-x)=\sqrt{(-x)^3-(-x)}=\sqrt[3]{-x^3+x}=\sqrt[3]{-\left(x^3-x\right)}=$

$=\sqrt[3]{-1}\times\sqrt[3]{x^3-x}=-\sqrt[3]{x^3-x}=-f(x)$

$\forall x\in D_f$, $-x\in D_f\wedge f(-x)=-f(x)$

A função *f* é ímpar.

29.8. $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $x\in D_f$, $-x\in D_f$.

$f(-x)=(-x)^3-\dfrac{1}{-x}=-x^3+\dfrac{1}{x}=-\left(x^3-\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$

$\forall x\in D_f$, $-x\in D_f\wedge f(-x)=f(x)$

A função *f* é ímpar.

30.1. $P(0\ ,\ 0)$; $g(x)=2f(x-3)$

$P(0\ ,\ 0)\xrightarrow[T_{\vec{u}}(3\ ,\ 0)]{}(3\ ,\ 0)\xrightarrow[2y]{}(3\ ,\ 0)$, logo $P'(3\ ,\ 0)$.

30.2. $P(3\ ,\ -2)$; $g(x)=2f(x-4)+1$

$P(3\ ,\ -2)\xrightarrow[T_{\vec{u}}(4\ ,\ 0)]{}(7\ ,\ -2)\xrightarrow[2y]{}(7\ ,\ -4)\xrightarrow[T_{\vec{v}}(0\ ,\ 1)]{}(7\ ,\ -3)$

$P'(7\ ,\ -3)$

30.3. $P(1\ ,\ 0)$; $g(x)=2f(-2x)$

$P(1\ ,\ 0)\rightarrow(-1\ ,\ 0)$ Reflexão de eixo *Oy*

$(-1\ ,\ 0)\rightarrow\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ Contração horizontal de coeficiente $\dfrac{1}{2}$

$\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\right)\rightarrow\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ 2 × 0 = 0. Expansão vertical de coeficiente 2

$P'\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\right)$

30.4. $P(-2\ ,\ 1)$, $g(x)=-3f(2x)-5$

$P(-2\ ,\ 1)\rightarrow(-1\ ,\ 1)$ Contração horizontal de coeficiente $\dfrac{1}{2}$

$(-1\ ,\ 1)\rightarrow(-1\ ,\ 3)$ Expansão vertical de coeficiente 3

$(-1\ ,\ 3)\rightarrow(-1\ ,\ -3)$ Reflexão de eixo *Ox*

$(-1\ ,\ 3)\rightarrow(-1\ ,\ -8)$ Translação de vetor (0 , –5)

$P'(-1\ ,\ -8)$

31.1. $g(x)=f(x+2)$

31.2. $f(x-5)=\dfrac{1}{x-5}$

$g(x)=f(x-5)+2$

31.3. $g(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$

Pág. 98

Avaliação 2

1. O gráfico de *g* obtém-se do gráfico de *f* por uma translação de vetor $\vec{u}(-1\ ,1)$.

   O transformado do ponto de coordenadas (5 , 5) é o ponto $(5-1\ ,\ 5+1)=(4\ ,\ 6)$.

   Resposta: (D)

2. O gráfico de *g* é obtido do gráfico de *f* por uma reflexão de eixo *Oy*. Logo, $g(x)=f(-x)$.

   Resposta: (A)

3. O gráfico de *h* obtém-se do gráfico de *g* por uma reflexão de eixo *Ox* seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(0\ ,\ 1)$.

   Resposta: (D)

4. O gráfico de *f* obtém-se do gráfico de *g* por uma expansão horizontal de coeficiente $\dfrac{1}{a}$, sendo $0<a<1$ seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(0\ ,\ b)$, $b<0$.

   $f(x)=g(ax)+b,\ 0<a<1$ e $b<0$

   ou

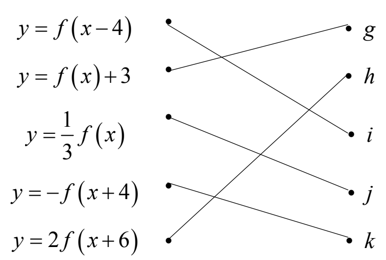
   O gráfico de *g* obtém-se do gráfico de *f* por uma contração horizontal de coeficiente $\dfrac{1}{a}$, sendo $a>1$ seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(0\ ,\ b)$, $b>0$

   $g(x)=f(ax)+b,\ a>1$ e $b>0$.

   Resposta: (B)

Pág. 99

5.



6. $f(x)=x^2+x^3$, $D_f=\mathbb{R}$

6.1. Se $x \in D_f$, $-x \in D_f$.

$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$

$\exists x \in D_f : f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$

Por exemplo, $f(-1) = 0, f(1) = 2$ e $-f(1) = -2$

f não é par nem ímpar.

6.2. a) $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} =$

$= \dfrac{(x^2 + x^3) + (x^2 - x^3)}{2} =$

$= \dfrac{2x^2}{2} =$

$= x^2$

$g(-x) = (-x)^2 = g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ -x \in D_g \wedge g(-x) = g(x)$

g é uma função par.

b) $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} =$

$= \dfrac{(x^2 + x^3) - (x^2 - x^3)}{2} =$

$= \dfrac{2x^3}{2} = x^3$

$h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ -x \in D_h \wedge h(-x) = -h(x)$

h é uma função ímpar.

7.1. $g(x) = -5 + f(x)$

O gráfico de *g* é a imagem do gráfico de *f* pela translação de vetor $\vec{u}(0\ ,\ -5)$.

–5 – 5 = –10 e 3 – 5 = 2

$D'_g = [-10\ ,\ -2]$

7.2. $h(x) = f(2x - 3) = f\left(2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\right)$

O gráfico de *h* obtém-se do gráfico de *f* por uma translação de vetor $\vec{u}\left(\dfrac{3}{2}\ ,\ 0\right)$ seguida de uma contração horizontal de coeficiente $\dfrac{1}{2}$.

$D'_h = D'_f = [-5\ ,\ 3]$

7.3. $i(x) = -3 - f(x)$

O gráfico de *i* obtém-se do gráfico de *f* por uma reflexão de eixo *Ox* seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(0\ ,\ -2)$.

$D'_i = [-3 - 3\ ,\ 5 - 3] = [-6\ ,\ 2]$

7.4. $j(x) = 3f(-x)$

O gráfico de *j* obtém-se do gráfico de *f* por uma reflexão de eixo *Oy* seguida de uma expansão vertical de coeficiente 3.

$D'_j = [-5 \times 3\ ,\ 3 \times 3] = [-15\ ,\ 9]$

8.1. Seja $a = x - 1 \Leftrightarrow x = a + 1$.

$f(x - 1) = f(a) = g(a + 1) = 2(a + 1) - 1 =$

$= 2a + 2 - 1 = 2a + 1$

Como $f(a) = 2a + 1$, temos $f(x) = 2x + 1$.

8.2. $h(x) = 3f(-2x)$

$h(-2) = 3f(-2 \times (-2)) = 3f(4) = 3 \times (2 \times 4 + 1) = 27$

9. $P(x\ ,\ y) \rightarrow P'\left(\dfrac{1}{2}x\ ,\ y\right)$

9.1. $P(-2\ ,\ -3) \rightarrow P'\left(\dfrac{1}{2} \times (-2)\ ,\ -3\right)$

$P'(-1\ ,\ -3)$

9.2. $P(x\ ,\ y) \rightarrow P'(-1\ ,\ 3)$

$\dfrac{1}{2}x = -1 \wedge y = 3 \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 3$

$P(-2\ ,\ 3)$

9.3. O gráfico de *g* obtém-se do gráfico de *f* por uma contração horizontal de coeficiente $\dfrac{1}{2}$.

$g(x) = f(2x)$

10. $f(x) = ax + b$, $D'_f = [-1\ ,\ 5]$

10.1. a) $g(x) = 2f(x)$

O gráfico de *g* obtém-se do gráfico de *f* por uma expansão vertical de coeficiente 2.

$D'_g = [-1 \times 2\ ,\ 5 \times 2] = [-2\ ,\ 10]$

b) $h(x) = 1 - 3f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

O gráfico de *h* obtém-se do gráfico de *f* pela sequência das transformações seguintes:

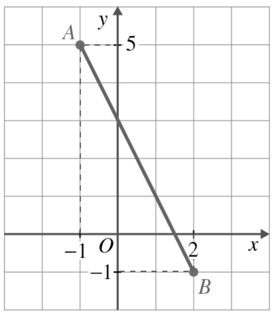
- expansão horizontal de coeficiente 2
- expansão vertical de coeficiente 3
- reflexão de eixo *Ox*
- translação de vetor $\vec{u}(0\ ,\ 1)$

$-(-1 \times 3) + 1 = 4$

$-(5 \times 3) + 1 = -14$

$D'_h = [-14\ ,\ 4]$

10.2. a) O gráfico de *f* é [*AB*].



Como $f(-1) > f(2)$, terá de ser *A* (–1 , 5) e *B* (2 , –1) ou seja, $f(-1) = 5$ e $f(2) = -1$, sendo $f(x) = ax + b$.

$\begin{cases} f(-1) = 5 \\ f(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 5 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 5 \\ 2b - 10 + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$

$f(x) = -2x + 3$

b) $f : [-1\ ,\ 2] \to [-1\ ,\ 5]$

$x \mapsto -2x+3$

A função f é bijetiva.

$f(x) = y \Leftrightarrow -2x + 3 = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x = y - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3-y}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{2}$

$f^{-1} : [-1\ ,\ 5] \to [-1\ ,\ 2]$

$x \mapsto \dfrac{3-x}{2}$

c) Se $g(x) = f(-x)$, $D_g = [-2\ ,\ 1]$.

$[-2\ ,\ 1] \cap [-1\ ,\ 2] = [-1\ ,\ 1]$

$f(x) = -f(x) \wedge x \in [-1\ ,\ 1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x + 3 = -2(-x) + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x = 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$

A proposição é verdadeira ($x = 0$).

11. $g(x) = f(x-1) - 3$

$f(2) = 3$

11.1. $g(3) = f(3-1) - 3 =$

$= f(2) - 3 =$

$= 3 - 3 =$

$= 0$

11.2. $g(x) = f(x-1) - 3$

$= 2(x-1) - 1 - 3 \quad \left(f(x) = 2x - 1\right)$

$= 2x - 2 - 4$

$g(x) = 2x - 6$

Pág. 100

Atividade inicial 3

1. A cada hora do dia corresponde um e um só valor da altura da água.

2. $f(6)=3$ e $f(24)=10$

Às 6 horas, a altura da água era de 3 metros e às 24 horas era de 10 metros.

3. A altura da água é superior a 6 m entre as 0 h e as 2 h, entre as 10 h e as 14 h e entre as 22 h e as 24 h, aproximadamente.

4.1. No intervalo [0 , 6] a altura da água diminui.

4.2. No intervalo [18 , 24] a altura da água aumenta.

5. A altura máxima registada foi de 10 m. Verificou-se às 0, 12 e 24 horas.

6. A altura mínima registada foi de 3 m e aconteceu às 6 e às 18 horas.

Pág. 104

1.1. g é decrescente em [3 , 7]

1.2.

x	–2		0		3		5		7
f	4	↘	0	↗	3	⟶	3	↘	0

1.3. f é decrescente em [–2 , 0] e em [5 , 7] ; f é crescente em [0 , 3] e é constante em [3 , 5].

Pág. 106

2.1. $]-\infty\ ,\ -2]$ e $[1\ ,\ +\infty[$

2.2. A proposição é falsa porque –1 não é minorante de f.

2.3. $D'_f=\{-2\ ,\ 0\ ,\ 1\}$

Pág. 107

3.1. $D'_g=]-3\ ,\ 0]\cup\{2\}$

3.2. **a)** O máximo absoluto de g é 2.

b) g não tem mínimo absoluto.

Pág. 109

4.1.

x	–2		0		3		4
$h\ (x)$	0	↗	2	⟶	2	↗	3

h é crescente em [–2 , 0] e em [3 , 4] e é constante em [0 , 3].

x	–4		–3		–2		–1		2		4		6
$f\,(x)$	–2	↗	0	↘	–2	↗	1	↘	–1	⟶	–1	↗	

f é crescente em [–4 , –3], [–2 , –1] e em [4 , 6[; f é decrescente em [–3 , –2] e em [–1 , 2] ; f é constante em [2 , 4].

x	–5		–1		1		2		6
$g\ (x)$	1	↘	–4	↗	–1	↘	–2	↗	3

g é crescente em [–1 , 1] e em [2 , 6] e é decrescente em [–5 , –1] e [1 , 2].

4.2.

	h	f	g
Máx. absoluto	Não tem	1	3
Mín. absoluto	0	– 2	– 4
Máx. relativos	2	–1, 0, 1	–1, 1, 3
Mín. relativos	0 e 2	–2, –1	–4, –2
Maximizantes	[0 , 3[	–3, –1,]2 , 4[	–5, 1, 6
Minimizantes	–2,]0 , 3]	–4, –2, [2 , 4]	–1 , 2

Pág. 111

5.1. $f(x)=-2x^2\ ;\ -2<0$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.

5.2. $g(x)=\frac{x^2}{4}=\frac{1}{4}x^2\ ;\ \frac{1}{4}>0$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima.

5.3. $h(x)=-\frac{x^2}{10}=-\frac{1}{10}x^2\ ;\ -\frac{1}{10}<0$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo.

Pág. 114

Atividades complementares

6.1. **a)** f é crescente em sentido lato em [2 , 7[.

b) f é decrescente em sentido lato em [–4 , 4].

6.2. f é constante em [–4 , 0] e em [2 , 4] ; f é decrescente em [0 , 2] e crescente em [4 , 7[.

7.1. $D'_f=[0\ ,\ 2[$

$\forall x\in D_f,\ 0\le f(x)<2$. Logo, f é limitada.

7.2. Por exemplo, –1 e 0 são minorantes de f e 2 e 3 são majorantes.

8.1. f não tem mínimo absoluto. O máximo absoluto de f é 3.

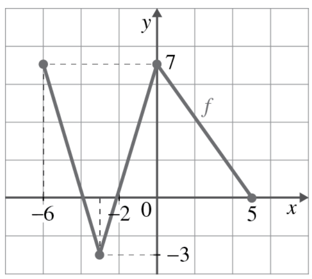
8.2. O mínimo absoluto de g é 0 e o máximo absoluto é 2.

9.1. Mínimos relativos: –3 para x = –3 e $-\frac{1}{2}$ para x = 3

Máximos relativos: 3 para x = 5

9.2. – 3 é o mínimo absoluto de f e 3 é o máximo absoluto.

10. Possível esboço do gráfico de f:



10.1. Mínimo absoluto de f : –3 ; Máximo absoluto de f : 7

10.2. $f(x)=7\Leftrightarrow x=-6$

$S=\{-6\}$

10.3. $f(x)\le-3\Leftrightarrow x=-3$

$S=\{-3\}$

10.4. $f(x)=k$ é impossível se $k<-3\vee k>7$

11. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

11.1. $f(-2) = -\frac{1}{2}\times(-2)^2 = -2$; $P(-2\ ,\ -2)$

$f(4) = -\frac{1}{2}\times 4^2 = -8$; $Q(4\ ,\ -8)$

$f(6) = -\frac{1}{2}\times 6^2 = -18$; $R(6\ ,\ -18)$

11.2. $m_{PQ} = \frac{-8+2}{4+2} = \frac{-6}{6} = -1$

$m_{QR} = \frac{-18+8}{6-4} = -\frac{10}{2} = -5$

$m_{PQ} > m_{QR}$.

11.3. Sejam *P*, *Q* e *R* três pontos quaisquer do gráfico de *f* tais que $x_P < x_Q < x_R$.

O declive de *PQ* é dado por:

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-\frac{1}{2}x_Q^{\ 2} - \left(-\frac{1}{2}x_P^{\ 2}\right)}{x_Q - x_P} = -\frac{1}{2}\times\frac{x_Q^{\ 2} - x_P^{\ 2}}{x_Q - x_P} =$$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{(x_Q - x_P)(x_Q + x_P)}{x_Q - x_P} = -\frac{1}{2}(x_Q + x_P)$$

Da mesma forma, $m_{QR} = \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q} = -\frac{1}{2}(x_R + x_Q)$.

Como $x_P < x_R$, tem-se que $x_Q + x_P < x_R + x_Q$.

$-\frac{1}{2}(x_Q + x_P) > -\frac{1}{2}(x_R + x_Q)$, ou seja, $m_{PQ} > m_{QR}$.

Assim, por definição, o gráfico da função *f* tem a concavidade voltada para baixo.

Pág. 115

12.1. [0 , 7] ,]14 , 16] e [23 , 24]

12.2. Provavelmente sim, porque existe um consumo constante entre as 0 h e as 7 h, bem como entre as 23 h e as 24 h.

12.3. Ocorreu às 14 h e durou 2 horas.

12.4. **a)**]14 , 16] **b)** 7

c) 2, 6, 7, 0 e 5 **d)** 2, 5 e 0

e) [0 , 7[, 9 , [14 , 16[, 20 e]23 , 24]

f) [0 , 7] , 11 ,]14 , 16] e [23 , 24]

13.1. Se $f(x) \neq 3$, então $x \neq 0$. Proposição verdadeira

13.2. Se $f(x) \leq 0$, então $x \geq -2$. Proposição falsa (por exemplo, $f(-2{,}5) < 0$)

13.3. Se $x \neq -5 \wedge x \neq 5$, então $f(x) \neq 4$. Proposição verdadeira

13.4. Se o gráfico de *f* não tem a concavidade voltada para cima, então $x < -2 \vee x \geq 1$. Proposição falsa (por exemplo, se $-1 < x < 1$, o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo)

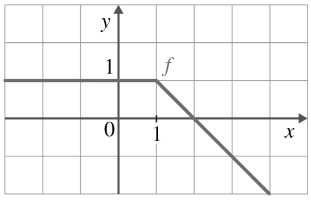
13.5. Se $f(x)$ não é um máximo relativo, então $x \neq 0$.
Proposição verdadeira

13.6. Se $f(x)$ não é um mínimo relativo, então $x \neq 3$.
Proposição verdadeira

14.1. Proposição falsa. Em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$, *f* pode ser constante.

14.2. Proposição falsa. Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ e *f* é estritamente decrescente em $]-\infty\ ,\ 0]$.

14.3. Proposição falsa. Seja, por exemplo, a função *f*, definida em $\mathbb{R}$ e representada graficamente por:



14.4. Proposição falsa. Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = -x^2$, temos que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 2$ e 2 não é máximo de *f* dado que $2 \notin D'_f$.

14.5. Proposição verdadeira

14.6. Proposição verdadeira

15. *f* é estritamente crescente em [*a* , *b*] $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a\ ,\ b], x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$

f não é estritamente crescente em [*a* , *b*] $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in [a\ ,\ b]: x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$

16.1. $f(x) = -\frac{x}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-2}x$

$\frac{1}{\sqrt{2}-2} < 0$. Logo, *f* é decrescente.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	−
		↘	

16.2. $g(x) = \left(\sqrt{2}-1\right)x$

$\sqrt{2} - 1 > 0$. Logo, *g* é crescente.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+
		↗	

17. $f(x) = \sqrt{3}(x-1)$

17.1. $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$S = [1\ ,\ +\infty[$

17.2. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}(x-1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

Pág. 116

Avaliação 3

1. $\forall x \in D_f, f(x) \leq 2$ e $2 \in D'_f$

Logo, é o máximo absoluto de *f*.

Resposta: (B)

2. Os elementos do intervalo [0 , 6] são maximizantes de *f*.

Resposta: (D)

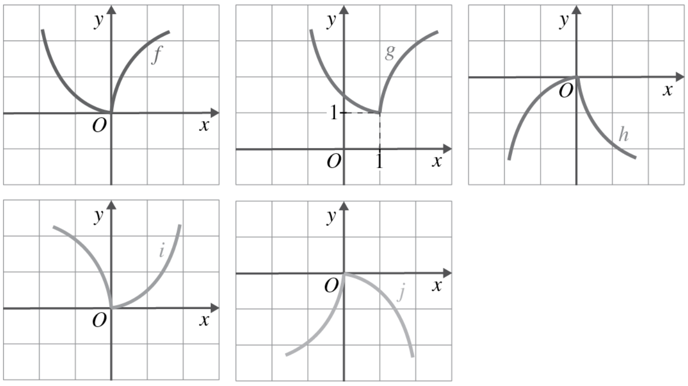
3. $D'_h = \left]-\infty\ ,\ 2\right]$

Resposta: (C)

4. A afirmação **I** é verdadeira e a **II** é falsa dado que *f* (2) é o mínimo absoluto de *f*.

Resposta: (D)

5. Por exemplo:



- $D'_g = \left[1\ ,\ +\infty\right[$; *g* não é limitada
- *h* é decrescente em $\mathbb{R}_0^+$
- $D'_i = \mathbb{R}_0^+$
- *j* é crescente em $\mathbb{R}_0^-$

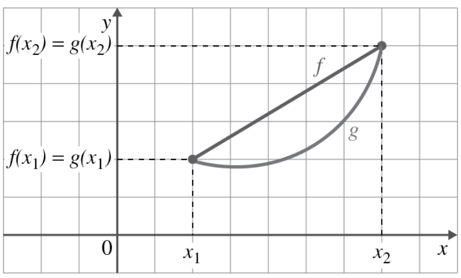
Resposta: (D)

6.
- Se *a* = 0, temos $f(x) = 0$ e $m_{PQ} = m_{QR} = 0$
- Se $a \neq 0$, *f* é uma função quadrática. O seu gráfico tem a concavidade voltada para cima se *a* > 0 e voltada para baixo se *a* < 0.
  Seja m_{PQ} o declive da reta *PQ* e m_{QR} o declive da reta *PR*.
  Como $a = x_P < b = x_Q < c = x_R$ e $m_{PQ} > m_{QR}$, podemos concluir que a concavidade do gráfico de *f* é voltada para baixo. Logo, *a* < 0.

Resposta: (A)

Pág. 117

7.



O gráfico da função *g* tem a concavidade voltada para cima.

8.1. $D_g = \left[-2\ ,\ 2\right]$

8.2. $g(4) = -2$

8.3. $g(x) = -2 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4 \vee x = 8$

8.4. Zeros de *g*: {–3 , 1}

8.5. [–2 , 0] e [4 , 6]

8.6. [–4 , 2], [0 , 4] e [6 , 8]

8.7. Máximos relativos: –1, 1 e 2

8.8. Maximizantes: –4, 0 e 6

8.9. Mínimo relativo: –2

8.10. Minimizantes: –2, 4 e 8

8.11.]–2 , 0]

9.1. Mínimo absoluto: –2. Máximo absoluto: não tem

9.2. Mínimos relativos: –2 e 0

Máximo relativo: 1

9.3. Minorantes de *f*: $\left]-\infty, -2\right]$

9.4. Maximizantes: –1

9.5. **a)** [–3 , –1] e [1 , 4[

b) [–1 , 0[

10. $f(x) = \left(k^2 - 1\right)x + 6$

10.1. *f* é decrescente se $k^2 - 1 < 0$

$k^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (k-1)(k+1) < 0 \Leftrightarrow k \in \left]-1\ ,\ 1\right[$

k	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$k - 1$	–	–	–	0	+
$k + 1$	–	0	+	+	+
$k^2 - 1$	+	0	–	0	+

10.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(k^2 - 1\right)x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(k^2 - 1\right)x = -6$

Se $k^2 - 1 = 0$: $f(x) = 6$.

Se $k^2 - 1 \neq 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-6}{k^2 - 1}$.

Se $k^2 - 1 \neq 0$:

$-\dfrac{6}{k^2 - 1} = -2 \Leftrightarrow -6 = -2k^2 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6 - 2 = -2k^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -2 \vee k = 2$

10.3. A reta de equação $y = \left(k^2 - 1\right)x + 6$ é paralela à reta de equação $y = x$.

$k^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\sqrt{2} \vee k = \sqrt{2}$

11. $f(x) = \left(a^2 - a\right)x$

$a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1$

a	$-\infty$	0		1	$+\infty$
a	–	0	+	+	+
$a - 1$	–	–	–	0	+
$a^2 - a$	+	0	–	0	+

11.1. *f* é decrescente em $\left]-\infty\ ,\ 0\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - a > 0 \Leftrightarrow a \in \left]-\infty\ ,\ 0\right[\cup \left]1\ ,\ +\infty\right[$

11.2. A concavidade do gráfico de *f* é voltada para baixo se $a^2 - a < 0 \Leftrightarrow a \in \left]0\ ,\ 1\right[$

Pág. 118

Atividade inicial 4

f_1	$y=-2(x-8)^2$
f_2	$y=-2x^2-3$
f_3	$y=-2(x+5)^2+3$
f_4	$y=2(x+10)^2$
f_5	$y=2(x+5)^2+4$
f_6	$y=2x^2+3$
f_7	$y=2(x-5)^2+3$
f_8	$y=2(x-10)^2+5$

Pág. 120

1. $g(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{3}{2}$

1.1. Vértice: $V\left(2\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

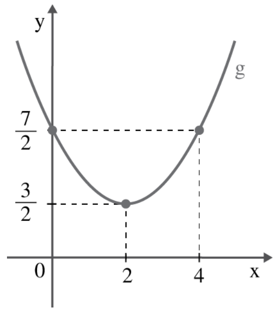
Eixo: $x=2$

1.2. $g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=-3$

A equação é impossível. g não tem zeros.

$g(0)=\frac{7}{2}=g(4)$ $(2-0=4-2)$

$g(1)=\frac{1}{2}(1-2)^2+\frac{3}{2}=2=g(3)$ $(2-1=3-2)$



1.3. **a)** g é decrescente em $]-\infty\ ,\ 2]$ e crescente em $[2\ ,\ +\infty[$

b) $\frac{3}{2}$ é o mínimo absoluto de g. Logo, $D'_g=\left[\frac{3}{2}\ ,\ +\infty\right[$

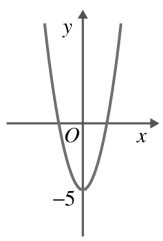
Pág. 121

2.1. $f(x)=4x^2-5$

$f(x)=4(x-0)^2-5$

Vértice $V(0\ ,-5)$

$D'_f=[-5\ ,\ +\infty[$



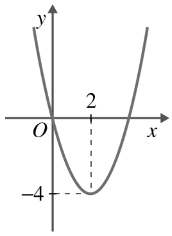
2.2. $g(x)=x^2-4x$

$g(x)=x^2-4x+4-4$

$g(x)=(x-2)^2-4$

$V(2\ ,\ -4)$

$D'_g=[-4\ ,\ +\infty[$



2.3. $h(x)=-x^2-6x-4$

$h(x)=-(x^2+6x)-4$

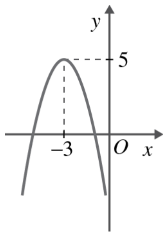
$h(x)=-(x^2+6x+9-9)-4$

$h(x)=-(x^2+6x+9)+9-4$

$h(x)=-(x+3)^2+5$

$V(-3\ ,\ 5)$

$D'_h=]-\infty\ ,\ 5]$



2.4. $i(x)=-x^2+2x+\frac{1}{2}$

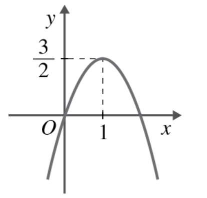
$i(x)=-(x^2-2x)+\frac{1}{2}$

$i(x)=-(x^2-2x+1-1)+\frac{1}{2}$

$i(x)=-(x-1)^2+\frac{3}{2}$

$V\left(1\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

$D'_i=\left]-\infty\ ,\ \frac{3}{2}\right]$



2.5. $j(x)=2x^2-9x+5$

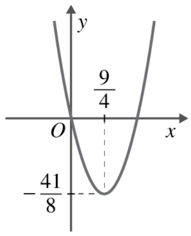
$j(x)=2\left(x^2-\frac{9}{2}x+\frac{81}{16}-\frac{81}{16}\right)+5$

$j(x)=2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{81}{8}+5$

$j(x)=2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{41}{8}$

$V\left(\frac{9}{4}\ ,\ -\frac{41}{8}\right)$

$D'_j=\left[-\frac{41}{8}\ ,\ +\infty\right[$



2.6. $k(x)=-9x^2+21x-13$

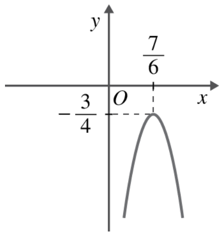
$k(x)=-9\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}\right)-13$

$k(x)=-9\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}\right)+\frac{49}{4}-13$

$k(x)=-9\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{3}{4}$

$V\left(\frac{7}{6}\ ,\ -\frac{3}{4}\right)$

$D'_k=\left]-\infty\ ,\ -\frac{3}{4}\right]$



Pág. 122

3.1. $f(x)=3x^2-6x+5=$

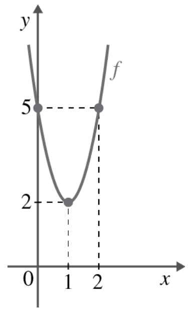
$=3(x^2-2x+1-1)+5=$

$=3(x-1)^2-3+5=$

$=3(x-1)^2+2$

Eixo de simetria: $x=1$; vértice: $V(1\ ,\ 2)$

$f(0)=f(2)=5$

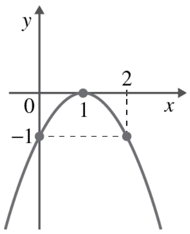


O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima (3 > 0).
f é decrescente em $]-\infty\ ,\ 1]$ e crescente em $[1\ ,\ +\infty[$.

2 é o mínimo absoluto de f ; $D'_f = [2\ ,\ +\infty[$

3.2. $g(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$

Eixo de simetria: $x = 1$; vértice: $V(1\ ,\ 0)$
$g(0) = g(2) = 1$



O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo (–1 < 0).
g é crescente em $]-\infty\ ,\ 1]$ e decrescente em $[1\ ,\ +\infty[$.

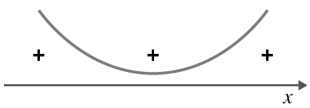
0 é o máximo absoluto de g.
$D'_g =]-\infty\ ,\ 0]$

Pág. 124

4.1. $f(x) = x^2 - 3x + 5$

$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$; f não tem zeros

$a > 0$

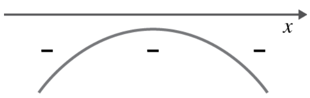


$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

4.2. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

$\Delta = 4 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-3) = -2 < 0$; f não tem zeros.

$a < 0$



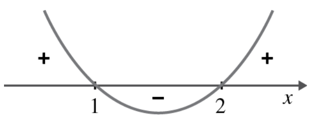
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$

4.3. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

$a > 0$



$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\ ,\ 1[\cup]2\ ,\ +\infty[$

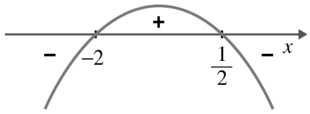
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1\ ,\ 2[$

4.4. $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$

$\Delta = 9 - 4 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$

$a > 0$



$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\ ,\ -2[\cup \left]\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$

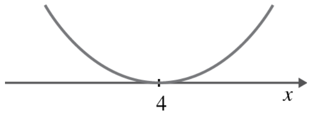
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2\ ,\ \frac{1}{2}\right[$

4.5. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

$\Delta = 16 - 4 \times \frac{1}{2} \times 8 = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{1} \Leftrightarrow x = 4$

$a > 0$



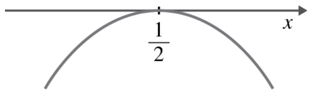
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\ ,\ 4[\cup]4\ ,\ +\infty[$

4.6. $f(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}$

$\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$a < 0$



$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$

Pág. 125

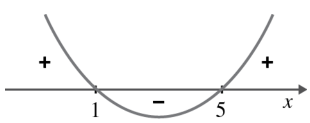
5.1. $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Cálculos auxiliares

$\Delta = 36 - 20 = 16 > 0$

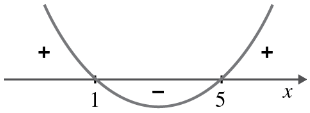
$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

$a > 0$



$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

$a > 0$



$x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1\ ,\ 5]$

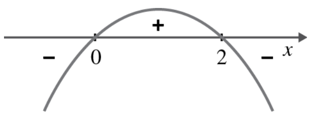
$S = [1\ ,\ 5]$

5.2. $10x - 5x^2 < 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 10x < 0$

Cálculos auxiliares

$-5x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow -5x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$a < 0$



$-5x^2 + 10x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\ ,\ 0[\cup]2\ ,\ +\infty[$

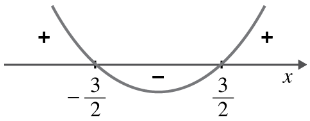
$S =]-\infty\ ,\ 0[\cup]2\ ,\ +\infty[$

5.3. $4x^2 - 9 \geq 0$

Cálculos auxiliares

$4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2}$

$a > 0$



$4x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\ ,\ +\infty\right[$

$S = \left]-\infty\ ,\ -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\ ,\ +\infty\right[$

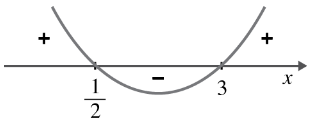
5.4. $2x^2 - 7x + 3 < 0$

Cálculos auxiliares

$\Delta = 49 - 4 \times 2 \times 3 = 25 > 0$

$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 3$

$a > 0$



$2x^2 - 7x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}\ ,\ 3\right[$

$S = \left]\frac{1}{2}\ ,\ 3\right[$

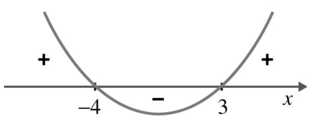
5.5. $\frac{x(x+1)}{2} \leq 6 \Leftrightarrow x^2 + x \leq 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \leq 0$

Cálculos auxiliares

$\Delta = 1 + 4 \times 12 = 49 > 0$

$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$

$a > 0$



$x^2 + x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4\ ,\ 3]$

$S = [-4\ ,\ 3]$

5.6. $x(8 - 5x) - 4 \leq 4(x - 4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x - 5x^2 - 4 \leq 4x - 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x^2 + 4x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow$

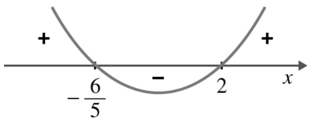
$\Leftrightarrow 5x^2 - 4x - 12 \geq 0$

Cálculos auxiliares

$\Delta = 16 - 4 \times 5 \times (-12) = 256$

$5x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{10} \Leftrightarrow x = -\frac{6}{5} \vee x = 2$

$a > 0$



$5x^2 - 4x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ -\frac{6}{5}\right] \cup [2\ ,\ +\infty[$

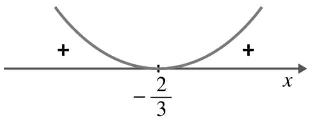
5.7. $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$

Cálculos auxiliares

$\Delta = 12^2 - 4 \times 9 \times 4 = 0$

$9x^2 + 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{18} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

$a > 0$



$9x^2 + 12x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

$S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

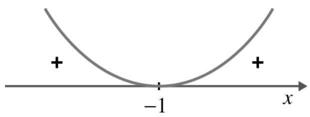
5.8. $x^2 + 2x + 1 > 0$

Cálculos auxiliares

$\Delta = 4 - 4 = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x = -1$

$a > 0$



$x^2 + 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$S =]-\infty\ ,\ -1[\cup]-1\ ,\ +\infty[$

5.9. $\frac{81 - 4x}{4} < x(8 - x) \Leftrightarrow 81 - 4x < 4x(8 - x)$

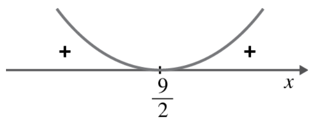
$\Leftrightarrow 81 - 4x < 32x - 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 36x + 81 < 0$

Cálculos auxiliares

$\Delta = (-36)^2 - 4 \times 4 \times 81 = 0$

$4x^2 - 36x + 81 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{36 \pm \sqrt{0}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

$a > 0$



$4x^2 - 36x + 81 < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

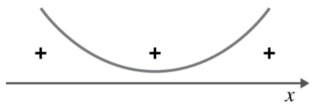
$S = \varnothing$

5.10. $x \geq \dfrac{1 - x^2}{3} - 2 \Leftrightarrow 3x \geq 1 - x^2 - 6 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 \geq 0$

Cálculos auxiliares

$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$

$a > 0$



$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 5 > 0$

Logo:

$x^2 + 3x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$S = \mathbb{R}$

Pág. 126

6.1. $V(1\ ,\ -2)$

$y = a(x-1)^2 - 2$

Como $A\ (-1\ ,\ 0)$ é um ponto da parábola, vem:

$0 = a(-1-1)^2 - 2 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - 2$ é uma equação da parábola.

6.2. Se a reta r é parábola à reta de equação $y = x$ é da forma $y = x + b$.

A abcissa de B é a solução da equação:

$\dfrac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = x + b \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - 2 - x - b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 4 - 2x - 2b = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 - 2b = 0$

Como esta equação tem uma única solução terá de ter $\Delta = 0$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \times (-3 - 2b) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 + 12 + 8b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8b = -28 \Leftrightarrow b = -\dfrac{7}{2}$

$x^2 - 4x - 3 - 2 \times \left(-\dfrac{7}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 + 7 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$r: y = x - \dfrac{7}{2}$ dado que $y = x + b$ e $b = -\dfrac{7}{2}$

Para $x = 2,\ y = 2 - \dfrac{7}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

$B\left(2\ ,\ -\dfrac{3}{2}\right)$

Ponto C:

$\dfrac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 2 \vee x - 1 = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$

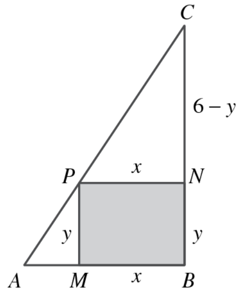
$C\ (3\ ,\ 0)$

$\overline{AC} = |3 - (-1)| = 4$

A altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[AB]$ é o valor absoluto da ordenada de B, ou seja, é $\dfrac{3}{2}$.

$A_{[ABC]} = \dfrac{4 \times \frac{3}{2}}{2} = 3$ u. a.

7.



Área do jardim: xy

Os triângulos $[PNC]$ e $[ABC]$ são semelhantes dado serem triângulos retângulos com um ângulo agudo comum (critério AA).

$\dfrac{\overline{PN}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\underset{(3)}{4}} = \dfrac{6-y}{\underset{(2)}{6}} \Leftrightarrow 3x = 12 - 2y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = 12 - 3x \Leftrightarrow y = 6 - \dfrac{3}{2}x,\ 0 < x < 4$

Área do jardim: $A(x) = x\left(6 - \dfrac{3}{2}x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = 6x - \dfrac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 6x,\ 0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = -\dfrac{3}{2}(x^2 - 4x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = -\dfrac{3}{2}(x^2 - 4x + 4) + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = -\dfrac{3}{2}(x-2)^2 + 6$

$V\ (2\ ,\ 6)$

A área máxima do jardim é 6 u. a.

Pág. 127

8. Para $x < 1$: $y = a(x-h)^2 + k$

Como $V\ (-1\ ,\ 3)$ é o vértice da parábola, temos:

$y = a(x+1)^2 + 3$

Dado que $(1\ ,\ 1)$ é um ponto da parábola, vem:

$1 = a(1+1)^2 + 3 \Leftrightarrow 1 = 4a + 3 \Leftrightarrow a - \dfrac{1}{2}$

$y = -\dfrac{1}{2}(x+1)^2 + 3$

Para $x > 1$: $y = mx + b$

$$m = \frac{-2-(-1)}{3-1} = -\frac{1}{2}$$

(3 , –2) pertence à semirreta:

$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

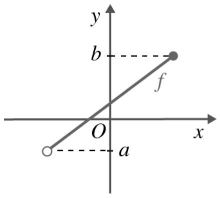
Pág. 129

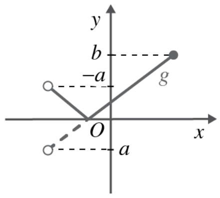
9. $D'_f =]a\ ,\ b]$; $a,\ b \in \mathbb{R}$

Logo, $a < b$. Como $ab < 0$, a e b têm sinais contrários.

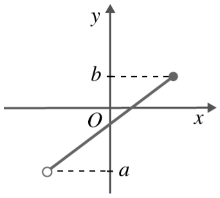
Portanto, $a < 0 < b$.

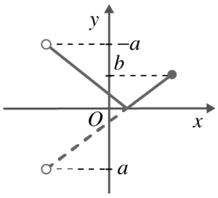
Há dois casos a considerar:





$|a| < |b|$ $\qquad$ $D'_g = [0\ ,\ b]$





$|a| > |b|$ $\qquad$ $D'_g = [0\ ,\ -a[$

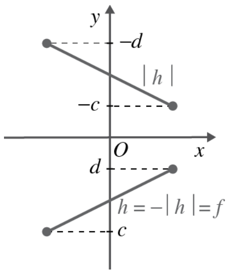
Se $|a| < |b|$, $D'_g = [0\ ,\ b]$.

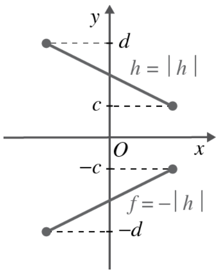
Se $|a| > |b|$, $D'_g = [0\ ,\ -a[$.

10. $D'_h = [c\ ,\ d]$, $c,\ d \in \mathbb{R}$ e $c \times d > 0$

$c \times d > 0$ significa que c e d são ambos negativos ou ambos positivos:

• $c < d < 0$ $\qquad$ • $0 < c < d$





$D'_f = [c\ ,\ d]$ $\qquad$ $D'_f = [-d\ ,\ -c]$

Se $c < d < 0$, $D'_f = [c\ ,\ d]$.

Se $0 < c < d$, $D'_f = [-d\ ,\ -c]$.

Pág. 130

11.1. $f(x) = |1 - 3x| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{se } 1-3x \geq 0 \\ -1+3x & \text{se } 1-3x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{se } x \leq \frac{1}{3} \\ -1+3x & \text{se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

11.2. $g(x) = 2 - 3|x-1| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} 2-3(x-1) & \text{se } x-1 \geq 0 \\ 2-3(-x+1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} -3x+5 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x-1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

11.3. $h(x) = |x+2| + |x-3|$

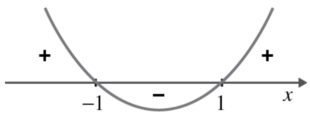
x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$	5	$x+2$
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	5	$-x+3$	0	$x-3$
$h(x)$	$-2x+1$	5	5	5	$2x-1$

$$h(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{se } x < -2 \\ 5 & \text{se } -2 \leq x \leq 3 \\ 2x-1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

11.4. $i(x) = |x^2 - 1| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow i(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x^2-1 \geq 0 \\ -x^2+1 & \text{se } x^2-1 < 0 \end{cases}$$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

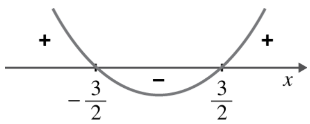


$$i(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2+1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

11.5. $j(x) = -|4x^2 - 9| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow j(x) = \begin{cases} -(4x^2-9) & \text{se } 4x^2-9 \geq 0 \\ -(-4x^2+9) & \text{se } 4x^2-9 < 0 \end{cases}$$

$4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{2}$

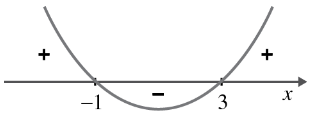


$$j(x) = \begin{cases} -4x^2+9 & \text{se } x \leq -\frac{3}{2} \vee x \geq \frac{3}{2} \\ 4x^2-9 & \text{se } -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

11.6. $k(x) = |x^2 - 2x - 3| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k(x) = \begin{cases} x^2-2x-3 & \text{se } x^2-2x-3 \geq 0 \\ -x^2+2x+3 & \text{se } x^2-2x-3 < 0 \end{cases}$$

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$$



$$k(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & \text{se } x\le -1 \vee x\ge 3 \\ -x^2+2x+3 & \text{se } -1<x<3 \end{cases}$$

Pág. 131

12. $f(x)=-|x-1|+3$

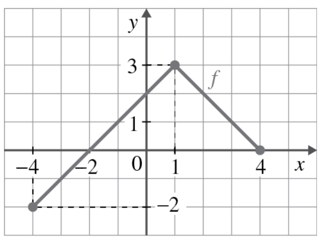
12.1. $f(x)=\begin{cases} -(x-1)+3 & \text{se } x-1\ge 0 \\ -(-x+1)+3 & \text{se } x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{se } x\ge 1 \\ x+2 & \text{se } x<1 \end{cases}$$

12.2.

x	$-x+4$
1	3
4	0

x	$x+2$
–4	–2
1	3
–2	0



12.3. $D'_f=[-2\ ,\ 3]$

12.4. Zeros de f: –2 e 4
f é crescente em [–4 , 1] e decrescente em [1 , 4]

13. $f(x)=|x+3|-2$ e $g(x)=f\left(\frac{x}{3}\right)$

13.1. a) $g(3)=f\left(\frac{3}{3}\right)=f(1)=|1+3|-2=2$

b) $g\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}:3\right)=f\left(\frac{1}{9}\right)=$

$$=\left|\frac{1}{9}+3\right|-2=\frac{10}{9}$$

13.2. $g(x)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{3}\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}+3\right|-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}+3\right|=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3}+3=2 \vee \frac{x}{3}+3=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3}=-1 \vee \frac{x}{3}=-5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \vee x=-15$$

$S=\{-15\ ,\ -3\}$

13.3. $g(x)=f\left(\frac{x}{3}\right)=\left|\frac{x}{3}+3\right|-2$

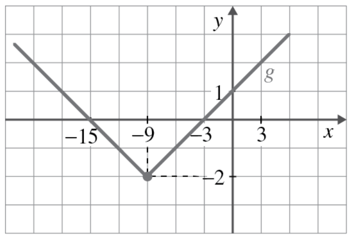
$$g(x)=\begin{cases} \frac{x}{3}+3-2 & \text{se } \frac{x}{3}+3\ge 0 \\ -\frac{x}{3}-3-2 & \text{se } \frac{x}{3}+3<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\begin{cases} \frac{x}{3}+1 & \text{se } \frac{x}{3}\ge -3 \\ -\frac{x}{3}-5 & \text{se } \frac{x}{3}<-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x+1 & \text{se } x\ge -9 \\ -\frac{1}{3}x-5 & \text{se } x<-9 \end{cases}$$

x	$-\frac{1}{3}x-5$
–9	–2
–15	0

x	$\frac{1}{3}x+1$
–9	–2
–3	0



g é decrescente em $]-\infty\ ,\ -9]$ e crescente em $[-9\ ,\ +\infty[$

–2 é o mínimo absoluto de g.

14. $f(x)=|8+2x-x^2|$

Seja $g(x)=8+2x-x^2$

$$g(x)=-(x^2-2x)+8=$$

$$=-(x^2-2x+1)+1+8$$

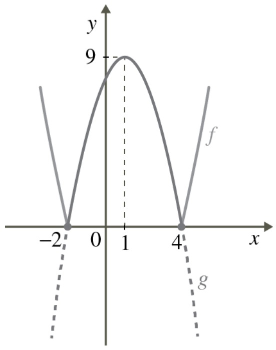
$$=-(x-1)^2+9$$

Vértice do gráfico de g: $V(1\ ,\ 9)$

$$g(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=-3 \vee x-1=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=4$$



A partir do gráfico de g foi obtido o gráfico de f.
f é decrescente em $]-\infty\ ,\ -2]$ e em [1 , 4] e é crescente em [–2 , 1] e em $[4\ ,\ +\infty[$.

Pág. 132

15.1. $|3x-1|=5 \Leftrightarrow 3x-1=5 \vee 3x-1=-5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=6 \vee 3x=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-\dfrac{4}{3}$

$S=\left\{-\dfrac{4}{3}\ ,\ 2\right\}$

15.2. $|x^2+3|=0 \Leftrightarrow x^2+3=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ pois $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+3>0$

$S=\varnothing$

15.3. $2\left|\dfrac{1}{2}x-3\right|=-10 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ porque $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\dfrac{1}{2}x-3\right| \geq 0$

$S=\varnothing$

15.4. $|x|=|3x-6| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3x-6 \vee x=-3x+6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=6 \vee 4x=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=\dfrac{3}{2}$

$S=\left\{\dfrac{3}{2}\ ,\ 3\right\}$

15.5. $2|x+3|=|-2x+8| \Leftrightarrow |2x+6|-|-2x+8|=0$

$2x+6=0 \Leftrightarrow 2x=-6 \Leftrightarrow x=-3$

$-2x+8=0 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$\|2x+6\|$	$-2x-6$	0	$2x+6$	14	$2x+6$
$\|-2x+8\|$	$-2x+8$	14	$-2x+8$	0	$2x-8$
$\|2x+6\|-\|-2x+8\|$	-14	-14	$4x-2$	14	14

$2|x+3|=|-2x+8| \Leftrightarrow 4x-2=0 \wedge -3<x<4 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Pág. 133

16.1. $|2x-1|>0 \Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$

$S=\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

16.2. $|2x-1|<3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1<3 \wedge 2x-1>-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x<4 \wedge 2x>-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<2 \wedge x>-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-1\ ,\ 2\right[$

$S=\left]-1\ ,\ 2\right[$

16.3. $\left|-2x+\dfrac{1}{2}\right|>5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+\dfrac{1}{2}>5 \vee -2x+\dfrac{1}{2}<-5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x+1>10 \vee -4x+1<-10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x>9 \vee -4x<-11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<-\dfrac{9}{4} \vee x>\dfrac{11}{4}$

$S=\left]-\infty\ ,\ -\dfrac{9}{4}\right[\cup \left]\dfrac{11}{4}\ ,\ +\infty\right[$

16.4. $\left|-x+\dfrac{1}{2}\right|+2>7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|-x+\dfrac{1}{2}\right|>5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x+\dfrac{1}{2}>5 \vee -x+\dfrac{1}{2}<-5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x>\dfrac{9}{2} \vee -x<-\dfrac{11}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<-\dfrac{9}{2} \vee x>\dfrac{11}{2}$

$S=\left]-\infty\ ,\ -\dfrac{9}{2}\right[\cup \left]\dfrac{11}{2}\ ,\ +\infty\right[$

16.5. $|-2x+3|<-5$

Condição impossível porque $\forall x \in \mathbb{R},\ |-2x+3| \geq 0$

$S=\varnothing$

16.6. $|-3x+1|>-8$

Condição universal porque $\forall x \in \mathbb{R},\ |-3x+1| \geq 0$

$S=\mathbb{R}$

16.7. $\dfrac{4-|2-x|}{2} \geq 2 \Leftrightarrow 4-|2-x| \geq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -|2-x| \geq 0 \Leftrightarrow |2-x| \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow$ (a condição $|2-x|<0$ é impossível)

$\Leftrightarrow x=2$

$S=\{2\}$

16.8. $-3-|6-2x| \leq -10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -|6-2x| \leq -10+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |6-2x| \geq 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6-2x \geq 7 \vee 6-2x \leq -7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x \geq 1 \vee -2x \leq -13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq \dfrac{13}{2}$

$S=\left]-\infty\ ,\ -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{13}{2}\ ,\ +\infty\right[$

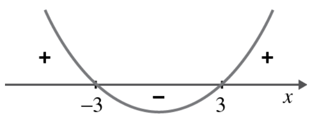
16.9. $|x^2-4|<5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4<5 \wedge x^2-4>-5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-9<0 \wedge x^2+1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-3\ ,\ 3\right[\wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-3\ ,\ 3\right[$



$S=\left]-3\ ,\ 3\right[$

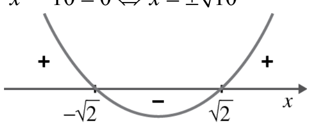
16.10. $|x^2-6| \geq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-6 \geq 4 \vee x^2-6 \leq -4 \Leftrightarrow$

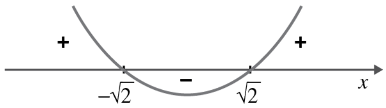
$\Leftrightarrow x^2-10 \geq 0 \vee x^2-2 \leq 0$

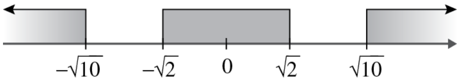
Cálculos auxiliares

$x^2-10=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{10}$



$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$





$x^2 - 10 \geq 0 \vee x^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ -\sqrt{10}\right] \cup \left[-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{10}\ ,\ +\infty\right[$

Pág. 135

17. $f(x) = (m-3)x^2 - 2x + 1,\ m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

17.1. O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima se o coeficiente de x^2 for positivo, ou seja, se $m - 3 > 0$.
Temos então que $m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3 \Leftrightarrow m \in \left]3\ ,\ +\infty\right[$

17.2. $(-1\ ,\ 2)$: $2 = (m-3)(-1)^2 - 2(-1) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = m - 3 + 2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = m \Leftrightarrow m = 2$

17.3. No caso de $m = 5$, temos que:

$f(x) = 2x^2 - 2x + 1 = 2(x^2 - x) + 1$

$f(x) = 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{2}$

$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

18.1. Vértice: $(0\ ,\ -27)$
Eixo de simetria: $x = 0$

18.2. $g(x) = -x^2 + 2x + \frac{1}{2} =$

$= -(x^2 - 2x + 1 - 1) + \frac{1}{2} =$

$= -(x-1)^2 + 1 + \frac{1}{2} =$

$= -(x-1)^2 + \frac{3}{2}$

Vértice $\left(1\ ,\ \frac{3}{2}\right)$; eixo de simetria: $x = 1$

18.3. $h(x) = 3 + (x-2)^2$

Vértice: $(2\ ,\ 3)$; eixo de simetria: $x = 2$

18.4. $m(x) = 2x^2 - 8x = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) = 2(x-2)^2 - 8$

Vértice: $(2\ ,\ -8)$; eixo de simetria: $x = 2$

18.5. $p(x) = -5(x+2)^2$

Vértice: $(-2\ ,\ 0)$; eixo de simetria: $x = -2$

18.6. $r(x) = 2x^2 - x + 4 =$

$= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 4 =$

$= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{2}{16} + 4 =$

$= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}$

Vértice: $\left(\frac{1}{4}\ ,\ \frac{31}{8}\right)$; eixo de simetria: $x = \frac{1}{4}$

19.1. Os zeros de *f* são -3 e 2 e o ponto de coordenadas $(0\ ,\ -6)$ pertence à parábola.
Deste modo, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, vem

$$\begin{cases} f(0) = -6 \\ f(-3) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -6 \\ 9a - 3b - 6 = 0 \\ 4a + 2b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -6 \\ b = 3a - 2 \\ 4a + 6a - 4 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -6 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Logo, $f(x) = x^2 + x - 6$.

19.2. $f(x) = x^2 + x - 6 =$

$= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 6 =$

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

$V\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{25}{4}\right)$

19.3. $f(-2) = (-2)^2 + (-2) - 6 = -4$

Logo, o ponto $(-2\ ,\ -4)$ pertence ao gráfico de *f*.

20.1. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 9 - 32 = -23$

Como $\Delta < 0$, a função *f* não tem zeros.

20.2. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 36 - 36 = 0$

Como $\Delta = 0$, a função *f* tem um zero.

20.3. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) \times 7 = 28$

Como $\Delta > 0$, a função *f* tem dois zeros.

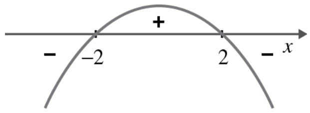
21. $f(x) = x^2 - mx + 1$

O contradomínio de *f* é $\mathbb{R}_0^+$ se *f* tiver um único zero.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-m)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = -2 \vee m = 2$

22.1. $4 - x^2 \leq 0$

Cálculo auxiliar: $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$



$4 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ -2\right] \cup \left[2\ ,\ +\infty\right[$

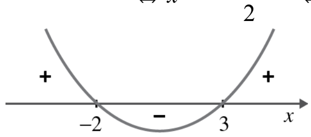
$S = \left]-\infty\ ,\ -2\right] \cup \left[2\ ,\ +\infty\right[$

22.2. $x^2 - x - 6 < 0$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

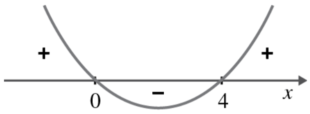


$S = \left]-2\ ,\ 3\right[$

22.3. $2x^2 > 8x \Leftrightarrow 2x^2 - 8x > 0$

Cálculo auxiliar: $-2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$



$2x^2 > 8x \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ 0\right[\cup \left]4\ ,\ +\infty\right[$

$S = \left]-\infty\ ,\ 0\right[\cup \left]4\ ,\ +\infty\right[$

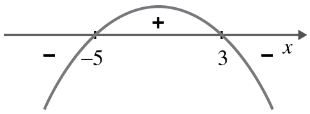
22.4. $-2x^2 - 4x < -30 \Leftrightarrow -2x^2 - 4x + 30 < 0$

Cálculo auxiliar: $-2x^2 - 4x + 30 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\times(-2)\times 30}}{2\times(-2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{256}}{-4} \Leftrightarrow$

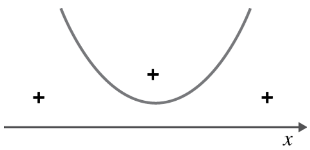
$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$



$-2x^2 - 4x < -30 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ -5\right[\cup \left]3\ ,\ +\infty\right[$

$S = \left]-\infty\ ,\ -5\right[\cup \left]3\ ,\ +\infty\right[$

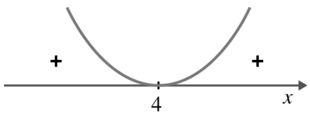
22.5. $9 \geq -x^2 \Leftrightarrow 9 + x^2 \geq 0 \to$ condição universal em $\mathbb{R}$



$9 \geq -x^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$S = \mathbb{R}$

22.6. $(x-4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{4\}$



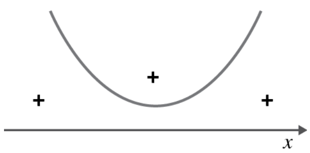
$S = \{4\}$

22.7. $x^2 + 3x > -6 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 6 > 0$

Cálculo auxiliar: $x^2 + 3x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\times 6}}{2}$

Impossível em $\mathbb{R}$



$x^2 + 3x > -6 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$S = \mathbb{R}$

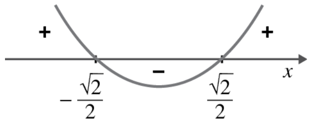
22.8. $x(x^2 + 2x) \leq x^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 \leq x^3 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^3} + 2x^2 - \cancel{x^3} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 \leq 0$

Cálculo auxiliar: $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x(x^2 + 2x) \leq x^3 + 1 \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$S = \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

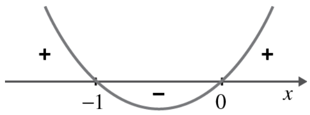
23.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 + x \geq 0\}$

Cálculo auxiliar: $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$



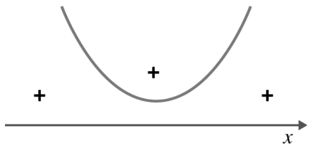
$D_f = \left]-\infty\ ,\ -1\right] \cup \left[0\ ,\ +\infty\right[$

23.2. $D_g = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 2x + 8 \geq 0\}$

Cálculo auxiliar: $x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\times 1\times 8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-28}}{2}$, impossível em $\mathbb{R}$.

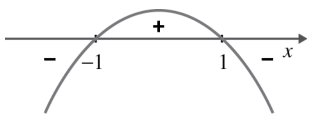


$D_g = \mathbb{R}$

23.3. $D_h = \{x \in \mathbb{R} :\ 1 - x^2 \geq 0\}$

Cálculo auxiliar:

$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$



$D_h = [-1\ ,\ 1]$

24. $f(x) = x^2 - 3x - 3$ e $g(x) = 2x - x^2$

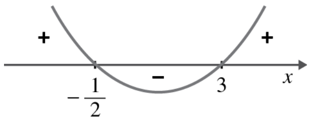
$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 \leq 2x - x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 3x - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

Cálculo auxiliar:

$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \vee x = 3$



$f(x) \le g(x) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}\ ,\ 3\right]$, logo $S = \left[-\frac{1}{2}\ ,\ 3\right]$.

Pág. 136

25. $y(x-2)^2 - 4$ e $y = mx - 9$

25.1. $(x-2)^2 - 4 = mx - 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 - mx + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - (4+m)x + 9 = 0$

Para que esta equação admita um única solução, $\Delta = 0$.

$(4+m)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (4+m)^2 = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 + m = -6 \vee 4 + m = 6 \Leftrightarrow m = -10 \vee m = 2$

25.2. • Se $m = -10$:

$x^2 - (4-10)x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$y = -10 \times (-3) - 9 = 21$

• Se $m = 2$:

$x^2 - (4+2)x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$y = 2 \times 3 - 9 = -3$

Os pontos de interseção têm coordenadas (–3 , 21) e (3 , –3).

26.2. $\overline{AB} = 10$; $\overline{BF} = 10 - x$

$A_{[ABF]} = \frac{10 \times (10 \times x)}{2} = 5(10 - x)$

$A_{[FCE]} = \frac{x \times x}{2} = \frac{1}{2}x^2$

$A_{[AED]} = A_{[ABF]} = 5(10 - x)$

26.3. $A_{[AFE]} = 10^2 - \frac{1}{2}x^2 - 2 \times 5(10 - x)$

$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 100 + 10x + 100$

$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10x$

$A(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 20x + 100 - 100)$

$A(x) = -\frac{1}{2}(x - 10)^2 + 50$

$V(10\ ,\ 50)$

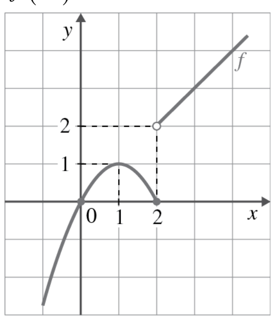
A área é máxima para $x = 10$ m

27.1. $2x - x^2 = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = -(x-1)^2 + 1$

$V(1\ ,\ 1)$

$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$f(-1) = -2 - 1 = -3$



27.2. • Para $x < -2$:

$g(x) = -x^2 - 6x - 3 = -(x^2 + 6x + 9 - 9) - 3 = -(x+3)^2 + 6$

$V(-3\ ,\ 6)$

x	y
–6	–3
–4	5
–2	5

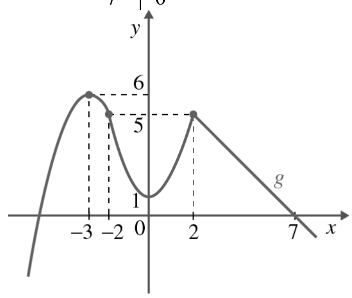
• Para $-2 \le x \le 2$: $g(x) = x^2 + 1$

$V(0\ ,\ 1)$

x	y
–2	5
–1	1

• Para $x > 2$: $g(x) = -x + 7$

x	y
2	5
7	0



28. • Para $x < 0$: $h(x) = mx + b$

$b = 4$ e $h(-2) = 1 \Leftrightarrow -2m + 4 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

$h(x) = \frac{3}{2}x + 4$

• Para $x = 0$, $h(x) = 3$.

• Para $x > 0$:

$h(x) = a(x-2)^2 - 4$

$h(4) = 0 \Leftrightarrow a(4-2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$

$h(x) = (x-2)^2 - 4$

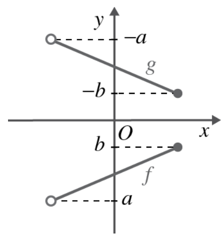
$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 4 & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ (x-2)^2 - 4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

29. Se $a \times b > 0$, então a e b têm o mesmo sinal.

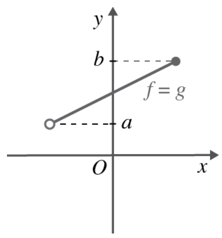
Por outro lado, sabemos que $a < b$.

Há dois casos a considerar:

• $a < b < 0$



• $0 < a < b$



$D'_g = [-b\ ,\ -a[$ $\qquad$ $D'_g =]a\ ,\ b]$

Se $a < b < 0$, $D'_g = [-b\ ,\ -a[$

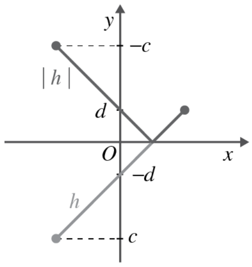
Se $0 < a < b$, $D'_g =]a\ ,\ b]$

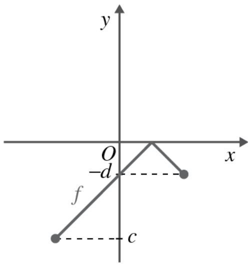
30. Se $c \times d < 0$, então *c* e *d* têm sinais contrários.

Como *c* < *d*, temos $c < 0 < d$.

Temos de considerar:

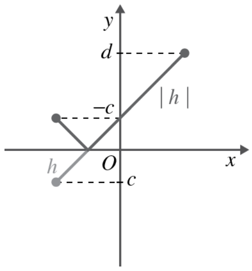
1.º caso: $|c| > |d|$

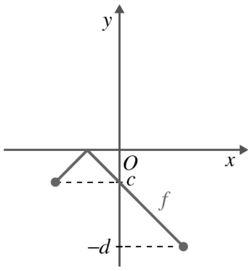




$D'_f = [c\ ,\ 0]$

2.º caso: $|c| < |d|$



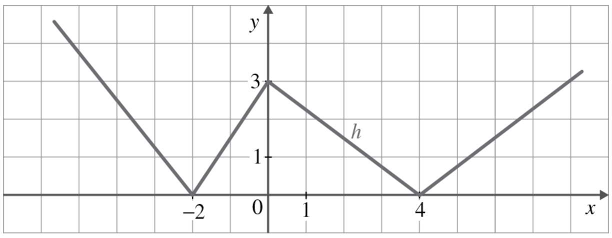


$D'_f = [-d\ ,\ 0]$

Se $|c| > |d|$, $D'_f = [c\ ,\ 0]$

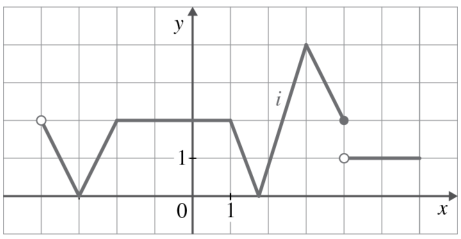
Se $|c| < |d|$, $D'_f = [-d\ ,\ 0]$

31.1.



h é estritamente decrescente em $]-\infty\ ,\ 2]$ e em [0 , 4] e é estritamente crescente em [–2 , 0] e em $[4\ ,\ +\infty[$.

31.2.



$D'_i = [0\ ,\ 4]$

32.1. $f(x) = 2|x-3| - |x-1|$

$= |2x-6| - |x-1|$

$2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

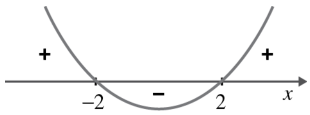
$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$\|2x-6\|$	$-2x+6$	4	$-2x+6$	0	$2x-6$
$\|x-1\|$	$-x+1$	0	$x-1$	2	$x-1$
$f(x)$	$-x+5$	4	$-3x+7$	-2	$x-5$

$$f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{se } x < 1 \\ -3x+7 & \text{se } 1 \le x \le 3 \\ x-5 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

32.2. $f(x) = |x^2 - 4| - |x-2|$

- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$



- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$\|x^2-4\|$	x^2-4	0	$-x^2+4$	4	x^2-4
$\|x-2\|$	$-x+2$	4	$-x+2$	0	$x-2$
$f(x)$	x^2+x-6	-2	$-x^2+x+2$	4	x^2-x-2

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-6 & \text{se } x < -2 \\ -x^2+x+2 & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ x^2-x-2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Pág. 137

33. $f(x) = |x+1| + |x| - 3$, $D_f = [-3\ ,\ 3]$

33.1.

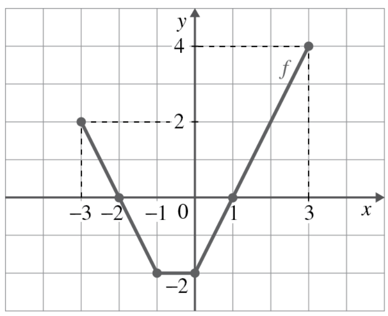
x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$\|x+1\|$	$-x-1$	0	$x+1$	1	$x+1$
$\|x\|$	$-x$	1	$-x$	0	x
$f(x)$	$-2x-4$	-2	-2	-2	$2x-2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & \text{se } x < -1 \\ -2 & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ 2x-2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

33.2.

x	$y = -2x - 4$
-3	2
-2	0
-1	-2

x	$y = 2x - 2$
0	-2
1	0
3	4



33.3. $D'_f = [-2\ ,\ 4]$

33.4. Zeros: –2 e 1

f é decrescente em [–3 , –1], constante em [–1 , 0] e crescente em [0 , 3]

34. Os zeros da função g são os mesmo que os da função f.
Deste modo, temos:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{-2} \Leftrightarrow x=-1+\sqrt{2} \vee x=-1-\sqrt{2}$$

Zeros: $-1-\sqrt{2}$ e $-1+\sqrt{2}$

$D'_g=[0\ ,\ +\infty[=\mathbb{R}_0^+$

35.1. $|x-1|-|2x|=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-1|=|2x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=-2x \vee x-1=2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=1 \vee x=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \vee x=-1$

$S=\left\{-1\ ,\ \frac{1}{3}\right\}$

35.2. $|2x|=|x^2-5x+6| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=x^2-5x+6 \vee 2x=-x^2+5x-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \vee x^2-3x+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2} \vee x=\frac{9\pm\sqrt{9-24}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{7\pm 5}{2} \vee x\in\varnothing \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=6$

$S=\{1\ ,\ 6\}$

36. $|x|+1\le k \Leftrightarrow |x|\le k-1$

A condição é impossível se:

$k-1<0 \Leftrightarrow k<1 \Leftrightarrow k\in]-\infty\ ,\ 1[$

37.1. $D_f=[-4\ ,\ 4[$ e $D'_f=[-4\ ,\ 4]$

37.2. Sejam A, B e C pontos do gráfico de f de coordenadas $A(-4\ ,\ 4)$; $B(-2\ ,\ 4)$ e $C(1\ ,\ 0)$.

Então, temos que $\overrightarrow{AB}=(2\ ,\ -8)$ e $m_{AB}=-\frac{8}{2}=-4$

$y=-4x+b$

$4=-4\times(-4)+b \Leftrightarrow b=-12$

Logo, $AB:\ y=-4x-12$

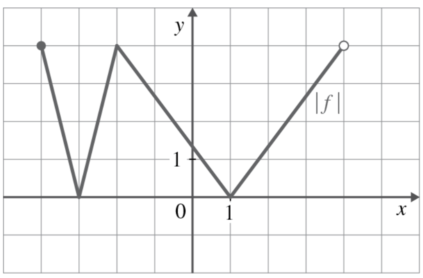
Por outro lado, temos que $\overrightarrow{BC}=(6\ ,\ 8)$ e $m_{BC}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

$0=\frac{4}{3}\times 1+b \Leftrightarrow b=-\frac{4}{3}$, logo $BC:\ y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$.

Assim, vem que:

$$f(x)=\begin{cases}-4x-12 & \text{se } -4\le x\le -2\\ \frac{4}{3}x-\frac{4}{3} & \text{se } -2<x<4\end{cases}$$

37.3.



37.4. $D'_{|f|}=[0\ ,\ 4]$

37.5. **a)** $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$

b) $|f(x)|=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$

c) $f(x)\ge 4 \Leftrightarrow x=-4$

d) $|f(x)|\ge 4 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=-2$

e) $|f(x)|=f(x) \Leftrightarrow x\in[-4\ ,\ -3]\cup[1\ ,\ 4[$

38.1. **a)** $f(x)=-1 \Leftrightarrow 1-2|x-3|=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2|x-3|=-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-3|=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3=1 \vee x-3=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4 \vee x=2$

$S=\{2\ ,\ 4\}$

b) $f(x)\le -3 \Leftrightarrow 1-2|x-3|\le -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2|x-3|\le -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-3|\ge 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3\ge 2 \vee x-3\le -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\ge 5 \vee x\le 1$

$S=]-\infty\ ,\ 1]\cup[5\ ,\ +\infty[$

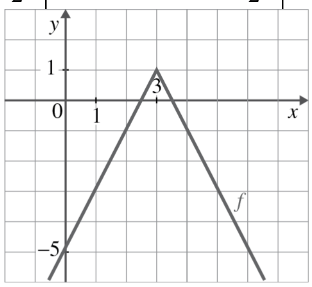
38.2. $f(x)=1-2|x-3|=$

$$=\begin{cases}1-2(x-3) & \text{se } x-3\ge 0\\ 1-2(-x+3) & \text{se } x-3<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-2x+7 & \text{se } x\ge 3\\ 2x-5 & \text{se } x<3\end{cases}$$

x	$y=-2x+7$
3	1
$\frac{7}{2}$	0

x	$y=2x-5$
3	1
$\frac{5}{2}$	0



a) $D'_f=]-\infty\ ,\ 1]$

b) f é estritamente crescente em $]-\infty\ ,\ 3]$ e é estritamente decrescente em $[3\ ,\ +\infty[$.

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-2|x-3|=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2|x-3|=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-3|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-3=\frac{1}{2} \vee x-3=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{7}{2} \vee x=\frac{5}{2}$

Zeros: $\frac{5}{2}$ e $\frac{7}{2}$

39. $\overline{AM}=x$

$\overline{AH}=\overline{HM}=\overline{HE}=\frac{x}{2}$

$\overline{MB}=8-x=\overline{MD}$

39.1. $A = A_{[MBCD]} + A_{[HMDE]} + A_{[AHE]} =$

$$= \overline{MB}^2 + \frac{\overline{MD}+\overline{HE}}{2}\times \overline{HM} + \frac{\overline{AH}\times\overline{HE}}{2} =$$

$$= (8-x)^2 + \frac{8-x+\frac{x}{2}}{2}\times\frac{x}{2}+\frac{\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}}{2} =$$

$$= 64-16x+x^2+\frac{1}{4}\left(8x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{x^2}{8} =$$

$$= 64-16x+x^2+2x-\frac{x^2}{8}+\frac{x^2}{8}$$

$A(x) = x^2-14x+64 \quad (0<x<8)$

39.2. $A(x) = x^2-14x+49-49+64$

$A(x) = (x-7)^2+15$

$V(7\ ,\ 15)$

A área é mínima para $x = 7$ cm.

Pág. 138

40.1. $f(x) = 3x^2-6x+5 = 3(x^2-2x)+5$

$f(x) = 3(x^2-2x+1)+5-3$

$f(x) = 3(x-1)^2+2$

40.2. $x = 1$

40.3. $D'_f = [2\ ,\ +\infty[$

40.4. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty\ ,\ 1]$ e é estritamente crescente em $[1\ ,\ +\infty[$

41.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x-1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times(-1)\times(-1)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{0}}{-2} \Leftrightarrow x = 1$$

41.2 $f(x) = -x^2+2x-1 = -(x^2-2x+1) = -(x-1)^2$

$V(1\ ,\ 0)$

41.3. $D'_f =]-\infty\ ,\ 0]$

41.4. A função f é estritamente crescente em $]-\infty\ ,\ 1]$ e é estritamente decrescente em $[1\ ,\ +\infty[$.

41.5. a) $f(x) = -1 \Leftrightarrow -x^2+2x-1 = -1 \Leftrightarrow -x^2+2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x+2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

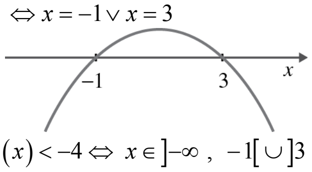
b) $f(x) < -4 \Leftrightarrow -x^2+2x-1 < -4 \Leftrightarrow -x^2+2x+3 < 0$

Cálculo auxiliar: $-x^2+2x+3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times(-1)\times 3}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$



$f(x) < -4 \Leftrightarrow x \in]-\infty\ ,\ -1[\cup]3\ ,\ +\infty[$

42.1. a) $\Delta > 0 \Leftrightarrow b^2-4ac > 0$

$m^2-4\times 2\times 2 > 0 \Leftrightarrow m^2-16 > 0$

Cálculo auxiliar:

$m^2-16 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = -4 \vee m = 4$

$m \in]-\infty\ ,\ -4[\cup]4\ ,\ +\infty[$

b) $\Delta = 0 \Leftrightarrow b^2-4ac = 0$

$m^2-16 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \vee m = 4$

42.2. $g(x) = 2x^2+mx+2 =$

$$= 2\left(x^2+\frac{m}{2}x\right)+2 =$$

$$= 2\left(x^2+\frac{m}{2}x+\frac{m^2}{16}-\frac{m^2}{16}\right)+2 =$$

$$= 2\left(x+\frac{m}{4}\right)^2-\frac{m^2}{8}+2$$

A abcissa do vértice da parábola é $-\frac{m}{4}$

$-\frac{m}{4} = 3 \Leftrightarrow -m = 12 \Leftrightarrow m = -12$

42.3. $g(x) = 2x^2+3x+2 =$

$$= 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)+2 =$$

$$= 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+2 =$$

$$= 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$

O vértice da parábola tem coordenadas $\left(-\frac{3}{4}\ ,\ \frac{7}{8}\right)$.

Como a parábola tem a concavidade voltada para cima, temos que $D'_g = \left[\frac{7}{8}\ ,\ +\infty\right[$.

43.1. a) $2x+y$ é o comprimento da rede.

b) $100-2x$ é o comprimento do lado paralelo ao muro, em função do comprimento dos outros dois.

c) $x(100-2x)$ é a área do retângulo.

43.2. A área do retângulo é dada por:

$A(x) = x(100-2x)$, $x > 0$ e $2x < 100$

$A(x) = -2x^2+100x$, $0 < x < 50$

$A(x) = -2(x^2-50x) =$

$= -2(x^2-50x+25^2-25^2) =$

$= -2(x-25)^2+1250$

$V(25\ ,\ 1250)$, $-2 > 0$

Se $x = 25$:

$y = 100-2x = 100-50 = 50$.

Logo, a área do terreno é máxima se as dimensões do terreno forem 25 m e 50 m.

44.1. $h(t)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5t^2+20t+0,5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-20\pm\sqrt{20^2-4\times(-5)-0,5}}{2\times(-5)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-20\pm\sqrt{410}}{-10} \Rightarrow$

$\Rightarrow t\approx 4,02 \vee t\approx -0,02$

Como $t\geq 0$, vem que $t\approx 4,02$.

A bola manteve-se no ar, aproximadamente, 4,0 s.

44.2. $h(t)=-5t^2+20t+0,5=$

$=-5\left(t^2-4t+4-4\right)+0,5=$

$=-5(t-2)^2+20+0,5=$

$=-5(t-2)^2+20,5$

$V(2\ ;\ 20,5)$

A altura máxima atingida pela bola é 20,5 m.

44.3. $h(3)=-5\times 3^2+20\times 3+0,5=15,5$

A bola encontra-se a 15,5 m de altura

45. Para escrevermos uma equação que descreva a trajetória da bola de golfe precisamos de definir um referencial.

Considere-se o referencial que tem por origem as coordenadas do ponto de partida da bola.

O vértice da parábola é $V(15\ ,\ 9)$.

$y=a(x-15)^2+9$

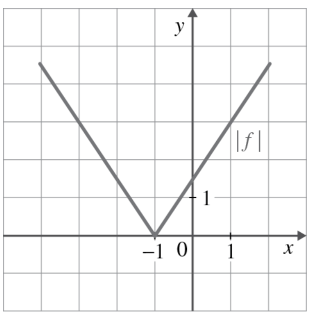
A parábola contém o ponto de coordenadas (0 , 0).

$0=a(0-15)^2+9 \Leftrightarrow a=-0,04$

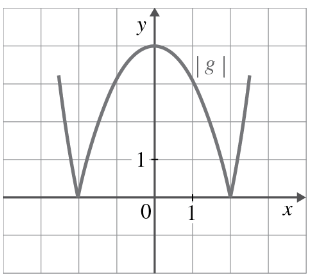
Uma equação para a trajetória da bola de golfe é $y=-0,04(x-15)^2+9,\ 0\leq x\leq 30$

Pág. 139

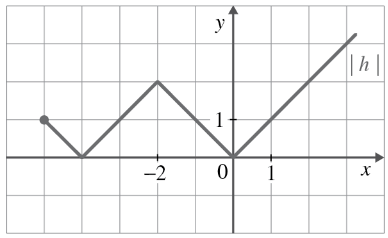
46.1. a)



b)



c)



46.2. a) $g(x)<f(-1)\Leftrightarrow g(x)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty\ ,\ -2\right[\cup\left]2\ ,\ +\infty\right[$

b) $h(x)\geq g(0)\Leftrightarrow h(x)\geq 4\Leftrightarrow x\in\left[4\ ,\ +\infty\right[$

c) $|f(x)|<3\Leftrightarrow x\in\left]-3\ ,\ 1\right[$

d) $|g(x)|=0\Leftrightarrow x=-2\vee x=2\Leftrightarrow x\in\{-2\ ,\ 2\}$

e) $|h(x)|\geq 2\Leftrightarrow x=-2\vee x\geq 2\Leftrightarrow\Leftrightarrow x\in\{-2\}\cup\left[2\ ,\ +\infty\right[$

47.1. $g(34,5)=-|34,5-26|+10=1,5$

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{se } 0\leq t<16\\ -|t-26|+10 & \text{se } 16\leq t\leq 34,5\\ 1,5 & \text{se } 34,5<t\leq 45\end{cases}$$

47.2. $-|t-26|=\begin{cases}-t+26 & \text{se } t\geq 26\\ t-26 & \text{se } t<26\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -|t-26|=\begin{cases}-(t-26) & \text{se } t-26\geq 0\\ t-26 & \text{se } t-26<0\end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{se } 0\leq t<16\\ t-26+10 & \text{se } 16\leq t<26\\ -t+26+10 & \text{se } 26\leq t\leq 34,5\\ 1,5 & \text{se } 34,5<t\leq 45\end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{se } 0\leq t<16\\ t-16 & \text{se } 16\leq t<26\\ -t+36 & \text{se } 26\leq t\leq 34,5\\ 1,5 & \text{se } 34,5<t\leq 45\end{cases}$$

47.3. A prova deste atleta demorou 45 s.

47.4. $g(26)=-26+36=10$

A altitude máxima atingida foi 10 m.

47.5. $g(t)>8\Leftrightarrow -|t-26|+10>8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -|t-26>-2|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |t-26|<2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t-26<2\wedge t-26>-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t<28\wedge t>24\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24<t<28$

A altitude foi superior a 8 m durante 4 segundos.

47.6. $g(t)=1,5\Leftrightarrow\left(-|t-26|+10=1,5\wedge 16\leq t\leq 34,5\right)\vee$

$\vee\ 34,5<t\leq 45\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[(t-26=8,5\vee t-26=-8,5)\wedge\right.$

$\left.\wedge(16\leq t\leq 34,5)\right]\vee 34,5\leq t\leq 45\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(t=34,5\vee t=17,5)\vee 34,5\leq t\leq 45\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=17,5\vee 34,5\leq t\leq 45$

A altitude foi de 1,5 m no instante t = 17,5 s e no intervalo de tempo entre t = 34,5 s e t = 45 s.

47.7. $g(t)<6 \Leftrightarrow (0<6 \wedge 0 \le t<16) \vee (-|-t-26|+10<6 \wedge$
$\wedge 16 \le t \le 34{,}5) \vee (1{,}5<6 \wedge 34{,}5<t \le 45)$
$\Leftrightarrow (0 \le t<16) \vee (|t-26|>4 \wedge 16 \le t \le 34{,}5) \vee (34{,}5<t \le 45)$
$\Leftrightarrow (0 \le t<16) \vee [(t-26>4 \vee t-26<-4) \wedge 16 \le t \le 34{,}5] \vee$
$\vee (34{,}5<t \le 45)$
$\Leftrightarrow (0 \le t<16) \vee [(t>30 \vee t<22) \wedge 16 \le t \le 34{,}5] \vee$
$\vee (34{,}5<t \le 45)$
$\Leftrightarrow (0 \le t<16) \vee (16 \le t<22 \vee 30<t \le 34{,}5) \vee (34{,}5<t \le 45)$
$\Leftrightarrow 0 \le t<22 \vee 30<t \le 45$

A altitude foi inferior a 6 m durante 37 s.

Pág. 140

Avaliação 4

1. A parábola que representa graficamente a função *f* tem como vértice o ponto de coordenadas (–1 , –5) e a concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de termo do 2.º grau é negativo. Desta forma, temos que $D'_f =]-\infty\ ,\ -5]$.

Resposta: (D)

2. $g(x)=x^2-x-1=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$

- $V\left(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{3}{4}\right)$ o que exclui (A).
- A função é crescente em $\left[\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$, o que exclui (B).
- O contradomínio de g é $\left[-\frac{5}{4}\ ,\ +\infty\right[$, o que exclui (C).
- $\pi \in D'_g$. Logo, $\exists x \in D_g :\ g(x)=\pi$

Como $D_g=\mathbb{R}$, (D) é verdadeira.

Resposta: (D)

3. (A) o salto durou aproximadamente 9,3 s.

(B) $-0{,}5(t-6)^2+5{,}5=5 \wedge 5 \le t \le 9{,}3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (t-6)^2=1 \wedge 5 \le t \le 9{,}3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (t-6=1 \vee t-6=-1) \wedge 5 \le t \le 9{,}3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t=7 \vee t=5$

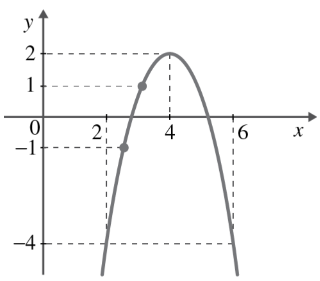
A distância do atleta ao solo foi superior a 5 m durante 2 s.

(C) $V(6\ ;\ 5{,}5)$, logo a distância máxima ao solo foi 5,5 m

(D) $f(3{,}5)=3{,}5\ ;\ f(8)=-0{,}5(8-6)^2+5{,}5=3{,}5$

Resposta: (D)

4. Gráfico de *f*



$|f(x)|=1 \Leftrightarrow f(x)=-1 \vee f(x)=1$

A equação $|f(x)|=1$ tem duas soluções em [2 , 4].

Resposta: (C)

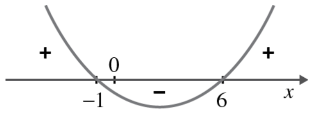
5. Área do retângulo $=(x+3)(x+2)\ =x^2+3x+2x+6=$
$=x^2+5x+6$

Área do quadrado $=x^2$

$x^2+5x+6>2x^2 \Leftrightarrow\ x^2-5x-6<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \in]0\ ,\ 6[$

Cálculo auxiliar:

$x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=6$

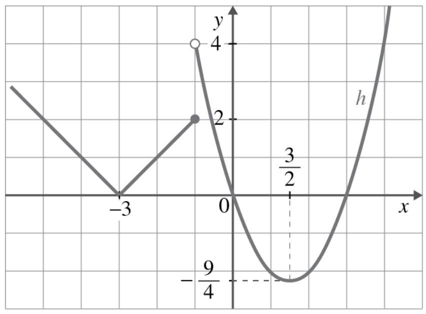


Resposta: (C)

6. $x^2-3x=x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$; $V\left(\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{9}{4}\right)$

x	$y=x^2-3x$
–1	4
0	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$

x	$y=\|x+3\|$
–1	2
–3	0
–5	2



$D'_h=\left[-\frac{9}{4}\ ,\ +\infty\right[$

Resposta: (A)

Pág. 141

7. $g(x)=\begin{cases}|x-1| & \text{se } x<1\\ 3x+5 & \text{se } x \ge 1\end{cases}=\begin{cases}-x+1 & \text{se } x<1\\ 3x+5 & \text{se } x \ge 1\end{cases}$

7.1. **a)** $g(-3)=+3+1=4$ **b)** $g(2)=3\times 2+5=11$

7.2. Se $h \in \mathbb{R}^+$, $1+h>1$ e $1-h<1$:
$g(1+h)+3g(1+h)\ =3(1+h)+5+3(-1-h+1)=$
$=3+3h+5-3h=\ 8$

7.3. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow [-(x-1)^2+2=-x+1 \wedge x<1] \vee$
$\vee [-(x-1)^2+2=3x+5 \vee x \ge 1]$
$\Leftrightarrow (-x^2+2x-1+2+x-1=0 \wedge x<1) \vee$
$\vee (-x^2+2x-1+2-3x-5=0 \wedge x \ge 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (-x^2+3x=0 \wedge x<1) \vee (-x^2-x-4=0 \wedge x \ge 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [-x(x-3)=0 \wedge x<1] \vee \left(x=\frac{1 \pm \sqrt{1-16}}{2} \wedge x \ge 1\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=0$

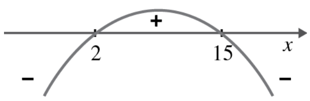
$f(0)=g(0)=1$. Os gráficos intersetam-se no ponto (0 , 1).

8. $200(15-x)(x-2) \ge 0 \wedge 0 \le x \le 30 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 200(15x-30-x^2+2x) \ge 0 \wedge 0 \le x \le 30 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x^2+17x-30 \ge 0 \wedge 0 \le x \le 30$

Cálculo auxiliar:

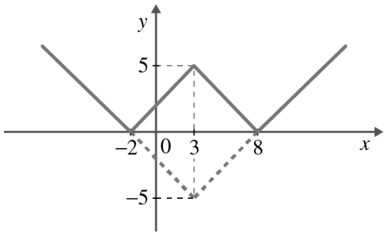
$$-x^2+17x-30=0 \Leftrightarrow x=\frac{-17\pm\sqrt{169}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=15$$



$x\in[2\ ,\ 15]$

9.1.



9.2. $D'_g=]-\infty\ ,\ 0]$

10. $A_{[AMP]}=\frac{x\times x}{2}=\frac{x^2}{2}$

Os triângulos [*ABC*] e [*MBN*] são semelhantes (critério AA). Logo, se [*ABC*] é um triângulo isósceles, [*MBN*] também é isósceles. Assim, $\overline{MB}=\overline{MN}=2-x$.

$$A_{[MBN]}=\frac{(2-x)(2-x)}{2}=\frac{x^2-4x+4}{2}$$

No triângulo [*PNC*], a altura relativa ao vértice *N* é $\overline{AM}=x$.

$$A_{[PNC]}=\frac{(2-x)x}{2}=\frac{2x-x^2}{2}$$

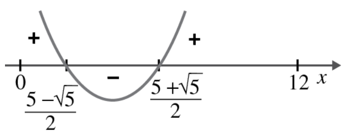
$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^2-4x+4}{2}>3\times\frac{2x-x^2}{2}\Leftrightarrow x^2+x^2-4x+4>6x-3x^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-10x+4>0\Leftrightarrow x\in\left]0\ ,\ \frac{5-\sqrt5}{5}\right[\cup\left]\frac{5+\sqrt5}{5},2\right[$$

Cálculo auxiliar:

$$5x^2-10x+4=0\Leftrightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-80}}{10}\Leftrightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{4\times5}}{10}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{10\pm2\sqrt5}{10}\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt5}{5}$$



11.1. A altura do triângulo [*AVB*] relativa ao vértice $V(-2\ ,\ -1)$ é |ordenada de V| = |–1| = 1. Então:

$\frac{\overline{AB}\times1}{2}=1\Leftrightarrow\overline{AB}=2$ e, assim, $A(a\ ,\ 0)$, $B(b\ ,\ a)$.

O ponto médio de [*AB*] é $M(-2\ ,\ 0)$ dado que a reta $x=-2$ é o eixo da parábola. Como $\overline{AB}=2$, temos $\overline{AM}=\overline{MB}=1$.

$-2-a=1$ e $b-(-2)=1\Leftrightarrow a=-3$ e $b=-1$

$$f(-1)=0\Leftrightarrow a(-1+2)^2-1=0\Leftrightarrow a-1=0\Leftrightarrow a=1$$

11.2. $f(x)=(x+2)^2-1$ e $y=6x+b$

$$(x+2)^2-1=6x+b\Leftrightarrow x^2+4x+4-1-6x-b=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+3-b=0$$

Pretende-se que esta equação tenha uma e uma só solução.

$$\Delta=0\Leftrightarrow 4-4(3-b)=0\Leftrightarrow 4-12+4b=0\Leftrightarrow b=2$$

$y=6x+2$ é a equação pedida.

12. $\overline{DE}=\overline{EB}=x$ e $\overline{AD}=12-2x$

Os triângulos [*ABC*], [*DBG*] e [*EBF*] são semelhantes.

$$\frac{\overline{FE}}{6}=\frac{\overline{EB}}{12}\Leftrightarrow\frac{\overline{FE}}{6}=\frac{x}{12}\Leftrightarrow\overline{FE}=\frac{1}{2}x$$

$$\frac{\overline{GD}}{6}=\frac{\overline{DB}}{12}\Leftrightarrow\frac{\overline{GD}}{6}=\frac{2x}{12}\Leftrightarrow\overline{GD}=x$$

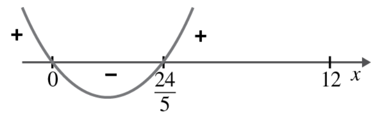
$$A_{[ADGH]}=(12-2x)\times x=-2x^2+12x \text{ e } A_{[DEFI]}=x\times\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2}$$

$$-2x^2+12x\geq\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow-4x^2+24x-x^2\geq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-5x^2+24x\geq0\Leftrightarrow x\in\left]0\ ,\ \frac{24}{5}\right]$$

Cálculo auxiliar: $0<x<6$

$$-5x^2+24x=0\Leftrightarrow-x(5x-24)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{24}{5}$$



13. $|x^2-4x+1|>x^2-5x+6\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+1>x^2-5x+6\vee x^2-4x+1<-x^2+5x-6$$

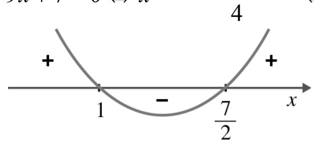
$$\Leftrightarrow x-5>0\vee2x^2-9x+7<0$$

$$\Leftrightarrow x>5\vee1<x<\frac{7}{2}\Leftrightarrow x\in\left]1\ ,\ \frac{7}{2}\right[\cup]5\ ,\ +\infty[$$

$$S=\left]1\ ,\ \frac{7}{2}\right[\cup]5\ ,\ +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

$$2x^2-9x+7=0\Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{4}\Leftrightarrow x=1\vee x=\frac{7}{2}$$



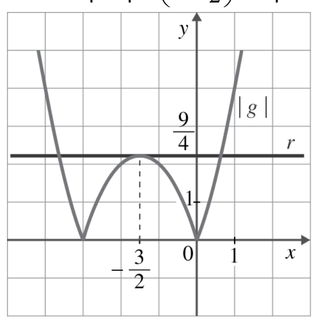
14.1. $|g(x)|=0\Leftrightarrow|x^2+3x|=0\Leftrightarrow x^2+3x=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(x+3)=0\Leftrightarrow x=0\vee x+3=0$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=-3$$

14.2. $g(x)=x^2+3x=x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

$V\left(-\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{9}{4}\right)$



a) A reta *r* interseta o gráfico de $|g|$ em três pontos.

Logo, $k=\frac{9}{4}$.

b) $|g(x)|=k$ tem três soluções se $k=0\vee k>\frac{9}{4}$.

Pág. 142

Atividade inicial 5

1.1. $\sqrt{(t+1)^2} = |t+1|,\ t \in \mathbb{R}$

1.2. $\sqrt[3]{\sqrt{3x}} = \sqrt[6]{3x},\ x \in \mathbb{R}_0^+$

1.3. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\dfrac{x^2}{x}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{x}\right)^3 = \sqrt{x},\ x \in \mathbb{R}^+$

1.4. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x^3}\right)^4}{\sqrt[3]{2x^4}} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{x^3}\right)}{\sqrt[3]{2x^4}} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{2} \times x\right)^4}{\sqrt[3]{2} \cdot x^4} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 \cdot x^4}{\sqrt[3]{2} \cdot x^4} =$

$= \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.1. $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^3}}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 0 \land \sqrt{x^3} \neq 0\right\} = \mathbb{R}^+$

2.2. $g(x) = 6x^{\frac{2}{3}} = 6\sqrt[3]{x^2}$

$D_g = \mathbb{R}$

2.3. $h(x) = 3\sqrt[3]{x}$

$D_h = \mathbb{R}$

3.1. $\sqrt{x^2} = |x|,\ x \in \mathbb{R}$

3.2. $\sqrt[4]{(x-3)^4} = |x-3|,\ x \in \mathbb{R}$

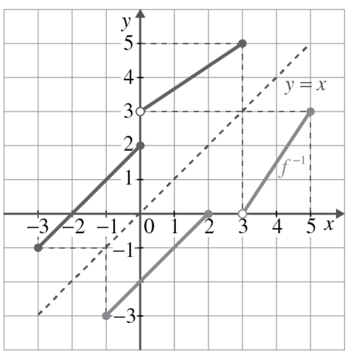
3.3. $\sqrt[3]{\dfrac{a^{18}}{27x^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{\left(a^6\right)^3}{3^3 \times x^3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{a^6}{3x}\right)^3} = \dfrac{a^6}{3x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3.4. $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{64x^3}{a^6}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{4^3x^3}{\left(a^2\right)^3}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\dfrac{4x}{a^2}\right)^3} = \dfrac{4x}{2a^2} = \dfrac{2x}{a^2},\ x \in \mathbb{R}$

4.1. **a)** $D_f = [-3\ ,\ 3]$ **b)** $D'_f = [-1, 2] \cup [3, 5]$

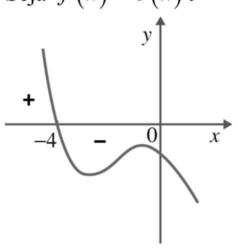
4.2. *f* é injetiva, porque não há uma reta horizontal que intersete o gráfico em dois pontos.

4.3.



Pág. 145

1. Seja $f(x) = C(x)$.



1.1. $-2x-1=0 \Leftrightarrow -2x=1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	-4		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x-1$	+	+	+	0	–
$C(x)$	+	0	–	–	–
$(-2x-1)C(x)$	+	0	–	0	+

$(-2x-1)C(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-4\ , -\dfrac{1}{2}\right]$

$S = \left[-4\ , -\dfrac{1}{2}\right]$

1.2.

x	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
x^2	+	+	+	0	+
$C(x)$	+	0	–	–	–
$x^2C(x)$	+	0	–	0	–

$x^2C(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ , -4\right] \cup \{0\}$

$S = \left]-\infty\ , -4\right] \cup \{0\}$

1.3. $\left(-x^2+9\right)C(x) > 0$

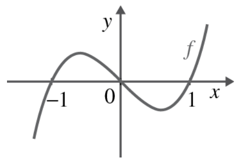
$-x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=-3 \lor x=3$

x	$-\infty$	-4		-3		3	$+\infty$
$-x^2+9$	–	–	–	0	+	0	–
$C(x)$	+	0	–	–	–	–	–
$\left(-x^2+9\right)C(x)$	–	0	+	0	–	0	+

$\left(-x^2+9\right)C(x) > 0 \Leftrightarrow \left]-4\ , -3\right[\cup \left]3\ , +\infty\right[$

$S = \left]-4\ , -3\right[\cup \left]3\ , +\infty\right[$

2. Seja $f(x) = D(x)$.



2.1. $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=-2 \lor x=1$

x	$-\infty$	-2		1		0		1	$-\infty$
x^2+x-2	+	0	–	–	–	–	–	0	+
$D(x)$	–	–	–	0	+	0	–	0	+
Produto	–	0	+	0	–	0	+	0	+

$\left(x^2+x-2\right)D(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ , -2\right] \cup [-1\ , 0] \cup \{1\}$

$S = \left]-\infty\ , -2\right] \cup [-1\ , 0] \cup \{1\}$

2.2. $\left(-x-\frac{1}{3}\right)^3=0 \Leftrightarrow -x-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$		0		1	$+\infty$
$\left(-x-\frac{1}{3}\right)^3$	+	+	+	0	–	–	–	–	–
$D(x)$	–	0	+	+	+	0	–	0	+
Produto	–	0	+	0	–	0	+	0	–

$\left(-x-\frac{1}{3}\right)^3 D(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-1\,,-\frac{1}{3}\right[\cup\left]0\,,1\right[$

$S=\left]-1\,,-\frac{1}{3}\right[\cup\left]0\,,1\right[$

2.3. $-x^3+4x^2=x^2(-x+4)$

x	$-\infty$	-1		0		1		4	$-\infty$
x^2	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$-x+4$	+	+	+	+	+	+	+	0	–
$D(x)$	–	0	+	0	–	0	+	0	–
Produto	–	0	+	0	–	0	+	0	–

$\left(-x^3+4x^2\right)D(x)>0 \Leftrightarrow \left]-1\,,0\right[\cup\left]1\,,4\right[$

$S=\left]-1\,,0\right[\cup\left]1\,,4\right[$

Pág. 147

3. $f(x)=\sqrt{x}$

3.1. $f_1(x)=f(x-2)=\sqrt{x-2}$

3.2. $f_2(x)=-f(x)=-\sqrt{x}$

3.3. $f_3(x)=f_2(-x)=-\sqrt{-x}$

3.4. Se $g(x)=f(-x)$,

$f_4(x)=g(x+1)+1=f(-(x+1))+1=\sqrt{-x-1}+1$

3.5. $f_5(x)=2f(x)=2\sqrt{x}$

3.6. $f_6(x)=f_5(x-1)-1=2\sqrt{x-1}-1$

Pág. 148

4. $f(x)=-1-\sqrt{x-2}$

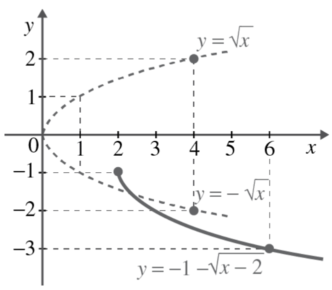
4.1. **a)** $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-2\geq 0\}=\left[2\,,+\infty\right[$

b) $x\in D_f \Leftrightarrow x-2\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{x-2}\leq 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{x-2}\leq -1$

$D'_f=\left]-\infty\,,-1\right]$

4.2.



4.3. Dado que $-1<0$:

a) O gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima.

b) *f* é decrescente.

c) $f(2)=-1$ é o máximo absoluto de *f*.

4.4. $f(x)=y \Leftrightarrow -1-\sqrt{x-2}=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{x-2}=y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=-y-1$

Como $x\geq 2$ e $y\leq -1$, vem $x-2\geq 0$ e $-y-1\geq 0$. Logo,

$\sqrt{x-2}=y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=(-y-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2+y^2+2y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=y^2+2y+3$

$f^{-1}:\left]-\infty\,,-1\right]\to\left[2\,,+\infty\right[$

$x \mapsto x^2+2x+3$

Pág. 150

5. $f(x)=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x+2}-1$

5.1. **a)** $D_f=\mathbb{R}$

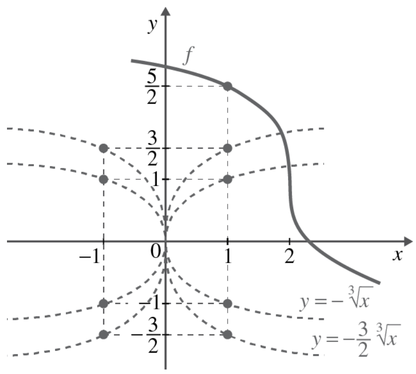
b) $D'_f=\mathbb{R}$

5.2. O gráfico de *f* pode ser obtido de $y=\sqrt[3]{x}$ pelas seguintes transformações:

– simetria de eixo *Ox* $\left(y=-\sqrt[3]{x}\right)$;

– dilatação vertical de coeficiente $\frac{3}{2}$ $\left(y=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}\right)$;

– translação de vetor $(-2\,,-1)$.



5.3. **a)** A concavidade do gráfico de *f* é voltada para baixo em $\left]-\infty\,,2\right]$ e voltada para cima em $\left[2\,,+\infty\right[$

b) *f* é decrescente

c) *f* não tem extremos

5.4. $f(x)=y \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\sqrt[3]{x-2}+1=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\sqrt[3]{x-2}=y-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\sqrt[3]{x-2}=2y-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}=\frac{2-2y}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=\left(\frac{2-2y}{3}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2+\left(\frac{2-2y}{3}\right)^3$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2 + \left(\frac{2-2x}{3}\right)^3$$

Pág. 151

6.1. $\sqrt[3]{1-2x} = 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1-2x}\right)^3 = 3^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-2x = 27 \Leftrightarrow -2x = 26 \Leftrightarrow x = -13$

$S = \{-13\}$

6.2. $\sqrt{2x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Verificação:

$\sqrt{2\times 1 - 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$ (V)

$S = \{1\}$

6.3. $\sqrt{3x+5} = -2$

A condição é impossível porque, no seu domínio,

$\sqrt{3x+5} \geq 0$ e $-2 < 0$

$S = \varnothing$

6.4. $\sqrt{12-x} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 - x = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$

Verificação:

$x = -4: \sqrt{12+4} - 4 \Leftrightarrow 4 = -4$ (F)

$x = 3: \sqrt{12-3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3$ (V)

$S = \{3\}$

6.5. $3 - x = \sqrt{3x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3-x)^2 = 3x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 = 3x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 8$

Verificação:

$x = 1: 3 - 1 = \sqrt{3+1} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{4}$ **(V)**

$x = 8: 3 - 8 = \sqrt{24+1} \Leftrightarrow -5 = \sqrt{25}$ **(F)**

$S = \{1\}$

6.6. $\sqrt{3 - 2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3-2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 - 2\sqrt{x} = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - x = 2\sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3-x)^2 = 4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 = 4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 9$

Verificação:

$x = 1: \sqrt{3 - 2\sqrt{1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$ (V)

$x = 9: \sqrt{3 - 2\sqrt{9}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-6} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{-3} = 3$ (F)

$S = \{1\}$

6.7. $\frac{x}{2} = (x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2$

Verificação:

$\frac{2}{2} = (2-1)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1 = 1$ (V)

$S = \{2\}$

6.8. $x - \sqrt{3x-2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 2 = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

Verificação:

$x = 1: \sqrt{3\times 1 - 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$ (V)

$x = 2: \sqrt{3\times 2 - 2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0$ (V)

$S = \{1, 2\}$

Pág. 152

7.1. $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow \left(3x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{3x + \frac{1}{4}} \geq 2$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : 3x + \frac{1}{4} \geq 0\right\} = \left[-\frac{1}{12}, +\infty\right[$

Para $x \in D$, $\sqrt{3x + \frac{1}{4}} \geq 0 \wedge 2 \geq 0$

Logo, em $\left[-\frac{1}{12}, +\infty\right[$ temos

$\sqrt{3x + \frac{1}{4}} \geq 2 \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{4} \geq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x + 1 \geq 16 \Leftrightarrow 12x \geq 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{15}{12} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$

$S = \left[\frac{5}{4}, +\infty\right[\cap \left[-\frac{1}{12}, +\infty\right[$

$S = \left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$

7.2. $g(x) - x < 0 \Leftrightarrow 15 - 2x < x$

$D = \{x \in \mathbb{R} : 15 - 2x \geq 0\} = \left]-\infty , \frac{15}{2}\right]$

Cálculo auxiliar:

$15 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 15 \Leftrightarrow x \leq \frac{15}{2}$

• $\forall x \in \left]-\infty , \frac{15}{2}\right], \sqrt{15-2x} \geq 0$

• $x \in \left]-\infty , \frac{15}{2}\right] \wedge x < 0 \Leftrightarrow x \in [-\infty , 0]$

• $x \in \left]-\infty , \frac{15}{2}\right] \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0 , \frac{15}{2}\right]$

– Se $x \in]-\infty , 0[, \sqrt{15-2x} \geq 0 \wedge x < 0$. Logo, a condição $\sqrt{15-2x} < x$ é impossível.

$S_1 = \varnothing$

– Se $x \in \left[0 , \frac{15}{2}\right], \sqrt{15-2x} \geq 0 \wedge x \geq 0$.

Logo:

$\sqrt{15-2x} < x \in \left[0 , \frac{15}{2}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{15-2x}\right)^2 <^2 \wedge x \in \left[0 , \frac{15}{2}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15 - 2x < x^2 \wedge x \in \left[0 , \frac{15}{2}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 > 0 \wedge x \in \left[0 , \frac{15}{2}\right] \Leftrightarrow$

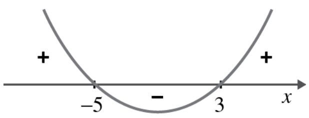
$\Leftrightarrow x \in \left( ]-\infty , -5[\cup]3 , +\infty[\cap \left[0 , \frac{13}{2}\right] \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]3 , \frac{15}{2}\right]$

Cálculo auxiliar:

$x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$



$S = \left]3 , \frac{15}{2}\right]$

Pág. 153

8.1. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{x-6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2 = \left(2 + \sqrt{x-6}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2 = 4 + 4\sqrt{x-6} + x - 6$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-6} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-6} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 6 = 1$

$\Leftrightarrow x = 7$

Verificação:

$\sqrt{7+2} - \sqrt{7-6} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2 \Leftrightarrow 3 - 1 = 2$ (V)

$S = \{7\}$

8.2. $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + x\sqrt{x^2+24} = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+24} = x^2 + 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2\left(x^2 + 24\right) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 + 24x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x^3 + 20x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x^2(x-5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x^2 = 0 \vee x - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$

Verificação:

$x = 0 : \sqrt{1 + 0 \times \sqrt{0+24}} = 0 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+0} = 1$ (V)

$x = 5 : \sqrt{1 + 5\sqrt{25+24}} = 5 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 5 \times 7} = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{36} = 6$ (V)

$S = \{0 , 5\}$

Pág. 155

9.1. $f(x) = 3x$; $g(x) = x + \frac{1}{2}$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$; $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + x + \frac{1}{2} = 4x + \frac{1}{2}$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = 3 \times \left(x + \frac{1}{2}\right) = 3x^2 + \frac{3}{2}x$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x}{x + \frac{1}{2}} = \frac{3x}{\frac{2x+1}{2}} = \frac{6x}{2x+1}$

$(-g)(x) = -g(x) = -x - \frac{1}{2}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 3x - \left(x + \frac{1}{2}\right) = 2 \times -\frac{1}{2}$

$\left(\frac{3}{2}g\right)(x) = \frac{3}{2}g(x) = \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)$

$f^2(x) = \left(f(x)\right)^2 = (3x)^2 = 9x^2$

$g^{\frac{1}{3}}(x) = \left(g(x)\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x + \frac{1}{2}}$

$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 4x + \frac{1}{2}$

$f \times g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3x^2 + \frac{3}{2}x$

$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{6x}{2x+1}$

$-g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x - \frac{1}{2}$

$$f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto 2x-\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$$

$$f^2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto 9x^2$$

$$g^{\frac{1}{3}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \sqrt[3]{x+\frac{1}{2}}$$

9.2. $f(x)=\dfrac{x+3}{x}$

$g(x)=\dfrac{x}{x+4}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$D_g=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

$g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+4}=0 \Leftrightarrow x=0$

$\{x\in D_g: g(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}$

$D_f\cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}$

$D_f\cap\{x\in D_g: g(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x+3}{x}+\frac{x}{x+4}=$$
$$=\frac{(x+3)(x+4)+x^2}{x(x+4)}=\frac{x^2+4x+3x+12+x^2}{x^2+4x}=$$
$$=\frac{2x^2+7x+12}{x^2+4x}$$

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{(x+3)(x)}{(x)(x+4)}=\frac{x+3}{x+4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x}{x+4}}=\frac{(x+3)(x+4)}{x^2}=\frac{x^2+4x+3x+7}{x^2}=$$
$$=\frac{x^2+7x+7}{x^2}$$

$$(-g)(x)=-g(x)=-\frac{x}{x+4}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+3}{x}-\frac{x}{x+4}=$$
$$=\frac{x^2+3x+4x+12-x^2}{x^2+4x}=\frac{7x+12}{x^2+4x}$$

$$\left(\frac{3}{2}g\right)(x)=\frac{3}{2}g(x)=\frac{3}{2}\times\frac{x}{x+4}=\frac{3x}{2x+8}$$

$$(f^2)(x)=(f(x))^2=\left(\frac{x+3}{x}\right)^2=\frac{x^2+6x+9}{x^2}$$

$$\left(g^{\frac{1}{3}}\right)(x)=\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{\frac{x}{x+4}}$$

$$f+g:\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{2x^2+7x+12}{x^2+4x}$$

$$f\times g:\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{x+3}{x+4}$$

$$\frac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{x^2+7x+7}{x^2}$$

$$-g:\mathbb{R}\setminus\{-4\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto-\frac{x}{x+4}$$

$$f-g:\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{7x+12}{x^2+4x}$$

$$\frac{3}{2}g:\mathbb{R}\setminus\{-4\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{3x}{2x+8}$$

$$f^2:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{x^2+6x+9}{x^2}$$

$$g^{-\frac{1}{3}}:\mathbb{R}\setminus\{-4\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\sqrt[3]{\frac{x}{x+4}}$$

Pág. 156

10. $f(x)=|x|$ e $g(x)=|x+1|$

10.1. $f(x)=\begin{cases}x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}x+1 & \text{se } x\geq -1\\ -x-1 & \text{se } x<-1\end{cases}$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$	1	$-x$	0	x
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$	1	$x+1$
$\lvert x\rvert-\lvert x-1\rvert$	1	1	$-2x-1$	-1	-1

$$(f-g)(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x<-1\\ -2x-1 & \text{se } -1\leq x\leq 0\\ -1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

10.2. $(f-g)(x)<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1<\frac{1}{2}\\ x<-1\end{cases}\vee\begin{cases}-2x-1<\frac{1}{2}\\ -1\leq x\leq 0\end{cases}\vee\begin{cases}-1<\frac{1}{2}\\ x\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\varnothing\vee\begin{cases}-2x<\frac{3}{2}\\ -1\leq x\leq 0\end{cases}\vee x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{3}{4}\\ -1\leq x\leq 0\end{cases}\vee x\geq 0\Leftrightarrow x\in\left]-\frac{3}{4}, 0\right]\cup\left[0, +\infty\right[$$

$$S=\left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$$

10.3. $(f\times g)(x)\le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x||x+1|\le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x^2+x|\le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x\le 2 \wedge x^2+x\ge -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x-2\le 0 \wedge x^2+x+2\ge 0 \Leftrightarrow$

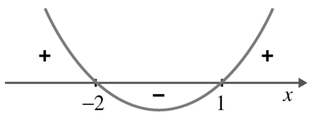
$\Leftrightarrow x\in[-2\,,1]\wedge x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[-2\,,1]$

Cálculo auxiliar:

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$



$x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}$

$\Delta<0\,;\ \forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+2>0$

$S=[-2\,,1]$

Pág. 157

11.1. a) $D_f=[-3\ ,\ 2]$ e $D'_f=[-1\ ,\ 2]$

b) $D_g=[-2\ ,\ 2]$ e $D'_g=[-1\ ,\ 2]$

11.2. $D_{f+g}=D_f\cup D_g=[-3\,,2]\cap[-2\,,2]=[-2\,,2]$

$(f+g)(2)=f(2)+g(2)=2+0=2$

11.3. Para determinar o zero de *g* que pertence a $[-2\,,2]$ temos de determinar a expressão analítica de *g* neste intervalo.

Em $[-2\,,0]$ o gráfico da função *g* é o segmento de reta [*AB*], sendo $A(-2\,,-1)$ e $B(0\,,2)$

$AB: y=mx+b$

$b=2$ e $m=\dfrac{2-(-1)}{0-(-2)}=\dfrac{3}{2}$

$AB=y=\dfrac{3}{2}x+2$

$\dfrac{3}{2}x+2=0 \Leftrightarrow 3x+4=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$

Zeros de *g*: $-\dfrac{4}{3}$ e 2

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap\{x\in D_g : g(x)\neq 0\}=[-2\ ,\ 2]\backslash\left\{-\dfrac{4}{3}\,,2\right\}=$

$=[-2\ ,\ 2[\backslash\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(-2)=\dfrac{f(-2)}{g(-2)}=\dfrac{f(-2)}{-1}=-f(-2)$

Para determinar $f(-2)$ precisamos da expressão analítica de *f* no intervalo $[-3\,,0]$.

Trata-se do segmento de reta [*DE*] sendo $D(-3\,,-1)$ e $E(0\,,1)$

$y=mx+b$

$b=1$ e $m=\dfrac{1-(-1)}{0-(-3)}=\dfrac{2}{3}$

Se $x\in[-3\,,0]$, $f(x)=\dfrac{2}{3}x+1$.

$f(-2)=\dfrac{2}{3}\times(-2)+1=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{3}=-\dfrac{1}{3}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(-2)=-f(-2)=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$

11.4. No intervalo [–2 , 0], $g(x)=\dfrac{3}{2}x+2$ e $f(x)=\dfrac{2}{3}x+1$

Em [–2 , 0], $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \underset{(\times 2)}{\dfrac{2}{3}}x+\underset{(\times 6)}{1}=\underset{(\times 3)}{\dfrac{3}{2}}+\underset{(\times 3)}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x+6=9x+12 \Leftrightarrow -5x=6 \Leftrightarrow x=-\dfrac{6}{5}$

Os gráficos de *f* e *g* intersetam-se no ponto de abcissa $-\dfrac{6}{5}$.

Pág. 158

12. $f(x)=\sqrt{x^3+x}-4$

•A altura do triângulo [*ABC*] relativa ao vértice *A* é dada por

$|f(x)-f(4)|=\left|\sqrt{x^3+x}-4-\left(\sqrt{4^3+4}-4\right)\right|$

$=\left|\sqrt{x^3+x}-\sqrt{68}\right|$

• A medida da base [*BC*] é $\overline{BC}=4$.

$A_{[ABC]}=\dfrac{4\times\left|\sqrt{x^3+x}-\sqrt{68}\right|}{2}=2\left|\sqrt{x^3+x}-\sqrt{68}\right|$

A equação que permite determinar o valor pedido é

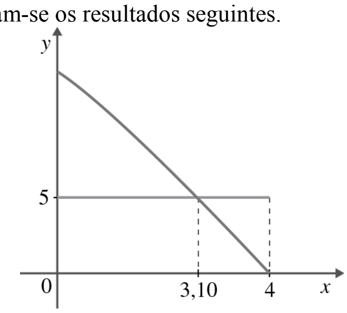
$2\left|\sqrt{x^3+x}-\sqrt{68}\right|=5$, com $0\le x\le 4$.

Considerando, na calculadora gráfica, as funções

$y_1=2\left|\sqrt{x^3+x}-\sqrt{68}\right|$ e $y_2=5$, no intervalo [0 , 5],

determinou-se a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos.

Obtiveram-se os resultados seguintes.



A abcissa do ponto *A* é aproximadamente igual a 3,10.

Pág. 159

13. $f(x)=x^4-x+1$

$A(x\,,k)\,,\,B(x+3\,,k)$

$\overline{AB}=3$

$f(x+3)=f(x)=k$

$f(x+3)=f(x)\Leftrightarrow f(x+3)-f(x)=0$

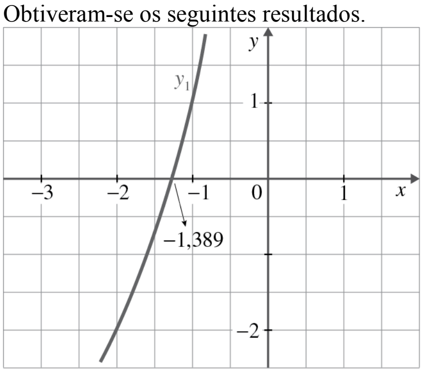
$\Leftrightarrow (x+3)^4-(x+3)+1-(x^4-x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^4-\cancel{x}-3+\cancel{1}-x^4+\cancel{x}-\cancel{1}=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^4-x^4-3=0$

Fazendo $y_1=(x+3)^4-3$, determinou-se o zero de y_1.

Obtiveram-se os seguintes resultados.

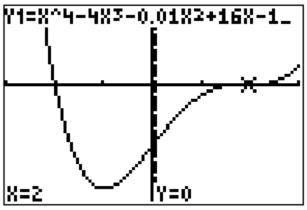


$k\approx f(-1{,}389)\approx 6{,}1$

Pág. 160

14. $f(x)=x^4-4x^3-0{,}01x^2+16x-15{,}96$

14.1. O gráfico de *f* obtido na calculadora sugere que –2 e 2 são os únicos zeros de *f* no intervalo [–3 , 3].



14.2. $f(2)=2^4-4\times 2^3-0{,}01\times 2^2+16\times 2-15{,}96=0$

$f(-2)=$

$=(-2)^4-4\times(-2)^3-0{,}01\times(-2)^2+16\times(-2)-15{,}96=0$

	1	–4	–0,01	+16	–15,96
2		2	–4	–8,02	15,96
	1	–2	–4,01	7,98	0
–2		–2	8	–7,98	
	1	–4	3,99	0	

$x^2-4x+3{,}99=0\Leftrightarrow$

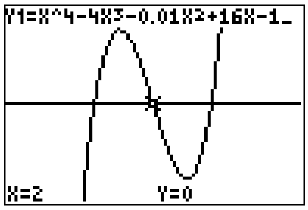
$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-15{,}96}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{0{,}04}}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm 0{,}2}{2}$

$\Leftrightarrow x=1{,}9\vee x=2{,}1$

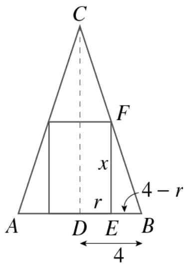
$f(x)=0\Leftrightarrow x=-2\vee x=1{,}9\vee x=2\vee x=2{,}1$

Zeros de $\{-2\,;1{,}99\,;2\,;2{,}01\}$



Pág. 161

15.1. Os triângulos [*DBC*] e [*EBF*] são semelhantes.



$\dfrac{\overline{EB}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DC}}$

$\underset{(\times 3)}{\dfrac{4-r}{4}}=\dfrac{x}{12}\Leftrightarrow 12-3r=x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3r=12-x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r=4-\dfrac{x}{3}$

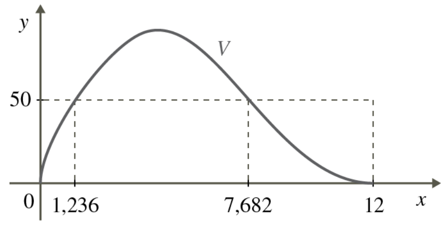
$V_{\text{cilindro}}=\pi\times r^2\times x$

$V(x)=\pi\left(4-\dfrac{x}{3}\right)^2x=\pi\left(16-\dfrac{8x}{3}+\dfrac{x^2}{9}\right)x$

$V(x)=\pi\left(\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{8x^2}{3}+16x\right)$

15.2. Pretende-se resolver graficamente a equação $V(x)=50$.

Fazendo, na calculadora gráfica, $y_1=V(x)$ e $y_2=50$, determinou-se, no intervalo $]0\,,12]$, a interseção dos de y_1 e y_2.



Se $x\approx 1{,}236,\ r\approx 4-\dfrac{1{,}236}{3}\approx 3{,}588$.

Se $x\approx 7{,}682$, $r\approx 4-\dfrac{7{,}682}{3}\approx 1{,}439$.

Temos, portanto:

$x\approx 1{,}24$ cm e $r\approx 3{,}59$ cm ou $x\approx 7{,}68$ cm e $r\approx 1{,}44$ cm.

Pág. 164

Atividades complementares

16. $f(x)=\begin{cases}-3x^3-3 & \text{se } x<0\\ x^2-1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

16.1. a) $f\left(-\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\right)\times f\left(\sqrt{2}\right)=$

$=\left[-3\times\left(-\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\right)^3-3\right]\times\left[\left(\sqrt{2}\right)^2-1\right]=$

$=\left[-3\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)-3\right]\times(2-1)=(2-3)\times 1=-1$

b) $f\left(-2^{\frac{2}{3}}\right)+f\left(3^{\frac{1}{2}}\right)=$

$=-3\times\left(-2^{\frac{2}{3}}\right)^3-3+\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2-1=$

$=-3\times(-1)^3\times 2^2-3+3^1-1=12-1=11$

16.2. $f(x)\leq 21\wedge x\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(-3x^3-3\leq 21\wedge x<0\right)\vee\left(x^2-1\leq 21\wedge x=0\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(-3x^3\leq 24\wedge x<0\right)\vee\left(-1\leq 21\wedge x=0\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x^3\geq -8\wedge x<0\right)\vee x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x\geq\sqrt{-8}\wedge x<0\right)\vee x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x\geq -2\wedge x<0\right)\vee x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[-2\,,0]$

$S=[-2\,,0]$

17. $f(x)=4x^3+8x^2-11x+3$

17.1.

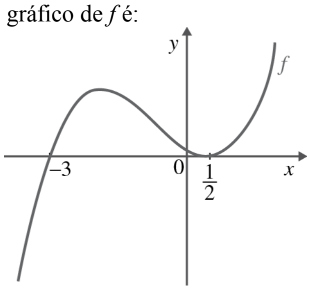
	4	8	–11	3
–3		–12	12	–3
	4	–4	1	0

$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$

$f(x)=(x+3)(2x-1)^2$

O coeficiente de x^3 é positivo. Os zeros são –3 e $\frac{1}{2}$ (duplo).

Um esboço do gráfico de *f* é:



17.2. $f(x)(x-4)\geq 0\Leftrightarrow\left]-\infty\,,-3\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[4\,,+\infty[$

$S=\left]-\infty\,,-3\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[4\,,+\infty[$

18. $f(x)=2\sqrt{x-3}+1$

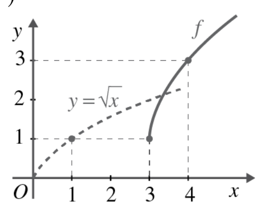
18.1. a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x-3\geq 0\}=[3\,,+\infty[$

b) $x\in D_f\Leftrightarrow x\geq 3\Leftrightarrow x-3\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x-3}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-3}\geq 0\Leftrightarrow 2\sqrt{x-3}+1\geq 1$

$D'_f=[1\,,+\infty[$

18.2. O gráfico de *f* é a imagem do gráfico de $y=\sqrt{x}$ por uma dilatação vertical de coeficiente 2 seguido da translação de vetor $\vec{v}(3\,,1)$.



18.3. $f(x)=1\Leftrightarrow 2\sqrt{x-3}+1=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$

$S=\{3\}$

19. $f(x)=\sqrt{x+2}$

19.1. a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x+2\geq 0\}=[-2\,,+\infty[$

b) $x>-2\Leftrightarrow x+2\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x+2}\geq 0$

$D'_f=[0\,,+\infty[$

19.2. $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=0\Leftrightarrow x=-2$

$A(-2\,,0)$

$B(x\,,f(x))$ ou $B\left(x\,,\sqrt{x+2}\right)$

Tomando [*AC*] para base do triângulo [*ACB*], temos:

Base = $\overline{AC}=2\times(x+2)=2x+4$

Altura = $\sqrt{x+2}$ (ordenada de *B*)

$A_{[ACB]}=\frac{2(x+2)\sqrt{x+2}}{2}=(x+2)\sqrt{x+2}$

$A_{[ACB]}=8\Leftrightarrow(x+2)\sqrt{x+2}=8\Rightarrow$

$\Rightarrow(x+2)^2(x+2)=8^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+2)^3=64\Leftrightarrow x+2=\sqrt[3]{64}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2=4\Leftrightarrow x=2$

Verificação:

$(2+2)\sqrt{2+2}=8\Leftrightarrow 4\times 2=8$ (V)

Portanto, $x=2$

19.3. $D_f=[-2\,,+\infty[$; $D'_f=[0\,,+\infty[=\mathbb{R}_0^+$

$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=y\Leftrightarrow$ $\quad\begin{vmatrix}x\geq -2\\ y\geq 0\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow x+2=y^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=y^2-2$

$f^{-1}:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x^2-2$

20. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$

20.1. a) $D_f=\mathbb{R}$

b) $D'_f=\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-3		$\frac{1}{2}$		4	$+\infty$
$f(x)$	–	0	+	0	+	+	+
$(x-4)$	–	–	–	–	–	0	+
Produto	+	0	–	0	–	0	+

20.2. $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-1}+1=0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-1}=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=(-1)^3\Leftrightarrow x=1-1\Leftrightarrow x=0$

21.1. $6\sqrt{x+1}=x+10\Rightarrow 36(x+1)=x^2+20x+100\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-16x+64=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-8)^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=8$

Verificação: $6\sqrt{8+1}=8+10\Leftrightarrow 6\times 3=18$ (V)

$S=\{8\}$

21.2. $\sqrt{3x-2}=4-x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-2=16-8x+x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-11x+18=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-72}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{11\pm 7}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=9$

Verificação:

$x=2: \sqrt{3\times 2-2}=4-2 \Leftrightarrow \sqrt{4}=2$ (V)

$x=9: \sqrt{3\times 9-2}=4-9 \Leftrightarrow \sqrt{25}=-5$ (F)

$S=\{2\}$

21.3. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-1}=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x-1}=3-\sqrt{2x+3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x-1=9-6\sqrt{2x+3}+2x+3 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 6\sqrt{2x+3}=13-2x \Rightarrow$

$\Rightarrow 36(2x+3)=169-52x+4x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2-124x+61=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{124\pm\sqrt{124^2-16\times 61}}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{124\pm\sqrt{14400}}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{124\pm 120}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \vee x=\dfrac{244}{8} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \vee x=\dfrac{61}{2}$

Verificação:

$x=\dfrac{1}{2}; \sqrt{2\times\dfrac{1}{2}+3}+\sqrt{4\times\dfrac{1}{2}-1}=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3+1}+\sqrt{2-1}=3 \Leftrightarrow 2+1=3$ (V)

$x=\dfrac{61}{2}: \sqrt{2\times\dfrac{61}{2}+3}+\sqrt{4\times\dfrac{61}{2}-1}=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{64}+\sqrt{121}=3 \Leftrightarrow 8+11=3$ (F)

$S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

21.4. $5\sqrt{x}-\sqrt{1-5x}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-5x}=5\sqrt{x}-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-5x=25x-10\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{x}=30x \Rightarrow$

$\Rightarrow 100x=900x^2 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow 9x^2-x=0 \Leftrightarrow x(9x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{1}{9}$

Verificação:

$x=0: 5\sqrt{0}-\sqrt{1-0}=1 \Leftrightarrow 0-1=1$ (F)

$x=\dfrac{1}{9}: 5\sqrt{\dfrac{1}{9}}-\sqrt{1-\dfrac{5}{9}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}-\sqrt{\dfrac{4}{9}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}=1$ (V)

$S=\left\{\dfrac{1}{9}\right\}$

22.1. $\sqrt{2x+1}>x-1$

$D=\{x\in\mathbb{R}: 2x+1\geq 0\}=\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

$\forall x\in D, \sqrt{2x+1}\geq 0$

$x\geq -\dfrac{1}{2} \wedge x-1<0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2} \wedge x<1 \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right[$

$x\geq -\dfrac{1}{2} \wedge x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2} \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow x\in[1, +\infty[$

• Em $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $\sqrt{2x+1}\geq 0 \wedge x-1<0$.

$2\sqrt{x+1}>x-1$ é universal em $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

$S_1=\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right[$

• Em $[1, +\infty[$, $\sqrt{2x+1}\geq 0 \wedge x-1\geq 0$

$\sqrt{2x+1}\geq x-1 \wedge x\in[1, +\infty[\Leftrightarrow 2x+1\geq (x-1)^2 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1\geq x^2-2x+1 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

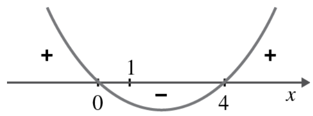
$\Leftrightarrow x^2-4x\leq 0 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[1, 4]$

Cálculo auxiliar:

$x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[1, 4]$



$S_2=[1, 4]$

$S=S_1\cup S_2=\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right[\cup[1, 4]$

$S=\left[-\dfrac{1}{2}, 4\right]$

22.2. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<3$

$D=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0 \wedge x+1\geq 0\}=\mathbb{R}_0^+$

$\forall x\in\mathbb{R}_0^+, \sqrt{x}+\sqrt{x+1}>0 \wedge 3>0$

$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2<3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+x+1+2\sqrt{x}<9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x}<8-2x$

$\forall x\in\mathbb{R}_0^+, 2\sqrt{x^2+x}\geq 0$

$8-2x=0 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$

$x\in\mathbb{R}_0^+ \wedge 8-2x<0 \Leftrightarrow x\in]4, +\infty[$

$x\in\mathbb{R}_0^+ \wedge 8-2x\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0, 4]$

• Em $]4, +\infty[$, $2\sqrt{x^2+x}\geq 0 \wedge 8-2x<0$, pelo que

$2\sqrt{x^2+2x}<8-2x$ é impossível em $]4, +\infty[$

$S_1=\varnothing$

• Em $[0, 4]$, $2\sqrt{x^2+x}\geq 0 \wedge 8-2x\geq 0$, pelo que

$2\sqrt{x^2+x}<8-2x \wedge \in[0, 4] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(x^2+x)<64-32x+4x^2 \wedge x\in[0, 4] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+4x<64+32x+4x^2 \wedge x\in[0, 4] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36x<64 \wedge x\in[0, 4] \Leftrightarrow x<\dfrac{16}{9} \wedge x\in[0, 4] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left[0, \dfrac{16}{9}\right[$

$S_2 = \left[0\,,\,\frac{16}{9}\right[$

$S = S_1 \cup S_2 = \varnothing \cup \left[0\,,\,\frac{16}{9}\right[$

$S = \left[0\,,\,\frac{16}{9}\right[$

23. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1 + \sqrt{2x-7}$

$D_{f \cap g} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge 2x - 7 \geq 0\} = \left[\frac{7}{2}\,,+\infty\right[$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{2x-7} = \sqrt{x} \wedge x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-7} = \sqrt{x} - 1 \wedge x \geq \frac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 7 = x - 2\sqrt{x} + 1 \wedge x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 8 - x \wedge x \geq \frac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 64 - 16 + x^2 \wedge x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 64 = 0 \wedge x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400-256}}{2} \wedge x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{20 \pm 12}{2} \wedge x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = 16) \wedge x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 16$

Verificação:

$x = 4 : 1 + \sqrt{2 \times 4 - 7} = \sqrt{4} \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$ (V)

$x = 16 : 1 + \sqrt{2 \times 16 - 7} = \sqrt{16} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{25} = 4 \Leftrightarrow 1 + 5 = 4$ (F)

Os gráficos intersetam-se no ponto *P* de abcissa 4.

$f(4) = \sqrt{4} = 2$

$P(4\,,2)$

Pág. 165

24. $G_f = \{(-2\,,1)\,,(-1\,,2)\,,(0\,,3)\,,(1\,,4)\,,(2\,,5)\}$

$G_g = \{(-4\,,4)\,,(-3\,,3)\,,(-2\,,4)\,,(-1\,,0)\,,(0\,,5)\,,(1\,,6)\}$

$D_f = \{-2\,,-1\,,0\,,1\,,2\}$

$D_g = \{-4\,,-3\,,-2\,,-1\,,0\,,1\}$

$D_f \cap D_g = \{-2\,,-1\,,0\,,1\}$

$D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \{-2\,,0\,,1\}$

$D_g \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = \{-2\,,-1\,,0\,,1\}$

24.1. $D_{f+g} = \{-2\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\}$

24.2. $D_{\frac{f}{g}} = \{-2\,,\ 0\,,\ 1\}$

24.3. $D_{\frac{g}{f}} = \{-2\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\}$

25. $f(x) = x + 3$

$g(x) = \sqrt{2x+1}$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \geq 0\} = \left[-\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$

$D_f \cap D_g = \left[-\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$

$D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \left]-\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$

25.1. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x + 3 - \sqrt{2x+1}$

$f - g : \left[-\frac{1}{2}\,,\ +\infty\right[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + 3 - \sqrt{2x+1}$

25.2. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x+3)\sqrt{2x+1}$

$f \times g : \left[-\frac{1}{2}\,,\ +\infty\right[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto (x+3)\sqrt{2x+1}$

25.3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}$

$\frac{f}{g} : \left]-\frac{1}{2}\,,\ +\infty\right[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}$

25.4. $(2g)(x) = 2g(x) = 2\sqrt{2x+1}$

$2g : \left[-\frac{1}{2}\,,\ +\infty\right[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2\sqrt{2x+1}$

25.5. $\left(f^{\frac{3}{2}}\right)(x) = [f(x)]^{\frac{3}{2}} = (x+3)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(x+3)^3}$

$D_{f^{\frac{3}{2}}} = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \geq 0\} = [-3\,,+\infty[$

$f^{\frac{3}{2}} : [-3\,,\ +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{(x+3)^3}$

25.6. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+3) =$

$= \sqrt{2(x+3)+1} = \sqrt{2x+7}$

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x + 3 \geq -\frac{1}{2}\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{7}{2}\right\} = \left[-\frac{7}{2}\,,+\infty\right[$

$g \circ f : \left[-\frac{7}{2}\,,\ +\infty\right[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{2x+7}$

26. $f(x) = |x|$ e $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1 \\ x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R};\ D_g = \mathbb{R}$

$D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

$D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f(x)$	$-x$	0	x	1	x
$g(x)$	x	0	x	1	$\frac{1}{x}$
$(f-g)(x)$	$-2x$	0	0	0	$x-\frac{1}{x}$
$(f\times g)(x)$	$-x^2$	0	x^2	1	1
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	-1	n.d.	1	1	x^2

26.1. $f-g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -2x & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-\dfrac{1}{x} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

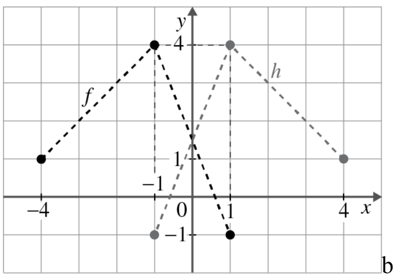
26.2. $f \times g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -x^2 & \text{se } x<0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x>1 \end{cases}$$

26.3. $\dfrac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{se } x>1 \end{cases}$$

27.1.



b

27.2. $D_{f\times h} = D_f \cap D_h = [-4, 1] \cap [-1, 4] = [-1, 1]$

$(f \times h)(-1) = f(-1) \times h(-1) = 4 \times (-1) = -4$

27.3. Para determinar $D_{\frac{h}{f}}$ temos de calcular o zero de f que pertence a $[-1, 1]$.

Neste intervalo, o gráfico de f é o segmento de reta $[AB]$, sendo $A(-1, 4)$ e $B(1, -1)$

$AB = y = mx + b$

$m = \dfrac{-1-4}{-1-(-1)} = -\dfrac{5}{2}$

$-1 = -\dfrac{5}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1 + \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow b = \dfrac{3}{2}$

$AB = y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$

$f(x) = 0 \wedge x \in [-1, 1] \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2} = 0 \wedge x \in [-1, 1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x + 3 = 0 \wedge x \in [-1, 1] \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$

$D_{\frac{h}{f}} = D_h \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} =$

$= [-1, 1] \setminus \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$

$\dfrac{h}{f}(0) = \dfrac{h(0)}{f(0)}$

Expressão analítica de h em $[-1, 1]$:

$y = mx + b; (-1, -1)$ e $(1, 4)$ são pontos do gráfico

$m = \dfrac{4-(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{5}{2}$

$-1 = \dfrac{5}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = -1 + \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow b = \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$

$h(0) = -\dfrac{5}{2} \times 0 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$f(0) = -\dfrac{5}{2} \times 0 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{h}{f}(0) = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$

28. $f(x) = x^2 - x ; D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = 1 - 2x, D_g = \mathbb{R}, D'_g = \mathbb{R}$

28.1. $g(x) = y \Leftrightarrow 1 - 2x = y \Leftrightarrow -2x = -1 + y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1-y}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{y}{2}$

$g^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}$

28.2. $D_{g'} = \mathbb{R}$

$D_{f \circ g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_{g^{-1}} \wedge g^{-1}(x) \in D_f\} = \mathbb{R}$

$f \circ g^{-1}(x) = f(g^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\right) =$

$= \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\right) =$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{4}$

Seja $h = f \circ g^{-1} - g^{-1}$.

$D_h = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$h(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}$

$$f \circ g^{-1} - g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

28.3. $i(x) = -g^{-1}(x-2)+3$

$i(2) = -g^{-1}(2-2)+3$

$= -g^{-1}(0)+3$

$= -\frac{1}{2}+3 = \frac{5}{2}$

29. $f(x) = \begin{cases} x^3+3x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ |x-2| & \text{se } x > 0 \end{cases}$

29.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^3+3x^2 = \wedge x \leq 0) \vee (|x-2| = 0 \wedge x > 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2(x+3) = 0 \wedge x \leq 0) \vee (x-2=0 \wedge x>0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(x^2 = 0 \vee x+3=0) \wedge x \leq 0] \vee x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 2$

Os zeros de *f* são –3 , 0 e 2.

29.2. Como $a \in]-1, 0[$, $f(a) = a^3+3a^2$

Logo, $A(a, a^3+3a^2)$.

Se $b+2a=0$, então $b=-2a$.

$-1 < a < 0 \Leftrightarrow 0 < -2a < 2$

Se $0 < x < 2$, $f(x) = -x+2$ porque $|x-2| = -x+2$ se $x \leq 2$.

Portanto, $f(b) = f(-2a) = -(-2a)+2 = 2a+2$.

Então, $B(-2a, 2a+2)$.

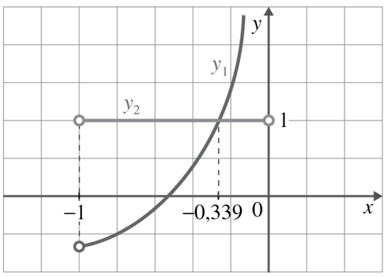
A reta *AB* é paralela à bissetriz dos quadrantes pares. Logo, o seu declive é $m=1$.

Por outro lado, como $A(a, a^3+3a^2)$ e $B(-2a, 2a+2)$, o declive de *AB* é $m = \frac{a^3+3a^2-(2a+2)}{a-(-2a)} = \frac{a^3+3a^2-2a-2}{3a}$.

A solução da equação $\frac{x^3+3x^2-2x-2}{3x} = 1$, em]–1 , 0[, será o valor de *a*.

Para resolver graficamente esta equação consideramos, na calculadora gráfica, as funções $y_1 = \frac{x^3+3x^2-2x-2}{3x}$ e $y_2 = 1$ e calculamos, no intervalo $]-1, 0[$, a abcissa do ponto de interseção dos respetivos gráficos.

Os resultados obtidos foram os seguintes:

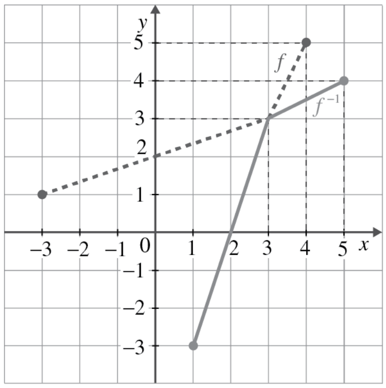


Temos, portanto, $a \approx -0,339$.

Pág. 166

30.1. $D_f = [-3, 4]$, $D'_f = [1, 5]$

30.2.



30.3. $D_{f^{-1}} = [1, 5]$, $D'_{f^{-1}} = [-3, 4]$

30.4. **a)** $(f+f^{-1})(3) = f(3)+f^{-1}(3) =$

$= 3+3 = 6$

b) Precisamos das expressões analíticas de *f* e de f^{-1} para $0 \leq x \leq 3$

- $f: y = mx+b$, no intervalo [–3 , 3]

$(-3, 1)$ e $(3, 3)$ são pontos do gráfico de *f*

$m = \frac{3-1}{3+3} = \frac{1}{3}$

$1 = \frac{1}{3} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = 2$

Para $0 \leq x \leq 3$, $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

- f^{-1} para $0 \leq x \leq 3$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{3}x+2 = y \Leftrightarrow x+6 = 3y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3y-6$

Para $1 \leq x \leq 3$, $f^{-1}(x) = 3x-6$

$(f-f^{-1})(2) = f(2) - f^{-1}(2) =$

$= \left(\frac{1}{3} \times 2 + 2\right) + (3 \times 2 - 6) =$

$= \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$

30.5. $D_{\frac{f}{f^{-1}}} = D_f \cap \{x \in D_{f^{-1}} : f^{-1}(x) \neq 0\}$

$f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow 3x-6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$D_{\frac{f}{f^{-1}}} = [-3, 4] \cap [1, 5] \setminus \{2\} = [1, 4] \setminus \{2\}$

30.6. $\frac{f^{-1}}{f}(1) = \frac{f^{-1}(1)}{f(1)} = \frac{3 \times 1 - 6}{\frac{1}{3} \times 1 + 2} = -\frac{9}{7}$

31.1. $D_f = [-3, 5]$, $D'_f = [-1, 1]$,

$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$, $D'_{f^{-1}} = [-3, 5]$

31.2. $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$

$D_h = [-1+2, 1+2] = [1, 3]$

Expressão de $f(x)$

$y = mx + b$; $(-3, -1)$, $(5, 1)$

$m = \frac{1-(-1)}{5+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$1 = \frac{1}{4} \times 5 + b \Leftrightarrow b = 1 - \frac{5}{4} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}, -3 \le x \le 5$

Expressão de $f^{-1}(x)$:

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = y \Leftrightarrow x - 1 = 4y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4y + 1$

$f^{-1}(x) = 4x + 1, -1 \le x \le 1$

$D_{f+h} = D_f \cap D_h = [-3, 5] \cap [1, 3] = [1, 3]$

$(f + h)(2) = f(2) + h(2) =$

$= \frac{1}{4} \times 2 - \frac{1}{4} + [-f^{-1}(2-2) - 2]$

$= \frac{2}{4} - \frac{1}{4} - f^{-1}(0) - 2 = \frac{1}{4} - (4 \times 0 + 1) - 2$

$= \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$

31.3. $i(x) = -f^{-1}(-x) + 1$

$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$

$D_i = [-1, 1]$

$D_{\frac{i}{f}} = D_i \cap \{x \in D_f : f(x) \ne 0\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$D_{\frac{i}{f}} = [-1, 1] \cap [-3, 5] \setminus \{1\} = [-1, 1[$

$\frac{i}{f}(0) = \frac{i(0)}{f(0)} = \frac{-f^{-1}(0) + 1}{\frac{1}{4} \times 0 - \frac{1}{4}} = \frac{-(4 \times 0 + 1) + 1}{-\frac{1}{4}} =$

$= \frac{-1+1}{-\frac{1}{4}} = 0$

32. $f(x) = x^2 + x$

$g(x) = x - 15$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$

32.1. $(f + g)(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$

Zeros de $f + g$: –5 e 3.

32.2. • $D_{g \circ [f]} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = x^2 + x - 15$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 + x - 15$

• $g(x) = y \Leftrightarrow x - 15 = y \Leftrightarrow x = y + 15$

$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + 15$

Seja $h = (g \circ f) - g^{-1}$

$D_h = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$h(x) = (g \circ f)(x) - g^{-1}(x) =$

$= x^2 + x - 15 - (x + 15) =$

$= x^2 + x - 15 - x - 15 =$

$= x^2 - 30$

$(g \circ f) - g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 30$

33. $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \ge -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{se } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \ge -1 \end{cases}$

$g(x) = \sqrt{x+3}$, $D_g = [-3, +\infty[$

33.1. $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-3, +\infty[$

$(f + g)(x) = \begin{cases} -x - 1 + \sqrt{x+3} & \text{se } -3 \le x < -1 \\ -x^2 + 1 + \sqrt{x+3} & \text{se } x \ge -1 \end{cases}$

33.2. $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \ge -3 \wedge \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}\} =$

$= [-3, +\infty[$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+3})$

Como $\forall x \in [-3, +\infty[, \sqrt{x+3} \ge 0$, vem:

$f(\sqrt{x+3}) = -(\sqrt{x+3})^2 + 1 =$

$= -(x+3) + 1 =$

$= -x - 3 + 1 =$

$= -x - 2$

$f \circ g : [-3, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x - 2$

34. $f(x) = \sqrt{2x+4}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 \ge 0\} = [-2, +\infty[$

$g(x) = \frac{1}{x-1}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$D_f \cap D_g = [-2, +\infty[\setminus \{1\}$

$\forall x \in D_g, g(x) \ne 0$

$D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \ne 0\} = [-2, +\infty[\setminus \{1\}$

34.1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{2x+4} + \frac{1}{x-1}$

$f + g : [-2, +\infty[\setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{2x+4} + \frac{1}{x-1}$

34.2. $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{2x+4}-\dfrac{1}{x-1}$

$f-g:\ [-2\,,\ +\infty[\setminus\{1\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{2x+4}-\dfrac{1}{x-1}$

34.3. $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\sqrt{2x+4}\times\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{2x+4}}{x-1}$

$f\times g:\ [-2\,,\ +\infty[\setminus\{1\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x+4}}{x-1}$

34.4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{2x+4}}{\frac{1}{x-1}}=(x-1)\sqrt{2x+4}$

$\dfrac{f}{g}:\ [-2\,,\ +\infty[\setminus\{1\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto (x-1)\sqrt{2x+4}$

34.5. $(f^4)(x)=(f(x))^4=\left(\sqrt{2x+4}\right)^4=(2x+4)^2$

$D_{f^4}=D_f=[-2\,,+\infty[$

$f^4:\ [-2\,,\ +\infty[\ \to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto (2x+4)^2$

34.6. $D_{f^{-1}\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_{f^{-1}}\right\}$

$D_{f^{-1}}=D'_f=[0\,,+\infty[$

$D_{f^{-1}\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\geq -2 \wedge \sqrt{2x+4}\geq 0\right\}=$

$=[-2\,,+\infty[$

$(f^{-1}\circ f)(x)=x$

Seja $h=(f^{-1}\circ f)+g$

$D_h=[-2\,,+\infty[\cap\mathbb{R}\setminus\{1\}=[-2\,,+\infty[\setminus\{1\}$

$h(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$

$(f^{-1}\circ f)+g:\ [-2\,,\ +\infty[\setminus\{1\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto x+\dfrac{1}{x-1}$

35. $f(x)=x^2-x\,;\ D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\dfrac{1}{x+3}\,;\ D_g=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$h(x)=\sqrt{x}\,;\ D_h=\mathbb{R}_0^+$

35.1. $D_{f\times g}=D_f\cap D_h=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}_0^+=\mathbb{R}_0^+$

$(f\times h)(x)=f(x)\times h(x)=(x^2-x)\sqrt{x}$

$f\times h:\ \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$

$x \mapsto (x^2-x)\sqrt{x}$

35.2. $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}\,,\ g(x)\neq 0$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap\left\{x\in D_g: g(x)\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-x}{\frac{1}{x+3}}=(x^2-x)(x+3)=$

$=x^3-x^2+3x^2-3x=x^3+2x^2-3x$

$\dfrac{f}{g}:\ \mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto x^3+2x^2-3x$

35.3. $h(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$

$D_{\frac{g}{h}}=D_g\cap\left\{x\in D_h: h(x)\neq 0\right\}=(\mathbb{R}\setminus\{-3\})\cap\mathbb{R}^+$

$\dfrac{g}{h}(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{\frac{1}{x-3}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{(x-3)\sqrt{x}}$

$\dfrac{g}{h}:\ \mathbb{R}^+\to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{(x-3)\sqrt{x}}$

35.4. $D_{\frac{h}{g}}=D_h\cap\left\{x\in D_g: g(x)\neq 0\right\}=\mathbb{R}_0^+\cap\mathbb{R}\setminus\{-3\}=\mathbb{R}_0^+$

$\dfrac{h}{g}(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{x+3}}=(x+3)\sqrt{x}$

$\dfrac{h}{g}:\ \mathbb{R}_0^+\ \to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto (x+3)\sqrt{x}$

35.5. $D_{f+g-h}=D_f\cap D_g\cap D_h=\mathbb{R}_0^+$

$[(f+g)-h](x)=(f+g)(x)-h(x)=$

$=f(x)+g(x)-h(x)$

$=x^2-x+\dfrac{1}{x+3}-\sqrt{x}$

$(f+g)-h:\ \mathbb{R}_0^+\ \to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2-x+\dfrac{1}{x+3}-\sqrt{x}$

35.6. $(f^2)(x)=(f(x))^2=(x^2-x)^2$

$D_{f^2}=\mathbb{R}$

Seja $h=\dfrac{f}{g}\times f^2$

$D_h=(\mathbb{R}\setminus\{-3\})\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\times f^2\right)(x)=\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\times f^2(x)=$

$=(x^2-x)(x+3)\times(x^2-x)^2=$

$=(x^2-x)^3(x+3)$

$\dfrac{f}{g}\times f^2:\ \mathbb{R}\setminus\{-3\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto (x^2-x)^3(x+3)$

Pág. 167

36.1. Seja *f* uma função estritamente crescente em $[a\,,b]$.

Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de $[a\,,\,b]$ tais que $x_1 \neq x_2$. Então, $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$.

Como *f* é estritamente crescente,

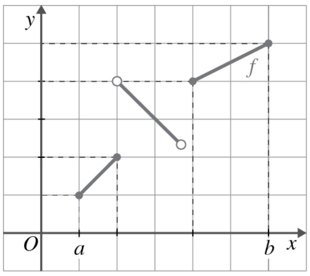
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ e $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Logo, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Como x_1, x_2 são elementos quaisquer de $[a\,,\,b]$, então podemos afirmar que se *f* é estritamente crescente é injetiva.

De igual modo se mostra que se *f* é estritamente decrescente em $[a, b]$ então é injetiva.

36.2. Por exemplo, a função a seguir representada graficamente em $[a\,,\,b]$ é injetiva e não monótona.



37. $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{3x}$

37.1. $D_g = D_f = \mathbb{R}$

Seja $h = g^3 \times 3f$.

$D_h = D_g \cap D_f = \mathbb{R}$

$h(x) = \left(g^3 \times 3f\right)(x) = \left[g(x)\right]^3 \times 3 \times f(x) =$

$= \left(\sqrt[3]{3x}\right)^3 \times 3 \times \left(x^3 - 1\right) =$

$= 3x \times \left(3x^3 - 3\right) = 9x^4 - 9x$

$g^3 \times 3f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 9x^4 - 9x$

37.2. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{3x}\right) = \left(\sqrt[3]{3x}\right)^3 - 1 = 3x - 1$

$(f \circ g)(x) = y \Leftrightarrow 3x - 1 = y \Leftrightarrow 3x = y + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{3}$

$(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$

$g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x} = y \Leftrightarrow 3x = y^3 \Leftrightarrow x = \dfrac{y^3}{3}$

$g^{-1}(x) = \dfrac{x^3}{3}$

$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 - 1 = y \Leftrightarrow x^3 = y + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x) = g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = g^{-1}\left(\sqrt[3]{x+1}\right) =$

$= \dfrac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3}{3} = \dfrac{x+1}{3}$

Logo, $(f \circ g)^{-1}(x) = \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x)$

38. $f(x) = |3x| - 1$; $D_g = \mathbb{R}$

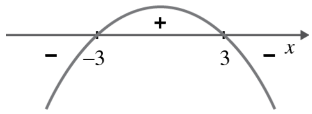
$g(x) = x|x-2|$; $D_g = \mathbb{R}$

$h(x) = 1 + \sqrt{9 - x^2}$; $D_h = [-3\,,3]$

$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 \geq 0\right\}$

$= [-3\,,3]$

$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$



$i(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x^4$, $D_i = \mathbb{R}$

38.1. $f(-x) = |3 \times (-x)| - 1 = |-3x| - 1 = |3x| - 1 = f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \wedge f(-x) = f(x)$

Logo, *f* é par.

$g(-x) = -x|-x-2| = -x|x+2|$

$\exists x \in \mathbb{R} : g(-x) \neq g(x) \wedge g(-x) \neq -g(x)$

Logo, *g* não é par nem ímpar.

$h(-x) = 1 + \sqrt{9 - (-x)^2} = 1 + \sqrt{9 - x^2} = h(x)$

$\forall x \in D_h, -x \in D_h \wedge h(-x) = h(x)$

Logo, *h* é par.

$i(-x) = \dfrac{1}{2}(-x) + (-x)^3 = -\dfrac{1}{2}x - x^3 = -\left(\dfrac{1}{2}x + x^3\right) =$

$= -i(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \wedge i(-x) = -i(x)$

Logo, *i* é ímpar.

38.2. a) Se *f* é uma função par,

$\forall a \in D_f,\ -a \in D_f \wedge f(-a) = f(a)$

Logo, se $a \neq 0$ e $a \in D_f$, $a \neq -a$ e $f(a) = f(-a)$, ou seja, *f* é não injetiva pelo que não tem inversa.

b) Por exemplo, sendo *f* e *g* as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^3 - x$, temos que *f* e *g* são funções ímpares e sendo que *f* é injetiva (logo, tem inversa) e *g* não é injetiva, pois, por exemplo, $g(0) = g(1)$ (logo, *g* não tem inversa).

39. $f(x) = ax + b$

39.1. $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 3 \end{cases}$

$f(x) = 3x - 1$

39.2. $g(x) = -2f(x-3)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -2f(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x-3) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$

39.3. $h(x) = 2 - |f(x)|^2$

$D'_f = \mathbb{R} \Rightarrow |f(x)| \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)|^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -|f(x)|^2 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - |f(x)|^2 \leq 2$

Logo, $D'_h =]-\infty, 2]$.

39.4. $i(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \leq 3 \\ |f(-x)| - 9 & \text{se } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{-x+3}+1 & \text{se } x \leq 3 \\ |3-(x)-1| - 9 & \text{se } x > 3 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \sqrt{-(x-3)}+1 & \text{se } x \leq 3 \\ |-3x-1| - 9 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

$-3x - 1 < 0 \Leftrightarrow -3x < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$

Logo, para $x > 3$, vem $-3x - 1 < 0$, pelo que:

$|-3x-1| = 3x + 1$

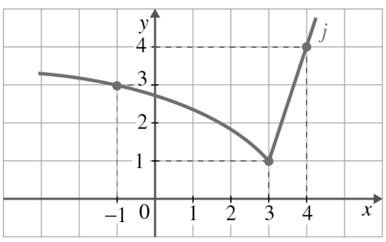
Então:

$i(x) = \begin{cases} \sqrt{-(x-3)}+1 & \text{se } x \leq 3 \\ 3x+1-9 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

$i(x) = \begin{cases} \sqrt{-(x-3)}+1 & \text{se } x \leq 3 \\ 3x-8 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Para $x \leq 3$ o gráfico de *i* obtém-se do gráfico de $y = \sqrt{x}$ por uma reflexão de eixo *Oy*, seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(3, 1)$.

Para $x > 3$ o gráfico de *i* é a semirreta com origem no ponto $(3, 1)$ e que passa no ponto $(4, 4)$.



40. $f(x) = 3x^2 + 12x + 11 =$

$= 3(x^2 + 4x + 4) - 12 + 11 =$

$= 3(x+2)^2 - 1$

$V(-2, -1)$

f é injetiva se $a \geq -2$.

Logo, o valor mínimo de *a* é –2. Neste caso, $D'_f = [-1, +\infty[$.

41. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - 1}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2} - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$B(2, 0)$

$A(x, f(x))$

41.1. A equação pedida é do tipo $y = mx$.

Pretende-se determinar *m* de forma que a equação $f(x) = mx$ tenha uma e só uma solução.

$f(x) = mx \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2} - 1} = mx \Rightarrow \frac{x}{2} - 1 = m^2x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2x^2 - \frac{x}{2} + 1 = 0$

Para que esta equação tenha uma e uma só solução, terá de ser $\Delta = 0$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \vee m = -\frac{1}{4}$

Se $m < 0$, a reta de equação $y = mx$ não interseta o gráfico de *g*.

Para $m = \frac{1}{4}$, vem

$\sqrt{\frac{x}{2} - 1} = \frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{1}{16}x^2 - \frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4$

Verificação: $\sqrt{\frac{4}{2} - 1} = \frac{1}{4} \times 4 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1$ (V)

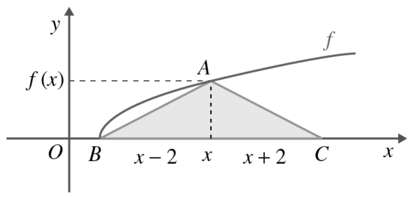
$f(4) = \sqrt{\frac{4}{2} - 1} = 1$

Trata-se da reta de equação $y = \frac{1}{4}x$ que interseta o gráfico de *f* no ponto de coordenadas $(4, 1)$.

41.2. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, temos que a abcissa de *C* é

$x + x - 2 = 2x - 2$

$B(2, 0)$; $A(x, f(x))$ ou $A\left(x_1, \sqrt{\frac{x}{2} - 1}\right)$; $C(2x - 2, 0)$



$\overline{BC} = 2(x-2) = 2x-4$

Base do triângulo: $2x-4$

Altura do triângulo: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}-1}$

$$A(x) = \frac{(2x-4)\times\sqrt{\frac{x}{2}-1}}{2} = (x-2)\sqrt{\frac{x}{2}-1}$$

$$A(x) = 16 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{\frac{x}{2}-1} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2\left(\frac{x}{2}-1\right) = 16^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2\frac{(x-2)}{2} = \left(2^4\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 = 2\times 2^8 \Leftrightarrow$$

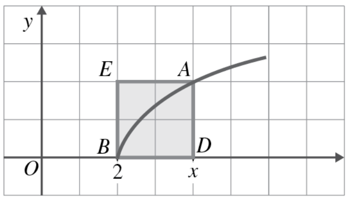
$$\Leftrightarrow x-2 = \sqrt[3]{2^9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2+2^3 \Leftrightarrow x = 10$$

Verificação: $\frac{(2\times 10-4)\sqrt{\frac{10}{2}-1}}{2} = 16 \Leftrightarrow \frac{16\times 2}{2} = 16$ (V)

Logo, $x = 10$.

41.3.



Pretende-se determinar x tal que $\overline{BD} = \overline{AD}$ com $D(x,0)$ e $x > 2$.

$\overline{AD} = f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}-1}$

$\overline{BD} = x-2,\ x > 2$

$$\overline{AD} = \overline{BD} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2}-1} = x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}-2 = 2(x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)-2(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(1-2(x-2)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \vee 1-2x+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{5}{2}$$

Como $x > 2$, temos $x = \frac{5}{2}$.

Verificação:

$\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}-2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ (V)

Logo, $x = \frac{5}{2}$.

$B(2,0)$, $D\left(\frac{5}{2},0\right)$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}-1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$A\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$

E tem abcissa igual à de B e ordenada igual à de A.

$E\left(2,\frac{1}{2}\right)$

Portanto, $x = \frac{5}{2}$, $B(2,0)$, $D\left(\frac{5}{2},0\right)$, $A\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $E\left(2,\frac{1}{2}\right)$

Pág. 168

Avaliação 5

1.

x		0		a	
$f(x)$	+	0	–	0	–
$g(x)$	–	0	+	+	+
$f(x)\times g(x)$	–	0	–	0	–

$f(x)\times g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{0, a\}$

Se $a = 2$, o conjunto-solução é $\{0, 2\}$.

Resposta: (A)

2. $f(x) = \sqrt[3]{-2+x}$

2.1. $(g\circ f)(29) = g(f(29)) = g\left(\sqrt[3]{-2+29}\right) =$

$= g\left(\sqrt[3]{27}\right) = g(3) = 2$

Resposta: (C)

2.2. $f^{-1}(-2) + f(-6) = -6-2 = -8$

Cálculos auxiliares

$f(x) = -2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-2+x} = -2 \Leftrightarrow -2+x(-2)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -8+2 \Leftrightarrow x = -6$

$f^{-1}(2) = -6$

$f(-6) = \sqrt[3]{-2-6} = \sqrt[3]{-8} = -2$

Resposta: (B)

3.
- $(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)-g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

  Como $f(-1) \neq g(-1)$, $(f-g)(-1) \neq 0$
- $(g\times f)(2) = g(2)\times f(2) = -1\times(-1) = 1$
- $(f\circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = 0$
- $(f\times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\times g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0$

Em $]0, 4[$ f tem um zero e g tem dois zeros, todos distintos.

Logo, $f\times g$ tem três zeros em $]0, 4[$.

Resposta: (D)

4. $f(x) = 2\sqrt{2x-3}$

$g(x) = \sqrt{x+4} - 3$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \geq 0\} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 4 \geq 0\} = [-4, +\infty[$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 3 \Rightarrow$

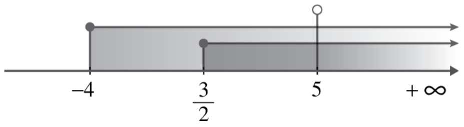
$\Rightarrow x + 4 = 9 \Leftrightarrow x = 5$

Verificação: $g(5) = \sqrt{5+4} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} =$

$= \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\cap ([-4, +\infty[\setminus \{5\})$

$D_{\frac{f}{g}} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\setminus \{5\}$



x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f(x)$	x^2+x-6	-4	0	0	0
$g(x)$	$-x+2$	1	$-x+2$	0	$x-2$
$(f+g)(x)$	x^2-4	-3	$-x+2$	0	$x-2$

Resposta: (D)

5. $f(x) = \sqrt{6-5x}$ e $g(x) = |2x|$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 6 - 5 \geq 0\} = \left]-\infty, \frac{6}{5}\right]$

$6 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow 5x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$

$D_g = \mathbb{R}$

5.1. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \left]-\infty, \frac{6}{5}\right] =]-\infty\,;\, 1{,}2]$

Resposta: (B)

5.2. $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{6-5x} \geq |2x|$

O domínio da condição é $D = \left]-\infty, \frac{6}{5}\right]$.

Neste domínio $\sqrt{6-5x} \geq 0$ e $|2x| \geq 0$.

Assim:

$\sqrt{6-5x} \geq |2x| \wedge x \in D \Leftrightarrow \left(\sqrt{6-5x}\right)^2 \geq (|2x|)^2 \wedge x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 - 5x \geq 4x^2 \wedge x \in D \Leftrightarrow$

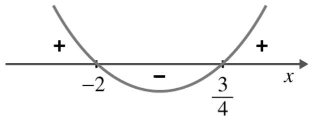
$\Leftrightarrow 4x^2 + 5x - 6 \leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left[-2, \frac{2}{4}\right] \cap \left]-\infty, \frac{6}{5}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left[-2, \frac{3}{4}\right]$, $S = \left[-2, \frac{3}{4}\right]$

Cálculo auxiliar:

$4x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{8} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{3}{4}$



Resposta: (B)

Pág. 169

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{se } x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$g(x) = |x-2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

6.1. $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{se } 1 < x < 2 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

6.2. $(f+g)(x) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -x + 2 \leq 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

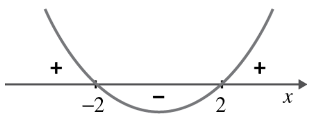
$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 2 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-2, 1] \cup \varnothing \cup \{2\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-2, 1] \cup \{2\}$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$



$S = [-2, 1] \cup \{2\}$

7. $A(3, 4)$ e $B(12, 0)$

$\dot{O}C : y = \frac{4}{3}x,\, x > 0$

$C\left(x, \frac{4}{3}x\right),\, x > 0$

7.1. Tomando [*OB*] para base do triângulo [*OBC*], a altura é $\frac{4}{3}x$, ordenada do ponto *C*.

$A_{[OBC]} = \frac{12 \times \frac{4}{3}x}{2} = 8x$

$A(x) = 8x$

7.2. $\overline{OB} = 12$

$\overline{OC} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}x^2} = \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \frac{5}{3}\sqrt{x^2}$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x-12)^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = \sqrt{x^2 - 24x + 144 + \frac{16}{9}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - 24x + 144}$$

$$P(x) = 12 + \frac{5}{3}x + \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - 24x + 144}$$

7.3. $A(x) = 40 \Leftrightarrow 8x = 40 \Leftrightarrow x = 5$

$$P(5) = 12 + \frac{5}{3}\times 5 + \sqrt{\frac{25}{9}\times 5^2 - 24\times 5 + 144} =$$

$$= 12 + \frac{25}{5} + \sqrt{\frac{625}{9} + 24} = 12 + \frac{25}{3} + \sqrt{\frac{841}{9}} =$$

$$= 12 + \frac{25}{3} + \frac{29}{3} = 12 + \frac{54}{3} = 12 + 18 = 30$$

$P(5) = 30$ u. c.

7.4. $P = 32 \Leftrightarrow 12 + \frac{5}{3}x + \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - 24x + 144} = 32 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - 24x + 144} = 20 - \frac{5}{3}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2 - 24x + 144 = 400 - \frac{200}{3}x + \frac{25}{9}x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24x + \frac{200}{3}x = 400 - 144 \Leftrightarrow \frac{128}{3}x = 256 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{256\times 3}{128} \Leftrightarrow x = 6$$

$A(6) = 8\times 6 = 48$ u. a.

8. $f(x) = \sqrt{10-3x}$ e $g(x) = \sqrt{3x+3} - 1$

8.1. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 10 - 3x \geq 0\} = \left]-\infty, \frac{10}{3}\right]$

Cálculo auxiliar:

$10 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -10 \Leftrightarrow x \leq \frac{10}{3}$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 3 \geq 0\} = [-1, +\infty[$

8.2. a) $D_h = D_f \cap D_g = \left]-\infty, \frac{10}{3}\right] \cap [-1, +\infty[= \left[-1, \frac{10}{3}\right]$

b) $h(x) = 0 \Leftrightarrow (f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10-3x} - \left(\sqrt{3x+3} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10-3x} = \sqrt{3x+3} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 - 3x = 3x + 3 - 2\sqrt{3x+3} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+3} = 6x - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+3} = 3x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 3 = 9x^2 - 18x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 21x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 2$$

Verificação:

Para $x = \frac{1}{3}$: $\sqrt{10 - 3\times\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{3\times\frac{1}{3}} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$ (F)

Para $x = 2$: $\sqrt{10 - 3\times 2} - \left(\sqrt{3\times 2 + 3} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 - 3 = 0$ (V)

$S = \{2\}$

Zero de h: 2

9. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

9.1. a) $D_f = \mathbb{R}_0^+$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = [-1, +\infty[\setminus \{1\}$

9.2. a) $D_{f\times g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty[\cap [-1, +\infty[\setminus \{1\} =$

$$= \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

$$(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) = \sqrt{x}\times\frac{\sqrt{x+1}}{x-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$$

$$f\times g : \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$D_g \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}(x-1)}$$

$$\frac{g}{f} : \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}(x-1)}$$

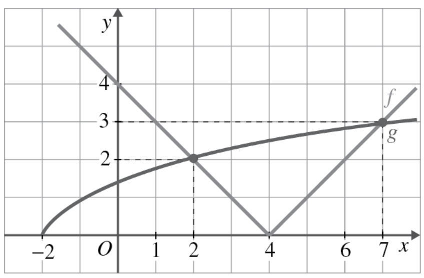
10. $f(x) = |x-4|$

$g(x) = \sqrt{x+2}$

10.1. $D_g = [-2, +\infty[$; $D_f = \mathbb{R}$

x	$g(x)$
-2	0
-1	1
2	2

x	$f(x)$
0	4
4	0
6	2



10.2. Para $x \in D_g = [-2\,,+\infty[$, temos $\sqrt{x+2} > 0$ e $4 > 0$

Logo,

$\sqrt{x+2} < 4 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow x+2 < 16 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < 14 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-2\,,14[$

10.3. $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = |x-4| \Rightarrow$

$\Rightarrow x+2 = (|x-4|)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 7$

Verificação

$x = 2 : \sqrt{2+2} = |2-4| \Leftrightarrow 2 = 2$ (V)

$x = 7 : \sqrt{7+2} = |7-4| \Leftrightarrow 3 = 3$ (V)

$S = \{2\,,7\}$

11.1. $\overline{AC} = 10$; $\overline{CD} = x$; $\overline{AD} = y$

$y^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AB}^2$

$y^2 = (6-x)^2 + 8^2 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{36 - 12x + x^2 + 64} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 - 12x + 100}$

$P(x) = x + 10 + \sqrt{x^2 - 12x + 100}$

11.2. $P(x) = 21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 10 + \sqrt{x^2 - 12 + 100} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 12x + 100} = 11 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 12 + 100 = 121 - 22x + x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x = 21 \Leftrightarrow x = 2{,}1$

$\overline{CD} = x = 2{,}1$

Pág. 170

Avaliação global

1. g tem dois zeros negativos

$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \times (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x) = 0 \vee (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x) = 0 \vee x = 4$

Resposta: (C)

2. $D'_f = [-3\,,2]$ e $f(x) = f(x+2)$

$D'_{f_1} = [-3\,,2]$

$f_2(x) = -f(x+2)$ e $D'_{f_2} = [-2\,,3]$

$g(x) = 1 - f(x+2)$

$D'_g = [-2+1\,,3+1] = [-1\,,4]$

Resposta: (B)

3. $D_f = [-3\,,8]$

$h(x) = f(2x)$

$D_h = \left[-\dfrac{3}{2}\,,4\right]$

$g(x) = 1 + f(2x)$

$D_g = \left[-\dfrac{3}{2}\,,4\right]$

Resposta: (B)

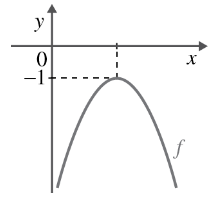
4. Se $D'_f =]-\infty\,,-1]$

f não tem zeros.

Logo, $\Delta < 0$, ou seja,

$b^2 - 4ac < 0$.

Resposta: (B)



5. • Equação da parábola

$V(0\,,2)$

$y = ax^2 + 2$

$(1\,,0)$ é um ponto da parábola

$0 = a + 2 \Leftrightarrow a = -2$

$y = -2x^2 + 2$

• Retas-suporte

$y = x + 1$ e $y = -x + 1$

Condição

$y \leq -2x^2 + 2 \wedge (y \geq -x + 1 \vee y \geq x + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \leq -2x^2 + 2 \wedge (x \geq 1 - y \vee x \leq -1 + y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \leq -2x^2 + 2 \wedge (x \geq 1 - y \vee x \leq -(1-y)) \Leftrightarrow$

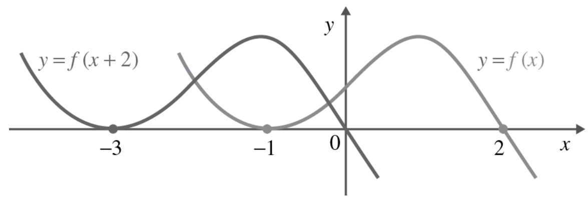
$\Leftrightarrow y \leq -2x^2 + 2 \wedge |x| \geq 1 - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \leq -2x^2 + 2 \wedge 1 - |x| \leq y$

Resposta: (A)

Pág. 171

6.



x	$-\infty$	-3		-1		0		2	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	0	+	+	+	0	−
$f(x+2)$	+	0	+	+	+	0	−	−	−
Produto	+	0	+	0	+	0	−	0	+

$f(x) \times f(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-3\,,-1\} \cup [0\,,2]$

$S = \{-3\,,-1\} \cup [0, 2]$

7. $f(x)=\dfrac{2}{x}$; $g(x)=x^2+1$

7.1. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(-x)=\dfrac{2}{-x}=-\dfrac{2}{x}=-f(x)$

$\forall x \in D_f, D_f \wedge f(-x)=-f(x)$

Logo, *f* é ímpar.

$D_g=\mathbb{R}$

$g(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=g(x)$

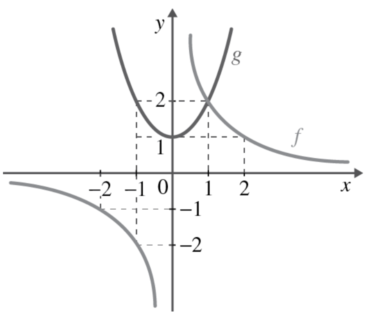
$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x)=f(x)$

Logo, *f* é par.

7.2.

x	$f(x)$
–2	–1
–1	–2
1	2
2	1

x	$g(x)$
–1	2
0	1
1	2



$f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow x\in\,]0\,,1]$

$S=\,]0\,,1]$

8. $\left[f(x)\right]^3$ tem o sinal de *f*.

$\left[-3g(x)\right]$ tem o sinal de $-g$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$\left[f(x)\right]^3$	+	+	+	0	–
$3g(x)$	+	0	–	–	–
Produto	+	0	–	0	+

$\left[f(x)\right]^3\left[-g(x)\right]\leq 0 \Leftrightarrow x\in[0\,,1]$

$S=[0\,,1]$

9.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1 \vee x=3$

$f(x+3)=0 \Leftrightarrow x=-2-3 \vee x=1-3 \vee x=3-3$

$g(x)=0 \Leftrightarrow x=-5 \vee x=-2 \vee x=0$

9.2.

x	$-\infty$	–5		–2		0	$+\infty$
$g(x)$	–	0	+	0	–	0	+

$g(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-5\,,-2[\,\cup\,]0\,,+\infty[$

$S=\,]-5\,,-2[\,\cup\,]0\,,+\infty[$

10.1. Para $-2\leq x\leq 2$

$y=a(x+1)^2+2$; $V(-1\,,2)$

Como $f(0)=0$, temos:

$0=a\times(0+1)^2+2 \Leftrightarrow a=-2$

$f(x)=-2(x+1)^2+2=-2\left(x^2+2x+1\right)+2=$

$=-2x^2-4x-2+2=-2x^2-4x$

Para $0<x\leq 2$:

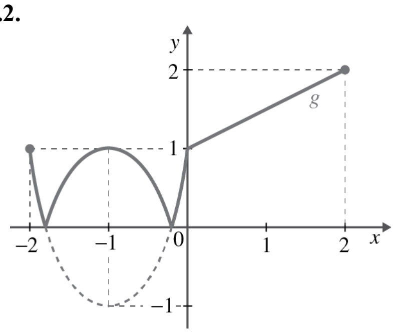
$y=mx$

$m=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$y=-\dfrac{1}{2}x$

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2-4x & \text{se } -2\leq x\leq 0\\ -\dfrac{1}{2}x & \text{se } x>0\end{cases}$$

10.2.



Pág. 172

11. $h(t)=-5t^2+20t$

11.1. $h(1)=-5\times 1^2+20\times 1=15$

$h(4{,}5)=-5\times 4{,}5^2+20\times 4{,}5=-11{,}25$

1 segundo após o lançamento, a bola encontrava-se 15 metros acima do nível do solo e 4,5 segundos após o lançamento encontrava-se a 11,25 metros abaixo do ponto de onde foi lançada.

11.2. $h(t)=0 \Leftrightarrow -5t^2+20t=0 \Leftrightarrow -5t(t-4)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=4$

Ao fim de 4 segundos.

11.3. $h(t)=-5t^2+20t=-5\left(t^2-4t+4-4\right)$

$h(t)=-5(t-2)^2+20$

$V(2\,,20)$

A altura máxima atingida pela bola foi 20 m.

11.4. $h(t)=-25 \Leftrightarrow -5t^2+20t=-25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5t^2+20t+25=0 \Leftrightarrow t^2-4t-5=0 \Leftrightarrow$

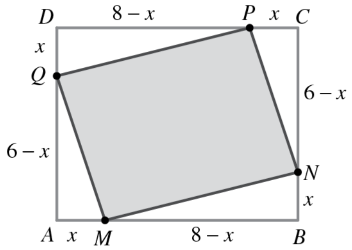
$\Leftrightarrow t=\dfrac{4\pm\sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow t=\dfrac{4\pm 6}{2} \Leftrightarrow t=-1 \vee t=5$

Como $t\in[0\,,6]$, temos $t=5$

A bola cai no mar decorridos 5 segundos.

12.1. $\overline{NP} = \overline{QM} = \sqrt{x^2 + (6-x)^2}$

$\overline{MN} = \overline{PQ} = \sqrt{x^2 + (8-x)^2}$



$[PQMN]$ é um quadrilátero com os lados opostos iguais. Logo, é um paralelogramo.

12.2. a) $A_{[MNPQ]} = A_{[ABCD]} - 2A_{[MBN]} - 2A_{[AMQ]}$

$A(x) = 6 \times 8 - 2 \times \frac{(8-x)x}{2} - 2 \times \frac{(6-x) \times x}{2}$

$A(x) = 48 - (8x - x^2) - (6x - x^2) =$

$= 48 - 8x + x^2 - 6x + x^2 =$

$= 2x^2 - 14x + 48 =$

$= 2\left(x^2 - 7x + \frac{49}{9} - \frac{49}{9}\right) + 48 =$

$= 2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{2} + 48$

$A(x) = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{47}{2}$

b) A área mínima do paralelogramo é 23,5 cm^2 para $x = 3{,}5$ cm.

c) $A(x) = 31{,}5 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{47}{2} = 31{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 31{,}5 - 23{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} = -2 \vee x - \frac{7}{2} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 + 3{,}5 \vee x = 2 + 3{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1{,}5 \vee x = 5{,}5$

13.1. Se $[AB]$ é um diâmetro do semicírculo, então o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.

Como $\overline{AB} = 20$ cm, temos:

$x^2 + y^2 = 20^2 \Leftrightarrow y^2 = 400 - x^2 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{400 - x^2}$

$D =]0\ ,\ 20[$

13.2. $A = \frac{xy}{2}$

$A(x) = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{2}$

$A(x) = 96 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{2} = 96 \Leftrightarrow x\sqrt{400 - x^2} = 192 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(400 - x^2) = 192^2 \Leftrightarrow -x^4 + 400x^2 - 192^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 - 400x^2 - 192^2 = 0$

Fazendo $y = x^2$:

$y^2 - 400y - 192^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{400 \pm \sqrt{400^2 - 4 \times 192^2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{400 \pm \sqrt{12544}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{400 \pm 112}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 144 \vee y = 256$

Como $y = x^2$, temos:

$x^2 = 144 \vee x^2 = 256 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 12 \vee x = 16$

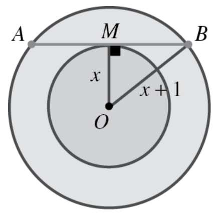
Verificação:

$A(12) = \frac{12 \times \sqrt{400 - 12^2}}{2} = 96$

$A(16) = \frac{16 \times \sqrt{400 - 16^2}}{2} = 96$

As dimensões são $x = 12$ cm e $y = 16$ cm ou $x = 16$ cm e $y = 12$ cm.

14.1.



Se o menor dos raios tem medida x, o maior tem medida $x + 1$.

$[AB]$ é tangente à circunferência de menor raio. Logo, é perpendicular a esse raio no ponto de tangência.

$f(x) = \overline{AB} = 2\overline{MB}$

$\overline{MB}^2 + x^2 = (x+1)^2$

$\overline{MB}^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2$

Como $\overline{MB} > 0$, vem $\overline{MB} = \sqrt{2x+1}$.

Logo, $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$

14.2. $\overline{AB} = 10$

$f(x) = 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 1 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12$

Verificação:

$\sqrt{2 \times 12 + 1} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5$ (V)

$r_1 = x = 12$ cm

$r_2 = x + 1 = 13$ cm

$A_1 = \pi \times 12^2 = 144\pi$

$A_2 = \pi \times 13^2 = 169\pi$

As áreas são 144π m^2 e 169π m^2.

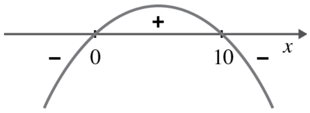
Pág. 173

15. $f(x)=\sqrt{10x-x^2}$ e $g(x)=10-3x$

15.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ 10x-x^2\geq 0\}=[0\ ,\ 10]$

Cálculo auxiliar:

$10x-x^2=0 \Leftrightarrow x(10-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=10$



15.2. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \sqrt{10x-x^2}=10-3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x-x^2=100-60x+9x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x^2-70x+100=0 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-40}}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=5$

Verificação:

$x=2$: $\sqrt{20-4}=10-6 \Leftrightarrow \sqrt{16}=4$ (V)

$x=5$: $\sqrt{50-25}=10-15 \Leftrightarrow \sqrt{25}=-5$ (F)

$S=\{2\}$

$f(2)=\sqrt{20-4}=4$

Os gráfico de *f* e *g* intersetam-se no ponto (2 , 4).

16.1. $V=\dfrac{\text{espaço}}{\text{tempo}}=\dfrac{e}{T}$

$T=\dfrac{e}{V}$

Seja T_1 o tempo gasto de *B* a *C* e T_2 o tempo gasto de *C* a *P*.

$T_1=\dfrac{\overline{BC}}{30}$

$\overline{BC}^2=5^2+x^2$

Como $\overline{BC}>0$, vem $\overline{BC}=\sqrt{x^2+25}$.

Logo, $T_1=\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{30}$.

$T_2=\dfrac{\overline{CP}}{40}=\dfrac{12-x}{40}$

Portanto, como $T=T_1+T_2$, vem:

$T(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{30}+\dfrac{12-x}{40}$

16.2. $T(0)=\dfrac{\sqrt{0+25}}{30}+\dfrac{12}{40}=\dfrac{5}{30}+\dfrac{3}{10}=$

$=\dfrac{10}{60}+\dfrac{18}{60}=\dfrac{28}{60}$

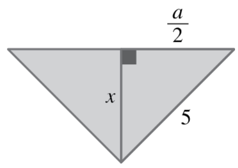
$T(0)=\dfrac{28}{60}$ h = 28 min

$T(12)=\dfrac{\sqrt{144+25}}{30}+0=\dfrac{13}{30}=\dfrac{26}{60}$

$T(12)=\dfrac{26}{60}$ h = 26 min

Se o pescador for pelo ponto *A* gasta 28 min na viagem. Se for em linha reta de *B* a *P* gasta 26 min.

17.1. $x^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=5^2 \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x^2=25-\dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{\dfrac{100-a^2}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{100-a^2}}{2}$

$V=A_{\text{base}}\times\text{altura}=\dfrac{a\times x}{2}\times 20=10ax$

$V(a)=10a\times\dfrac{\sqrt{100-a^2}}{2}$

$V(a)=5a\sqrt{100-a^2}$

17.2. $V(a)=60 \Leftrightarrow 5a\sqrt{100-a^2}=60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\sqrt{100-a^2}=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2\left(100-a^2\right)=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100a^2-a^4-144=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^4-100a^2+144=0$

Fazendo $a^2=x$, temos:

$x^2-100x+144=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{100\pm\sqrt{100^2-576}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=50\pm\sqrt{2356}$

Como $a^2=x$ temos:

$a=\sqrt{50+\sqrt{2356}} \vee a=\sqrt{50-\sqrt{2356}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a\approx 9{,}927 \vee a\approx 1{,}209$

9,927 dm = 99,27 cm

1,209 dm = 12,09 cm

Portanto, $a\approx 99{,}3$ cm ou $a\approx 12{,}1$ cm.

18.1. $\overline{BP}^2=6^2+x^2 \overset{\overline{BP}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BP}=\sqrt{x^2+36}$

$\overline{AP}^2=(9-x)^2+3^2 \overset{\overline{AP}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AP}=\sqrt{81-18x+x^2+9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AP}=\sqrt{x^2-18x+90}$

18.2. $\overline{AP}=\overline{BP} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-18x+90}=\sqrt{x^2+36} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-18x+90=x^2+36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -18x=36-90 \Leftrightarrow -18x=-54 \Leftrightarrow x=3$

Verificação:

$\sqrt{3^2-18\times 3+90}=\sqrt{3^2+36} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{45}=\sqrt{45}$ (V)

P fica a 3 km de B'

Para $x = 3$,

$\overline{BP}+\overline{AP}=\sqrt{3^2+36}+\sqrt{3^2-18\times 3+90}=$

$=\sqrt{45}+\sqrt{45}=$

$=2\sqrt{9\times 5}=6\sqrt{5}\approx$

$\approx 13{,}4$ km

A distância pedida é de 13,4 km.