Pág. 222

1.1. O ponto U tem coordenadas (6 , –6 , –6) e o ponto S pertence ao eixo Oz, pelo que as suas coordenadas são (0 , 0 , –6).
Um vetor diretor da reta US é, por exemplo, $\overrightarrow{US}$. Determinemos as suas coordenadas:
$\overrightarrow{US} = S - U = (0, 0, -6) - (6, -6, -6) = (-6, 6, 0)$

Assim, um sistema de equações paramétricas da reta US é:

$$\begin{cases} x = 6 - 6k \\ y = -6 + 6k \\ z = -6 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

1.2. As coordenadas dos pontos N e P são, respetivamente:
$N(0, -6, 0)$ e $P(6, 0, 0)$
Determinemos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{NP}$:
$\overrightarrow{NP} = P - N = (6, 0, 0) - (0, -6, 0) = (6, 6, 0)$

Assim, o segmento de reta [NP] pode ser definido, analiticamente, pela seguinte condição:
$(x, y, z) = (0, -6, 0) + k(6, 6, 0)$, $k \in [0, 1]$

1.3. As coordenadas dos pontos P e T são, respetivamente:
$P(6, 0, 0)$ e $T(6, 0, -6)$
Determinemos as coordenadas do ponto médio da aresta [PT]:

$$M\left(\frac{6+6}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0-6}{2}\right) \Leftrightarrow M(6, 0, -3)$$

O ponto R tem coordenadas (0 , –6 , –6) e

$$\overrightarrow{RM} = M - R = (6, 0, -3) - (0, -6, -6) = $$
$$= (6, 6, 3)$$

1.4. $\overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UT} = \overrightarrow{RT} \Leftrightarrow \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{UT} = \overrightarrow{RT} \Leftrightarrow -1\overrightarrow{TS} - 1\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{RT}$ (1)

Por outro lado, $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TM} = \overrightarrow{RM} \Leftrightarrow \overrightarrow{RT} + \frac{1}{2}\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RM}$ (2)

Assim, tendo em consideração (1) e (2), tem-se que:

$$\overrightarrow{RT} + \frac{1}{2}\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RM} \Leftrightarrow -1\overrightarrow{TS} - 1\overrightarrow{TU} + \frac{1}{2}\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RM} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{RM} = -1\overrightarrow{TS} - 1\overrightarrow{TU} + \frac{1}{2}\overrightarrow{TP}$$

Assim, $a = -1$, $b = -1$ e $c = \frac{1}{2}$.

1.5. $\overrightarrow{PV} = (-3, -3, 4)$
$P(6, 0, 0)$
$\overrightarrow{PV} = V - P \Leftrightarrow V = \overrightarrow{PV} + P$
$V = \overrightarrow{PV} + P = (-3, -3, 4) + (6, 0, 0) = (3, -3, 4)$
$V(3, -3, 4)$

Sendo $W(x, y, z)$ um ponto genérico do plano mediador do segmento de reta [VT], tem-se que:

$$d(W, V) = d(W, T) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 =$$
$$= (x-6)^2 + (y-0)^2 + (z+6)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 =$$
$$= x^2 - 12x + 36 + y^2 + z^2 + 12z + 36 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6x + 6y - 8z + 34 = -12x + 12z + 72 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6x + 12x + 6y - 8z - 12z + 34 - 72 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x + 6y - 20z - 38 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 10z - 19 = 0$$

O plano mediador do segmento de reta [VT] pode ser definido pela equação $3x + 3y - 10z - 19 = 0$.

2.1. O quadrilátero [$PQRU$] é um quadrado, pelo que os vetores $\overrightarrow{PU}$ e $\overrightarrow{QR}$ têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Assim:

$$R = Q + \overrightarrow{PU}$$
$$\overrightarrow{PU} = (0, 1, 2) - (3, 0, 2) = (-3, 1, 0)$$
$$R = Q + \overrightarrow{PU} = (4, 3, 2) + (-3, 1, 0) = (1, 4, 2)$$
$$R(1, 4, 2)$$

Seja M o centro do quadrado [$PQRU$].
M é, também, o ponto médio do segmento de reta [QU].
Então:

$$M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (2, 2, 2)$$
$$S = M + \frac{1}{2}\overrightarrow{TS} = (2, 2, 2) + \frac{1}{2}\left(0, 0, 2\sqrt{5}\right) =$$
$$= (2, 2, 2) + \left(0, 0, \sqrt{5}\right) = \left(2, 2, 2 + \sqrt{5}\right)$$
$$T = M - \frac{1}{2}\overrightarrow{TS} = (2, 2, 2) - \frac{1}{2}\left(0, 0, 2\sqrt{5}\right) =$$
$$= (2, 2, 2) - \left(0, 0, \sqrt{5}\right) = \left(2, 2, 2 - \sqrt{5}\right)$$

2.2. Pretende-se determinar as coordenadas de um vetor $\vec{u}$ tal que:
$\vec{u} = k\overrightarrow{PR}$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge \|\vec{u}\| = \sqrt{45}$
$\overrightarrow{PR} = R - P = (1, 4, 2) - (3, 0, 2) = (-2, 4, 0)$

Tem-se que:
$\vec{u} = k(-2, 4, 0)$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ou seja:
$\vec{u} = (-2k, 4k, 0)$ com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por outro lado, tem-se que $\|\vec{u}\| = \sqrt{45}$, donde:

$$\sqrt{(-2k)^2 + (4k)^2 + 0^2} = \sqrt{45}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(-2k)^2 + (4k)^2 = 45 \Leftrightarrow 4k^2 + 16k^2 = 45 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20k^2 = 45 \Leftrightarrow k^2 = \frac{45}{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2} \vee k = \frac{3}{2}$$

Substituindo em $\vec{u}(-2k, 4k, 0)$:

$$\vec{u}\left(-2 \times \left(-\frac{3}{2}\right), 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right), 0\right) \text{ ou } \vec{u}\left(-2 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}, 0\right)$$

$\vec{u}(3, -6, 0)$ ou $\vec{u}(-3, 6, 0)$

2.3. **a)** O ponto Q tem coordenadas (4 , 3 , 2) , pelo que o plano paralelo ao plano xOz que contém o ponto Q pode ser definido pela equação $y = 3$.

b) $Q(4, 3, 2)$ e $R(1, 4, 2)$
Seja W o ponto médio da aresta [QR].

$$W\left(\frac{4+1}{2}, \frac{3+4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 2\right)$$

Assim, o plano perpendicular ao eixo Ox que contém o ponto médio da aresta [QR] pode ser definida pela equação $x = \frac{5}{2}$.

c) $U(0,1,2)$ e $T(2,2,2-\sqrt{5})$

O raio da superfície esférica é igual a $\left\|\overrightarrow{UT}\right\|$.

Raio = $\left\|\overrightarrow{UT}\right\| = \left\|\overrightarrow{PU}\right\| = \sqrt{2^2+1^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{10}$

A superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T pode ser definida pela equação:

$x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=10$

2.4. Volume do octaedro [$PQRSTU$] =

= 2 × volume da pirâmide [$PQRUS$] =

$= 2\times\dfrac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3} =$

$2\times\dfrac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2\times\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{TS}\right\|}{3} = 2\times\dfrac{\sqrt{10}^2\times\sqrt{5}}{3} =$

$= 2\times\dfrac{10\sqrt{5}}{3} = \dfrac{20\sqrt{5}}{3}$ u. v.

$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{PU}\right\| = \sqrt{10}$ e $\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{TS}\right\| = \left\|\left(0,0,\sqrt{5}\right)\right\| = \sqrt{5}$

Pág. 223

3.1. Um vetor diretor da reta AB é, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (8,3,0)-(4,0,0)=(4,3,0)$

Assim, uma equação vetorial da reta AB é:

$(x,y,z)=(4,0,0)+k(4,3,0),\ k\in\mathbb{R}$

3.2. O conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto C é igual a $\sqrt[4]{8}$ é a superfície esférica de centro no ponto C e raio igual a $\sqrt[4]{8}$.

Determinemos as coordenadas do ponto C:

$B+\overrightarrow{BC}=C$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

$B+\overrightarrow{BC}=C \Leftrightarrow B+\overrightarrow{AD}=C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (8,3,0)+(D-A)=C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (8,3,0)+\left[(1,4,0)-(4,0,0)\right]=C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (8,3,0)+(-3,4,0)=C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5,7,0)=C$

A superfície esférica de centro no ponto C e raio igual a $\sqrt[4]{8}$ pode ser definida pela equação:

$(x-5)^2+(y-7)^2+z^2=\left(\sqrt[4]{8}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-7)^2+z^2=\left(\sqrt[4]{8^2}\right)$

$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-7)^2+z^2=\sqrt{8}$

3.3. O ponto médio de [BD] é $M\left(\dfrac{8+1}{2},\dfrac{3+4}{2},\dfrac{0+0}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2},0\right)$.

O ponto V tem abcissa e ordenada iguais às de M. Portanto, V tem coordenadas $\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2},6\right)$, pelo que o ponto simétrico do ponto V em relação ao plano yOz tem coordenadas $\left(-\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2},6\right)$, ou seja, $W\left(-\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2},6\right)$.

Determinemos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{VW}$.

$\overrightarrow{VW}=W-V=\left(-\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2},6\right)-\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2},6\right)=$

$=\left(-\dfrac{18}{2},0,0\right)=(-9,0,0)$

Assim, o segmento de reta [VW] pode ser definido analiticamente pela seguinte condição:

$(x,y,z)=\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2},6\right)+k(-9,0,0),\ k\in\mathbb{R}$

Também pode ser definido pela condição:

$y=\dfrac{7}{2}\wedge z=6\wedge -\dfrac{9}{2}\le x\le\dfrac{9}{2}$

3.4. Área total da pirâmide = Área lateral + Área da base =

$= 4\times \text{Área}_{[ABV]} + \text{Área}_{[ABCD]} =$

$= 4\times\dfrac{\overline{AB}\times\overline{NV}}{2}+\overline{AB}^2$

sendo N o ponto médio de [AB].

$A(4,0,0)$ e $B(8,3,0)$

$M\left(\dfrac{4+8}{2},\dfrac{0+3}{2},\dfrac{0+0}{2}\right)=M\left(6,\dfrac{3}{2},0\right)$

$d(N,V)\sqrt{\left(\left(6-\dfrac{9}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}\right)^2+(0-6)^2\right)}=$

$=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+(-2)^2+(-6)^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{9}{4}+4+36}=\sqrt{\dfrac{169}{4}}=\dfrac{13}{2}$

$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{4^2+3^2+0}=\sqrt{25}=5$

Área total da pirâmide = $4\times\dfrac{5\times\frac{13}{2}}{2}+5^2=$

$=2\times\dfrac{65}{2}+25=$

$=65+25=90$ u. a.

4.1. O ponto B pertence ao gráfico de f e ao eixo Ox, e a sua abcissa x é tal que $f(x)=0$. Assim:

$f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$

Logo, $B(3,0)$.

O ponto A tem abcissa x e pertence, também, ao gráfico de f, sendo as suas coordenada $A(x,f(x))$, isto é, $A\left(x,\sqrt{x-3}\right)$.

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto C.

Seja M o ponto médio do segmento de reta [BC]. As suas coordenadas são (x, 0) e $\overrightarrow{BM}(x-3,0)$.

$C=B+2\overrightarrow{BM}=(3,0)+2(x-3,0)=(3,0)+(2x-6,0)=$

$=(3+2x-6,0)=(2x-3,0)$

Assim, $C(2x-3,0)$.

$\overline{BC}=|x_C-x_B|=|2x-3-3|=|2x-6|=2x-6$

porque se $x>3$, então $2x-6>0$.

$$\text{Área } \triangle[ABC] = \frac{\overline{BC} \times \overline{MA}}{2} =$$

$$= \frac{|x_C - x_B| \times \text{ordenada de } A}{2} =$$

$$= \frac{(2x-6) \times \sqrt{x-3}}{2} =$$

$$= \frac{2(x-3) \times \sqrt{x-3}}{2} = (x-3) \times \sqrt{x-3}$$

Logo, $g(x) = (x-3)\sqrt{x-3}$ para cada x pertencente a $]3\ ,\ +\infty[$.

4.2. $g(x) = 8 \Leftrightarrow (x-3) \times \sqrt{x-3} = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-3)^2 (x-3) = 8^2 \Leftrightarrow (x-3)^3 = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7$$

O valor de x para o qual a área do triângulo [*ABC*] é igual a 8 é $x = 7$.

Pág. 224

5.1. O ponto *A* tem coordenadas (2 , 0) e um ponto qualquer do gráfico de *f* tem coordenadas $(x\ ,\ f(x))$, ou seja, $(x\ ,\ -x^2+3x)$. Então:

$$d(A\ ,\ P) = \sqrt{(x-2)^2 + (-x^2+3x-0)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x^4 - 6x^3 + 9x^2} =$$

$$= \sqrt{x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 4x + 4} \quad \text{(c.q.p.)}$$

5.2. A função *g* associa a cada *x* a distância entre o ponto *A* e o ponto do gráfico da função *f* de abcissa *x*, pelo que a equação que traduz o problema é $g(x) = 5$. Assim:

$$g(x) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 4x + 4} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 4x + 4 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 4x - 21 = 0$$

Os divisores inteiros de 21 são – 21, – 7, – 3, – 1, 1, 3, 7 e 21.

Substituindo *x* por – 1 em $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 4x - 21$, obtemos o valor numérico zero, logo $g(-1) = 5$.

Assim, –1 é o valor exato da abcissa de um dos pontos do gráfico de *f* que dista cinco unidades do ponto *A*.

Recorrendo à calculadora gráfica determina-se a abcissa do outro ponto de interseção do gráfico de *f* com a reta de equação $y = 5$.

Obtém-se $x \approx 4{,}1$ e $P(4{,}1\ ;\ 5)$ é o outro ponto do gráfico de *f*, que dista, aproximadamente, cinco unidades do ponto *A*.

5.3. A equação que traduz o problema é $f(x) = g(x)$ e:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 3x = \sqrt{x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 4x + 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-x^2 + 3x)^2 = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 9x^2 - x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Verificação: $f(2) = g(2) \Leftrightarrow 2 = 2$ (Verdadeiro)

Os gráficos de *f* e *g* intersetam-se no ponto *W* de coordenadas (2, 2).

A projeção ortogonal do ponto $W(2, 2)$ sobre o eixo *Ox* é o ponto *A*(2 , 0). Por isso, $d(A, W) = g(2)$.

6.1. A elipse tem centro na origem do referencial e a distância focal é igual a 6 unidades, pelo que $2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$. O comprimento do eixo menor é igual a 8 unidades, logo $2b = 8 \Leftrightarrow b = 4$. Como o eixo maior da elipse se situa sobre o eixo das abcissas, então $a^2 = b^2 + c^2$. Assim:

$$a^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

6.2. O ponto *P* pertence à elipse e tem abcissa *x*.

Determinemos a sua ordenada em função de *x*. Para tal, basta resolver a equação da elipse em ordem a *y*.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{25} \Leftrightarrow y^2 = 16\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$$

Como a ordenada do ponto *P* é positiva, pois *P* situa-se no primeiro quadrante, tem-se que:

$$y = \sqrt{16\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)} \Leftrightarrow y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \Leftrightarrow y = 4\sqrt{\frac{25 - x^2}{25}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4\sqrt{\frac{1}{25}(25 - x^2)} \Leftrightarrow y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$$

Área do retângulo [*MNPQ*] =

= (2 × abcissa de *P*) (2 × ordenada de *P*) =

= 4 × abcissa de *P* × ordenada de *P* =

$$= 4 \times x \times \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2} =$$

$$= \frac{16x}{5}\sqrt{25 - x^2}$$

$g(x) = \frac{16x}{5}\sqrt{25 - x^2}$, para cada *x* pertencente a]0 , 5[.

6.3. A equação que traduz o problema é $g(x) = 38{,}4$.

$$g(x) = 38{,}4 \Leftrightarrow \frac{16x}{5}\sqrt{25 - x^2} = 38{,}4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x\sqrt{25 - x^2} = 38{,}4 \times 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{25 - x^2} = \frac{38{,}4 \times 5}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{25 - x^2} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(25 - x^2) = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - x^4 = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2)^2 - 25x^2 + 144 = 0$$

Substituindo x^2 por *y*, tem-se que:

$$y^2 - 25y + 144 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4 \times 1 \times 144}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = \frac{25 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{25 + 7}{2} \vee y = \frac{25 - 7}{2} \Leftrightarrow y = 16 \vee y = 9$$

Voltando à variável *x*:

$$x^2 = 16 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4 \vee x = -3 \vee x = 3$$

Como $x \in]0\ ,\ 5[$, tem-se que $x = 4 \vee x = 3$.

Os valores de x para os quais a área do retângulo [*MNPQ*] é igual a 38,4 são $x = 3$ e $x = 4$.

Pág. 225

7.1. $y_i = x_i + a$ e $\overline{y} = \overline{x} + a$

$$SS_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \Leftrightarrow SS_y = \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i + a) - (\overline{x} + a)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SS_y = \sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \overline{x} - a)^2 \Leftrightarrow SS_y = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SS_y = SS_x$$

7.2. **a)** Tem-se que:

$$\underset{\sim}{x} = \left(\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{6}\right)$$

$$\underset{\sim}{y} = \left(\sqrt{2}x_1,\ \sqrt{2}x_2,\ \sqrt{2}x_3,\ \sqrt{2}x_4,\ \sqrt{2}x_5\right)$$

Assim:

$$\underset{\sim}{y} = \left(\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2},\ \sqrt{2}\times\sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}\times\sqrt[3]{4},\ \sqrt{2}\times\sqrt[3]{5},\ \sqrt{2}\times\sqrt[3]{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{\sim}{y} = \left(\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{2^2},\ \sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{3^2},\ \sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{4^2},\ \sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{5^2},\ \sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{6^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{\sim}{y} = \left(\sqrt[6]{2^5},\ \sqrt[6]{2^3\times 3^2},\ \sqrt[6]{2^3\times 4^2},\ \sqrt[6]{2^3\times 5^2},\ \sqrt[6]{2^3\times 6^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{\sim}{y} = \left(\sqrt[6]{32},\ \sqrt[6]{72},\ \sqrt[6]{2^3\times 2^4},\ \sqrt[6]{200},\ \sqrt[6]{288}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{\sim}{y} = \left(\sqrt[6]{32},\ \sqrt[6]{72},\ \sqrt[6]{2^6\times 2},\ \sqrt[6]{200},\ \sqrt[6]{288}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{\sim}{y} = \left(\sqrt[6]{32},\ \sqrt[6]{72},\ 2\sqrt[6]{2},\ \sqrt[6]{200},\ \sqrt[6]{288}\right)$$

b) $\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ e como $y_i = \sqrt{2}x_i$:

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2}\times x_i}{n} \Leftrightarrow \overline{y} = \frac{\sqrt{2}\times\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{y} = \sqrt{2}\times\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \Leftrightarrow \overline{y} = \sqrt{2}\times\overline{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \sqrt{2} \quad \text{(c.q.m.)}$$

8. Comecemos por escrever os dados da amostra de forma ordenada.

(2,250 ; 2,650 ; 2,750 ; 2,880 ; 2,900 ; 2,930 ; 2,950 ; 3,250 ; 3,400 ; 3,585 ; 3,600 ; 3,650 ; 3,720 ; 3,750 ; 3,820 ; 3,900 ; 3,950 ; 4,050 ; 4,150 ; 4,200)

8.1. Sabe-se que $x_{(13)} = 3{,}720$.

Vejamos se existe $P_k = x_{(13)}$. Para tal, é necessário que $\dfrac{20k}{100}$ seja um número não inteiro e que $\left[\dfrac{20k}{100}\right] + 1 = 13$, ou seja, que $12 < \dfrac{20k}{100} < 13$. Assim, vem que:

$$12 < \frac{20k}{100} < 13 \Leftrightarrow \frac{12\times 100}{20} < k < \frac{13\times 100}{20} \Leftrightarrow 60 < k < 65$$

O dado da amostra correspondente ao *peso* 3,720 kg pode pertencer a P_{61}, P_{62}, P_{63} ou P_{64}.

8.2. Determinemos o percentil 75.

$\dfrac{75\times 20}{100} = 15$ e 15 é um número inteiro, então:

$$P_{75} = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} \Leftrightarrow P_{75} = \frac{3{,}820 + 3{,}900}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{75} = 3{,}860$$

O percentil 75 é 3,860 kg, por isso há 15 bebés deste estudo com *peso* inferior ao percentil 75.

8.3. Determinemos o percentil 20.

$\dfrac{20\times 20}{100} = 4$ e 4 é um número inteiro, e:

$$P_{20} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} \Leftrightarrow P_{20} = \frac{2{,}880 + 2{,}900}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{20} = 2{,}890$$

O percentil 20 é 2,890 kg, logo o *peso* mais elevado é de 2,880 kg.

9.1. $F(1\ ,\ 3\ ,\ -4)$ e $\overrightarrow{FA}(2\ ,\ 3\ ,\ 6)$

$$A = F + \overrightarrow{FA} = (1\ ,\ 3\ ,\ -4) + (2\ ,\ 3\ ,\ 6) = (3\ ,\ 6\ ,\ 2)$$

Assim, a reta que passa no ponto A e é paralela ao eixo Ox pode ser definida pela seguinte condição:

$$(x, y, z) = (3\ ,\ 6\ ,\ 2) + k(1, 0, 0),\ k \in \mathbb{R}$$

ou

$$y = 6 \wedge z = 2$$

9.2. O ponto E tem abcissa – 5 e cota – 1, logo $E(-5\ ,\ y\ ,\ -1)$.

Como [*ABCDEFGH*] é um cubo, então $\left\|\overrightarrow{FA}\right\| = \left\|\overrightarrow{FE}\right\|$.

$$\overrightarrow{FA} = (2\ ,\ 3\ ,\ 6)$$

$$\overrightarrow{FE} = E - F = (-5,\ y,\ -1) - (1,\ 3,\ -4) =$$

$$= (-6,\ y - 3,\ 3)$$

$$\left\|\overrightarrow{FE}\right\| = \left\|\overrightarrow{FA}\right\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-6)^2 + (y-3)^2 + 3^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6^2 + (y-3)^2 + 3^2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-3)^2 = 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - 3 = 2 \vee y - 3 = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \vee y = 1$$

A ordenada do ponto E é 1 (terá de ser menor do que a ordenado do ponto A).

9.3.

a) Por exemplo:

$$AF:\ (x,\ y,\ z) = (1\ ,\ 3\ ,\ -4) + k(2\ ,\ 3\ ,\ 6),\ k \in \mathbb{R}$$

b) A superfície esférica de centro F à qual pertence o ponto G tem raio igual a $\left\|\overrightarrow{FG}\right\|$. O segmento de reta [*FG*] é uma aresta do cubo, pelo que:

$$\left\|\overrightarrow{FG}\right\| = \left\|\overrightarrow{FA}\right\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$$

Assim:

$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 49$ é uma condição cartesiana que define a superfície esférica referida.

Pág. 226

10.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-1=0 \wedge x\geq 0\right) \vee \left(-2x^3-2=0 \wedge x<0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\left(x=-1 \vee x=1\right) \wedge x\geq 0\right] \vee \left(x^3=-1 \wedge x<0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee \left(x=-1 \wedge x<0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$

Os zeros da função *f* são – 1 e 1.

10.2. $3^{\frac{1}{2}}>0$, logo $f\left(3^{\frac{1}{2}}\right)=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2-1=3-1=2$.

$-2^{\frac{1}{3}}<0$:

$f\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)=-2\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^3-2=-2\left(-1\times 2^{\frac{1}{3}}\right)^3-2=$

$=-2\times(-1)^3\times\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3-2=-2(-1)\times 2-2=2$

$f\left(3^{\frac{1}{2}}\right)-f\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)=2-2=0$

10.3. Sendo *a* um número real positivo, tem-se que:

$f(a)=a^2-1$

Por outro lado, − *a* é um número real negativo, pelo que:

$f(-a)=-2(-a)^3-2=-2(-1)^3a^3-2=$

$=-2\times(-1)a^3-2=2a^3-2$

Assim:

$f(a)-f(-a)=a^2-1-\left(2a^3-2\right)=a^2-1-2a^3+2=$

$=-2a^3+a^2+1$

11. $s_x=\sqrt{\dfrac{SS_x}{n-1}} \Leftrightarrow s_x=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$

$s_x=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{2}(x_i-\overline{x})^2}{2-1}} \Leftrightarrow s_x=\sqrt{\dfrac{(a-\overline{x})^2+(b-\overline{x})^2}{1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_x=\sqrt{(a-\overline{x})^2+(b-\overline{x})^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_x=\sqrt{a^2-2a\overline{x}+\overline{x}^2+b^2-2b\overline{x}+\overline{x}^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_x=\sqrt{a^2+b^2-2a\overline{x}-2b\overline{x}+2\overline{x}^2}$

Por outro lado, sabemos que $a^2+b^2=4$ e que $\overline{x}=\dfrac{a+b}{2}$.

Assim:

$s_x=\sqrt{4-2a\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-2b\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_x=\sqrt{4-\dfrac{2a^2}{2}-\dfrac{2ab}{2}-\dfrac{2ba}{2}-\dfrac{2b^2}{2}+2\left(\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_x=\sqrt{4-a^2-ab-ba-b^2+\dfrac{2a^2}{4}+\dfrac{4ab}{4}+\dfrac{2b^2}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_x=\sqrt{4-a^2-b^2+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}-2ab+ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_x=\sqrt{4-\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{b^2}{2}-ab} \Leftrightarrow s_x=\sqrt{4-\dfrac{a^2+b^2}{2}-ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_x=\sqrt{4-\dfrac{4}{2}-ab} \Leftrightarrow s_x=\sqrt{2-ab}$

12.1. Determinemos, inicialmente, o domínio da função *f* e o da função *g*.

• $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ 2x+1\geq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq -\dfrac{1}{2}\right\}$

$D_f=\left[-\dfrac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$

• $D_g=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 0\}$, logo $D_g=[0\ ,\ +\infty[$

Sabemos que $D_{f-g}=D_f\cap D_g$.

$D_{f-g}=\left[-\dfrac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[\cap[0\ ,\ +\infty[=[0\ ,\ +\infty[$

Vamos agora, determinar os zeros da função *h*:

$h(x)=0 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f-g)(x)=0 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x) \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=\sqrt{x}+1 \wedge x\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+1=\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1=x+2\sqrt{x}+1 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2\sqrt{x} \wedge x\geq 0 \Rightarrow x^2=4x \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x=0 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x-4=0) \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=4) \wedge x\geq 0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=4$

Verificação:

$x=0$: $\sqrt{2\times 0+1}=\sqrt{0}+1 \Leftrightarrow 1=1$ (Verdadeiro)

$x=4$: $\sqrt{2\times 4+1}=\sqrt{4}+1 \Leftrightarrow 3=3$ (Verdadeiro)

Os zeros da função *h* são 0 e 4.

12.2. $D_j=D_f\cap\{x\in D_g:\ g(x)\neq 0\}$

Por **12.1.** tem-se que $D_f\cap D_g=[0\ ,\ +\infty[$.

Vamos resolver a condição $g(x)\neq 0$.

$g(x)\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq -1$

$\sqrt{x}$ apenas tem significado em $\mathbb{R}$ quando $x\in\mathbb{R}_0^+$, pelo que $\forall x\in\mathbb{R}_0^+,\ \sqrt{x}\geq 0$, daí que a condição $\sqrt{x}\neq -1$ seja universal em $\mathbb{R}_0^+$.

Logo, $D_j=[0\ ,\ +\infty[$.

12.3. $\dfrac{f(13)}{g(3)}=\dfrac{\sqrt{2\times 13+1}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=$

$=\dfrac{3\left(\sqrt{3}\right)^2-3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{3-1}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$

13.1. $f(x)\leq 6 \wedge x>1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|x^2-5x\right|\leq 6 \wedge x>1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x\leq 6 \wedge x^2-5x\geq -6\right) \wedge x>1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x-6\leq 0 \wedge x^2-5x+6\geq 0\right) \wedge x>1$

Cálculos auxiliares:

$x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm 7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5+7}{2} \vee x=\dfrac{5-7}{2} \Leftrightarrow x=6 \vee x=-1$

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\times1\times6}}{2\times1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5+1}{2} \vee x=\frac{5-1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=3 \vee x=2$$
$$\left(x^2-5x-6\le0 \wedge x^2-5x+6\ge0\right)\wedge x>1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(-1\le x\le 6 \wedge \left(x\le 2 \vee x\ge 3\right)\right)\wedge x>1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(-1\le x\le 2 \vee 3\le x\le 6\right)\wedge x>1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1< x\le 2 \vee 3\le x\le 6$$

O conjunto-solução é $]1\ ,\ 2]\cup[3\ ,\ 6]$.

13.2. $(g\circ f)(2)=-10 \Leftrightarrow g\left(f(2)\right)=-10$

Como 2 > 1:

$$f(2)=\left|2^2-5\times2\right| \Leftrightarrow f(2)=\left|4-10\right| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(2)=\left|-6\right| \Leftrightarrow f(2)=6$$

Por conseguinte:

$$g\left(f(2)\right)=-10 \Leftrightarrow g(6)=-10 \Leftrightarrow k\times6+2=-10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6k=-10-2 \Leftrightarrow 6k=-12 \Leftrightarrow k=-2$$

13.3. $f(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(3x^3+4x^2-17x-6=0 \wedge x\le1\right)\vee\left(\left|x^2-5x\right|=0 \wedge x>1\right)$$

• Zeros de $3x^3+4x^2-17x-6$:

Os divisores inteiros do termo independente deste polinómio são −6, −3, −2, −1, 1, 2, 3 e 6.

Para $x = 2$, o polinómio $3x^3+4x^2-17x-6$ toma o valor numérico zero e 2 é uma das suas raízes.

Recorrendo à regra de Ruffini:

	3	4	−17	−6
2		6	20	6
	3	10	3	0

$$3x^3+4x^2-17x-6=(x-2)\left(3x^2+10x+3\right)$$

$$\left(3x^3+4x^2-17x-6=0 \wedge x\le1\right)\vee\left(\left|x^2-5x\right|=0 \wedge x>1\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left((x-2)\left(3x^2+10x+3\right)=0 \wedge x\le1\right)\vee$$
$$\vee\left(x^2-5x=0 \wedge x>1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(x=2 \vee 3x^2+10x+3=0\right)\wedge x\le1\right)\vee$$
$$\vee\left(x(x-5)=0 \wedge x>1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(x=2 \vee x=\frac{-10\pm\sqrt{100-4\times3\times3}}{2\times3}\right)\wedge x\le1\right)\vee$$
$$\vee\left(\left(x=0 \vee x-5=0\right)\wedge x>1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(x=2 \vee x=\frac{-10\pm8}{5}\right)\wedge x\le1\right)\vee$$
$$\vee\left(\left(x=0 \vee x=5\right)\wedge x>1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(x=2 \vee x=\frac{-10+8}{6} \vee x=\frac{-10-8}{6}\right)\wedge x\le1\right)\vee x=5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(x=2 \vee x=-\frac{1}{3} \vee x=-3\right)\wedge x\le1\right)\vee x=5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x=-\frac{1}{3} \vee x=-3\right)\vee x=5 \quad \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=-3 \vee x=5$$

Os zeros da função *f* são $-\frac{1}{3}$, − 3 e 5.

Pág. 227

14.1. O ponto *B* é o vértice do gráfico da função *f* e as suas coordenadas são (10 , 12).

Por outro lado, o ponto *A* tem abcissa zero, uma vez que pertence ao eixo das ordenadas. Assim, o domínio da função *h* é $D_h=[0\ ,\ 10[$, já que o ponto *D* se desloca sobre [*AB*], mas nunca coincide com o ponto *B*.

Vamos, agora, determinar a área do retângulo [*PQRS*] em função da abcissa *x* do ponto *P*.

Área do retângulo [*PQRS*] = $\overline{PQ}\times\overline{SP}$

A abcissa do ponto *S* é igual à abcissa do ponto *P*, ou seja, *x*.

Seja $h=\overline{PQ}$.

Com $0\le x<10$ e $10\le x+h<200$:

$$f(x)=f(x+h) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}(-x+10)+12=-\frac{3}{5}(x+h-10)+12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x+10=x+h-10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h=20-2x$$

Logo, $\overline{PQ}=20-2x$.

Por outro lado:

$$\overline{SP}=f(x)-g(x) \Leftrightarrow \overline{SP}=-\frac{3}{5}|x-10|+12-\frac{2}{5}|x-10|$$

Como $x < 10$, $|x-10|=-x+10$. Logo, $\overline{SP}=x+2$.

Assim, a área do retângulo [*PQRS*] é:

$(20-2x)(x+2)=20x+40-2x^2-4x=16x+40-2x^2$

$$h(x)=-2x^2+16x+40$$

14.2. A área do retângulo [*PQRS*] é dada por uma expressão que corresponde a uma função quadrática, pelo que o seu gráfico é parte de uma parábola, neste caso com a concavidade voltada para baixo.

$$h(x)=-2x^2+16x+40=-2\left(x^2-8x+16-16\right)+40=$$
$$=-2(x-4)^2+32+40=-2(x-4)^2+72$$

Logo, *V* (4 , 72).

Como a parábola tem a concavidade voltada para baixo, a abcissa do vértice é o maximizante da função *h* e a ordenada do vértice é o máximo da função *h*.

Para $x = 4$, tem-se que:

- $\overline{PQ}=20-2\times4 \Leftrightarrow \overline{PQ}=20-8 \Leftrightarrow \overline{PQ}=12$
- $\overline{SP}=4+2 \Leftrightarrow \overline{SP}=6$

As dimensões do retângulo que tem maior área são 12 por 6.

Pág. 228

15.1. O triângulo [*ABO*] é isósceles, logo $d(O\ ,\ A)=d(O\ ,\ B)$.

Seja *a* a abcissa do ponto *A* onde $a > 0$. Assim:

A (*a* , 0 , 0) e *B* (0 , *a* , 0).

O ponto *C* tem coordenadas (0 , 0 , 6).

Por outro lado, sabe-se que o volume do tetraedro [*ABCO*] é igual a 144, daí que:

Volume do tetraedro $[ABCO] = \dfrac{\text{Área da base} \times \text{altura}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 144 = \dfrac{\text{Área } \triangle[ABO] \times \text{cota do ponto } C}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 144 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\overline{AO} \times \overline{BO}}{2} \times 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 144 = \dfrac{1}{6} \times a \times a \times 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 144 = a^2$

$a = -12 \vee a = 12$

Como $a > 0$, $a = 12$, pelo que $A\ (12\ ,\ 0\ ,\ 0)$ e $B\ (0\ ,\ 12\ ,\ 0)$.

15.2. $A\ (12\ ,\ 0\ ,\ 0)$ e $C\ (0\ ,\ 0\ ,\ 6)$

$M\left(\dfrac{12+0}{2}\ ,\ \dfrac{0+0}{2}\ ,\ \dfrac{0+6}{2}\right) \Leftrightarrow M(6\ ,\ 0\ ,\ 3)$

Um vetor diretor da reta MB é, por exemplo, $\overrightarrow{MB}$.

$\overrightarrow{MB} = B - M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = (0\ ,\ 12\ ,\ 0) - (6\ ,\ 0\ ,\ 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = (-6\ ,\ 12\ ,\ -3)$

A reta MB pode ser definida pela equação:

$(x\ ,\ y\ ,\ z) = (6\ ,\ 0\ ,\ 3) + k(-6\ ,\ 12\ ,\ -3),\ k \in \mathbb{R}$

15.3 a) A esfera tem centro na origem do referencial e o seu raio é igual a $d\,(O\ ,\ P)$.

Determinemos a ordenada e a cota do ponto P, já que sabemos que a sua abcissa é igual a 2.

O ponto P pertence à reta OP, pelo que substituindo x por 2 nas equações paramétricas tem-se:

$\begin{cases} 2 = k \\ y = k \\ z = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$, logo $P\ (2\ ,\ 2\ ,\ 4)$.

Raio da esfera:

$d\,(O\ ,\ P) = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (4-0)^2} =$

$= \sqrt{4+4+16} =$

$= \sqrt{24} =$

$= 2\sqrt{6}$

A inequação reduzida da esfera é $x^2 + y^2 + z^2 \leq 24$.

b) Volume da esfera $= \dfrac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{6}\right)^3 =$

$= \dfrac{4}{3}\pi \times 2^3 \times \left(\sqrt{6}\right)^3 =$

$= \dfrac{4}{3}\pi \times 8 \times 6\sqrt{6} =$

$= 64\pi\sqrt{6}$

c) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 24 \wedge x = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + y^2 + z^2 \leq 24 \wedge x = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 + z^2 \leq 24 - a^2 \wedge x = a$

Se o raio do círculo é $2\sqrt{2}$, ou seja, $r = 2\sqrt{2}$, tem-se que $r^2 = 8$ e $24 - a^2 = 8$.

Logo:

$24 - a^2 = 8 \Leftrightarrow 24 - 8 = a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 = a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = -4 \vee a = 4$

Os valores de a pedidos são – 4 e 4.

16.1. Restaurante O FOMINHAS

Seja a amostra $\underset{\sim}{x} = (25,\ 30,\ 52,\ 64,\ 65,\ 70,\ 82)$.

Tem-se $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, ou seja:

$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} \Leftrightarrow \overline{x} = \dfrac{25+30+52+64+65+70+82}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{x} \approx 55$

Restaurante O GOSTOSO

Seja a amostra $\underset{\sim}{y} = (18,\ 20,\ 45,\ 62,\ 72,\ 74,\ 82)$.

Tem-se $y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$, ou seja:

$\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{7} \Leftrightarrow \overline{y} = \dfrac{18+20+45+62+72+74+82}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \approx 53$

A média do número de refeições servidas por dia, nessa semana, é de, aproximadamente, 55 no restaurante O FOMINHAS e de, aproximadamente, 53 no restaurante O GOSTOSO.

16.2. $s_x = \sqrt{\dfrac{SS_x}{n-1}}$

$SS_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$

$SS_x = \left(25 - \dfrac{388}{7}\right)^2 + \left(30 - \dfrac{388}{7}\right)^2 + \left(52 - \dfrac{388}{7}\right)^2 +$

$+ \left(64 - \dfrac{388}{7}\right)^2 + \left(65 - \dfrac{388}{7}\right)^2 +$

$+ \left(70 - \dfrac{388}{7}\right)^2 + \left(82 - \dfrac{388}{7}\right)^2$

$s_x = \sqrt{\dfrac{SS_x}{7-1}} \Leftrightarrow s_x = \sqrt{\dfrac{SS_x}{6}} \Leftrightarrow s_x \approx 21{,}1$

$s_y = \sqrt{\dfrac{SS_y}{n-1}}$

$SS_y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$, daí que:

$SS_y = \left(18 - \dfrac{373}{7}\right)^2 + \left(20 - \dfrac{373}{7}\right)^2 + \left(45 - \dfrac{373}{7}\right)^2 +$

$+ \left(62 - \dfrac{373}{7}\right)^2 + \left(72 - \dfrac{373}{7}\right)^2 +$

$+ \left(74 - \dfrac{373}{7}\right)^2 + \left(82 - \dfrac{373}{7}\right)^2$

$s_y = \sqrt{\dfrac{SS_y}{7-1}} \Leftrightarrow s_y = \sqrt{\dfrac{SS_y}{6}} \Leftrightarrow s_y \approx 26{,}1$

No restaurante O GOSTOSO, a dispersão do número de refeições servidas, por dia, nessa semana, relativamente ao número médio de refeições semanais por dia, nesse mesmo período, é maior do que a mesma dispersão relativamente ao restaurante O FOMINHAS. O número de refeições servidas neste último restaurante, por dia, é mais regular do que no restaurante O GOSTOSO.

17.1. Equação da reta AB: $y = mx + b$

$A(0, 2)$ e $B(4, 0)$

$m = \frac{0-4}{8-0} = -\frac{1}{2}$ e $b = 2$

$y = -\frac{1}{2}x + 2 \wedge 0 < x < 4$

$P\left(x,\ -\frac{1}{2}x + 2\right) \wedge 0 < x < 4$

$Q\left(\frac{1}{2}x,\ 0\right) \wedge 0 < x < 4$

$$\text{Área}_{[OQP]} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \text{ordenada de } P =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x \times \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = \frac{1}{4}x\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Logo, $A(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x$.

17.2. $A(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x =$

$$= -\frac{1}{8}\left(x^2 - 4x\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$$

$V\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$

Como a concavidade do gráfico é voltada para baixo, a área do triângulo $[OQP]$ é máxima para $x = 2$.