Pág. 242

1.1. António: c ; Diogo: $\sim(i \wedge e)$; Rita: $e \vee \sim c$

1.2. Se as afirmações dos três amigos são verdadeiras, a afirmação do António é verdadeira, pelo que a proposição c é verdadeira e, consequentemente, a proposição $\sim c$ é falsa.
Por outro lado, a afirmação da Rita é, também, verdadeira, pelo que a proposição $e \vee \sim c$ é verdadeira. Deste modo, podemos concluir que a proposição e terá de ser verdadeira, pois, caso fosse falsa, a proposição $e \vee \sim c$ teria de ser falsa, o que contradiz os dados do problema.
Finalmente, e como o Diogo falou a verdade, a proposição $\sim(i \wedge e)$ terá de ser verdadeira. Sabemos que a proposição e é verdadeira, pelo que a proposição i terá de ser falsa, uma vez que a conjunção de duas proposições é verdadeira somente se as duas forem verdadeiras e a negação de uma proposição falsa é uma proposição verdadeira.
Assim, podemos concluir que os alunos das ilhas não gostam de Matemática, os alunos estrangeiros gostam de Matemática e os alunos do continente também gostam de Matemática.

2.1.
- $B \cup C = \{c, d\} \cup \{a, b, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\}$
- $(B \cup C) \setminus (A \cap B) = \{a, b, c, d\} \setminus \{c\} = \{a, b, d\} = C$

2.2. Sabemos que $A \cup X = \{a, b, c\}$ e que $A = \{a, b, c\}$, pelo que todos os elementos de X são também elementos de A, ou seja, $X \subset A$. De igual modo, temos que $B \cup X = \{c, d\}$ e $B = \{c, d\}$, pelo que todos os elementos de X são, também elementos de B, ou seja, $X \subset B$.
Se $X \subset A$ e $X \subset B$ então $X \subset (A \cap B)$, ou seja $X \subset \{c\}$, pelo que $X = \{c\}$ ou $X = \emptyset$.
Como $C \cup X = A \cup B$, vem $\{a, b, d\} \cup X = \{a, b, c, d\}$.
Logo, $X = \{c\}$.

3.1. $V_{\text{sólido}} = \frac{8}{25} \times V_{\text{esfera}} \Leftrightarrow V_{\text{cone menor}} + V_{\text{cone maior}} = \frac{8}{25} \times V_{\text{esfera}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \overline{AC} + \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \overline{CB} = \frac{8}{25} \times \frac{4}{3} \times \pi \times \left(5\sqrt{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) = \frac{320\pi\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \left(2 \times 5\sqrt{2}\right) = \frac{320\pi\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow$$

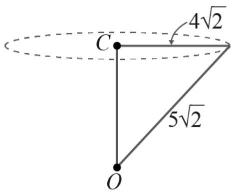
$$\Leftrightarrow \frac{10\sqrt{2} \times A_{\text{base}}}{3} = \frac{320\pi\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{base}} = \frac{320\pi\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{10\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{base}} = 32\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi \times \left(r_{\text{base}}\right)^2 = 32\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(r_{\text{base}}\right)^2 = 32$$



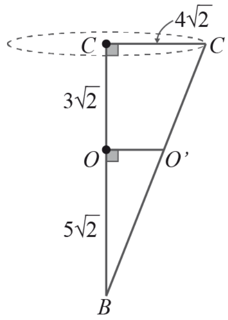
pelo que o $r_{\text{base}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Para determinar $\overline{OC}$, utilizamos o Teorema de Pitágoras.

$\overline{OC}^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 50 - 32 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 18$,

pelo que $\overline{OC} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

3.2. Os triângulos $[BC'C]$ e $[BO'O]$



Da figura ao lado são semelhantes, pelo que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{OO'}} \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\overline{OO'}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OO'} = \frac{5\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OO'} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times 5\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{25}{2} \times 5\sqrt{2} = \frac{125\sqrt{2}\pi}{6}$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(5\sqrt{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 250\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1000\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{V_{\text{cone}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{\frac{125\pi\sqrt{2}}{6}}{\frac{1000\pi\sqrt{2}}{3}} = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6} \times \frac{3}{1000\pi\sqrt{2}} = \frac{1}{16}$$

Pág. 243

4.1. O instante $t = 0$ corresponde às 7 horas desse dia, pelo que às 15 horas e 45 minutos corresponderá o instante $t = 8{,}75$.
Assim tem-se:

$$T(8{,}75) = 0{,}1(8{,}75)^4 - 2(8{,}75)^3 + 12{,}775(8{,}75)^2 -$$
$$-30(8{,}75) + 22{,}5 \Rightarrow T(8{,}75) \approx -15{,}58$$

A temperatura no interior da arca frigorífica às 15 horas e 45 minutos desse dia foi de, aproximadamente, –15,58 graus Celsius.

4.2. Os instantes em que a temperatura no interior da arca frigorífica foi igual a zero graus Celsius correspondem às raízes do polinómio.
Às 8 horas e 30 minutos corresponde o instante $t = 1{,}5$ e às 13 horas corresponde o instante $t = 6$.
Aplicando, sucessivamente, a regra de Ruffini, tem-se:

	0,1	–2	12,775	–30	22,5
1,5		0,15	–2,775	15	–22,5
	0,1	–1,85	10	–15	0
6		0,6	–7,5	15	
	0,1	–1,25	2,5	0	

Assim, tem-se que:

$$T(t) = (t - 1{,}5)(t - 6)\left(0{,}1t^2 - 1{,}25t + 2{,}5\right)$$

As outras duas raízes são as soluções da equação:

$$0{,}1t^2 - 1{,}25t + 2{,}5 = 0$$

$$0{,}1t^2 - 1{,}25t + 2{,}5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1{,}25 \pm \sqrt{1{,}25^2 - 4 \times 0{,}1 \times 2{,}5}}{2 \times 0{,}1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1{,}25 \pm \sqrt{0{,}5625}}{0{,}2} \Leftrightarrow t = \frac{1{,}25 \pm 0{,}75}{0{,}2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1{,}25 + 0{,}75}{0{,}2} \vee t = \frac{1{,}25 - 0{,}75}{0{,}2} \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 2{,}5$$

O instante t = 2,5 corresponde às 9 horas e 30 minutos e o instante t = 10 corresponde às 17 horas.
Os outros dois instantes em que a temperatura no interior da arca frigorífica foi igual a zero graus Celsius foram às 9 horas e 30 minutos e às 17 horas.

5.1. O ponto O é o ponto médio de [AC], pelo que

$$\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)=(0,0) \Leftrightarrow \frac{x_A+x_C}{2}=0 \wedge \frac{y_A+y_C}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow x_A+x_C=0 \wedge y_A+y_C=0 \Leftrightarrow x_A=-x_C \wedge y_A=-y_C$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(x_C, y_C)-(x_A, y_A)=(x_C-x_A, y_C-y_A)$$

Assim, tem-se:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-7,-8)+(13,4)=(x_C-x_A, y_C-y_A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-7+13,-8+4)=(x_C-x_A, y_C-y_A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6,-4)=(x_C-x_A, y_C-y_A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6=x_C-x_A \wedge -4=y_C-y_A$$

Como $x_A=-x_C \wedge y_A=-y_C$, vem:

$$6=x_C-(-x_C) \wedge -4=y_C-(-y_C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6=2x_C \wedge -4=2y_C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_C=3 \wedge y_C=-2$$

$A(-3, 2)$ e $C(3, -2)$

5.2. $B=A+\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow B=(-3,2)+(-7,-8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B=(-3-7, 2-8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B=(-10,-6)$$

5.3. Equação da reta AB:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-6-2}{-10+3}=\frac{-8}{-7}=\frac{8}{7}$$

$$y=\frac{8}{7}x+b$$

Como $A(-3,2)\in AB$, tem-se:

$$2=\frac{8}{7}\times(-3)+b \Leftrightarrow 2=\frac{-24}{7}+b \Leftrightarrow 2+\frac{24}{7}=b \Leftrightarrow b=\frac{38}{7}$$

AB: $y=\frac{8}{7}x+\frac{38}{7}$

Equação da reta AC:

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-2-2}{3+3}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$$

$$y=-\frac{2}{3}x+b$$

Como $0(0, 0)\in AC$, tem-se $b = 0$.

AB: $y=-\frac{2}{3}x$

Equação da reta BC:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-2+6}{3+10}=\frac{4}{13}$$

$$y=\frac{4}{13}x+b\ .$$

Como $B(-10,-6)\in BC$, tem-se:

$$-6=\frac{4}{13}\times(-10)+b \Leftrightarrow -6=\frac{-40}{13}+b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6+\frac{40}{13}=b \Leftrightarrow b=-\frac{38}{13}$$

BC: $y=\frac{4}{13}x-\frac{38}{13}$

Condição pedida:

$$y\le\frac{8}{7}x+\frac{38}{7} \wedge y\le-\frac{2}{3}x \wedge y\ge\frac{4}{13}x-\frac{38}{13} \wedge x<0 \wedge y<0$$

5.4. **a)** O ponto médio de [AB] é o centro da circunferência.

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-3-10}{2}, \frac{2-6}{2}\right)=\left(-\frac{13}{2},-2\right)$$

O raio, r, é igual a $\frac{\overline{AB}}{2}$.

$$r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(-10+3)^2+(-6-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{(-7)^2+(-8)^2}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{49+64}}{2}=\frac{\sqrt{113}}{2}$$

$$r^2=\left(\frac{\sqrt{113}}{2}\right)^2=\frac{113}{4}$$

Equação da circunferência de diâmetro [AB]:

$$\left(x+\frac{13}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{113}{4}$$

b) Interseção com o eixo Ox:

Equação do eixo Ox : $y = 0$

$$\left(x+\frac{13}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{113}{4} \wedge y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{13}{2}\right)^2+(0+2)^2=\frac{113}{4} \wedge y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{13}{2}\right)^2=\frac{113}{4}-4 \wedge y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{13}{2}\right)^2=\frac{97}{4} \wedge y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{13}{2}=\pm\sqrt{\frac{97}{4}} \wedge y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{97}{4}} \wedge y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-13\pm\sqrt{97}}{2} \wedge y=0$$

Os pontos de interseção da circunferência de diâmetro [AB] com o eixo Ox têm de coordenadas:

$$\left(\frac{-13-\sqrt{97}}{2}, 0\right) \text{ e } \left(\frac{-13+\sqrt{97}}{2}, 0\right)$$

Interseção com o eixo Oy:

Equação do eixo Oy : $x = 0$

$$\left(x+\frac{13}{12}\right)^2+\left(y+2\right)^2=\frac{113}{4}\wedge x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(0+\frac{13}{2}\right)^2+\left(y+2\right)^2=\frac{113}{4}\wedge x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{169}{4}+\left(y+2\right)^2=\frac{113}{4}\wedge x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y+2\right)^2=\frac{113}{4}-\frac{169}{4}\wedge x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y+2\right)^2=-14\wedge x=0$$

$$\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

A circunferência de diâmetro [*AB*] não interseta o eixo *Oy*.

6.1. $4x^2+9y^2=36\Leftrightarrow\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=\frac{36}{36}\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Equação reduzida da elipse: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$a^2=9$ e $b^2=4$ e como a e b são números positivos, tem-se que $a = 3$ e $b = 2$.

Os vértices da elipse têm coordenadas:

$(-3\ ,\ 0)$, $(3\ ,\ 0)$, $(0\ ,\ -2)$ e $(0\ ,\ 2)$

Por outro lado, tem-se que $a > b$, pelo que $(-c\ ,\ 0)$ e $(c\ ,\ 0)$ são as coordenadas dos focos da elipse e $a^2=b^2+c^2$.

$a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow 9=4+c^2\Leftrightarrow c^2=5$

Como $c > 0$, então $c=\sqrt5$.

As coordenadas dos focos da elipse são:

$\left(-\sqrt5\ ,0\right)$ e $\left(\sqrt5\ ,0\right)$

6.2. Determinemos as abcissas dos pontos da elipse que têm ordenada igual a 1.

$$4x^2+9y^2=36\wedge y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+9\times1^2=36\wedge y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+9=36\wedge y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2=36-9\wedge y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2=27\wedge y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{27}{4}\wedge y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=-\sqrt{\frac{27}{4}}\vee x=\sqrt{\frac{27}{4}}\right)\wedge y=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=-\frac{3\sqrt3}{2}\vee x=\frac{3\sqrt3}{2}\right)\wedge y=1$$

Os pontos procurados têm coordenadas:

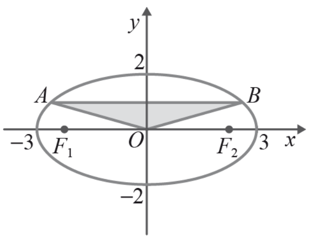
$\left(-\frac{3\sqrt3}{2},1\right)$ e $\left(\frac{3\sqrt3}{2},1\right)$

Área do triângulo [*AOB*] =

$$=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{\overline{AB}\times\text{ ordenada }A}{2}=$$

$$=\frac{2\times\frac{3\sqrt3}{2}\times1}{2}=\frac{3\sqrt3}{2}$$

A área do triângulo [*AOB*] é $\frac{3\sqrt3}{2}$ u.a.



6.3. Os pontos da elipse que têm coordenadas com sinais contrários situam-se no segundo quadrante ou no quarto quadrante, pelo que a condição pedida é:

$$\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\wedge x<0\wedge y>0\right)\vee\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\wedge x>0\wedge y<0\right)$$

Nota: A condição pedida, também, pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\wedge\left[\left(x<0\wedge y>0\right)\vee\left(x>0\wedge y<0\right)\right]$$

Pág. 244

7. Proposição 1:

$$\frac{0{,}2^2\times\left(\sqrt{\sqrt5}\right)^{-16}}{\left(\frac{1}{25}\right)^6}=5^6\Leftrightarrow\frac{\left(\frac15\right)^2\times\left(\sqrt[4]{5}\right)^{-16}}{\left(\frac{1}{5^2}\right)^6}=5^6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5^{-2}\times\left(5^{\frac14}\right)^{-16}}{\left(5^{-2}\right)^6}=5^6\Leftrightarrow\frac{5^{-2}\times5^{-4}}{5^{-12}}=5^6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{-6-(-12)}=5^6\Leftrightarrow 5^6=5^6$$

A proposição 1 é verdadeira.

Proposição 2:

$$\frac{10^{-2}\times0{,}001}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{1}{1000}\Leftrightarrow\frac{10^{-2}\times10^{-3}}{\left(10^{-1}\right)^2}=\frac{1}{1000}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{10^{-5}}{10^{-2}}=\frac{1}{1000}\Leftrightarrow 10^{-5-(-2)}=\frac{1}{1000}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{-3}=\frac{1}{1000}\Leftrightarrow\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}\Leftrightarrow\frac{1}{1000}=\frac{1}{1000}$$

A proposição 2 é verdadeira.

Proposição 3:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt8}\times\sqrt[4]{2}}{\frac{4^{0,5}}{2}}=\sqrt[4]{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[4]{2}}{\frac{\sqrt4}{2}}=\sqrt[4]{2}\Leftrightarrow\frac{2^{\frac36}\times2^{\frac14}}{\frac22}=\sqrt[4]{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2^{\frac34}}{1}=\sqrt[4]{2}\Leftrightarrow\Leftrightarrow 2^{\frac34}=\sqrt[4]{2}\Leftrightarrow\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2}$$

A proposição 3 é falsa.

Se a proposição $\sim\left[\left(p\wedge q\right)\wedge\sim r\right]$ é falsa, então a proposição $\left(p\wedge q\right)\wedge\sim r$ é verdadeira.

Se a proposição $\left(p\wedge q\right)\wedge\sim r$ é verdadeira, então as proposições $p\wedge q$ e $\sim r$ são verdadeiras.

Portanto, *p* é verdadeira, *q* é verdadeira e *r* é falsa.

Logo, *r* só pode ser a proposição 3.

8.1. $A=\left\{x\in\mathbb{Z}:\frac75\geq1-\frac{x+3}{5}>-2\right\}=$

$$=\left\{x\in\mathbb{Z}:7\geq5-x-3>-10\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{Z}:7\geq-x+2>-10\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{Z}:7-2\geq-x>-10-2\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{Z}:5\geq-x>-12\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{Z}:-5\leq x<12\right\}$$

$A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

$B=\{x\in\mathbb{Z}: x^2<16\}=\{x\in\mathbb{Z}: -4<x<4\}$

$B=\{-3,-2,-1,\ 0,\ 1,2,3\}$

$A\setminus B=\{-5,-4,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

8.2. **a)** A proposição é verdadeira, já que $1\in A$ e $\frac{1}{1}\geq 1$.

b) A proposição é verdadeira, já que o valor absoluto de qualquer elemento de *B* é igual à raiz quadrada do seu quadrado.

8.3. O conjunto *A* é constituído por 17 elementos.
Por outro lado, $A\cap C$ é constituído por 11 elementos e $A\cup C$ tem 21 elementos. Logo, o conjunto *C* tem 11 elementos comuns com o conjunto *A* e quatro elementos que não pertencem a *A*.
Assim, temos que:
$C=\{-9,8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$,
pelo que $a=-10$ e $b=5$.
ou
$C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ pelo que $a=0$ e $b=15$.

9.1. Seja $M(x\ ,y)$ um ponto qualquer que verifica a condição $\overline{MA}+\overline{MB}=10$.
A condição define a elipse de focos *A* e *B* e eixo maior igual a 10. Logo $a=5$.
Como as coordenadas dos focos são $(-3,0)$ e $(3,0)$, temos $c=3$ e $a>b$, pelo que $a^2=b^2+c^2$.
$a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow 5^2=b^2+3^2\Leftrightarrow b^2=16$.
Como $b>0$ vem $b=4$.
Equação reduzida da elipse: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

9.2. As retas tangentes à elipse que são paralelas aos eixos coordenados passam pelos vértices pelo que as suas equações são: $x=5$, $x=-5$, $y=4$ e $y=-4$.

10.1. $(x-1)^2=x^2-2x+1$

Usando o algoritmo da divisão inteira de polinómios:

$$\begin{array}{lll|l} x^n & & -x^{n-2}-2x+2 & x^2-2x+1 \\ \hline -x^n & +2x^{n-1} & -x^{n-2} & x^{n-2} \\ \hline & 2x^{n-1} & -2x^{n-2}-2x+2 & \end{array}$$

Assim, tem-se que:

$x^n-x^{n-2}-2x+2=(x^2-2x+1)x^{n-2}+2x^{n-1}-2x^{n-2}-2x+2$

$\Leftrightarrow x^n-x^{n-2}-2x+2=(x-1)^2x^{n-2}+2(x^{n-1}-x^{n-2}-x+1)$

$P(x)=(x-1)^2x^{n-2}+2(x^{n-1}-x^{n-2}-x+1)$

10.2. Para $n=4$: $P(x)=x^4-x^2-2x+2$

Os divisores inteiros de 2 são -1 , 1 , -2 e 2 .
1 é raiz de $P(x)$, então pela regra de Ruffini:

	1	0	–1	–2	2
1		1	1	0	2
	1	1	0	–2	0

Verifica-se, facilmente, que 1 é ainda raiz de x^3+x^2-2, pelo que:

	1	0	–1	–2	2
1		1	1	0	2
	1	1	0	–2	0

$x^2+2x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\times1\times2}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}$

Equação impossível em $\mathbb{R}$, pelo que o polinómio:

$$x^2+2x+2=0$$

não tem mais raízes reais.
Assim, tem-se:
$P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+2)\rightarrow$ fatorização de $P(x)$
Vamos, agora, resolver a inequação $P(x)\leq 0$, recorrendo a uma tabela de sinais.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	0	+
x^2+2x+2	+	+	+
$P(x)$	+	0	+

Logo, $P(x)\leq 0\Leftrightarrow x=1$.
$S=\{1\}$

Pág. 245

11.1. Para $n=1$, tem-se $p(x)=x^5-x^4-x+1$.

a) $P(1)=1^5-1^4-1+1=1-1-1+1=0$, pelo que 1 é raiz de $P(x)$.

b) Como 1 é raiz de $P(x)$, então $P(x)$ é divisível por $x-1$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	–1	0	0	–1	1
1		1	0	0	0	–1
	1	0	0	0	–1	0

Assim, tem-se que:
$p(x)=(x-1)(x^4-1)$
Determinemos, agora, as raízes de x^4-1.
$x^4-1=(x^2)^2-1=(x^2-1)(x^2+1)$
pelo que:
$x^4-1=0\Leftrightarrow(x^2-1)(x^2+1)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-1=0\vee x^2+1=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\vee x^2+1=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-1=0\vee x+1=0\vee x^2=-1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=1\vee x=-1\vee x^2=-1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=1\vee x=-1$
Para além da raiz 1, o polinómio $P(x)$ tem apenas mais uma raiz que é –1 (1 é raiz de multiplicidade 2).
Logo, a decomposição de $P(x)$ em fatores é:

$$P(x)=(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$$

c) $p(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^5 - x^4 - x + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 (x+1)(x^2+1) \leq 0$

Recorrendo a uma tabela de sinais, tem-se:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Assim, $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \{1\}$.

11.2. $P(a) + P(-a) =$

$= a^{2n+3} - a^{2n+2} - a + 1 + (-a)^{2n+3} - (-a)^{2n+2} - (-a) + 1$

$= a^{2n+3} - a^{2n+2} - \cancel{a} + 1 + a^{2n+3} \times (-1)^{2n+2} + \cancel{a} + 1$

$2n+3$ representa um número ímpar qualquer que seja o número natural *n*, pelo que $(-1)^{2n+3} = -1$.

Por outro lado, $2n+2$ representa um número par qualquer que seja o número natural *n*, pelo que $(-1)^{2n+2} = 1$.

Assim, vem que:

$P(a) + P(-a) = \cancel{a^{2n+3}} - a^{2n+2} + 1 - \cancel{a^{2n+3}} - a^{2n+2} + 1$

$= 2 - 2a^{2n+2} = 2\left(1 - a^{2n+2}\right)$

12.1. As dimensões do retângulo obtido são:

comprimento = perímetro da base do cilindro

largura = altura do cilindro

A altura do cilindro é $\sqrt[3]{256}$ metros, pelo que a largura do retângulo é, também, $\sqrt[3]{256}$ metros.

Por outro lado, sabemos que a área da base do cilindro é $4\pi\sqrt[3]{2}$ m^2.

Seja *r* o raio da base do cilindro.

Área da base = πr^2, ou seja:

$\pi r^2 = 4\pi\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{4\pi\sqrt[3]{2}}{\pi} \Leftrightarrow r^2 = 4\sqrt[3]{2}$, com $r > 0$

$r = \sqrt{4\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow r = 2\sqrt[6]{2}$

Perímetro da base do cilindro:

$2\pi r = 2\pi \times 2\sqrt[6]{2}$

pelo que o comprimento do retângulo mede $4\pi\, 2\sqrt[6]{2}$ metros.

a) Perímetro do retângulo:

$2 \times \sqrt[3]{256} + 2 \times 4\pi\sqrt[6]{2} = 2 \times \sqrt[3]{256} + 8\pi\sqrt[6]{2} =$

$= 2 \times \sqrt[3]{2^8} + 8\pi\sqrt[6]{2} =$

$= 2 \times \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^2} + 8\pi\sqrt[6]{2} =$

$= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2^2} + 8\pi\sqrt[6]{2} =$

$= 8 \times \sqrt[6]{2^4} + 8\pi\sqrt[6]{2} =$

$= 8 \times \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2^3} + 8\pi\sqrt[6]{2} =$

$= 8 \times \sqrt[6]{2} \times \sqrt{2} + 8\pi\sqrt[6]{2} =$

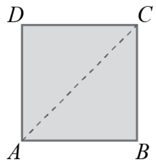
$= 8\sqrt[6]{2}\left(\sqrt{2} + \pi\right)$

b) Área do retângulo:

$\sqrt[3]{256} \times 4\pi\sqrt[6]{2} = \sqrt[3]{2^8} \times 2^2 \times \pi \times 2^{\frac{1}{6}} =$

$= 2^{\frac{8}{3}} \times 2^2 \times \pi \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{8}{3}+2+\frac{1}{6}} \times \pi = 2^{\frac{29}{6}}\pi$

12.2. $\overline{AC}$ = diâmetro da base do cilindro



$= 2 \times r =$

$= 2 \times 2\sqrt[6]{2} =$

$= 4\sqrt[6]{2}$

Seja *a* a aresta da base da pirâmide, em metros.

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$\left(4\sqrt[6]{2}\right)^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow 16\sqrt[6]{2^2} = 2a^2 \Leftrightarrow 8\sqrt[6]{2^2} = a^2 \Leftrightarrow 8\sqrt[3]{2} = a^2$

Como $a > 0$, $a = \sqrt{8\sqrt[3]{2}} = \left(2^3 \times 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{3}}$.

12.3. Volume da pirâmide = $\dfrac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3} =$

$= \dfrac{\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^2 \times \sqrt[3]{256}}{3} = \dfrac{2^{\frac{10}{3}} \times \sqrt[3]{2^8}}{3} = \dfrac{2^{\frac{10}{3}} \times 2^{\frac{8}{3}}}{3} = \dfrac{2^6}{3} = \dfrac{64}{3}$

Volume do cilindro = área da base × altura =

$= 4\pi\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{256} =$

$= 4\pi\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^8} =$

$= 4\pi \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{8}{3}} =$

$= 4\pi \times 2^3 =$

$= 32\pi$

Consideremos as seguintes proposições:

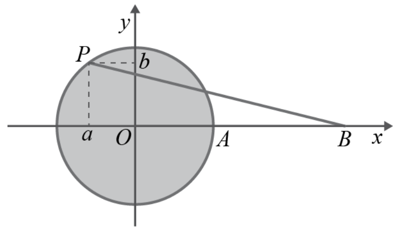
p: O volume da pirâmide é $\dfrac{64}{3}$ cm^3.

q: O volume do cilindro é 320π cm^3.

A proposição dada pode ser traduzida, simbolicamente, por $p \Rightarrow q$.

p é verdadeira, mas *q* é falsa, logo a proposição $p \Rightarrow q$ é falsa.

13.1. Sabemos que $P(a, b)$ e $B(3, 0)$.



Recorrendo à fórmula da distância entre dois pontos nos plano, tem-se:

$\overline{PB} = \sqrt{(a-3)^3 + (b-0)^2} \Leftrightarrow \overline{PB} = \sqrt{a^2 - 6a + 9 + b^2}$

$\Leftrightarrow \overline{PB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 6a + 9}$

Por outro lado, $P(a, b)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, pelo que $a^2 + b^2 = 1$.

Assim, substituindo em $\overline{PB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 6a + 9}$, vem $\overline{PB} = \sqrt{1 - 6a + 9} \Leftrightarrow \overline{PB} = \sqrt{10 - 6a}$.

13.2. A circunferência tem centro no ponto médio de [*PB*].

$\left(\dfrac{a+3}{2}, \dfrac{b+0}{2}\right) = \left(\dfrac{a+3}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$

O raio da circunferência é igual a $\dfrac{\overline{PB}}{2}$, ou seja , é igual a $\dfrac{\sqrt{10-6a}}{2}$

Uma equação da circunferência é:

$$\left(x-\frac{a+3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10-6a}}{2}\right)^2$$

$$x^2-2x\left(\frac{a+3}{2}\right)+\left(\frac{a+3}{2}\right)^2+y^2-2y\left(\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{10-6a}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x(a+3)+\frac{a^2+6a+9}{4}+y^2-yb+\frac{b^2}{4}=\frac{10-6a}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+3)x+y^2-by+\frac{a^2+6a+9+b^2-10+6a}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+3)x+y^2-by+\frac{(a^2+b^2)-1+12a}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+3)x+y^2-by+\frac{1-1+12a}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+3)x+y^2-by+3a=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-(a+3)x-by+3a=0$$

Pág. 246

14. **1.ª etapa**

(p	∨	q)	∧	(q	⇒	r)	∧	(~r)	⇒	p
(V	**V**	V)	V	(V	**V**	V)	**F**	F	**V**	**V**
(V	**V**	V)	F	(V	**F**	F)	**F**	V	**V**	**V**
(V	**V**	F)	V	(F	**V**	V)	**F**	F	**V**	**V**
(V	**V**	F)	V	(F	**V**	F)	**V**	V	**V**	**V**
(F	**V**	V)	V	(V	**V**	V)	**F**	F	**V**	**F**
(F	**V**	V)	F	(V	**F**	F)	**F**	V	**V**	**F**
(F	**F**	F)	F	(F	**V**	V)	**F**	F	**V**	**F**
(F	**F**	F)	F	(F	**V**	F)	**F**	V	**V**	**F**

A resposta do António é a correta.

2.ª etapa

$$\sim(p\Rightarrow q)\wedge\left[(\sim p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sim(\sim p\vee q)\wedge\left[(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge\sim q)\wedge\left[\sim p\wedge(q\vee\sim q)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge\sim q)\wedge(\sim p\wedge \mathrm{V})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge\sim q)\wedge(\sim p)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge\sim p)\wedge(\sim q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{F}\wedge\sim q\Leftrightarrow \mathrm{F}$$

A proposição que a Rita escreveu é falsa, independentemente do valor lógico de p, q e r.

3.ª etapa

Foi o António quem respondeu corretamente.

15.1. $$\frac{a^{3n+2}\times(8a)^{-n+4}}{\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}}=\frac{a^{3n+2}\times a^{-n+4}\times 8^{-n+4}}{a^{-n+1}}=$$

$$=\frac{a^{3n+2-n+4}\times 8^{-n+4}}{a^{-n+1}}=\frac{a^{2n+6}\times 8^{-n+4}}{a^{-n+1}}=$$

$$=a^{2n+6-(-n+1)}\times 8^{-n+4}=a^{3n+5}\times 8^{-n+4}=a^{3n+5}\times\frac{1}{8^{n-4}}=\frac{a^{3n+5}}{8^{n-4}}$$

15.2. Para $a = 2$ e $n = 1$:

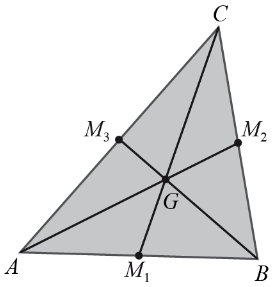
$$\frac{2^{3\times1+5}}{8^{1-4}}=\frac{2^8}{8^{-3}}=\frac{2^8}{\left(2^3\right)^{-3}}=\frac{2^8}{2^{-9}}=2^{8+9}=2^{17}=\left(2^2\right)^{\frac{17}{2}}=4^{\frac{17}{2}}$$

16.1. Temos que $\overrightarrow{AM_2}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=$

$$=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=$$

$$=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$



Por outro lado, A, G e M_2 são colineares pelo que existe um número real λ diferente de zero tal que:

$$\overrightarrow{AG}=\lambda\,\overrightarrow{AM_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\lambda\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

Analogamente, existe um número real α diferente de zero tal que:

$$\overrightarrow{BG}=\alpha\overrightarrow{BM_3}\Leftrightarrow\overrightarrow{BG}=\alpha\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM_3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{BG}=\alpha\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

Pela adição de vetores, temos que $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}$.
Ssubstituindo, vem:

$$\alpha\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}+\lambda\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\alpha\overrightarrow{AB}+\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}-\lambda\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\alpha\overrightarrow{AB}+\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(-\alpha+1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares, então:

$$\begin{cases}-\alpha+1-\dfrac{\lambda}{2}=0\\ \dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\lambda}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\lambda+1-\dfrac{\lambda}{2}=0\\ \alpha=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\lambda+2-\lambda=0\\ \alpha=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\lambda=2\\ \alpha=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{2}{3}\\ \alpha=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Portanto $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM_2}$ e $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM_3}$ pelo que G divide $[AM_2]$ e $[BM_3]$ na razão 2 para 1.

16.2. Para mostrar que C, G e M_1 são colineares, provemos que existe um número real β diferente de zero tal que:

$$\overrightarrow{CG}=\beta\overrightarrow{CM_1}$$

Inicialmente, vamos escrever $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{CM_1}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e de $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}=\underbrace{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)}_{\overrightarrow{AG}}-\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AM_1} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Temos assim a seguinte equação

$$\overrightarrow{CG} = \beta\overrightarrow{CM_1} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \beta\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \beta\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{\beta}{2}\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(-\frac{2}{3} + \beta\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{\beta}{2} = 0 \\ -\frac{2}{3} + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3}$$

Donde, $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_1}$, pelo que os pontos C, G e M_1 são colineares e que G divide $[CM_1]$ na razão 2 para 1.

17.1. $r: \ y = \sqrt{a}\,x + b$

$s: \ y = -2ax + b$

As retas r e s têm ordenada na origem igual a b, pelo que o ponto de interseção de r com s tem coordenadas $(0\ ,\ b)$, isto é, $B(0\ ,\ b)$.

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto A.

$A(x_A\ ,\ 0) \in r$ pelo que:

$$0 = \sqrt{a}\,x_A + b \Leftrightarrow x_A = -\frac{b}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow x_A = \frac{-b\sqrt{a}}{a}$$

Assim, $A\left(\frac{-b\sqrt{a}}{a}\ ,\ 0\right)$.

Determinemos as coordenadas do ponto C.

$C(x_C\ ,\ 0) \in s$, pelo que:

$$0 = -2\,ax_C + b \Leftrightarrow x_C = \frac{b}{2a}$$

Assim, $C\left(\frac{b}{2a}\ ,\ 0\right)$.

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{\overline{AC} \times \overline{OB}}{2}$, pelo que:

$$\frac{\left(\left|-\frac{b\sqrt{a}}{a}\right| + \frac{b}{2a}\right) \times b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b\sqrt{a}}{a} + \frac{b}{2a}\right) \times b = \frac{1}{2} \times \frac{2b\sqrt{a} + b}{2a} \times b$$

$$= \frac{1}{2} \times b \times \frac{2\sqrt{a} + 1}{2a} \times b = \frac{b^2\left(2\sqrt{a} + 1\right)}{4a}$$

17.2. O vetor $(2\ ,\ 3)$ é paralelo a um dos lados do triângulo $[ABC]$, pelo que terá de ser paralelo ao lado $[AB]$, uma vez que é aquele que está contido na reta de declive positivo, a reta r.

Como o vetor de coordenadas $(2\ ,\ 3)$ é paralelo a $\overrightarrow{AB}$, o declive da reta r é igual a $\frac{3}{2}$, ou seja, $\sqrt{a} = \frac{3}{2}$, pelo que $a = \frac{9}{4}$.

Por outro lado, sabemos que a área do triângulo $[ABC]$ é 36 e, por **17.1.**, tem-se que:

$$\frac{b^2\left(2\sqrt{a} + 1\right)}{4a} = 36$$

Substituindo na expressão a por $\frac{9}{4}$, tem-se que:

$$\frac{b^2\left(2\sqrt{\frac{9}{4}} + 1\right)}{4\left(\frac{9}{4}\right)} = 36 \Leftrightarrow \frac{b^2\left(2 \times \frac{3}{2} + 1\right)}{9} = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4b^2}{9} = 36 \Leftrightarrow b^2 = 36 \times \frac{9}{4} \Leftrightarrow b^2 = 81 \Leftrightarrow b = \pm 9$$

Como b é um número real positivo, então $b = 9$.

Assim, tem-se que:

$$A\left(-\frac{b\sqrt{a}}{a}\ ,\ 0\right)\ ;\ B(0\ ,\ b) \text{ e } C\left(\frac{b}{2a}\ ,\ 0\right)$$

Substituindo a por $\frac{9}{4}$, $\sqrt{a}$ por $\frac{3}{2}$ e $b = 9$:

- $A\left(-\frac{9 \times \frac{3}{2}}{\frac{9}{4}}\ ,\ 0\right) \Leftrightarrow A\left(-\frac{27}{2} \times \frac{4}{9}\ ,\ 0\right) \Leftrightarrow A(-6\ ,\ 0)$
- $B(0\ ,\ 9)$
- $C\left(\frac{9}{2 \times \frac{9}{4}}\ ,\ 0\right) \Leftrightarrow C\left(9 \times \frac{4}{18}\ ,\ 0\right) \Leftrightarrow C(2\ ,\ 0)$

Determinemos, agora, os comprimentos dos lados do triângulo $[ABC]$.

- $\overline{AB} = \sqrt{(-6-0)^2 + (0-9)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} =$
  $= \sqrt{9 \times 13} = 3\sqrt{13}$
- $\overline{BC} = \sqrt{(0-2)^2 + (9-0)^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$
- $\overline{AC} = |-6-2| = 8$

O perímetro do triângulo $[ABC]$ é $3\sqrt{13} + \sqrt{85} + 8$.

17.3. Tem-se que $a = 4$ e $b = 5$, pelo que:

a) $A\left(-\frac{5\sqrt{4}}{4}\ ,\ 0\right) \Leftrightarrow A\left(-\frac{5}{2}\ ,\ 0\right)$

$B(0\ ,\ 5)$

$C\left(\frac{5}{2 \times 4}\ ,\ 0\right) \Leftrightarrow C\left(\frac{5}{8}\ ,\ 0\right)$

$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{2}, 5\right)$

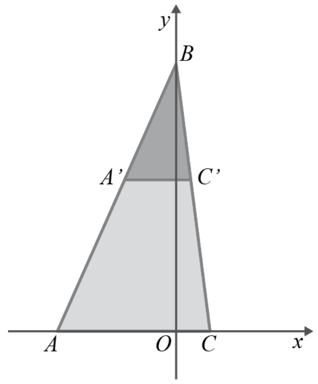
$\overrightarrow{CB} = \left(-\frac{5}{8}, 5\right)$

A área do trapézio $[ACC'A']$ é $\frac{8}{9}$ da área do triângulo $[ACB]$, pelo que a área do triângulo $[A'C'B]$ é $\frac{1}{9}$ da área do triângulo $[ACB]$.

Como os triângulos $[A'C'B]$ e $[ACB]$ são semelhantes, tem-se que:

$r^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$

sendo r a razão de semelhança que transforma o triângulo $[ACB]$ no triângulo $[A'C'B]$.



$\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}, 5\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$

$\overrightarrow{CC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{8}, 5\right) = \left(-\frac{5}{12}, \frac{10}{3}\right)$

$A' = A + \overrightarrow{AA'} = \left(-\frac{5}{2}, 0\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) =$

$= \left(-\frac{5}{2} + \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(-\frac{5}{6}, \frac{10}{3}\right)$

$C' = C + \overrightarrow{CC'} = \left(\frac{5}{8}, 0\right) + \left(-\frac{5}{12}, \frac{10}{3}\right) =$

$= \left(-\frac{5}{8} - \frac{5}{12}, \frac{10}{3}\right) = \left(-\frac{5}{24}, \frac{10}{3}\right)$

Logo, $A'\left(-\frac{5}{6}, \frac{10}{3}\right)$ e $C'\left(\frac{5}{24}, \frac{10}{3}\right)$.

b) Sabemos que $a = 4$ e $b = 5$.

$r:\ y = 2x + 5$; $s:\ y = -8x + 5$

$A'C':\ y = \frac{10}{3}$ e $AC:\ y = 0$

A condição pedida é:

$y \leq 2x + 5 \wedge y \leq -8x + 5 \wedge 0 \leq y \leq \frac{10}{3}$

18.1. A semirreta que é a bissetriz do primeiro quadrante pode ser definida pela condição $y = x \wedge x \geq 0$, pelo que:

$$A(1, 1) \text{ e } B(3, 3)$$

Sejam (x, y) as coordenadas de um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9$

$\Leftrightarrow -2x - 2y + 2 = -6x - 6y + 18$

$\Leftrightarrow -2y + 6y = -6x + 2x + 18 - 2$

$\Leftrightarrow 4y = -4x + 16 \Leftrightarrow y = -x + 4$

A equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é $y = -x + 4$. Pretende-se que o ponto P pertença à mediatriz do segmento de reta $[AB]$ e que a ordenada, y, seja, o dobro da abcissa, x, ou seja, $y = 2x$.

Substituindo na equação da mediatriz, tem-se:

$2x = -x + 4 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Assim, $P\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

18.2. O ponto A tem de coordenadas (1 , 1), pelo que o ponto A', simétrico do ponto A em relação à origem do referencial tem coordenadas (–1 , –1).

O ponto B tem coordenadas (3 , 3), pelo que o ponto B', simétrico do ponto B em relação ao eixo Oy, tem coordenadas (–3 , 3).

a) Tem-se que $A(1 , 1)$ e $B'(-3, 3)$.

O declive da reta AB' é igual a $\frac{3-1}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

$y = -\frac{1}{2}x + b$

$A \in AB'$ pelo que $1 = -\frac{1}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} = b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$.

A equação reduzida da reta AB' é $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

b) Substituindo as coordenadas do ponto Q na equação reduzida da reta AB', tem-se:

$k^2 = -\frac{1}{2}k + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2k^2 = -k + 3 \Leftrightarrow 2k^2 + k - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{-1+5}{4} \vee k = \frac{-1-5}{4} \Leftrightarrow k = 1 \vee k = -\frac{3}{2}$

c) Pretende-se classificar o triângulo $[AA'B']$ quanto ao comprimento dos seus lados.

$\overline{AA'} = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} \Leftrightarrow \overline{AA'} = \sqrt{4+4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AA'} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{AA'} = 2\sqrt{2}$

$\overline{AB'} = \sqrt{(1+3)^2 + (1-3)^2} \Leftrightarrow \overline{AB'} = \sqrt{16+4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB'} = \sqrt{20} \Leftrightarrow \overline{AB'} = 2\sqrt{5}$

$\overline{A'B'} = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-3)^2} \Leftrightarrow \overline{A'B'} = \sqrt{4+16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{A'B'} = \sqrt{20} \Leftrightarrow \overline{A'B'} = 2\sqrt{5}$

O triângulo $[AA'B']$ tem dois lados com o mesmo comprimento, logo é isósceles.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = h^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20 = h^2 + 2 \Leftrightarrow h^2 = 18$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$A = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 6$

A área do triângulo é 6 u. a.