

Ficha para praticar 1

Págs. 4 e 5

1.1. $0,2^2 = 0,04$, pelo que $0,2^2 < 0,4$.A proposição p é verdadeira. $(-4,2)^2 = 17,64$, pelo que $(-4,2)^2 \geq 0$.A proposição q é verdadeira. $\sqrt{38} \approx 6,2$, pelo que $\sqrt{38} > 6$.A proposição s é falsa. $(-2)^{31}$ é um número negativo (qualquer potência em que a base é um número negativo e o expoente é um número ímpar, corresponde a um número negativo). Então, $(-2)^{31} < 0$.A proposição r é falsa.1.2. a) $p \Leftrightarrow q$ e $s \Leftrightarrow r$ b) $p \Leftrightarrow s$; $p \Leftrightarrow r$; $q \Leftrightarrow s$ e $q \Leftrightarrow r$ 2. $\sim a$: Há triângulos isósceles que não são triângulos equiláteros. $\sim b$: Nem todos os retângulos são quadrados. $\sim c$: Há mais que um número par que é primo. $\sim d$: Existe pelo menos um número real cujo quadrado não é um número real positivo.

Um triângulo isósceles tem, pelo menos, dois lados com o mesmo comprimento, pelo que pode não ser equilátero.

Então, a é uma proposição falsa e $\sim a$ é uma proposição verdadeira.Um retângulo apenas é um quadrado se tiver todos os lados com o mesmo comprimento, pelo que b é uma proposição falsa e $\sim b$ é uma proposição verdadeira.O único número par que é primo é o 2. A proposição c é uma proposição verdadeira e a proposição $\sim c$ é falsa.O quadrado de qualquer número real é um número real não negativo (repare que $0^2 = 0$ não é um número real positivo).A proposição d é falsa e a proposição $\sim d$ é verdadeira.3.1. $\sim s$. Proposição verdadeira, pois 12 não é divisor de 4.3.2. $\sim(\sim p) = p$

Proposição verdadeira, pois 11 é um número primo.

3.3. $p \wedge r$ Proposição verdadeira, pois p e q são duas proposições verdadeiras e $V \wedge V \Leftrightarrow V$ 3.4. $q \vee \sim p$ Proposição falsa, pois q e $\sim p$ são duas proposições falsas e $F \vee F \Leftrightarrow F$.3.5. $\sim s \vee \sim r$ Proposição verdadeira, pois $\sim s$ é uma proposição verdadeira e $\sim r$ é uma proposição falsa e $V \vee F \Leftrightarrow V$.3.6. $\sim(\sim r) \vee \sim s \Leftrightarrow r \vee \sim s$

Proposição verdadeira

4.1. 18 não é um múltiplo de 8.

18 é um número múltiplo de 9.

A proposição é verdadeira, pois $F \vee V \Leftrightarrow V$.

4.2. 13 é um número primo.

A proposição é falsa.

4.3. $\sqrt{2} \approx 1,41421$, pelo que $\sqrt{2} < 1,415$ e $\sqrt{2} > 1,414$.A proposição é verdadeira, pois $V \wedge V \Leftrightarrow V$.4.4. 49 é um número quadrado perfeito ($\sqrt{49} = 7$).

49 é um número ímpar.

A proposição é falsa, pois $V \wedge F \Leftrightarrow F$.4.5. 121 não é um cubo perfeito ($\sqrt[3]{121}$ não é um número inteiro).
64 é um cubo perfeito ($\sqrt[3]{64} = 4$).A proposição é verdadeira, pois $F \vee V \Leftrightarrow V$.4.6. 7 é divisor de 343 ($343 : 7 = 49$)512 é múltiplo de 8 ($8 \times 64 = 512$)A proposição é verdadeira, pois $V \wedge V \Leftrightarrow V$.

5.1.

Proposição	Valor lógico	Justificação
a	Verdadeira	$\sqrt{3}$ é um número irracional.
b	Verdadeira	$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0,8$ e $0,8 > 0,7$
c	Falsa	$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -0,125$ e $-0,125 > -1$
d	Falsa	$\pi > 3,14$

5.2. a) $\sim a$: $\sqrt{3}$ é um número racional

A proposição é falsa.

b) $a \wedge \sim b$: $\sqrt{3}$ é um número irracional e $\sqrt{\frac{16}{25}} \leq 0,7$.

a	b	$\sim b$	$a \wedge \sim b$
V	V	F	F

A proposição é falsa.

c) $\sim b \vee d$: $\sqrt{\frac{16}{25}} \leq 0,7$ ou $\pi + 1 < 3,14 + 1$

b	$\sim b$	d	$\sim b \vee d$
V	F	F	F

A proposição é falsa.

d) $c \vee \sim d : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \leq -1$ ou $\pi + 1 \geq 3,14 + 1$

c	d	$\sim d$	$c \vee \sim d$
F	F	V	V

A proposição é verdadeira.

e) $\sim a \wedge \sim c : \sqrt{3}$ é um número racional e $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 > -1$.

a	c	$\sim a$	$\sim c$	$\sim a \wedge \sim c$
V	F	F	V	F

A proposição é falsa.

f) $b \vee \sim c : \sqrt{\frac{16}{25}} > 0,7$ ou $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 > -1$.

b	c	$\sim c$	$b \vee \sim c$
V	F	V	V

A proposição é verdadeira.

6.1. A proposição é falsa.

p	q	$p \wedge q$
F	V	F

6.2. A proposição é verdadeira.

p	q	$p \vee q$
F	V	V

6.3. A proposição é verdadeira.

$\sim p$	q	$\sim p \wedge q$
V	V	V

6.4. A proposição é verdadeira.

$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	F	V

6.5. A proposição é falsa.

$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\sim q$	$\sim(\sim p) \wedge \sim q$
V	F	F	F

6.6. A proposição é verdadeira.

$\sim(\sim q)$	$\sim p$	$\sim(\sim q) \vee \sim p$
V	F	V

1.4. Vasco da Gama descobriu o Brasil se e somente se Dante escreveu *Os Lusíadas*.

1.5. Dante escreveu *Os Lusíadas* se e somente se um ano civil não tem 12 meses.

1.6. Se Dante não escreveu *Os Lusíadas* então um ano civil não tem 12 meses.

2.1. $a > 0 \Rightarrow b = 3$

2.2. $a + b = 1 \Rightarrow c \leq 0$

2.3. $(a = 3 \vee a = 1) \Rightarrow b > 0$

2.4. $a < 3 \Rightarrow (b \neq 1 \wedge c \neq 0)$

2.5. $a = 10 \wedge (b < c \Rightarrow b < 2)$

2.6. $a \neq 1 \vee (b = 1 \Rightarrow c > 10)$

2.7. $(a < 5 \wedge a > 3) \Rightarrow a = 4$

2.8. $(a = 1 \vee a \neq 3) \wedge (b = 1 \Rightarrow (a = 4 \vee a = 10))$

2.9. $(a = -3 \wedge a = 3) \Leftrightarrow a^2 = 9$

2.10. $(a = -1 \vee a = 1) \Leftrightarrow a^2 = 1$

2.11. $b^2 < -1 \Rightarrow b > 1$

2.12. $b \geq 0 \Rightarrow b^3 \geq -1$

3.1.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	F	V	V

A proposição é verdadeira.

3.2.

p	$\sim p$	q	$\sim p \vee q$
V	F	F	F

A proposição é falsa.

3.3.

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$
V	F	V	V

A proposição é verdadeira.

3.4.

p	$\sim p$	q	$\sim p \Rightarrow q$
V	F	F	V

A proposição é verdadeira.

3.5.

q	$\sim q$	$q \Leftrightarrow \sim q$
F	V	F

A proposição é falsa.

3.6.

p	$\sim p$	q	$\sim p \Leftrightarrow q$
V	F	F	V

A proposição é verdadeira.

Ficha para praticar 2

Págs. 6 e 7

1.1. O mês de maio não tem 31 dias e Dante escreveu *Os Lusíadas*.

1.2. O mês de maio tem 31 dias ou Dante escreveu *Os Lusíadas*.

1.3. Se o mês de maio tem 31, dias então Dante escreveu *Os Lusíadas*.

4.1. $a: 4^2 = 8$ (falsa, pois $4^2 = 16$)

$b: 4 + 4 = 8$ (verdadeira)

a	b	$a \vee b$
F	V	V

A proposição é verdadeira.

4.2. $c: 0 > 1$ (falsa, pois $0 < 1$)

$d: \sqrt{2}$ é um número irracional (verdadeira)

c	d	$c \wedge d$
F	V	F

A proposição é falsa.

4.3. $e: \pi + \pi = \pi^2$ (falsa, pois $\pi + \pi = 2\pi$)

$f: \pi \times \pi = \pi^2$ (verdadeira)

e	f	$e \Rightarrow f$
F	V	V

A proposição é verdadeira.

4.4. $g: \sqrt{3} > \sqrt{2}$ (verdadeira)

$h: -\sqrt{3} < -\sqrt{2}$ (verdadeira)

g	h	$e \Rightarrow f$
V	V	V

A proposição é verdadeira.

4.5. $i: \pi \leq 4$ (verdadeira)

$j: 3^0 > \sqrt{5}$ (falsa, pois $3^0 = 1$ e $1 < \sqrt{5}$)

i	j	$i \Rightarrow j$
V	F	F

A proposição é falsa.

4.6. $l: 10 - 2 = 8$ (verdadeira)

$m: 3^3 = 9$ (falsa, pois $3^3 = 27$)

l	m	$l \Leftrightarrow m$
V	F	F

A proposição é falsa.

4.7. $n: 3^2 + 4^2 = 5^2$ (verdadeira)

$o: 3 + 4 \neq 5$ (verdadeira)

n	o	$n \Leftrightarrow o$
V	V	V

A proposição é verdadeira.

4.8. $p: \text{Lisboa é capital de Portugal}$ (verdadeira)

$q: \text{Paris é a capital de Espanha}$ (falsa)

p	q	$p \vee q$
V	F	V

A proposição é verdadeira.

4.9. $r: \text{A neve é branca}$ (verdadeira)

$s: \text{Pitágoras era chinês}$ (falsa, Pitágoras era grego)

r	s	$r \Rightarrow s$
V	F	F

A proposição é falsa.

4.10. $t: \text{Camões escreveu } A \text{ Odisseia}$ (falsa, Homero escreveu *A Odisseia*)

$u: \text{Madrid é a capital de Itália}$ (falsa, Madrid é a capital de Espanha)

t	u	$t \Leftrightarrow u$
F	F	V

A proposição é verdadeira.

5.1.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A proposição p é falsa.

5.2.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A proposição p é falsa.

5.3.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A proposição p é verdadeira.

5.4.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A proposição p é falsa.

5.5.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A proposição p é falsa.

5.6.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A proposição p é falsa.

6. Como $p \Leftrightarrow q$ é falsa, temos as duas situações que se seguem para o valor lógico de p e de q .

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	F	F
F	V	F

Por outro lado, sabemos, ainda, que $\sim p \vee q$ é verdadeira, daí que

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	F	F	F
F	V	V	V

Observando as duas tabelas, conclui-se, que p é falsa e q é verdadeira.

7. p a menos que q pode ser traduzida, simbolicamente, por $\sim q \Rightarrow p$.

Por outro lado, tem-se que:

p é uma proposição verdadeira, pois $4^2 = 16$ e $16 > 8$.

q é uma proposição falsa, pois $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

Assim:

p	q	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow p$
V	F	V	V

A proposição $\sim q \Rightarrow p$ é verdadeira.

Ficha para praticar 3

Págs. 8 e 9

- 1.1. $a: 3^2 = 6$ (falsa, pois $3^2 = 9$)

$b: 3 \times 3 = 9$ (verdadeira)

A proposição pode ser traduzida por $\sim(a \Rightarrow b)$.

Assim, temos:

a	b	$a \Rightarrow b$	$\sim(a \Rightarrow b)$
F	V	V	F

A proposição é falsa.

- 1.2. $c: \sqrt{1} = 1$ (verdadeira)

$d: 1^2 = 2$ (falsa, pois $1^2 = 1$)

A proposição pode ser traduzida por $\sim(c \Leftrightarrow d)$.

Assim, temos:

c	d	$c \Leftrightarrow d$	$\sim(c \Leftrightarrow d)$
V	F	F	V

A proposição é verdadeira

- 1.3. $e: 4^3 \neq 12$ (verdadeira)

$f: 5 \times 0 = 5$ (falsa, pois $5 \times 0 = 0$)

$g: 3^0 = 3$ (falsa, pois $3^0 = 1$)

A proposição pode ser traduzida por $e \Rightarrow (f \wedge g)$.

e	f	g	$f \wedge g$	$e \Rightarrow (f \wedge g)$
V	F	F	F	F

A proposição é falsa.

- 1.4. $h: 2^3 \neq 8$ (falsa, $2^3 = 8$)

$i: 2 + 2 = 4$ (verdadeira)

$j: 2^2 = 4$ (verdadeira)

A proposição pode ser traduzida por $h \Leftrightarrow (i \wedge j)$

h	i	j	$i \wedge j$	$h \Leftrightarrow (i \wedge j)$
F	V	V	V	F

A proposição é falsa.

2.1.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

2.2.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$q \Leftrightarrow p$	$\sim(q \Leftrightarrow p)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \Leftrightarrow p)$
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V

2.3.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$q \wedge \sim r$	$p \vee \sim r \Rightarrow q \wedge \sim r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

2.4.

p	q	r	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \vee r$	$(\sim q \vee r) \wedge p$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\sim q \vee r) \wedge p$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F
V	F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	F

3.1.

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee r$
V	V	V	V	V	V

Proposição verdadeira

3.2.

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$q \wedge \sim r$	$\sim p \vee (q \wedge \sim r)$
V	F	V	F	F	F	F

Proposição falsa

3.3.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$	$\sim p \vee r$	$\sim(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$
V	F	V	F	V	V	F	V	F

Proposição falsa

3.4.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$\sim(p \vee \sim r)$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \sim r)$
V	F	V	F	V	F	V	F	F

Proposição falsa

3.5.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee q$	$p \vee q \Rightarrow r$	$q \vee \sim r$	$(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \vee \sim r)$
V	F	V	F	V	V	F	F

Proposição falsa

3.6.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$q \Rightarrow \sim r$	$\sim p \vee r$	$\sim p \vee r \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim r)$	$(p \vee (q \Rightarrow \sim r)) \wedge (\sim p \vee r \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim r))$
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V

Proposição verdadeira

4.1. Como $p \Rightarrow q$ é uma proposição verdadeira, então p e q apenas podem tomar simultaneamente os seguintes valores lógicos.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
F	V	V
F	F	V

Assim, temos:

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee r$	$p \vee r \Rightarrow q \vee r$
V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V

A proposição é verdadeira.

4.2.

p	q	r	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$
V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V

A proposição é verdadeira.

5.1. Os dias da semana são 2.^a-feira, 3.^a-feira, 4.^a-feira, 5.^a-feira, 6.^a-feira, sábado e domingo.

O Minóquio mente à 5.^a-feira, 6.^a-feira e sábado.

Vejam os valores lógicos nos dias da semana

2.^a-feira, $F \Rightarrow F$ (verdade) – possível
 3.^a-feira, $F \Rightarrow F$ (verdade) – possível
 4.^a-feira, $F \Rightarrow V$ (verdade) – possível
 5.^a-feira, $F \Rightarrow V$ (verdade) – impossível
 6.^a-feira, $V \Rightarrow V$ (verdade) – impossível
 sábado, $V \Rightarrow F$ (falso) – possível
 domingo, $V \Rightarrow F$ (falso) – impossível

Logo, o Minóquio não pode ter feito a afirmação na 5.^a-feira, na 6.^a-feira e no domingo.

5.2. 2.^a-feira, $F \Leftrightarrow F$ (verdade) – possível
 3.^a-feira, $F \Leftrightarrow F$ (verdade) – possível
 4.^a-feira, $F \Leftrightarrow V$ (falso) – impossível
 5.^a-feira, $F \Leftrightarrow V$ (falso) – possível
 6.^a-feira, $V \Leftrightarrow V$ (verdade) – impossível
 sábado, $V \Leftrightarrow F$ (falso) – possível
 domingo, $V \Leftrightarrow F$ (falso) – impossível

Logo, o Minóquio não pode ter feito a afirmação na 4.^a-feira, na 6.^a-feira e no domingo.

6. $\sim[\sim p \wedge (p \vee \sim q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sim[(\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sim[F \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee \sim q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow p \vee (q \vee \sim q) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow p \vee V \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow V$

A proposição é verdadeira.

7.1.

a	b	c	$\neg a$	$\neg c$	$b \wedge \neg c$	$\neg a \vee c$	$a \Rightarrow (b \wedge \neg c)$	$b \Rightarrow (\neg a \vee c)$	$[a \Rightarrow (b \wedge \neg c)] \Leftrightarrow [b \Rightarrow (\neg a \vee c)]$
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F
V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V

Não é possível indicar o valor lógico da proposição, uma vez que na última coluna aparecem verdadeiros e falsos e não apenas só verdadeiros ou só falsos.

7.2. A proposição dada e a proposição $\sim a$ são equivalentes (por tabela construída em 7.1., verifica-se que a coluna correspondente à proposição $\sim a$ e a coluna correspondente à proposição dada são iguais).

8.1. A contrarrecíproca de $p \Rightarrow q$ é $\sim q \Rightarrow \sim p$.
A contrarrecíproca da contrarrecíproca de $p \Rightarrow q$ é a contrarrecíproca de $\sim q \Rightarrow \sim p$, ou seja, é $\sim(\sim p) \Rightarrow \sim(\sim q)$ que é equivalente a $p \Rightarrow q$.

8.2. A recíproca de $p \Rightarrow q$ é $q \Rightarrow p$.
A contrarrecíproca da recíproca de $p \Rightarrow q$ é a contrarrecíproca de $q \Rightarrow p$, ou seja, é $\sim p \Rightarrow \sim q$.

8.3. A inversa de $p \Rightarrow q$ é $\sim p \Rightarrow \sim q$.
A contrarrecíproca da inversa de $p \Rightarrow q$ é a contrarrecíproca de $\sim p \Rightarrow \sim q$, ou seja, é $\sim(\sim q) \Rightarrow \sim(\sim p)$ que é equivalente a $q \Rightarrow p$.

8.4. A contrarrecíproca de $p \Rightarrow \sim q$ é $\sim(\sim q) \Rightarrow \sim p$, ou seja, é $q \Rightarrow \sim p$.

8.5. A contrarrecíproca de $\sim p \Rightarrow q$ é $\sim q \Rightarrow \sim(\sim p)$, ou seja, é $\sim q \Rightarrow p$.

8.6. A contrarrecíproca de $p \Rightarrow q$ é $\sim q \Rightarrow \sim p$.
A recíproca da contrarrecíproca de $p \Rightarrow q$ é a recíproca de $\sim q \Rightarrow \sim p$, ou seja, é $\sim p \Rightarrow \sim q$.

8.7. A contrarrecíproca de $\sim p \Rightarrow \sim q$ é $\sim(\sim q) \Rightarrow \sim(\sim p)$, ou seja, é $q \Rightarrow p$.
A contrária da contrarrecíproca de $\sim p \Rightarrow \sim q$ é a contrária $q \Rightarrow p$, ou seja, é $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Ficha de teste 1

Págs. 10 e 11

1. (A) a_1 : A Lua não é um satélite da Terra (falsa) a_2 : A Terra não é um planeta (falsa)A proposição dada pode ser traduzida, simbolicamente, por $a_1 \Rightarrow a_2$.

a_1	a_2	$a_1 \Rightarrow a_2$
F	F	V

A proposição é verdadeira.

(B) b_1 : O número π é um número racional (falsa) b_2 : -2 é um número natural (falsa)A proposição dada pode ser traduzida, simbolicamente, por $b_1 \Leftrightarrow b_2$.

Então, temos:

b_1	b_2	$b_1 \Leftrightarrow b_2$
F	F	V

A proposição é verdadeira.

(C) c_1 : o cubo não é um poliedro regular (falsa) c_2 : os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares (verdadeira)A proposição dada pode ser traduzida, simbolicamente, por $c_1 \vee c_2$.

Então, temos:

c_1	c_2	$c_1 \vee c_2$
F	V	V

A proposição é verdadeira.

(D) d_1 : O quadrado de qualquer número real é um número positivo (falsa) d_2 : *A Portuguesa* é o hino de Portugal (verdadeira)A proposição dada pode ser traduzida, simbolicamente, por $d_1 \wedge d_2$.

Então, temos:

d_1	d_2	$d_1 \wedge d_2$
F	V	F

A proposição é falsa.

Resposta: (D)

2. (A) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (verdadeira)

Uma implicação e a sua contrarrecíproca têm o mesmo valor lógico.

(B) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ Como $\sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$, a equivalência é verdadeira (relação da implicação com a disjunção).

(C)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Da observação da tabela verifica-se que as proposições $p \Rightarrow q$ e $\sim p \Rightarrow \sim q$ **não** são equivalentes.

(D)

$$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim q \vee p) \Leftrightarrow p \vee \sim q$$

Resposta: (C)

3. Consideremos as proposições seguintes:

s : Amanhã vai estar sol

p : Vou à praia

A proposição dada pode ser traduzida simbolicamente por $s \Rightarrow p$.

A negação desta proposição é:

$$\sim(s \Rightarrow p) \Leftrightarrow \sim(\sim s \vee p) \Leftrightarrow s \wedge \sim p$$

Assim, a negação da proposição dada é:

Amanhã vai estar sol e não vou à praia.

Resposta: (C)

4. $p \Rightarrow q$ significa que:

p é uma condição suficiente para q ;

q é uma condição necessária para p .

Resposta: (D)

5. (A) $(a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \wedge (\sim b \vee b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \wedge V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a$$

(B) $(b \Rightarrow a) \vee b \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sim b \vee a) \vee b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \vee (b \wedge \sim b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \vee V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V$$

(C) $(a \vee b) \wedge (a \vee \sim b) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \vee (b \wedge \sim b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \vee F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a$$

(D) $(\sim a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sim(\sim a) \vee b) \wedge (\sim b \vee a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (\sim b \vee a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \vee (b \wedge \sim b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \vee F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a$$

Resposta: (B)

6.1. $\sim p \vee \sim q$

6.2. $p \Leftrightarrow \sim q$

6.3. $(\sim p \vee q) \Rightarrow p$

7.

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$\sim q \vee r$	$p \Rightarrow (\sim q \vee r)$	$p \Leftrightarrow \sim r$	$q \vee \vee(p \Leftrightarrow \sim r)$	$(p \Rightarrow (\sim q \vee r)) \wedge \wedge(q \vee (p \Leftrightarrow \sim r))$
V	V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F	F

8.1.

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee r$
V	V	F	F	F	F

A proposição é falsa.

8.2.

p	r	t	$r \wedge t$	$\sim(r \wedge t)$	$p \Rightarrow \sim(r \wedge t)$
V	F	F	F	V	V

A proposição é verdadeira.

8.3.

r	p	t	q	$r \Rightarrow p$	$t \Rightarrow q$	$(r \Rightarrow p) \vee (t \Rightarrow q)$	$\sim((r \Rightarrow p) \vee (t \Rightarrow q))$
F	V	F	V	V	V	V	F

A proposição é falsa.

8.4.

q	t	r	p	$r \vee p$	$q \Rightarrow t$	$(q \Rightarrow t) \Rightarrow r \vee p$
V	F	F	V	V	V	V

A proposição é verdadeira.

9.1. $t: 0,3^2 = 0,9$ (falsa)

$s: \pi < 3,14$ (falsa)

t	s	$\sim t$	$\sim s$	$\sim t \wedge \sim s$	$t \wedge s$	$(\sim t \wedge \sim s) \vee (t \wedge s)$
F	F	V	V	F	F	F

A proposição é falsa.

9.2.

t	s	$\sim t$	$\sim s$	$t \Rightarrow s$	$(t \Rightarrow s) \wedge \sim t$	$(t \Rightarrow s) \wedge \sim t \Rightarrow \sim s$
F	F	V	V	V	V	V

A proposição é verdadeira.

10. $[a \wedge (\sim a \vee b)] \Rightarrow a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [(a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b)] \Rightarrow a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [F \vee (a \wedge b)] \Rightarrow a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a \wedge b) \Rightarrow a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sim(a \wedge b)) \vee a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b) \vee a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sim a \vee a) \vee \sim b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V \vee \sim b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V$$

11. Vamos construir uma tabela de verdade da proposição dada.

b	p	s	$\sim b$	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow s$	$\sim b \vee (\sim p \Rightarrow s)$	$\sim (\sim b \vee (\sim p \Rightarrow s))$
V	V	V	F	F	V	V	F
V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F	V	F

A proposição dada é verdadeira quando:

b é verdadeira ; p é falsa e s é falsa.

O Sport Lisboa e Benfica ganha a primeira liga.

Ficha para praticar 4

Págs. 12 e 13

1.1. $-3x^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-3)}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2-4}{-6} \vee x = \frac{-2+4}{-6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$$

Em $\mathbb{Z}$, o conjunto-solução é $\{1\}$.

Em $\mathbb{Q}$, o conjunto-solução é $\left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$.

1.2. $4x = 5x^2 \Leftrightarrow 4x - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4 - 5x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{5}$$

Em $\mathbb{Z}$, o conjunto-solução é $\{0\}$.

Em $\mathbb{Q}$, o conjunto-solução é $\left\{0, \frac{4}{5}\right\}$.

1.3. $2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

$-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ são números irracionais, pelo que não pertencem a $\mathbb{Z}$, nem a $\mathbb{Q}$.

O conjunto-solução, em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{Q}$ é $\{\}$ ou $\emptyset$.

1.4. $6\left(x^2 - \frac{1}{6}x\right) = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - x = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(6)(-1)}}{2(6)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+5}{12} \vee x = \frac{1-5}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{3}$$

Em $\mathbb{Z}$, o conjunto-solução é $\{\}$.

Em $\mathbb{Q}$, o conjunto-solução é $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

2.1. $\exists x \in \mathbb{N} : x < \sqrt{2}$. Proposição verdadeira (1 é um número natural menor que $\sqrt{2}$).

2.2. $\forall x \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Z}$. Proposição falsa (por exemplo, $\frac{1}{2}$ é um número racional e não é um número inteiro).

2.3. $\exists x \in \mathbb{R} : x \neq x$. Proposição falsa (todo o número real é igual a ele próprio).

2.4. $\forall x \in \{\text{números ímpares}\}, x$ é primo. Proposição falsa (por exemplo, 9 é um número ímpar e não é um número primo).

2.5. $\exists x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{3}$. Proposição verdadeira $\left(\frac{5}{2}\right)$ é um número racional e é maior que $\sqrt{3}$.

2.6. $\exists x \in \mathbb{R}_0^+ : 2x \leq 0$

Proposição verdadeira ($0 \in \mathbb{R}_0^+$ e $2 \times 0 \leq 0$)

2.7. $\forall x \in \mathbb{R}^+, x < x^3$. Proposição falsa $\left(\frac{1}{2}\right)$ é um número real positivo e $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

2.8. $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$. Proposição verdadeira (todos os números naturais são maiores ou iguais a zero).

3.1. a: Qualquer que seja o número natural n , a soma do

dobro de n com um é um número par.

b: Qualquer que seja o número real x , a soma do quadrado de x com três é maior que zero.

c: Qualquer que seja o número real x , a soma de x com um é igual a x .

d: Existe pelo menos um número racional x tal que a diferença entre o quadrado de x e três é igual a zero.

e: Existe pelo menos um número inteiro x tal que o produto entre a soma de x com três e a diferença do dobro de x com um é igual a zero.

3.2. As proposições b e e são verdadeiras. As restantes são falsas.

4.1. Condições universais: $\langle x^2 = x^2 \rangle$, $\langle x \in \mathbb{R} \rangle$ e $\langle x \notin \emptyset \rangle$

Condições possíveis: $\langle x \in \mathbb{N} \rangle$ e $\langle x \notin \mathbb{Z} \rangle$

Condições impossíveis: $\langle x \neq x \rangle$, $\langle x \notin \mathbb{R} \rangle$ e $\langle x \in \emptyset \rangle$

4.2. a) Condição impossível

b) Condição universal

c) Condição possível

d) Condição universal

e) Condição universal

f) Condição impossível

5.1. Todos os portugueses trabalham.

5.2. Existe pelo menos um português no Norte de Portugal que não gosta de trabalhar.

- 5.3. Todos os portugueses são ricos.
 5.4. Existe pelo menos um português que não gosta de gozar férias.

- 6.1. Condição
 $x^2 + 1 > 0$ - Condição universal
 $x^2 > 0$ - Condição possível (0 não é solução)
 $x^2 \leq 0$ - Condição possível (0 é a única solução)
 $x^2 < 0$ - Condição impossível

- 6.2. a) Condição possível
 b) Condição possível
 c) Condição possível
 d) Condição impossível

7. $a(x): x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$
 $b(x): x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$
 $c(x): x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[$

- 7.1. $a(x) \wedge b(x) \Leftrightarrow x \in \emptyset$
 Condição impossível

- 7.2. $a(x) \wedge c(x) \Leftrightarrow x \in \{-1\}$
 Condição possível não universal

- 7.3. $a(x) \vee b(x) \vee c(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
 Condição universal

- 7.4. $b(x) \vee c(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 Condição possível não universal

Ficha para praticar 5

Págs. 14 e 15

- 1.1. a) A proposição é falsa.
 Os números 5, 7, 9 e 11 não são divisores de 12.
 b) A proposição é verdadeira.
 Ao conjunto A , pertence pelo menos um número primo.
 Os números 2, 3, 5, 7 e 11 são primos.
- 1.2. a) Existe pelo menos um elemento do conjunto A que é divisor de 12.
 A proposição é verdadeira. Por exemplo, 2 é divisor de 12 e pertence ao conjunto A .
 b) Todo o elemento do conjunto A é um número primo.
 A proposição é falsa. Por exemplo, 4 não é um número primo e pertence ao conjunto A .
- 2.1. a) A proposição é verdadeira, pois todos os elementos do conjunto B são números reais menores que 30.
 b) A proposição é verdadeira, já que existe pelo menos um elementos do conjunto B que não é um número quadrado perfeito (por exemplo, -1 é um elemento do conjunto B e não é um número quadrado perfeito).
 c) A proposição é falsa, pois nem todos os elementos de B são números não primos (por exemplo, 3 é um elemento do conjunto B e é um numero primo).

- 2.2. Condições possíveis não universais:

$$p(x), q(x), \sim p(x) \text{ e } \sim q(x)$$

Condição universal: $r(x)$

Condição impossível: $\sim r(x)$

3.1. $\sim (\forall x \in \mathbb{R}^+, -2x < 0 \Rightarrow x > 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ : -2x < 0 \wedge x \leq 0$

3.2. $\sim (\forall x \in \mathbb{Z}^-, x \neq x \wedge x > 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}^- : \sim (x \neq x \wedge x > 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}^- : x = x \vee x \leq 0$

3.3. $\sim (\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \neq 0 \vee x^2 \leq 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \sim (x - 1 \neq 0 \vee x^2 \leq 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x - 1 = 0 \wedge x^2 > 0$

- 4.1. O número 2 é um número primo e não é ímpar.

- 4.2. Os triângulos escalenos não são isósceles.

- 4.3. Todos os números quadrados perfeitos formados por dois algarismos têm algarismos diferentes (16, 25, 36, 49, 64 e o 81).

- 4.4. O losango não quadrado tem os quatro lados iguais e não tem os quatro ângulos iguais.

- 4.5. O número natural 12 é divisor de 24 e não é divisor de 8.

- 5.1. a : Proposição verdadeira
 b : Proposição falsa. Por exemplo, para $x = -3$, temos que $(-3)^2 > 4$ é verdadeira e $-3 > 2$ é falsa.

- 5.2. $\sim a : \exists x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \wedge x > 4$
 $\sim b : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 4 \wedge x \leq 2$

- 6.1. $\sim c : \exists x \in \mathbb{N} : |x| > 4 \wedge x \geq 2$
 $\sim d : \exists x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 = 0 \wedge x^2 - 10 > 0$

- 6.2. c : Proposição falsa
 d : Proposição verdadeira

- 7.1. $\sim p : \sim (\exists n \in \mathbb{N} : n \text{ é múltiplo de } 15 \wedge n \text{ não é múltiplo de } 5)$
 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ não é múltiplo de } 15 \vee n \text{ é múltiplo de } 5$
 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ é múltiplo de } 15 \Rightarrow n \text{ é múltiplo de } 5$
 $\sim q : \sim (\forall x \in \mathbb{R}, x \text{ é uma dízima infinita não periódica})$
 $\Rightarrow x \text{ é um número racional}$
 $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \text{ é uma dízima infinita não periódica} \wedge x \text{ não é um número racional}$

- 7.2. $\sim p$: verdadeira
 Se n é múltiplo de 15, então $n = 15k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.
 Se $n = 15k$, então $n = 5 \times (3k)$. Logo, se n é múltiplo de 15 então n é múltiplo de 5 pelo que a proposição $\sim p$ é verdadeira.

- $\sim q$: Proposição verdadeira

Qualquer número real que seja representado por uma dízima infinita não periódica é um número irracional, isto é, não é um número racional, pelo que a proposição $\sim q$ é, também, verdadeira.

Ficha para praticar 6

Págs. 16 e 17

1.1. $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é divisor de } 24\}$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x \leq 3\}$$

1.2. a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x < 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} : 2x - 13 < 0\} = \{x \in \mathbb{N} : 2x < 13\} =$
 $= \{x \in \mathbb{N} : x < 6,5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \cap$
 $\cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4\}$

d) $A \cup D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \cup$
 $\cup \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} =$
 $= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

e) $C \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \setminus$
 $\setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{8, 12, 24\}$

f) $A \cap B \cap C \cap D =$
 $= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap$
 $\cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \cap$
 $\cap \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} =$
 $= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \cap$
 $\cap \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} =$
 $= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} =$
 $= \{1, 2, 3\}$

2.1. $A = \{x \in U : 42 - 3x > 0\} =$
 $= \{x \in U : -3x > 42\} = \{x \in \mu : 3x < 42\}$
 $= \left\{x \in U : x < \frac{42}{3}\right\} = \{x \in \mu : x < 14\} =$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

$$B = \{x \in U : x \text{ é primo}\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{x \in U : x \text{ é divisor de } 20\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$D = \{x \in U : (x-1)(2x-10)(x-12) = 0\} =$$

 $= \{x \in U : x-1=0 \vee 2x-10=0 \vee x-12=0\}$
 $= \{x \in U : x=1 \vee x=5 \vee x=12\} = \{1, 5\}$

2.2. a) $\bar{A} = \{14, 18, 20\}$

b) $\bar{B} \cap C = \{1, 4, 6, 8, 10, 14, 18, 20\} \cap$
 $\cap \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} = \{1, 4, 10, 20\}$

c) $U \setminus D = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 18, 20\} \setminus \{1, 5\} =$
 $= \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 18, 20\}$

d) $\bar{A} \cup \bar{C} = \{14, 18, 20\} \cup \{3, 6, 7, 8, 14, 18\} =$
 $= \{3, 6, 7, 8, 14, 18, 20\}$
 $U \setminus (\bar{A} \cup \bar{C}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 18, 20\} \setminus$
 $\setminus \{3, 6, 7, 8, 14, 18, 20\} = \{1, 2, 4, 5, 10\}$

3.1. $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1-5}{2} \vee x = \frac{-1+5}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

A equação tem, em $\mathbb{R}$, duas soluções, -3 e 2 . Como $2 \in A$, a proposição $\exists x \in A : x^2 + x - 6 = 0$ é verdadeira.

3.2. Apenas o elemento 1 do conjunto A verifica a condição $x^2 - 1 \leq 0$, pois:
 $1^2 - 1 \leq 0$ (verdade); $2^2 - 1 \leq 0$ (falso) e $3^2 - 1 \leq 0$ (falso).
 Assim, a proposição $\forall x \in A, x^2 - 1 \leq 0$ é falsa.

3.3. Todos os elementos do conjunto A são divisores de 6, pelo que a proposição $\forall x \in A, x$ é divisor de 6 é verdadeira.

3.4. O elemento 3 do conjunto A verifica a condição $x + 2 \geq 5$, pois $3 + 2 = 5$.
 Assim a proposição $\exists x \in A : x + 2 \geq 5$ é verdadeira.

4.1. $A = \{n : a(n) \wedge d(n)\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
 Os elementos de A são os números primos inferiores a 15.

4.2. $B = \{n : a(n) \wedge b(n)\} = \{2, 3\}$
 Os elementos de B são os números primos que são divisores de 24.

4.3. $C = \{n : b(n) \wedge \sim d(n)\} = \{24\}$
 Os elementos de C são os divisores de 24 não inferiores a 15.

4.4. $D = \{n : \sim a(n) \wedge d(n)\} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$
 Os elementos de D são os números não primos inferiores a 15.

5.1. $B = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{2-x}{3} \geq 2x\right\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}^+ : 3 - (2-x) \geq 6x\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}^+ : 3 - 2 + x \geq 6x\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}^+ : 1 \geq 5x\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}^+ : 5x \leq 1\} =$
 $= \left\{x \in \mathbb{R}^+ : x \leq \frac{1}{5}\right\}, \text{ pelo que } B = \left]0, \frac{1}{5}\right]$

5.2. $C = \left\{x \in \mathbb{R}_0^- : -\frac{x}{2} < 4\right\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}_0^- : -x < 8\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}_0^- : -x < 8\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}_0^- : x > -8\}, \text{ pelo que } C =]-8, 0]$

$$\begin{aligned}
 5.3. \quad A &= \{x \in \mathbb{R} : -3x < 6\} = \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : 3x > -6\} = \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}, \text{ pelo que } A =]-2, +\infty[.
 \end{aligned}$$

Por conseguinte, $\bar{A} =]-\infty, -2]$.

$$\begin{aligned}
 5.4. \quad A \setminus B &=]-2, +\infty[\setminus \left[0, \frac{1}{5}\right] = \\
 &=]-2, 0] \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.5. \quad \bar{C} \cup B &= (]-\infty, -8] \cup]0, +\infty[) \cup \left[0, \frac{1}{5}\right] = \\
 &=]-\infty, -8] \cup]0, +\infty[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.6. \quad \bar{B} \setminus A &= \left(]-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[\right) \setminus]-2, +\infty[= \\
 &=]-\infty, -2]
 \end{aligned}$$

6. Para $n \in \mathbb{N}_0$, a expressão $(-1)^n$ apenas toma dois valores distintos, a saber:

$$(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } (n \text{ é par ou } n = 0) \end{cases}$$

Assim, $A = \{-1, 1\}$.

$$B = \{x \in \mathbb{N}_0 : x^2 = 13x - 22\}$$

$$x^2 - 13x + 22 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 1 \times 22}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13 \pm 9}{2} \Leftrightarrow x = 11 \vee x = 2$$

pelo que $B = \{2, 11\}$.

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Assim, $C = \{0, 1\}$.

7.1. Se pelo menos um passageiro não ficar doente então, neste avião, não existe qualquer passageiro doente.

7.2. Qualquer pessoa presente nesta sala que não sabe ler não tem um livro.

8. A proposição dada pode ser traduzida por:

n e m são números naturais para os quais $n + m$ é par $\Rightarrow$
 $\Rightarrow n$ e m têm a mesma paridade

A sua contrarrecíproca é:

n e m são números naturais para os quais n e m têm paridades diferentes $\Rightarrow n + m$ é ímpar.

Um dos números é par e o outro é ímpar.

Seja, por exemplo, n par e m ímpar (o caso n ímpar e n par pode ser obtido apenas trocando-se n por m), logo $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $m = 2p + 1$, para algum $p \in \mathbb{N}$, pelo que

$$n + m = 2k + (2p + 1) = 2k + 2p + 1 = 2(k + p) + 1.$$

$k + p$ é um número natural (soma de dois números naturais). Seja, por exemplo, $k + p = q$, $q \in \mathbb{N}$. Temos,

$$n + m = 2(k + p) + 1 = 2q + 1.$$

Logo, $n + m$ é um número ímpar.

Fica então provado por contrarrecíproco que:

Se n e m são números naturais para os quais $n + m$ é par, então n e m têm a mesma paridade.

Ficha de teste 2

Págs. 18 e 19

- (A) Proposição verdadeira
 Para $x = -64$, $\sqrt[3]{x} = -4$, pelo que é verdade que
 $\exists x \in \mathbb{Z} : \sqrt[3]{x} = -4$.

(B) Proposição verdadeira
 Para $x = 0$, $x^2 = 0$, pelo que é verdade que
 $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 0$.

(C) Proposição falsa
 A proposição apenas é verdadeira, quando $x > 0$.

(D) Proposição verdadeira
 Qualquer que seja o número natural n , $(-1)^n$ apenas assume dois valores (-1 quando n é ímpar e quando n é par), pelo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \leq 1$.

Resposta: (C)

- $P = \{n \in \mathbb{N} : 2n - 3 < 14 \wedge n \text{ é ímpar}\}$
 $= \{n \in \mathbb{N} : 2n < 17 \wedge n \text{ é ímpar}\}$
 $= \{n \in \mathbb{N} : n < 8,5 \wedge n \text{ é ímpar}\}$
 $= \{1, 3, 5, 7\}$

$Q = \{x \in \mathbb{Z} : x = (-1)^n + n \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\}$

Para $n = 1$: $(-1)^1 + 1 = -1 + 1 = 0$

Para $n = 2$: $(-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

Para $n = 3$: $(-1)^3 + 3 = -1 + 3 = 2$

Para $n = 4$: $(-1)^4 + 4 = 1 + 4 = 5$

Logo:

$$Q = \{0, 2, 3, 5\}$$

$$P \setminus Q = \{1, 3, 5, 7\} \setminus \{0, 2, 3, 5\} = \{1, 7\}$$

Resposta: (D)

- $M = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x - 2 \leq 3\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} : -1 + 2 < x \leq 3 + 2\}$
 $M = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 5\}$, pelo que $=]1, 5]$ e, por conseguinte, $\bar{M} =]-\infty, 1] \cup]5, +\infty[$.

Resposta: (B)

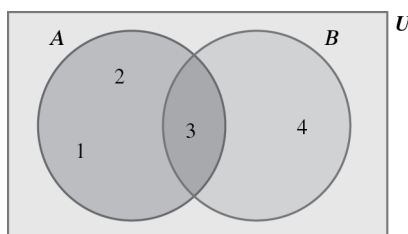
- $\sim(\exists x \in \mathbb{Z} : x > -2 \wedge x^2 < 4) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \sim(x > -2 \wedge x^2 < 4) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \sim(x > -2) \vee x^2 \geq 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x > -2 \Rightarrow x^2 \geq 4$

Resposta: (D)

5. (A) $E \setminus G = \{1, 3, 4, 5\} \setminus \{0, 4, 6, 10\} = \{1, 3, 5\}$
 (B) $(F \cap G) \cup E = (\{3, 4, 6, 8\} \cap \{0, 4, 6, 10\}) \cup \{1, 3, 4, 5\} =$
 $= \{4, 6\} \cup \{1, 3, 4, 5\} =$
 $= \{1, 3, 4, 5, 6\}$
 (C) $(E \cup F) \cap G =$
 $= (\{1, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 6, 8\}) \cap \{0, 4, 6, 10\} =$
 $= \{1, 3, 4, 5, 6, 8\} \cap \{0, 4, 6, 10\} =$
 $= \{4, 6\}$
 (D) $G \setminus F = \{0, 4, 6, 10\} \setminus \{3, 4, 6, 8\} =$
 $= \{0, 10\}$

Resposta: (C)

- 6.1. Para $n = 1$ tem-se que $\frac{1}{1} = 1$, pelo que é falsa a proposição
 $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < 1$.
 6.2. Para $x = -2$, por exemplo, $\frac{1}{-2} > -2$, pelo que é falsa a
 proposição $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} \leq x$.
 6.3. Qualquer que seja o número natural a , $-a^2 < 0$ pelo que é
 falsa a proposição $\exists a \in \mathbb{N} : -a^2 < 0$ é um número real
 positivo.
 7. Podemos, por exemplo, construir um diagrama de Venn.



- 7.1. $A = \{1, 2, 3\}$
 7.2. $B = \{3, 4\}$
 7.3. $B \setminus A = \{4\}$
 8. A soma do número de elementos do conjunto A com o
 número de elementos do conjunto B é 12, pelo que o número
 de elementos do conjunto $A \cap B$ é 2, pois $12 - 10 = 2$
 (repare que 10 é o número de elementos do conjunto $A \cup B$).
 Logo, o número de elementos do conjunto $A \setminus B$ é 5 ($7 - 2$)
 e o número de elementos do conjunto $B \setminus A$ é 3 ($5 - 2$).
 Como $A \setminus B$ e $B \setminus A$ são dois conjuntos disjuntos, então
 o número de elementos do conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ é 8
 ($5 + 3$).

9. A proposição é:
 Se $7n + 9$ é um número par, então n é um número
 ímpar.
 A sua contrarrecíproca é:
 Se n é um número natural par, então $7n + 9$ é um
 número ímpar.
 Se n é par, então $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Deste modo,
 temos que:
 $7n + 9 = 7 \times 2k + 9 = 14k + 8 + 1 = 2(7k + 4) + 1 = 2j + 1$
 sendo $j = 7k + 4$, ou seja $7n + 9$ é um número ímpar, dado
 que se $k \in \mathbb{N}$, então $7k + 4 \in \mathbb{N}$.

10.1. Todas as pessoas inteligentes sabem ler ou escrever.

10.2. Há pelo menos uma pessoa feliz que não é pobre.
 Repare que a proposição dada pode ser vista do modo
 seguinte:

Qualquer que seja a pessoa, se é feliz, então é pobre.

$$11.1. \sim (\exists x \in A : x^2 + 3x + 1 = 0) \Leftrightarrow \forall x \in A, x^2 + 3x + 1 \neq 0$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

Logo, a proposição é verdadeira.

$$11.2. \sim (\forall x \in A, x^2 + x = 6) \Leftrightarrow \exists x \in A : x^2 + x \neq 6$$

$$x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$

Logo, a proposição é verdadeira.

Ficha para praticar 7

Págs. 20 e 21

$$1.1. -3 < \sqrt{3} \Leftrightarrow (-3)^7 < (\sqrt{3})^7$$

$$1.2. -11 < -2 \Leftrightarrow (-11)^4 > (-2)^4$$

$$1.3. \sqrt{10} < 4 \Leftrightarrow (\sqrt{10})^3 < 4^3$$

$$1.4. -\frac{1}{2} < -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{100} > \left(-\frac{1}{5}\right)^{100}$$

$$1.5. -\pi < \sqrt{8} \Leftrightarrow (-\pi)^{1001} < (\sqrt{8})^{1001}$$

$$1.6. \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} < \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^{-3} > \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}\right]^{-3}$$

$$2.1. \sqrt[7]{-1} - \frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}} - \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -1 - \frac{\sqrt[5]{(-2)^5}}{\sqrt[3]{3^3}} - \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = -1 - \frac{-2}{3} - \frac{1}{2} =$$

$$= -1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{6}{6} + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$2.2. \sqrt[4]{4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3} - \frac{\sqrt[10]{3^{20}}}{\sqrt[3]{-8}} = \sqrt[4]{4 \times 4^3} - \frac{\sqrt[10]{(3^2)^{10}}}{\sqrt[3]{(-2)^3}} = \sqrt[4]{4^4} - \frac{3^2}{-2} =$$

$$= 4 - \frac{9}{-2} = 4 + \frac{9}{2} = \frac{8}{2} + \frac{9}{2} = \frac{17}{2}$$

$$2.3. \frac{\sqrt[1001]{-1} - \sqrt[4]{16}}{\sqrt[6]{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}} - \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{-1 - \sqrt[4]{2^4}}{\sqrt[6]{6 \times 6^5}} - \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}}{\sqrt[4]{3^4}} =$$

$$= \frac{-1-2}{\sqrt[6]{6^6}} - \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{-3}{6} - \frac{1}{6} =$$

$$= -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$2.4. \sqrt[5]{243} + \sqrt[4]{\frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{27}}{6} - \frac{\sqrt[3]{-27}}{2} =$$

$$= \sqrt[5]{3^5} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} - \frac{\sqrt{3^2 \times 3}}{6} - \frac{\sqrt[3]{(-3)^3}}{2} =$$

$$= \sqrt[5]{3^5} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{6} - \frac{-3}{2} =$$

$$= \sqrt[5]{3^5} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} =$$

$$= \sqrt[5]{3^{5.5}} + \frac{3}{2} =$$

$$= \sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

$$3.1. \sqrt{324} = \sqrt{18^2} = 18$$

$$3.2. \sqrt{2500} = \sqrt{50^2} = 50$$

$$3.3. \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$$

$$3.4. \sqrt[3]{3^5 + 3^5 + 3^5} = \sqrt[3]{3 \times 3^5} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{3^{6.3}} = \sqrt[3]{3^2} = 3^2 = 9$$

$$3.5. \sqrt[15]{32} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{2^{5.5}} = \sqrt[3]{2}$$

$$3.6. \sqrt[20]{a^{40}b^2} = \sqrt[20]{a^{40}} \times \sqrt[20]{b^2} = \sqrt[20]{(a^2)^{20}} \times \sqrt[20]{b^{2.2}} = a^2 \times \sqrt[10]{b}$$

$$3.7. \sqrt[3]{\frac{x^6}{y^{15}}} = \sqrt[3.3]{\frac{(x^2)^3}{(y^5)^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{y^5}\right)^3} = \frac{x^2}{y^5}$$

$$3.8. \sqrt[12]{64a^4} = \sqrt[12]{2^6 a^4} = \sqrt[12]{2^6} \times \sqrt[12]{a^4} = \sqrt[12]{2^{6.6}} \times \sqrt[12]{a^{4.4}} =$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt[3]{a}$$

$$3.9. \sqrt[5]{243a^{40}b^{10}} = \sqrt[5]{3^5 a^{5 \times 8} b^{5 \times 2}} = \sqrt[5]{(3a^8b^2)^5} = 3a^8b^2$$

$$3.10. \sqrt[7]{-128a^{14}b^{28}c^{105}} = \sqrt[7]{(-2)^7 a^{2 \times 7} b^{4 \times 7} c^{15 \times 7}} =$$

$$= \sqrt[7]{(-2a^2b^4c^{15})^7} = -2a^2b^4c^{15}$$

$$4.1. \sqrt{7} = \sqrt[5 \times 2]{7^5} = \sqrt[10]{7^5} = \sqrt[10]{16807}$$

Pelo que $\sqrt{7} = \sqrt[10]{16807}$

$$4.2. \sqrt[3]{2} = \sqrt[5 \times 3]{2^5} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}$$

Pelo que $\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{32}$

$$4.3. \sqrt[3]{6} = \sqrt[5 \times 3]{6^5} = \sqrt[15]{6^5} = \sqrt[15]{7776}, \text{ pelo que } \sqrt[3]{6} = \sqrt[15]{7776}$$

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[3 \times 5]{2^3} = \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{8}, \text{ pelo que } \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{8}$$

$$4.4. \sqrt{a} = \sqrt[7 \times 2]{a^7} = \sqrt[14]{a^7}, \text{ pelo que } \sqrt{a} = \sqrt[14]{a^7}$$

$$\sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7 \times 2]{(a^3)^2} = \sqrt[14]{a^6}, \text{ pelo que } \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[14]{a^6}$$

$$4.5. \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[3 \times 4]{(a^3)^3} = \sqrt[12]{a^9}, \text{ pelo que } \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^9}$$

$$\sqrt[3]{2a} = \sqrt[4 \times 3]{(2a)^4} = \sqrt[12]{2^4 a^4} = \sqrt[12]{16a^4}, \text{ pelo que } \sqrt[3]{2a} = \sqrt[12]{16a^4}$$

$$4.6. \sqrt[3]{\frac{2}{a}} = \sqrt[2 \times 3]{\left(\frac{2}{a}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{a^3}} = \sqrt[6]{\frac{4}{a^2}}, \text{ pelo que } \sqrt[3]{\frac{2}{a}} = \sqrt[6]{\frac{4}{a^2}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{4^2}} = \sqrt[6]{\left(\frac{a}{4^2}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{4^6}}, \text{ pelo que } \sqrt{\frac{a}{4^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{4^6}}$$

$$5.1. \sqrt[3]{2} = \sqrt[4 \times 3]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[3 \times 4]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6 \times 2]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

Assim, temos que $\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt{3}$.

$$5.2. \sqrt[9]{5} = \sqrt[20 \times 5]{5^2} = \sqrt[100]{25}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6 \times 3]{2^6} = \sqrt[18]{64}$$

$$\sqrt[6]{81} = \sqrt[3 \times 6]{3^4} = \sqrt[18]{(3^4)^3} = \sqrt[18]{3^{12}} = \sqrt[18]{531441}$$

Assim, temos que $\sqrt[9]{5} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[6]{81}$

$$6.1. \sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[2 \times 2]{3^2} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{2 \times 9} = \sqrt[4]{18}$$

$$6.2. \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3 \times 2]{3^3}}{\sqrt[2 \times 3]{3^2}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{3^1} = \sqrt[6]{3}$$

$$6.3. \sqrt[3]{9} - 2\sqrt[6]{81} + \frac{1}{2}\sqrt[12]{3^8} = \sqrt[4 \times 3]{9^4} - 2\sqrt[2 \times 6]{81^2} + \frac{1}{2}\sqrt[2 \times 6]{81^2} =$$

$$= \sqrt[12]{(3^2)^4} - 2\sqrt[12]{(3^4)^2} + \frac{1}{2}\sqrt[12]{3^8} = \sqrt[12]{3^8} - 2\sqrt[12]{3^8} + \frac{1}{2}\sqrt[12]{3^8} =$$

$$= \frac{2\sqrt[12]{3^8}}{2} - \frac{4\sqrt[12]{3^8}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[12]{3^8} = -\frac{\sqrt[12]{3^8}}{2} = -\frac{12\sqrt[12]{3^{8.4}}}{2} =$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{3^2}}{2} = -\frac{\sqrt[3]{9}}{2} = -\sqrt[3]{\frac{9}{2^2}} = -\sqrt[3]{\frac{9}{8}}$$

$$6.4. \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[12]{8} : \sqrt[4]{9}} = \frac{\sqrt[4 \times 3]{4^4}}{\sqrt[12]{8} \cdot \sqrt[3 \times 4]{9^3}} = \frac{\sqrt[12]{4^4}}{\sqrt[12]{8} \cdot \sqrt[12]{9^3}} = \frac{\sqrt[12]{4^4}}{\sqrt[12]{9^3}} =$$

$$= \sqrt[12]{\frac{4^4}{9^3}} = \sqrt[12]{4^4 \times \frac{9^3}{8}} = \sqrt[12]{(2^2)^4 \times \frac{9^3}{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^8 \times 9^3}{2^3}} =$$

$$= \sqrt[12]{2^5 \times 9^3} = \sqrt[12]{32 \times 729} = \sqrt[12]{23328}$$

$$6.5. \quad \frac{\sqrt[5]{3} : \sqrt[10]{2}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{4 \times 5 \sqrt[3]{4} : 2 \times 10 \sqrt[2]{2}}{5 \times 4 \sqrt[5]{8^5}} = \frac{20 \sqrt[3]{4} : 2^2}{20 \sqrt[5]{8^5}} = \sqrt[20]{\frac{3^4 : 2^2}{8^5}} =$$

$$= \sqrt[20]{\frac{3^4}{8^5} \times \frac{1}{2^2}} = \sqrt[20]{\frac{81}{131072}}$$

$$6.6. \quad \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^{-2} : (\sqrt[6]{8})^{-3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}} : \sqrt[6]{8^{-3}} = \sqrt[3]{4^2} : \sqrt[6]{\left(\frac{1}{8}\right)^3} =$$

$$= \sqrt[3]{(2^2)^2} : \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2^3}\right)^3} = \sqrt[3]{2^4} : \sqrt[6]{\frac{1}{2^9}} = \sqrt[2 \times 3]{(2^4)^2} : \sqrt[6]{\frac{1}{2^9}} =$$

$$= \sqrt[6]{2^8} : \sqrt[6]{\frac{1}{2^9}} = \sqrt[6]{2^8 : \frac{1}{2^9}} = \sqrt[6]{2^8 \times 2^9} = \sqrt[6]{2^{17}} =$$

$$= \sqrt[6]{(2^2)^6 \times 2^5} = \sqrt[6]{(2^2)^6} \times \sqrt[6]{2^5} =$$

$$= 2^2 \times \sqrt[6]{2^5} = 4\sqrt[6]{32}$$

$$7.1. \quad \sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{98} + \sqrt{18} =$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{7^2 \times 2} + \sqrt{3^2 \times 2} =$$

$$= \sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$$7.2. \quad \sqrt{20} - \sqrt{45} + 2\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{80} =$$

$$= \sqrt{2^2 \times 5} - \sqrt{3^2 \times 5} + 2\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5} =$$

$$= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} =$$

$$= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} =$$

$$= -\sqrt{5}$$

$$7.3. \quad 2\sqrt{48} + \frac{1}{2}\sqrt{27} - \frac{1}{3}\sqrt{75} - 2\sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3} + \frac{1}{2}\sqrt{3^2 \times 3} - \frac{1}{3}\sqrt{5^2 \times 3} - 2\sqrt{3} =$$

$$= 2 \times 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{3} \times 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} =$$

$$= 8\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} =$$

$$= 6\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{36\sqrt{3}}{6} + \frac{9\sqrt{3}}{6} - \frac{10\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{35\sqrt{3}}{6}$$

$$7.4. \quad \sqrt{80} + \frac{\sqrt{45}}{2} - \frac{2\sqrt{245}}{3} - \frac{\sqrt{180}}{6} =$$

$$= \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5} + \frac{\sqrt{3^2 \times 5}}{2} - \frac{2\sqrt{7^2 \times 5}}{3} - \frac{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5}}{6} =$$

$$= 4\sqrt{5} + \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{2 \times 7\sqrt{5}}{3} - \frac{2 \times 3\sqrt{5}}{6} =$$

$$= 4\sqrt{5} + \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{14\sqrt{5}}{3} - \frac{6\sqrt{5}}{6} =$$

$$= \frac{24\sqrt{5}}{6} + \frac{9\sqrt{5}}{6} - \frac{28\sqrt{5}}{6} - \frac{6\sqrt{5}}{6} =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$7.5. \quad \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^5} \times \sqrt[12]{a^7} =$$

$$= \sqrt[6 \times 2]{a^6} \times \sqrt[4 \times 3]{(a^2)^4} \times \sqrt[3 \times 4]{(a^5)^3} \times \sqrt[12]{a^7} =$$

$$= \sqrt[12]{a^6} \times \sqrt[12]{a^8} \times \sqrt[12]{a^{15}} \times \sqrt[12]{a^7} = \sqrt[12]{a^6 \times a^8 \times a^{15} \times a^7} =$$

$$= \sqrt[12]{a^{36}} = \sqrt[12]{(a^3)^{12}} = a^3$$

$$7.6. \quad \frac{\sqrt[6]{2} \times \sqrt[12]{16}}{3} - \frac{3\sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2} \times \sqrt[12]{2^4}}{3} - \frac{3\sqrt{3^2 \times 2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2} \times \sqrt[12]{2^{4 \times 2}}}{3} - \frac{3 \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2^2}}{3} - \frac{9\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2^3}}{3} - \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2^{3 \times 3}}}{3} - \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{9\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{6} - \frac{27\sqrt{2}}{6} = -\frac{25\sqrt{2}}{6}$$

$$8.1. \quad \sqrt[3]{3^2 4} = \sqrt[3]{3^2 \times 4 \times 3^3} = \sqrt[2 \times 3]{2^2 \times 3^3} = \sqrt[6]{108}$$

$$8.2. \quad x^2 \sqrt{x^3} \sqrt{x} = x^2 \sqrt{x(x^3)^2} = x^2 \sqrt{x \times x^6} = x^2 \sqrt{x^7} =$$

$$= x^{2 \times 2} \sqrt[2]{x^7} = x^4 \sqrt[2]{x^7} = x^2 \sqrt[4]{x^4 \times x^3} = x^2 \sqrt[4]{x^4} \times \sqrt[4]{x^3} =$$

$$= x^2 \times x \times \sqrt[4]{x^3} = x^3 \sqrt[4]{x^3}$$

$$8.3. \quad \frac{\sqrt{a^3} \sqrt{a}}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{a} \times (a^3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{a} \times a^6}}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{a^7}}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt[2 \times 2]{a^7}}{2} = \frac{\sqrt[4]{a^7}}{2} = \frac{\sqrt[4]{a^4 \times a^3}}{2} = \frac{\sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{a^3}}{2} = \frac{a \times \sqrt[4]{a^3}}{2}$$

$$8.4. \quad \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} \sqrt[5]{2}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{2 \times \frac{1}{2^5}}}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{1}{2^4}}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3 \times 5]{\frac{1}{2^4}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[15]{\frac{1}{2^4}}\right)^{-1} =$$

$$= \sqrt[15]{2^4} = \sqrt[15]{16}$$

$$8.5. \quad \sqrt[4]{a^6} \sqrt{a} = \sqrt[4]{\sqrt{a} \times (a^6)^2} = \sqrt[4]{\sqrt{a} \times a^{12}} = \sqrt[4]{\sqrt{a^{13}}} = \sqrt[4 \times 2]{a^{13}} =$$

$$= \sqrt[8]{a^{13}} = \sqrt[8]{a^8 \times a^5} = \sqrt[8]{a^8} \times \sqrt[8]{a^5} = a \times \sqrt[8]{a^5} = a \sqrt[8]{a^5}$$

$$8.6. \quad \left(\sqrt[3]{a^2 \sqrt[4]{a^2}}\right)^9 = \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2 \times (a^2)^4}}\right)^9 = \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2 \times a^8}}\right)^9 =$$

$$= \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{10}}}\right)^9 = \left(\sqrt[3 \times 4]{a^{10}}\right)^9 = \left(\sqrt[12]{a^{10}}\right)^9 = \left(\sqrt[12 \times 2]{a^{10 \times 2}}\right)^9 =$$

$$= \left(\sqrt[6]{a^5}\right)^9 = \sqrt[6]{(a^5)^9} = \sqrt[6]{a^{45}} = \sqrt[6]{(a^7)^6 \times a^3} =$$

$$= \sqrt[6]{(a^7)^6} \times \sqrt[6]{a^3} = a^7 \times \sqrt[6]{a^3} = a^7 \sqrt[6 \times 3]{a^3} = a^7 \sqrt{a}$$

Ficha para praticar 8

Págs. 22 e 23

$$1.1. \quad \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$1.2. \quad \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{3}{3}} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2 \times \sqrt[3]{x}}} = \frac{x^{\frac{3}{3}} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2 \times x}} = \frac{x^{\frac{3}{3}} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{x^{\frac{3}{3}} \sqrt[3]{x}}{x} = \sqrt[3]{x}$$

$$1.3. \quad \frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3 \times 3^2}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{3^2}}{3} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$$

$$\begin{aligned}
 1.4. \quad \frac{11}{5-\sqrt{3}} &= \frac{11(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} = \\
 &= \frac{55+11\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{55+11\sqrt{3}}{25-3} = \\
 &= \frac{55+11\sqrt{3}}{22} = \frac{5+\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.5. \quad \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \\
 &= \frac{(\sqrt{7})^2+2\sqrt{7}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \\
 &= \frac{7+2\sqrt{21}+3}{7-3} = \frac{10+2\sqrt{21}}{4} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.6. \quad \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})(2\sqrt{2}+\sqrt{5})} = \\
 &= \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}{8-5} = \\
 &= \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1. \quad \sqrt{5}x-2=0 &\Leftrightarrow \sqrt{5}x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad \sqrt{3}x=1+2x &\Leftrightarrow \sqrt{3}x-2x=1 \Leftrightarrow x(\sqrt{3}-2)=1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}-2} \Leftrightarrow x=\frac{1(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3})^2-2^2} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}+2}{3-4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}+2}{-1} \Leftrightarrow x=-\sqrt{3}-2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.3. \quad 5\sqrt{2}x+x=3 &\Leftrightarrow x(5\sqrt{2}+1)=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x=\frac{3(5\sqrt{2}-1)}{(5\sqrt{2}+1)(5\sqrt{2}-1)} \Leftrightarrow x=\frac{15\sqrt{2}-3}{(5\sqrt{2})^2-1^2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x=\frac{15\sqrt{2}-3}{50-1} \Leftrightarrow x=\frac{15\sqrt{2}-3}{49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.4. \quad \sqrt{3}x=\sqrt{2}(1-x) &\Leftrightarrow \sqrt{3}x=\sqrt{2}-\sqrt{2}x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{3}x+\sqrt{2}x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}-2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}-2}{3-2} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}-2}{1} \Leftrightarrow x=\sqrt{6}-2
 \end{aligned}$$

3.1. Sabe-se que

$$\frac{1}{A-B} = \frac{A^2+AB+B^2}{(A-B)(A^2+AB+B^2)} = \frac{A^2+AB+B^2}{A^3-B^3} \text{ e}$$

Consequentemente:

$$\frac{C}{A-B} = C \times \frac{1}{A-B} = C \times \frac{A^2+AB+B^2}{A^3-B^3}.$$

Na fração $\frac{4}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$, seja $C=4$; $A=\sqrt[3]{3}$ e $B=\sqrt[3]{2}$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} &= 4 \times \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = 4 \times \frac{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3} = \\
 &= 4 \times \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2} = 4 \times \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{1} = \\
 &= 4(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.2. \quad \frac{a}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} &= a \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}-(-\sqrt[3]{y})} = \\
 &= a \times \frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\times(-\sqrt[3]{y})+(-\sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x})^3-(-\sqrt[3]{y})^3} = \\
 &= a \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-(-y)} = a \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y} = \\
 &= \frac{a(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{x+y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.3. \quad \text{Sabe-se que } \frac{1}{A-B} &= \frac{A^3+A^2B+AB^2+B^3}{(A-B)(A^3+A^2B+AB^2+B^3)} = \\
 &= \frac{A^3+A^2B+AB^2+B^3}{A^4-B^4}
 \end{aligned}$$

Consequentemente:

$$\frac{C}{A-B} = C \times \frac{1}{A-B} = C \times \frac{A^3+A^2B+AB^2+B^3}{A^4-B^4}$$

Na fração $\frac{2}{\sqrt[4]{2}+1}$, seja $C=2$; $A=\sqrt[4]{2}$ e $B=-1$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\sqrt[4]{2}+1} &= 2 \times \frac{(\sqrt[4]{2})^3+(\sqrt[4]{2})^2\times(-1)+(\sqrt[4]{2})(-1)^2+(-1)^3}{(\sqrt[4]{2})^4-(-1)^4} = \\
 &= 2 \times \frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{2}-1}{2-1} = \\
 &= 2 \times \frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{2}-1}{1} = 2(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{2}-1) = \\
 &= 2(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[4]{2}-1) = 2(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2^{2.2}}+\sqrt[4]{2}-1) = \\
 &= 2(\sqrt[4]{8}-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.4. \quad \frac{2}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}} &= \frac{2(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{(2\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})} = \\
 &= \frac{2a\sqrt{b}-2c\sqrt{d}}{(a\sqrt{b})^2-(c\sqrt{d})^2} = \frac{2a\sqrt{b}-2c\sqrt{d}}{a^2b-c^2d}
 \end{aligned}$$

3.5. Sabe-se que:

$$\frac{1}{A-B} = \frac{A^3 + A^2B + AB^2 + B^3}{(A-B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)} =$$

$$= \frac{A^3 + A^2 + AB^2 + B^3}{A^4 - B^4} \text{ e, conseqüentemente,}$$

$$\frac{C}{A-B} = C \times \frac{1}{A-B} = C \times \frac{A^3 + A^2B + AB^2 + B^3}{A^4 - B^4}$$

Na fração $\frac{6}{\sqrt[4]{3}-1}$, $C = 6$, $A = \sqrt[4]{3}$ e $B = 1$.

Assim, temos que:

$$\frac{6}{\sqrt[4]{3}-1} = 6 \times \frac{(\sqrt[4]{3})^3 + (\sqrt[4]{3})^2 \times 1 + \sqrt[4]{3} \times 1^2 + 1^3}{(\sqrt[4]{3})^4 - 1^4} =$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{3} + 1}{3-1} = 3(\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{3} + 1)$$

3.6. Sabe-se que

$$\frac{1}{A-B} = \frac{A^2 + AB + B^2}{(A-B)(A^2 + AB + B^2)} = \frac{A^2 + AB + B^2}{A^3 - B^3}$$

Consequentemente: $\frac{C}{A-B} = C \times \frac{1}{A-B} = C \times \frac{A^2 + AB + B^2}{A^3 - B^3}$

Na fração $\frac{2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3}}$, temos que $C = 2$, $A = \sqrt[3]{4}$ e $B = -\sqrt[3]{3}$,

pelo que:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3}} = 2 \times \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} \times (-\sqrt[3]{3}) + (-\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{4})^3 - (-\sqrt[3]{3})^3} =$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}}{4 - (-3)} = 2 \times \frac{\sqrt[3]{2^3 \times 2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}}{7} =$$

$$= 2 \times \frac{2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}}{7} = \frac{2}{7}(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9})$$

4.1. $29 - 12\sqrt{5} = 20 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + 9 =$

$$= (\sqrt{20})^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + 3^2 =$$

$$= (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + 3^2 =$$

$$= (2\sqrt{5} - 3)^2$$

Como $2\sqrt{5} - 3 > 0$, temos:

$$\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2} = 2\sqrt{5} - 3$$

4.2. $\sqrt{52 - 16\sqrt{3}} = 2 - 4\sqrt{3}$

$$52 - 16\sqrt{3} = 48 - 2 \times 2 \times 4\sqrt{3} + 4 =$$

$$= (\sqrt{48})^2 - 2 \times 2 \times 4\sqrt{3} + 2^2 =$$

$$= (4\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times 4\sqrt{3} + 2^2 =$$

$$= (4\sqrt{3} - 2)^2$$

Como $4\sqrt{3} - 2 > 0$, temos:

$$\sqrt{52 - 16\sqrt{3}} = \sqrt{(4\sqrt{3} - 2)^2} = 4\sqrt{3} - 2$$

5.1. $\sqrt{44 + 24\sqrt{2}} = \sqrt{36 + 8 + 24\sqrt{2}} = \sqrt{36 + 24\sqrt{2} + 8}$

$$= \sqrt{6^2 + 24\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{(6 + 2\sqrt{2})^2} =$$

$$= 6 + 2\sqrt{2} \text{ dado que } 6 + 2\sqrt{2} > 0$$

Logo, $\sqrt{44 + 24\sqrt{2}} = 6 + 2\sqrt{2}$

5.2. $\sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{3}{4} - \sqrt{3}} =$

$$= \sqrt{\frac{4}{4} - \sqrt{3} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1 - \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \text{ como } 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \text{ vem que:}$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ pelo que } \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.1. O perímetro do triângulo equilátero é $\sqrt{180}$, pelo que o comprimento do seu lado é:

$$\frac{\sqrt{180}}{3} = \frac{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5}}{3} = \frac{2 \times 3\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}.$$

Determinemos, agora, a altura do triângulo.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$(2\sqrt{5})^2 = h^2 + (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow$$

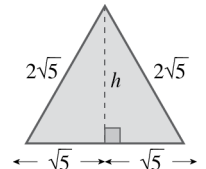
$$\Leftrightarrow 20 = h^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 15$$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{15}$.

Assim, a área do triângulo é dada por

$$\text{Área} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{15}}{2} = \sqrt{5} \times \sqrt{15} = \sqrt{5} \times \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{5^2 \times 3} = 5\sqrt{3}$$



6.2. O perímetro do triângulo equilátero é $\sqrt[4]{243}$, pelo que o comprimento do seu lado é:

$$\frac{\sqrt[4]{243}}{3} = \frac{\sqrt[4]{3^4 \times 3}}{3} = \frac{3\sqrt[4]{3}}{3} = \sqrt[4]{3}$$

Determinemos, agora, a altura do triângulo.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$(\sqrt[4]{3})^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{3^2} = h^2 + \frac{\sqrt[4]{3^2}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

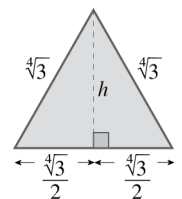
$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{4\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

Como $h > 0$:

$$h = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{\sqrt{3^2 \times 3}}}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$$

Área do triângulo:

$$A = \frac{\sqrt[4]{3} \times \frac{\sqrt[4]{27}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt[4]{3} \times \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2} = \frac{1}{4} \times \sqrt[4]{3^4} = \frac{3}{4}$$



$$\begin{aligned}
7.1. \quad & \sqrt{45-20\sqrt{5}} - \sqrt{84-32\sqrt{5}} = \\
& = \sqrt{25+20-20\sqrt{5}} - \sqrt{64+20-32\sqrt{5}} = \\
& = \sqrt{25-20\sqrt{5}+20} - \sqrt{64-32\sqrt{5}+20} = \\
& = \sqrt{5^2-20\sqrt{5}+(2\sqrt{5})^2} - \sqrt{(8-2\sqrt{5})^2} = \\
& = \sqrt{(5-2\sqrt{5})^2} - \sqrt{(8-2\sqrt{5})^2} = \\
& = (5-2\sqrt{5}) - (8-2\sqrt{5}) = \quad (5-2\sqrt{5} > 0 \text{ e } 8-2\sqrt{5} > 0) \\
& = 5-2\sqrt{5}-8+2\sqrt{5} = -3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7.2. \quad & \sqrt{37-20\sqrt{3}} - \sqrt{61-28\sqrt{3}} = -2 \\
& = \sqrt{25+12-20\sqrt{3}} - \sqrt{49+12-28\sqrt{3}} = \\
& = \sqrt{25-20\sqrt{3}+12} - \sqrt{49-28\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2} = \\
& = \sqrt{25-20\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2} - \sqrt{49-28\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2} = \\
& = \sqrt{(5-2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(7-2\sqrt{3})^2} = \\
& = (5-2\sqrt{3}) - (7-2\sqrt{3}) = \quad (5-2\sqrt{3} > 0 \text{ e } 7-2\sqrt{3} > 0) \\
& = 5-2\sqrt{3}-7+2\sqrt{3} = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7.3. \quad & \sqrt{72-32\sqrt{2}} - \sqrt{114-80\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \\
& = \sqrt{64+8-32\sqrt{2}} - \sqrt{64+50-80\sqrt{2}} = \\
& = \sqrt{64-32\sqrt{2}+8} - \sqrt{64-80\sqrt{2}+50} = \\
& = \sqrt{8^2-32\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2} - \sqrt{8^2-80\sqrt{2}+(5\sqrt{2})^2} = \\
& = \sqrt{(8-2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(8-5\sqrt{2})^2} = \\
& = (8-2\sqrt{2}) - (8-5\sqrt{2}) = \quad (8-2\sqrt{2} > 0 \text{ e } 8-5\sqrt{2} > 0) \\
& = 8-2\sqrt{2}-8+5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

8. O sólido gerado pelo trapézio $[ABOE]$ quando dá uma volta completa em torno da reta AD é um tronco do cone, cuja base é o círculo de centro A , raio igual a $\overline{AB}$ e altura $\overline{AE}$.

O volume deste tronco de cone pode ser determinado do modo seguinte:

Volume do tronco de cone = $V_1 - V_2$, sendo

- V_1 o volume do cone de vértice D e raio da base igual a $\overline{AB}$.
- V_2 o volume do cone de vértice D e raio da base igual a $\overline{EO}$.

Assim, vem que:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad V_1 &= \frac{\pi \times \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right)^2 \times \sqrt[4]{2}}{3} = \frac{\pi \times \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt[4]{2}}{3} = \\
&= \frac{\pi \sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{2}}{3} = \frac{\pi \sqrt[4]{8}}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad V_2 &= \frac{\pi \times \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt[4]{2}}{2}}{3} = \frac{\pi \times \frac{\sqrt[4]{2^2}}{2^2} \times \frac{\sqrt[4]{2}}{2}}{3} = \\
&= \frac{\pi \times \frac{\sqrt[4]{4}}{4} \times \frac{\sqrt[4]{2}}{2}}{3} = \frac{\pi \times \frac{\sqrt[4]{8}}{8}}{3} = \frac{\pi \times \sqrt[4]{8}}{24}
\end{aligned}$$

Logo, o volume do tronco do cone é dado por

$$\frac{\pi \times \sqrt[4]{8}}{3} - \frac{\pi \times \sqrt[4]{8}}{24} = \frac{8\pi \times \sqrt[4]{8}}{24} - \frac{\pi \times \sqrt[4]{8}}{24} = \frac{7\pi \times \sqrt[4]{8}}{24} = \frac{7\sqrt[4]{8}\pi}{24}$$

9. O cubo tem aresta igual a a unidades, pelo que o raio da esfera inscrita no cubo é $\frac{a}{2}$ e o raio da esfera circunscrita ao

cubo é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (metade do comprimento da diagonal espacial do cubo).

Sejam V_1 e V_2 o volume da esfera circunscrita ao cubo e o volume da esfera inscrita no cubo, respetivamente.

Assim, vem que:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad V_1 &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{a^3(\sqrt{3})^3}{2^3} = \\
&= \frac{4}{3}\pi \frac{a^3 \times 3\sqrt{3}}{8} = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{8} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

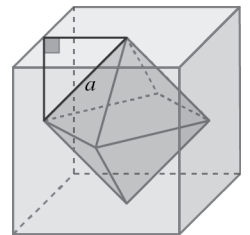
$$\begin{aligned}
\bullet \quad V_2 &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{a^3}{2^3} = \\
&= \frac{4}{3}\pi \frac{a^3}{8} = \frac{4\pi a^3}{24} = \frac{\pi a^3}{6}
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi a^3}{6}} = \frac{\cancel{\pi a^3} \sqrt{3}}{2} \times \frac{6}{\cancel{\pi a^3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

10. A área de cada face do cubo mede $b \text{ cm}^2$, pelo que a aresta do cubo mede $\sqrt{b} \text{ cm}$.

Seja a a medida da aresta do octaedro, em centímetros.

Observando a figura ao lado e pelo Teorema de Pitágoras, temos que:



$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{b}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{b}{4} + \frac{b}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2b}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{b}{2}$$

$$\text{Como } a > 0, \quad a = \sqrt{\frac{b}{2}}, \text{ ou seja, } a = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2b}}{2}.$$

Volume = $2 \times V_1$, sendo V_1 o volume de uma das duas pirâmides nos quais o octaedro pode ser decomposto.

$$\text{Volume} = 2 \times \frac{\left(\frac{\sqrt{2b}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{b}}{2}}{3}$$

(A base da pirâmide é um quadrado de lado igual à aresta do octaedro e a altura é igual a metade da aresta do cubo.)

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= 2 \times \frac{b}{2} \times \frac{\sqrt{b}}{2} = 2 \times \frac{b\sqrt{b}}{3} = \\ &= 2 \times \frac{b\sqrt{b}}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2b\sqrt{b}}{12} = \frac{b\sqrt{b}}{6} \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Ficha de teste 3

Pág. 24 e 25

1. (A) $\frac{1}{\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}} =$
 $= \frac{1}{\sqrt[3]{4^2 - (2\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16-8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$
 $= \frac{1}{2} \rightarrow \text{Verdadeira}$
- (B) $\frac{\frac{1}{3} \times (\sqrt[3]{3\sqrt{9}})^3}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{3} \times (\sqrt[3]{3 \times 3})^3}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{3} \times (\sqrt[3]{9})^3}{\sqrt{3}}$
 $= \frac{\frac{1}{3} \times (\sqrt[3]{3})^3}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{3} \times 3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \text{Verdadeira}$
- (C) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}}\right)^{-2} =$
 $= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}\right)^2 = \frac{8}{(\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2 + 2^2} =$
 $= \frac{8}{6+4\sqrt{2}} = \frac{8(6+4\sqrt{2})}{(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})} =$
 $= \frac{48-32\sqrt{2}}{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \frac{48-32\sqrt{2}}{36-32} = \frac{48-32\sqrt{2}}{4} =$
 $= 12-8\sqrt{2} \rightarrow \text{Falsa}$
- (D) $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}} = \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+2}}} =$
 $= \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}} = \sqrt{13+\sqrt{7+2}} =$
 $= \sqrt{13+\sqrt{9}} = \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow \text{Verdadeira}$

Resposta: (C)

$$\begin{aligned}2. \quad \sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt[3]{\frac{y}{x}} &= \sqrt{\frac{y}{xy^3}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt[6]{\frac{x^2}{y^2}} = \\ &= \sqrt[6]{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt[6]{\left(\frac{x}{y}\right)^{2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}\end{aligned}$$

Logo, o inverso de $\sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ é

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt[3]{\frac{y}{x}}} = \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{y} \times \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{yx^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{x}$$

Resposta: (B)

$$\begin{aligned}3. \quad \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-2}}} &= \frac{a \times \sqrt[n]{a^2}}{\sqrt[n]{a^{n-2}} \times \sqrt[n]{a^2}} = \frac{a \times \sqrt[n]{a^2}}{\sqrt[n]{a^{n-2} \times a^2}} = \frac{a \times \sqrt[n]{a^2}}{\sqrt[n]{a^n}} = \\ &= \frac{a \times \sqrt[n]{a^2}}{a} = \sqrt[n]{a^2}\end{aligned}$$

Resposta: (B)

$$\begin{aligned}4. \quad \frac{1}{\sqrt{2+a} - \sqrt{2-a}} - \frac{1}{\sqrt{2+a} + \sqrt{2-a}} &= \\ &= \frac{\sqrt{2+a} + \sqrt{2-a} - \sqrt{2+a} + \sqrt{2-a}}{(\sqrt{2+a} - \sqrt{2-a})(\sqrt{2+a} + \sqrt{2-a})} = \\ &= \frac{2\sqrt{2-a}}{(\sqrt{2+a})^2 - (\sqrt{2-a})^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{2-a}}{(2+a) - (2-a)} = \frac{2\sqrt{2-a}}{2+a-2+a} = \\ &= \frac{2\sqrt{2-a}}{2a} = \frac{\sqrt{2-a}}{a}\end{aligned}$$

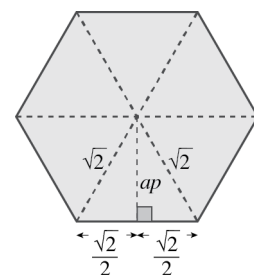
Resposta: (C)

$$\begin{aligned}5. \quad \text{Resposta: (C)} \\ 6. \quad \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{2}(5\sqrt{3}+2\sqrt{5})}{(5\sqrt{3}-2\sqrt{5})(5\sqrt{3}+2\sqrt{5})} = \\ &= \frac{5\sqrt{6}+2\sqrt{10}}{(5\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{5})^2} = \frac{5\sqrt{6}+2\sqrt{10}}{75-20} = \frac{5\sqrt{6}+2\sqrt{10}}{55} \\ 7. \quad 2x^6 - \sqrt{2}x^3 - 6 &= 0 \Leftrightarrow 2(x^3)^2 - \sqrt{2}x^3 - 6 = 0 \\ &\bullet \text{ Para } x = \sqrt[6]{\frac{9}{2}}: \\ &\quad 2\left(\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\right)^6 - \sqrt{2}\left(\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\right)^3 - 6 = \\ &\quad = 2\sqrt[6]{\left(\frac{9}{2}\right)^6} - \sqrt{2}\sqrt[6]{\left(\frac{9}{2}\right)^3} - 6 = \\ &\quad = 2 \times \frac{9}{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{9}{2}} - 6 = \\ &\quad = 9 - \sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} - 6 = 9 - 3 - 6 = 0 \\ &\bullet \text{ Para } x = -\sqrt[6]{2}: \\ &\quad 2 \times (-\sqrt[6]{2})^6 - \sqrt{2} \times (-\sqrt[6]{2})^3 - 6 = \\ &\quad = 2 \times \sqrt[6]{2^6} + \sqrt{2} \times \sqrt[6]{2^3} - 6 = \\ &\quad = 2 \times 2 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 6 = 4 + 2 - 6 = 0\end{aligned}$$

8. A base do prisma é um hexágono regular cujo perímetro é $6\sqrt{2}$, pelo que o lado do hexágono mede $\frac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$.

A altura da pirâmide é, também, igual a $\sqrt{2}$.Seja ap o apótema do hexágono, determinemos o seu comprimento.

Pelo Teorema de Pitágoras:



$$(\sqrt{2})^2 = ap^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ap^2 = 2 - \frac{2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ap^2 = \frac{8}{4} - \frac{2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ap^2 = \frac{6}{4},$$

$$\text{Como } ap > 0, ap = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Área do hexágono regular} = \frac{\text{Perímetro}}{2} \times \text{apótema} =$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{6\sqrt{12}}{4} = \frac{6\sqrt{2^2 \times 3}}{4} =$$

$$= \frac{6 \times 2\sqrt{3}}{4} = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Área da base da pirâmide} = \frac{\text{Área do hexágono regular}}{2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} = \text{Área } [ABCD]$$

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{\text{Área } [ABCD] \times \text{altura}}{3} =$$

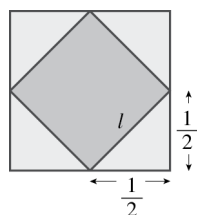
$$= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

9.

- Área da superfície do cubo = $6 \times \text{área da uma face} = 6 \times 1^2 = 6$
- Área da superfície do cuboctaedro = $6 \times \text{área de um quadrado} + 8 \times \text{área de um triângulo}$

Determinemos o comprimento do lado do quadrado (é igual ao comprimento do lado do triângulo).

Seja l esse valor.

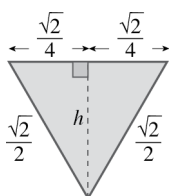


Pelo Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow l^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow l^2 = \frac{2}{4}$$

$$\text{Como } l > 0, l = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Área de um quadrado = $l^2 = \frac{1}{2}$
- Área de um triângulo:



Determinação da altura do triângulo:

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{4} = h^2 + \frac{2}{16} \Leftrightarrow h^2 = \frac{2}{4} - \frac{2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{8}{16} - \frac{2}{16} \Leftrightarrow h^2 = \frac{6}{16}$$

$$\text{Como } h > 0, h = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Área de um triângulo:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{8} = \frac{\sqrt{12}}{16} = \frac{2\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

- Área da superfície do cuboctaedro:

$$6 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{6}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{8} = 3 + \sqrt{3}$$

- Quociente pedido:

$$\frac{6}{3 + \sqrt{3}} = \frac{6(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{18 - 6\sqrt{3}}{3^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

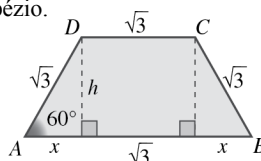
$$= \frac{18 - 6\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{18 - 6\sqrt{3}}{6} = 3 - \sqrt{3}$$

10. Vamos fazer um esquema do trapézio.

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \cos 60^\circ \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Perímetro do trapézio:

$$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} =$$

$$= 2x + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$P = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Área do trapézio:

$$A = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times h = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} \times 3}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{A área é } \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

Ficha para praticar 9

Págs. 26 e 27

1.1. $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

1.2. $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

1.3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$$1.4. \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$1.5. \frac{\sqrt[3]{3}}{-2} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{-8}} = \sqrt[3]{-\frac{3}{8}}$$

$$1.6. -\frac{3^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{125}} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{125}} = \sqrt[3]{-\frac{3}{125}}$$

$$2.1. \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{-\frac{1}{3}}$$

$$2.2. \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$2.3. \frac{1}{\sqrt[3]{50}} = \frac{1}{50^{\frac{1}{3}}} = 50^{-\frac{1}{3}}$$

$$2.4. \sqrt[6]{\frac{1}{125}} = \sqrt[6]{5^{-3}} = \sqrt[6]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{6}} = 5^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} 3.1. \quad 16^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{4}{25}\right)^{0,5} &= \\ &= (2^4)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{7^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^2 + \sqrt{\frac{1}{7^2}} - \sqrt{\frac{4}{25}} = \\ &= 4 + \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = 4 + \frac{1}{7} - \frac{2}{5} = \\ &= \frac{140}{35} + \frac{5}{35} - \frac{14}{35} = \frac{131}{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \quad 64^{\frac{1}{3}} + (0,01)^{\frac{1}{2}} - 16^{0,25} &= (4^3)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{1}{4}} = \\ &= 4 + \sqrt{\frac{1}{100}} - (2^4)^{\frac{1}{4}} = \\ &= 4 + \frac{1}{10} - 2 = 2 + \frac{1}{10} = \frac{20}{10} + \frac{1}{10} = \frac{21}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.3. \quad 243^{0,4} + 16^{0,75} - 27^{\frac{2}{3}} &= \\ &= (243)^{\frac{2}{5}} + (16)^{\frac{3}{4}} - (27)^{\frac{2}{3}} = (3^5)^{\frac{2}{5}} + (2^4)^{\frac{3}{4}} - (3^3)^{\frac{2}{3}} = \\ &= 3^2 + 2^3 - 3^2 = 2^3 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4. \quad \frac{2^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}}{3^{-3} \times (-2)^3} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} &= \\ &= \frac{2^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times (-2)^3} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{-\left(\frac{2}{3}\right)^3} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} = \\ &= -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}-3} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} = -1 \end{aligned}$$

$$4.1. \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$$

$$4.2. \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{3^{-1}} = 3^{-\frac{1}{6}}$$

$$4.3. \sqrt{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[12]{3^2} = 3^{\frac{2}{12}} = 3^{\frac{1}{6}}$$

$$4.4. \sqrt[4]{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[12]{9} = \sqrt[12]{3^2} = 3^{\frac{2}{12}} = 3^{\frac{1}{6}}$$

$$4.5. \sqrt{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{3^4} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} 4.6. \quad \frac{\sqrt{108}}{2} &= \frac{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3}}{2} = \frac{2 \times 3 \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} = \\ &= 3 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$4.7. \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^{-3}}} = \sqrt[6]{3^{-3}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{6}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} 4.8. \quad \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\sqrt[3]{3^3 + 3^3 + 3^3}} &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{\sqrt[3]{3 \times 3^3}} = \frac{3^3}{\sqrt[3]{3^4}} = \frac{3^3}{3^{\frac{4}{3}}} = \\ &= 3^{3-\frac{4}{3}} = 3^{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.1. \quad 4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{32} &= (2^2)^{\frac{1}{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{2^5} = \\ &= 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}} = 2^{\frac{14}{3}} \\ \text{Nota: } 2^{\frac{14}{3}} &= 16\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^{14}} = \sqrt[3]{2^{12} \times 2^2} = \\ &= \sqrt[3]{(2^4)^3 \times 2^2} = 2^4 \sqrt[3]{2^2} = 16\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.2. \quad 3^{\frac{3}{2}} \times \left[\frac{2^{1,4}}{5^{1,4}} \times 0,4^{0,6} : \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \right] &= 3^{\frac{3}{2}} \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{1,4} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{0,6} : \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \right] = \\ &= 3^{\frac{3}{2}} \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{1,4+0,6} : \left(\frac{4}{5}\right)^2 \right] = \\ &= 3^{\frac{3}{2}} \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{4}{5}\right)^2 \right] = 3^{\frac{3}{2}} \times \left[\left(\frac{2}{5} : \frac{4}{5}\right)^2 \right] = \\ &= 3^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{4}\right)^2 = 3^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{4} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Nota: } \frac{3^{\frac{3}{2}}}{4} = \frac{\sqrt{3^3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} 5.3. \quad \frac{\sqrt{0,25} + 4 \times 0,5^4 + 8^{-\frac{2}{3}} + (\sqrt{3})^0}{(\sqrt{\sqrt{3}})^4 \times \left(2^{-1} : 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}} &= \frac{\sqrt{\frac{1}{4}} + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} + 1}{(\sqrt[4]{3})^4 \times \left(2^{-1 - (-\frac{1}{2})}\right)^{-1}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{16} + \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} + 1}{3 \times \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}{3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.4. \quad \frac{(2^2 \times 5)^{\frac{1}{2}} - \left(3 \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{400} + \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}} &= \frac{20^{\frac{1}{2}} - \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{2^4 \times 5^2} + \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{20} - 3}{2\sqrt{5} + 3} = \\ &= \frac{2\sqrt{5} - 3}{2\sqrt{5} + 3} = \frac{(2\sqrt{5} - 3)^2}{(2\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3)} = \\ &= \frac{20 - 12\sqrt{5} + 9}{20 - 9} = \frac{29 - 12\sqrt{5}}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.5. \quad \frac{6^{-\frac{1}{3}} : 6^{\frac{2}{3}} \times \left(3 \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^2}{3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}} &= \frac{6^{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \times \left(3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right)^2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \\
 &= \frac{6^{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \times 3^2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{6} \times 27}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{9(2\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{(2\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2})} = \\
 &= \frac{18\sqrt{3} + 18\sqrt{2}}{(2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{18\sqrt{3} + 18\sqrt{2}}{12 - 8} = \\
 &= \frac{18\sqrt{2} + 18\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.6. \quad \frac{4^{-\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{2^{\frac{2}{3}} : \sqrt[6]{4}} &= \frac{4^{-\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{2^4} \times 2^2}{2^{\frac{2}{3}} : \sqrt[6]{2^2}} = \frac{4^{-\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 2^2}{2^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{2}{6}}} = \\
 &= \frac{(2^2)^{-\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 2^2}{2^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{-\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 2^2}{2^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}} = \frac{2^2}{2^{\frac{1}{3}}} = \\
 &= 2^{2 - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.1. \quad a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{-2} : a^{-\frac{1}{3}} &= a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - 2 - (-\frac{1}{3})} = a^{\frac{11}{6} - 2} = a^{\frac{11}{6} - \frac{12}{6}} = a^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.2. \quad a^{-a-1} \times a^{2a+1} \times b^a &= a^{-a-1+2a+1} \times b^a = \\
 &= a^a \times b^a = (a \times b)^a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.3. \quad \left(\sqrt[4]{a} \times \frac{a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{a^5}}\right) : \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{a^{-2}} &= \\
 &= \left(\sqrt[4]{a} \times \frac{a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{a^5}}\right) : \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{a^{-2}} = \left(a^{\frac{1}{4}} \times \frac{a^{\frac{7}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}}\right) : a^{\frac{3}{2} - (-2)} = \\
 &= \left(a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{7}{6} - \frac{5}{6}}\right) : a^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{3}}\right) : a^{\frac{1}{2}} = \\
 &= a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{12} - \frac{6}{12}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.4. \quad \frac{\sqrt[3]{b} \times b^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{b^2}} \times \sqrt[3]{16ab} &= \frac{\sqrt[6]{b} \times b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{2}{3}}} \times \sqrt[3]{16ab} = \\
 &= \frac{b^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}}{b^{\frac{2}{3}}} \times \sqrt[3]{16ab} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} \times \sqrt[3]{16ab} = \\
 &= \frac{b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} \times \sqrt[3]{16ab} = b^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{16ab} = \\
 &= b^{-\frac{1}{3}} \times (16ab)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \times (16ab)^{\frac{1}{3}} = \\
 &= \left(\frac{1}{b} \times 16ab\right)^{\frac{1}{3}} = (16a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^3 \times 2a} = 2\sqrt[3]{2a}
 \end{aligned}$$

$$7.1. \quad 3^{2x} + 3^{x+1} = (3^x)^2 + 3^x \times 3^1 = (3^{-x})^{-2} + (3^{-x})^{-1} \times 3$$

Como $3^{-x} = 2$, substituindo na expressão, temos que:

$$2^{-2} + 2^{-1} \times 3 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned}
 7.2. \quad 3 \times 9^{x-1} + \sqrt[4]{3^{8x}} &= 3 \times (3^2)^{x-1} + 3^{\frac{8x}{4}} = 3 \times (3^{x-1})^2 + (3^x)^2 = \\
 &= 3 \times \left(\frac{3^x}{3}\right)^2 + (3^x)^{-2} = 3 \times \frac{(3^x)^2}{3^2} + (3^x)^{-2} = \\
 &= \frac{(3^x)^{-2}}{3} + (3^x)^{-2}
 \end{aligned}$$

Como $3^{-x} = 2$, substituindo na expressão, temos:

$$\frac{2^{-2}}{3} + 2^{-2} = \frac{4}{3} \times 2^{-2} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 7.3. \quad \left(\frac{1}{\sqrt[27]{7}}\right)^{x+1} &= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3^3}}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}\right)^{x+1} = \left[\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}\right]^{x+1} = \left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{x+1} = \\
 &= (3^{x+1})^{-\frac{3}{2}} = (3^x \times 3)^{-\frac{3}{2}} = (3^x)^{-\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}} = (3^{-x})^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

Como $3^{-x} = 2$, substituindo na expressão, temos que

$$\begin{aligned}
 2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} &= 2^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(2 \times \frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \\
 &= \sqrt{\frac{2^3 \times 2}{3^3 \times 3}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{9}
 \end{aligned}$$

$$8. \quad \text{Sabemos que } \overline{AD} = 3 \times 2^{\frac{1}{4}} \text{ e } \overline{AE} = \overline{CF} = \frac{1}{3} \overline{AD}.$$

Logo:

$$\overline{AE} = \overline{CF} = \frac{1}{3} \times 3 \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \text{ e}$$

$$\overline{EB} = \overline{BF} = 3 \times 2^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} = 2 \times 2^{\frac{1}{4}}$$

Área $\Delta[DEF]$ = Área do quadrado $[ABCD]$ – Área $\Delta[ADE]$ – Área $\Delta[CDF]$ – Área $\Delta[BEF]$

• Área do quadrado $[ABCD]$ =

$$\left(3 \times 2^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 3^2 \times \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 9 \times 2^{\frac{1}{2}} = 9 \times \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \text{Área } \Delta[ADE] &= \frac{\overline{AE} \times \overline{AD}}{2} = \frac{2^{\frac{1}{4}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{2^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \times 3}{2} = \\
 &= \frac{2^{\frac{1}{2}} \times 3}{2} = \frac{\sqrt{2} \times 3}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \text{Área } \Delta[BEF] &= \frac{\overline{BE} \times \overline{BF}}{2} = \\
 &= \frac{\left(2 \times 2^{\frac{1}{4}}\right) \left(2 \times 2^{\frac{1}{4}}\right)}{2} = \frac{\left(2 \times 2^{\frac{1}{4}}\right)^2}{2} = \\
 &= \frac{4 \times 2^{\frac{2}{4}}}{2} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Assim, área $\Delta[DEF]$ =

$$= 9\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Ficha para praticar 10

Págs. 28 e 29

$$\begin{aligned}
 1.1. \quad & 0,5^{-2} - \left(0,2^{-3} - 0,1^{-2} \times \left(0,25^{-0,5} - \left(\frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \\
 & = 0,5^{-2} - \left(0,2^{-3} - 0,1^{-2} \times \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{-0,5} - \sqrt{\frac{1}{9}} \right) \right) = \\
 & = 0,5^{-2} - \left(0,2^{-3} - 0,1^{-2} \times \left(4^{0,5} - \frac{1}{3} \right) \right) = \\
 & = 0,5^{-2} - \left(0,2^{-3} - 0,1^{-2} \times \left(\sqrt{4} - \frac{1}{3} \right) \right) = \\
 & = 0,5^{-2} - \left(0,2^{-3} - 0,1^{-2} \times \left(2 - \frac{1}{3} \right) \right) = \\
 & = 0,5^{-2} - \left(0,2^{-3} - 0,1^{-2} \times \frac{5}{3} \right) = \\
 & = \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} - \left(\left(\frac{1}{5} \right)^{-3} - \left(\frac{1}{10} \right)^{-2} \times \frac{5}{3} \right) = \\
 & = 2^2 - \left(5^3 - 10^2 \times \frac{5}{3} \right) = 4 - \left(125 - 100 \times \frac{5}{3} \right) = \\
 & = 4 - \left(\frac{375}{3} - \frac{500}{3} \right) = 4 - \left(-\frac{125}{3} \right) = \frac{12}{3} + \frac{125}{3} = \frac{137}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.2. \quad & \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{8}{\frac{3}{\left(\frac{7}{2} - 2 \right)}} \right)^{-1}}} \times \frac{\sqrt[3]{16} \times 4^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{8}{\frac{3}{\frac{3}{2}}} \right)^{-1}}} \times \frac{\sqrt[3]{4^2} \times 4^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}} = \\
 & = \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{16}{9} \right)^{-1}}} \times \frac{4^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{16}}} \times \frac{4^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}} = \\
 & = \frac{3}{\frac{3}{4}} \times \frac{4}{8^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{3} \times \frac{4}{\sqrt{8}} = 4 \times \frac{4}{2\sqrt{2}} = \\
 & = \frac{16}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.3. \quad & \sqrt[3]{\frac{5^2 \times 0,1^6 \times 75 \times 10^6}{10}} : \frac{5 \times \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{10} \right)^{-4}} \times (-0,1)^0 = \\
 & = \sqrt[3]{\frac{5^2 \times \left(\frac{1}{10} \right)^6 \times 10^6 \times 75}{10}} : \frac{5 \times \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} \right)}}{10^4} \times 1 = \\
 & = \sqrt[3]{\frac{5^2 \times \left(\frac{1}{10} \times 10 \right)^6 \times 75}{10}} : \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}}}{10^4} = \\
 & = \sqrt[3]{\frac{5^2 \times 1 \times 75}{10}} : \frac{\sqrt[3]{\frac{375}{2}}}{10^4} = \sqrt[3]{\frac{375}{2}} : \frac{\sqrt[3]{375}}{10^4} = \\
 & = \sqrt[3]{\frac{375}{2}} \times \frac{10^4}{\sqrt[3]{375}} = 10^4 = 10\,000
 \end{aligned}$$

$$2.1. \quad \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}}$$

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad & \sqrt{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt{32} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt{2^5} = \sqrt[4]{2} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{1}{4} + \frac{5}{2}} = 2^{\frac{11}{4}} \\
 & = 2^{\frac{1}{4} \times \frac{5}{2}} = 2^{\frac{5}{8}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.3. \quad & \frac{1}{\left(\sqrt[6]{\frac{1}{8}} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2^3}} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[6]{2^{-3}} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(2^{-\frac{3}{6}} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{-\frac{3}{12}}} = \\
 & = 2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.1. \quad & 4^{-2x} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{x+1} = 4^{-2x} \times 4^{-x-1} = 4^{-2x+(-x-1)} = 4^{-3x-1} = \\
 & = 4^{-3x} \times 4^{-1} = (4^x)^{-3} \times 4^{-1}
 \end{aligned}$$

Como $4^x = 5$, substituindo na expressão, temos que:

$$5^{-3} \times 4^{-1} = \frac{1}{125} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{500}$$

$$3.2. \quad \frac{16^{-x}}{\sqrt[3]{4^x}} = \frac{(4^2)^{-x}}{4^{\frac{x}{3}}} = \frac{(4^x)^{-2}}{(4^x)^{\frac{1}{3}}} = (4^x)^{-2-\frac{1}{3}} = (4^x)^{-\frac{7}{3}}$$

Como $4^x = 5$, substituindo na expressão, temos que:

$$5^{-\frac{7}{3}} = 5^{\frac{2}{3} - \frac{9}{3}} = 5^{\frac{2}{3} - 3} = \frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^3} = \frac{\sqrt[3]{25}}{125}$$

$$3.3. \quad 8^x = (\sqrt[3]{64})^x = (\sqrt[3]{4^3})^x = \left(4^{\frac{3}{3}} \right)^x = (4^x)^{\frac{3}{3}}$$

Como $4^x = 5$, substituindo na expressão, temos que

$$5^{\frac{3}{3}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

4.1. O tetraedro não é regular, uma vez que, por exemplo, $\overline{EG} \neq \overline{EF}$.4.2. Seja a a medida da aresta do cubo.Volume do cubo = a^3 Volume do tetraedro = $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura} =$

$$= \frac{1}{3} \times \text{área } \Delta[EFG] \times \overline{BF} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{a \times a}{2} \times a = \frac{a^3}{6}$$

A razão pedida é igual a $\frac{a^3}{\frac{a^3}{6}} = a^3 \times \frac{6}{a^3} = 6$ 5.1. Volume do cilindro = área da base $\times$ altura =

$$= \pi \times \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}} \right)^2 \times 4 \times \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \pi \times 3^2 \times \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^2 \times 12 \times 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 9\pi \times 2 \times 12 \times 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 216\pi \times 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 216\pi\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\text{Área total do cilindro} &= 2 \times \text{Área da base} + \text{Área lateral} = \\ &= 2 \times \pi \times \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2\pi \times \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}}\right) \times 4 \times \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= 2 \times \pi \times 3^2 \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 6\pi \times 2^{\frac{1}{2}} \times 12 \times 2^{\frac{1}{2}} = \\ &= 18\pi \times 2 + 72\pi \times 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 36\pi + 144\pi = 180\pi\end{aligned}$$

Volume do cilindro: $216\pi\sqrt{2} \text{ cm}^3$

Área total do cilindro: $180\pi \text{ cm}^2$

- 5.2. Sejam V_A o volume do cone de vértice P e cujo ponto A é o centro da sua base e V_B o volume do cone de vértice P e cujo ponto B é o centro da sua base.

$$V_A = \frac{\pi \times \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times \overline{AP}}{3} = \frac{18\pi \times \sqrt{32}}{3} =$$

$$= \frac{18\pi \times 4\sqrt{2}}{3} = \frac{72\pi\sqrt{2}}{3} = 24\pi\sqrt{2}$$

$$V_B = \frac{\pi \times \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times \overline{BP}}{3}$$

$$\overline{BP} = \overline{AB} - \overline{AP} = 4 \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}} - \sqrt{32} = 12\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$V_B = \frac{18\pi \times 8\sqrt{2}}{3} = \frac{144\pi\sqrt{2}}{3} = 48\pi\sqrt{2}$$

- 5.3. Designando por a a altura de um dos cones, a altura do outro

cone é $4 \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}} - a$, ou seja, $12\sqrt{2} - a$.

Tem-se:

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times a = \frac{1}{3} \times \pi \times 18 \times a = 6\pi a$$

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{1}{3} \times \pi \times \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times (12\sqrt{2} - a) = \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times 18 \times (12\sqrt{2} - a) = 6\pi(12\sqrt{2} - a) = \\ &= 72\pi\sqrt{2} - 6\pi a\end{aligned}$$

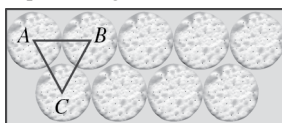
A soma dos volumes dos dois cones é igual a:

$$V_1 + V_2 = 6\pi a + (72\pi\sqrt{2} - 6\pi a) = 72\pi\sqrt{2}$$

- 6.1. O comprimento da caixa é igual a $10r$ (diâmetro da base $\times 5$) e a altura da caixa é quadrupla do diâmetro da base, pelo que é igual a $8r$.

Determinemos, agora, a medida da largura da caixa.

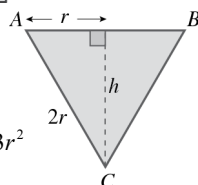
Efetuada o esquema seguinte:



verificamos que o triângulo $[ABC]$ é equilátero, de lado igual a $2r$.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$(2r)^2 = r^2 + h^2 \Leftrightarrow 4r^2 = r^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 3r^2$$



Como $h > 0$, $h = \sqrt{3r^2}$, ou seja $h = \sqrt{3}r$.

Assim, a largura da caixa é igual a $\sqrt{3}r + 2r$

Volume da caixa = comprimento $\times$ largura $\times$ altura =

$$= 10r \times (\sqrt{3}r + 2r) \times 8r = 80(\sqrt{3} + 2)r^3$$

- 6.2. Substituindo r por $\sqrt[3]{9}$ na expressão do volume da caixa, tem-se

$$\text{Volume da caixa} = 80(\sqrt{3} + 2)(\sqrt[3]{9})^3 =$$

$$80(\sqrt{3} + 2) \times 9 = 720(\sqrt{3} + 2) =$$

$$= 720\sqrt{3} + 1440$$

Ficha de teste 4

Pág. 30 e 31

1. O inverso de a é $\frac{1}{a}$, pelo que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \frac{a}{x^2 - y^2} = \frac{1}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{\frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2}} = \\ &= \frac{x^2 y^2}{y^2 - x^2} = \\ &= \frac{x^2 y^2}{(y - x)(y + x)}\end{aligned}$$

Resposta: (D)

$$\begin{aligned}2. \quad \sqrt[3]{\left(\frac{1}{25}\right)^2} : \frac{\sqrt[3]{5^{12}}}{0,2^3} &= \sqrt[3]{\left(\frac{1}{5^2}\right)^2} : \frac{2 \times \sqrt[3]{5^{12}}}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \\ &= \sqrt[3]{(5^{-2})^2} : \frac{6 \sqrt[3]{5^{12}}}{(5^{-1})^3} = \sqrt[3]{5^{-4}} : \frac{5^{\frac{12}{6}}}{5^{-3}} = \\ &= 5^{-\frac{4}{3}} : \frac{5^2}{5^{-3}} = 5^{-\frac{4}{3}} : 5^{2-(-3)} = \\ &= 5^{-\frac{4}{3}} : 5^5 = 5^{-\frac{4}{3}-5} = 5^{-\frac{19}{3}}\end{aligned}$$

Resposta: (A)

$$\begin{aligned}3. \quad (\sqrt{8} + \sqrt{2} + 1)^2 &= (2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1)^2 = \\ &= (3\sqrt{2} + 1)^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2 \times 3\sqrt{2} + 1 = \\ &= 18 + 6\sqrt{2} + 1 = 19 + 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

Assim, $a = 19$ e $b = 6$.

Resposta: (C)

$$\begin{aligned}4. \quad \frac{a^{-\frac{1}{9}} \times (\sqrt[3]{a})^{-2}}{-\frac{1}{a^{-2}}} : \left(-\frac{1}{a}\right)^2 &= \frac{a^{-\frac{1}{9}} \times \sqrt[3]{a^{-2}}}{-a^2} : \frac{1}{a^2} = \frac{a^{-\frac{1}{9}} \times a^{-\frac{2}{3}}}{-a^2} : \frac{1}{a^2} = \\ &= \frac{a^{-\frac{1}{9} + (-\frac{2}{3})}}{-a^2} \times a^2 = \frac{a^{-\frac{1}{9} - \frac{2}{3}}}{-1} = -a^{-\frac{7}{9}} = -\sqrt[9]{a^{-7}} = \sqrt[9]{-a^{-7}}\end{aligned}$$

Resposta: (C)

$$5. \quad \overline{AB} = 6 \times 4^{\frac{1}{4}} = 6 \times (2^2)^{\frac{1}{4}} = 6 \times 2^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}$$

$$\overline{CD} = 3\sqrt[6]{8} = 3\sqrt[6]{2^3} = 3\sqrt{2}$$

- Área do retângulo $= \overline{AB} \times \overline{AD} = 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 18 \times 2 = 36$

- Perímetro do retângulo $= 2 \times \overline{AB} + 2 \times \overline{AD} = 2 \times 6\sqrt{2} + 2 \times 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 72 + 18 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{90} \Leftrightarrow \overline{AC} = 3\sqrt{10}$$

- $\overline{AB} = 6\sqrt{2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 2 \times \overline{AD}$

Resposta: (B)

6.1. Substituindo, na equação, x por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3+2\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Logo, o número de ouro é solução da equação $x^2 = x + 1$

6.2. a) $\phi^4 = 3\phi + 2$, substituindo ϕ por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 = 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]^2 = \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)^2 = \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + \frac{4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9+6\sqrt{5}+5}{2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{14+6\sqrt{5}}{2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

b) $\phi^5 = \phi^4 + \phi^3$

Já vimos em 6.1. que $\phi^2 = \phi + 1$.

Multiplicando os dois membros da equação por

ϕ temos:

$$\phi^3 \phi^2 = \phi^3 (\phi + 1) \Leftrightarrow \phi^5 = \phi^4 + \phi^3$$

c) $\phi = \frac{1}{\phi} + 1$, substituindo ϕ por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tem-se:

$$\phi = \frac{1}{\phi} + 1 = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + 1 = \frac{2}{1+\sqrt{5}} + 1 =$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} + 1 = \frac{2-2\sqrt{5}}{1^2 - (\sqrt{5})^2} + 1 =$$

$$= \frac{2-2\sqrt{5}}{1-5} + 1 = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} + 1 =$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} =$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}+2}{2} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

7.

• Volume do cubo = (aresta)³, pelo que:

$$(aresta)^3 = 2 \Leftrightarrow aresta = \sqrt[3]{2}$$

• Volume da pirâmide = $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura} =$

$$= \frac{1}{3} \times \text{área} [ABCD] \times \text{altura}$$

• Área $[ABCD] = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2}$

($[ABCD]$, sendo um quadrado, é um losango)

$$\text{Área} [ABCD] = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

Seja h a altura da pirâmide.

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \times h = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{4}}{6} \times h = \frac{5}{6} \Leftrightarrow h = \frac{5}{6} \times \frac{6}{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{5}{\sqrt[3]{2^2}} \Leftrightarrow h = \frac{5}{2^{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow h = 5 \times 2^{-\frac{2}{3}}$$

8.

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{a^5}}{(\sqrt{b})^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{-1} \times \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{7}{4}}}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{5}{4}}}{\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{-1} \times a^{\frac{7}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}} =$$

$$\frac{a^{\frac{3}{2} + \frac{5}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}} : \frac{a^{-1 + \frac{7}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{11}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}} : \frac{a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{11}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}} \times \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} =$$

$$= a^{\frac{11}{4} - \frac{3}{4}} \times b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} =$$

$$= a^2 \times b^0 = a^2 b$$

9.

Área do trapézio $= \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \text{altura}$

- $\overline{AB} = 4\sqrt[6]{72} = 4\sqrt[6]{2^3 \times 3^2} = 4 \times (2^3 \times 3^2)^{\frac{1}{6}} =$

$$= 4 \times (2^3)^{\frac{1}{6}} \times (3^2)^{\frac{1}{6}} = 4 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 4 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}$$

- $\overline{DC} = 2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2^{1 + \frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

- $\overline{AD} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{3} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

- Determinemos a altura, h , do trapézio.

$$\overline{EF} = \overline{DC} \text{ e } \overline{AE} = \overline{FB}, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned}\overline{AE} &= \frac{\overline{AB} - \overline{EF}}{2} = \frac{1}{2} \left(4 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} - 4 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AD}^2 = h^2 + \overline{AE}^2 \Leftrightarrow \left(2 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \right)^2 = h^2 + \left(2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 5 \times 3^{\frac{2}{3}} = h^2 + 2 \times 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 \times 3^{\frac{2}{3}} = h^2 + 2 \times 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 20 \times 3^{\frac{2}{3}} - 2 \times 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow h^2 = 18 \times 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{18} \times \sqrt{3^{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow h = 3\sqrt{2} \times 3^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

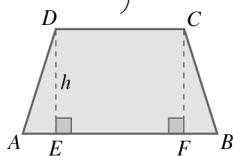
$$\Leftrightarrow h = 3 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}$$

Área do trapézio =

$$= \frac{4 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} + 2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{2} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{6 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{2} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(3 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \right)^2 = 9 \times 2 \times 3^{\frac{2}{3}} = 18\sqrt[3]{9}$$



Pela regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 2 & -7 & 3 \\ & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 + 7x + 3 = (x-3)(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 7x + 3) : (x-3) = 2x-1$$

Donde $C(x) = 2x-1$.

3.1.

$$\begin{array}{r|rr} x^3 + 3x^2 - 2x + 1 & x-2 \\ -x^3 + 2x^2 & x^2 + 5x + 8 \\ \hline 5x^2 - 2x + 1 & \\ -5x^2 + 10x & \\ \hline 8x + 1 & \\ -8x + 16 & \\ \hline 17 & \end{array}$$

Polinómio-quociente: $x^2 + 5x + 8$

Polinómio-resto: 17

3.2.

$$\begin{array}{r|rr} x^3 - 3x^2 + 8x + 0 & x+1 \\ -x - x^2 & x^2 - 4x + 12 \\ \hline -4x^2 + 8x + 0 & \\ 4x^2 + 4x & \\ \hline 12x + 0 & \\ -12x - 12 & \\ \hline -12 & \end{array}$$

Polinómio-quociente: $x^2 - 4x + 12$

Polinómio-resto: -12

3.3.

$$\begin{array}{r|rr} x^5 + 3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 & x^2 + 3 \\ -x^5 & x^3 + 3x^2 - 3x - 11 \\ \hline 3x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 0x + 1 & \\ -3x^4 & -9x^2 \\ \hline -3x^3 - 11x^2 + 0x + 1 & \\ 3x^3 & +9x \\ \hline -11x^2 + 9x + 1 & \\ 11x^2 & +33 \\ \hline 9x + 34 & \end{array}$$

Polinómio-quociente: $x^3 + 3x^2 - 3x - 11$

Polinómio-resto: $9x + 34$

3.4.

$$\begin{array}{r|rr} -x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^2 - 6 \\ x^5 & -x^3 - 10x \\ \hline -10x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & \\ 10x^3 & -60x \\ \hline -60x + 1 & \end{array}$$

Polinómio-quociente: $-x^3 - 10x$

Polinómio-resto: $-60x + 1$

3.5.

$$\begin{array}{r|rr} 2x^6 + 0x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 0 & x^3 + x \\ -2x^6 & 2x^3 - x \\ \hline -x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 0 & \\ x^4 & +x^2 \\ \hline x^2 - x + 0 & \end{array}$$

Polinómio-quociente: $2x^3 - x$

Polinómio-resto: $x^2 - x$

Ficha para praticar 11

Págs. 32 e 33

1.1. $A(x) + B(x) + C(x) =$

$$= x^3 + 2x^2 - 3 + 2x^5 - x + 4x^5 - x^2 + 1 =$$

$$= 6x^5 + x^3 + x^2 - x - 2$$

O polinómio tem grau 5 e é incompleto.

1.2. $A(x) \times C(x) = (x^3 + 2x^2 - 3) \times (4x^5 - x^2 + 1) =$

$$= 4x^8x^5 + x^3 + 8x^7 - 2x^4 + 2x^2 - 12x^5 + 3x^2 - 3 =$$

$$= 4x^8 + 8x^7 - 13x^5 - 2x^4 + x^3 + 5x^2 - 3$$

O polinómio tem grau 8.

1.3. O polinómio $R(x) \times S(x)$ tem grau $n + m$.

O grau do polinómio $R(x) \times S(x)$ é igual à soma do grau do polinómio $R(x)$ com o grau do polinómio $S(x)$.

2.1. $A(x) \times B(x) = (x^2 + 6x + 8) \times (2x^2 - 74 + 3) =$

$$= 2x^4 - 74x^3 + 3x^2 + 12x^3 - 42x^2 +$$

$$+ 18x + 16x^2 - 56x + 24 =$$

$$= 2x^4 + 5x^3 - 23x^2 - 38x + 24$$

2.2. $A(x) + C(x) = 2x - 1 \Leftrightarrow C(x) = 2x - 1 - A(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow C(x) = 2x - 1 - (x^2 + 6x + 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = 2x - 1 - x^2 - 6x - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = -x^2 - 4x - 9$$

2.3. $B(x) = C(x) \times (x-3) \Leftrightarrow C(x) = B(x) : (x-3)$

$$\Leftrightarrow C(x) = (2x^2 - 7x + 3) : (x-3)$$

3.6.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 0x^2 - x + 1 & 3x - 1 \\
 \hline
 -x^3 + \frac{x^2}{3} & \frac{x^2}{3} + \frac{x}{9} - \frac{8}{27} \\
 \hline
 \frac{x^2}{3} - x + 1 & \\
 \hline
 -\frac{x^2}{3} + \frac{x}{9} & \\
 \hline
 \frac{-8x}{9} + 1 & \\
 \hline
 \frac{8x}{9} - \frac{8}{27} & \\
 \hline
 \frac{19}{27} &
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $\frac{x^2}{3} + \frac{x}{9} - \frac{8}{27}$ Polinómio-resto: $\frac{19}{27}$

3.7.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + x^2 + 0x - 2 & 3x + 2 \\
 \hline
 -2x^3 - \frac{4}{3}x^2 & \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{2}{27} \\
 \hline
 -\frac{1}{3}x^2 + 0x - 2 & \\
 \hline
 \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^2 & \\
 \hline
 \frac{2}{9}x - 2 & \\
 \hline
 -\frac{2}{9}x - \frac{4}{27} & \\
 \hline
 -\frac{58}{27} &
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{2}{27}$ Polinómio-resto: $-\frac{58}{27}$

3.8.

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{x^4}{3} + 0x^3 - x^2 + 0x + \frac{1}{2} & x^2 + x - 3 \\
 \hline
 -\frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{3} + x^2 & \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \\
 \hline
 -\frac{x^3}{3} + 0x^2 + 0x + \frac{1}{2} & \\
 \hline
 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} - x & \\
 \hline
 \frac{x^2}{3} - x + \frac{1}{2} & \\
 \hline
 -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + 1 & \\
 \hline
 -\frac{4x}{3} + \frac{3}{2} &
 \end{array}$$

Quociente: $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$ Resto: $-\frac{4x}{3} + \frac{3}{2}$

4.1.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \\
 4 & 8 \ 32 \ 116 \ 464 \\
 \hline
 & 2 \ 8 \ 29 \ 116 \ 465
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $2x^3 + 8x^2 + 29x + 116$

Polinómio-resto: 465

4.2.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \\
 -3 & -6 \ 18 \ -45 \ 135 \\
 \hline
 & 2 \ -6 \ 15 \ -45 \ 136
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $2x^3 - 6x^2 + 15x - 45$

Polinómio-resto: 136

4.3.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \\
 0 & 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 \hline
 & 2 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $2x^3 - 3x$

Polinómio-resto: 1

4.4. $B(x) = 4x - 8 = 4(x - 2)$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \\
 2 & 4 \ 8 \ 10 \ 20 \\
 \hline
 & 2 \ 4 \ 5 \ 10 \ 21
 \end{array}$$

Polinómio-quociente:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + 5x + 10}{4} = \frac{x^3}{2} + x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$$

Polinómio-resto: 21

4.5. $B(x) = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \\
 -\frac{1}{2} & -1 \ \frac{1}{2} \ \frac{5}{4} \ -\frac{5}{8} \\
 \hline
 & 2 \ -1 \ -\frac{5}{2} \ \frac{5}{4} \ \frac{3}{8}
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $\frac{2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}}{2} = x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}$ Polinómio-resto: $\frac{3}{8}$

4.6.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \\
 1 & 2 \ 2 \ -1 \ -1 \\
 \hline
 & 2 \ 2 \ -1 \ -1 \ 0
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $2x^3 + 2x^2 - x - 1$

Polinómio-resto: 0

5.1.

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \ -1 \ 2 \ 6 \\
 -2 & -2 \ 6 \ -16 \\
 \hline
 & 1 \ -3 \ 8 \ -10
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $\frac{x^2 - 3x + 8}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 4$

Polinómio-resto: -10

5.2.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ -\sqrt{2} & & -\sqrt{2} & 2 & 3\sqrt{2} & -6 \\ \hline & 1 & -\sqrt{2} & -3 & 3\sqrt{2} & -2 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $x^3 - \sqrt{2}x^2 - 3x + 3\sqrt{2}$ Polinómio-resto: -2

5.3.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & -1 & 0 & 8 & 0 & -10 & 0 \\ -3 & & 3 & -9 & 3 & -9 & 57 \\ \hline & -1 & 3 & -1 & 3 & -19 & 57 \end{array}$$

 $B(x) = 3x + 9 \Leftrightarrow B(x) = 3(x + 3)$

Polinómio-quociente:

$$\frac{-x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 19}{3} = -\frac{x^4}{3} + x^3 - \frac{x^2}{3} + x - \frac{19}{3}$$

Polinómio-resto: 57

5.4.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{7}{27} \\ \hline & 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & \frac{61}{27} \end{array}$$

Polinómio-quociente: $2x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{7}{9}$ Polinómio-resto: $\frac{61}{27}$

5.5.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & -\frac{13}{32} \\ \hline & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{13}{16} & -\frac{13}{32} \end{array}$$

Polinómio-quociente: $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{13}{16}$ Polinómio-resto: $-\frac{13}{32}$

5.6.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1-2\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & & \sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & -2 \\ \hline & 1 & 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$ Polinómio-resto: 0 6. Sabemos que $P(x+1) = x^2 - 7x + 6$, daí que

$$P((x-1)+1) = (x-1)^2 - 7(x-1) + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x) = x^2 - 2x + 1 - 7x + 7 + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x) = x^2 - 9x + 14$$

$$P(x) = x^2 - 9x + 14$$

7. É imediato que $b = 3$.

Por outro lado, tem-se que $-4 + ab = -10$ e, como $b = 3$, vem que

$$-4 + 3a = -10 \Leftrightarrow 3a = -6 \Leftrightarrow a = -2.$$

Tem-se, também, que $5 - 10a = c$ e, como $a = -2$, vem que $5 - 10(-2) = c \Leftrightarrow 5 + 20 = c \Leftrightarrow c = 25$.

Consequentemente, tem-se que $d + ac = 24$ e $a = -2$ e $c = 25$. Assim vem que:

$$d + (-2) \times 25 = 24 \Leftrightarrow d = 24 + 50 \Leftrightarrow d = 74.$$

Finalmente, tem-se que $e + 24a = 40$ e $a = -2$, pelo que $e + 24(-2) = 40 \Leftrightarrow e = 40 + 48 \Leftrightarrow e = 88$

Logo, $P(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 74x + 88$.

8. Os polinómios $A(x)$ e $B(x)$ são iguais se os termos semelhantes tiverem coeficientes iguais.

$$8.1. A(x) = B(x) \Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 + 8x - 4 =$$

$$= 5x^4 - 2(2x-1)^2 - (k+2)x^2 - p-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 + 8x - 4 =$$

$$= 5x^4 - 2(4x^2 - 4x + 1) - (k+2)x^2 - p-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 + 8x - 4 =$$

$$= 5x^4 - 8x^2 + 8x - 2 - (k+2)x^2 - p-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 + 8x - 4 =$$

$$= 5x^4 - 8x^2 - (k+2)x^2 + 8x - 2 - p-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 + 8x - 4 =$$

$$= 5x^4 - (8+k+2)x^2 + 8x + (-2-p-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 + 8x - 4 =$$

$$= 5x^4 - (10+k)x^2 + 8x + (-5-p)$$

Atendendo à definição de polinómios iguais, tem-se que:

$$10+k = 3 \wedge -5-p = -4 \Leftrightarrow k = -7 \wedge p = -1$$

$$8.2. A(x) = B(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+p)^2 + x + 3 = (x-2)^2 - x + 5 - \sqrt{2}kx^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xp + p^2 + x + 3 = x^2 - 4x + 4 - x + 5 - \sqrt{2}kx^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2xp + x + p^2 = -\sqrt{2}kx^3 + x^2 - 5x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + (2p+1)x + p^2 = -\sqrt{2}kx^3 + x^2 - 5x + 9$$

Atendendo à definição de polinómios iguais, tem-se que:

$$-\sqrt{2}k = 1 \wedge 2p+1 = -5 \wedge p^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge 2p = -5-1 \wedge (p = -3 \vee p = 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge p = -3 \wedge (p = -3 \vee p = 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge p = -3$$

9. Aplicando a regra de Ruffini, tem-se que:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & \sqrt{2}a & -2\sqrt{2}a^2 & -3\sqrt{2}a^3 \\ -a & & a & -\sqrt{2}a^2 - a^2 & 3\sqrt{2}a^3 + a^3 \\ \hline & -1 & \sqrt{2}a + a & -3\sqrt{2}a^2 - a^2 & a^3 \end{array}$$

Logo, o resto da divisão do polinómio $A(x)$ pelo polinómio

$B(x)$ é igual a a^3 .

Ficha para praticar 12

Pág. 34 e 35

1.1. O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é igual a $A(-2)$.

$$A(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 3 =$$

$$= 16 + 16 + 4 + 2 + 3 = 41$$

1.2. O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é igual a $A(3)$.

$$\begin{aligned} A(3) &= 2 \times (3)^3 - 3 \times (3)^2 + \frac{3}{2} + 1 = \\ &= 2(27) - 3(9) + \frac{3}{2} + 1 = \\ &= 54 - 27 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{59}{2} \end{aligned}$$

1.3. O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é igual a $A\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Repare que } 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} A\left(-\frac{1}{2}\right) &= -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8} + 1 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

1.4. O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é igual a $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\text{Repare que } \sqrt{2} + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{16} + 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{8}\right) - \left(\frac{2}{4}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{4} = \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

1.5. O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é igual a $A(1)$.

$$\begin{aligned} A(1) &= 2 \times 1^n + 4 \times 1^{n-2} + 1^{n-4} + 2 = \\ &= 2 \times 1 + 4 \times 1 + 1 + 2 = 9 \end{aligned}$$

1.6. O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é igual a $A(-1)$.

Assim.

$$\begin{aligned} A(-1) &= (-1)^{n+1} - 2 \times (-1)^n + (-1)^{n-1} = \\ &= (-1)^n \times (-1) - 2 \times (-1)^n + (-1)^n \times (-1) = \\ &= -(-1)^n - 2 \times (-1)^n - (-1)^n = -4 \times (-1)^n \end{aligned}$$

$$A(-1) = -4 \times (-1)^n = \begin{cases} -4 & \text{se } n \text{ é par} \\ 4 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Conclui-se que o resto da divisão do polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$ é -4 se n é par e 4 se n é ímpar.

2. O polinômio $P(x)$ é do quarto grau e admite os zeros

simples -3 , -2 , $\frac{1}{4}$ e 1 , pelo que:

$$P(x) = a(x+3)(x+2)\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1), \text{ com } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por outro lado, sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é 10 .

Logo, $P(-1) = 10$ pelo que:

$$10 = a \times (-1+3) \times (-1+2) \times \left(-1-\frac{1}{4}\right) \times (-1-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 = a \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{5}{4}\right) \times (-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 = 5a \Leftrightarrow a = 2$$

$$\text{Portanto, } P(x) = 2(x+3)(x+2)\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1) =$$

$$= 2(x^2 + 2x + 3x + 6)\left(x^2 - x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2(x^2 + 5x + 6)\left(x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \left(x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 5x^3 - \frac{25}{4}x^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{4}x + 6x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 2\left(x^4 - \frac{5}{4}x^3 + 5x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{4}x^2 + \right.$$

$$\left. + 6x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{15}{2}x + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 2\left(x^4 + \frac{15}{4}x^3 - \frac{25}{4}x^2 + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 2x^4 + \frac{15}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 3$$

3. O polinômio $P(x) = 6x^3 - 74x^2 - 8x + 5$ é divisível por $3x - 5$.

Temos que $3x - 5 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)$ e pela regra de Ruffini, vem

que

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -74 & -8 & 5 \\ \frac{5}{3} & & 10 & 5 & -5 \\ \hline & 6 & 3 & -3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = \left(x - \frac{5}{3}\right)(6x^2 + 3x - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x) = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)(2x^2 + x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x) = (3x - 5)(2x^2 + x - 1)$$

As outras raízes de $P(x)$, a existirem, são as raízes de $2x^2 + x - 1$.

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + 3}{4} \vee x = \frac{-1 - 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$$

As outras raízes de $P(x)$ são -1 e $\frac{1}{2}$, pelo que

$$P(x) = 6\left(x - \frac{5}{3}\right)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

4. O polinómio $P(x) = x^4 - kx^2 - 2x + 4$ é divisível por $x + \frac{1}{2}$,

Logo, pelo teorema do Resto tem-se que $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Assim,

vem que:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - k\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} - \frac{1}{4}k + 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k = \frac{1}{16} + 5 \Leftrightarrow 4k = 1 + 80 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{81}{4}$$

5. O polinómio $P(x)$ é divisível pelo polinómio $B(x)$, o que significa que o resto da divisão do polinómio $P(x)$ pelo polinómio $B(x)$ é igual a zero.

Aplicando o teorema do Resto, tem-se que

$$P(\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}(\sqrt{3})^3 + 2\sqrt{3}(\sqrt{3}) + p - k(\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}(3\sqrt{3}) + 2 \times 3 + p - 3k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \times 3 + 6 + p - 3k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9 + 6 + p - 3k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + p - 3k = 0 \Leftrightarrow -3 + p = 3k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3+p}{3} = k \Leftrightarrow k = -\frac{3}{3} + \frac{p}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -1 + \frac{p}{3}$$

6. O polinómio $P(x) = 3x^3 + ax^2 - bx + 1$ é divisível por $x - 1$, pelo que $P(1) = 0$ e o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ é igual a -6 . Logo, $P(-2) = -6$.

Assim, temos

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-2) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times 1^3 + a \times 1^2 - b \times 1 + 1 = 0 \\ 3 \times (-2)^3 + a \times (-2)^2 - b \times (-2) + 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + a - b + 1 = 0 \\ -24 + 4a + 2b + 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -4 \\ 4a + 2b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 4 \\ 4(b - 4) + 2b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 4 \\ 4b - 16 + 2b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 4 \\ 6b = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 4 \\ b = \frac{33}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{2} - 4 \\ b = \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{11}{2} \end{cases}$$

7. Sabemos que a é raiz de $P(x)$, pelo que $P(a) = 0$.

Assim, vem que:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow a^6 - (a+1)a^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^6 - (a^6 + a^5) + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^6 - a^6 - a^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow a^5 = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow a = 2$$

Substituindo a por 2 em $P(x)$, vem que:

$$P(x) = x^6 - (2+1)x^5 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x) = x^6 - 3x^5 + 32$$

O resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é $P(1)$.

$$P(1) = 1^6 - 3 \times 1^5 + 32 \Leftrightarrow P(1) = 30$$

8. Pela regra de Ruffini, tem-se

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -a & b & -b & 2 & -1 \\ & & 1 & 1-a & 1-a+b & 1-a & 3-a \\ \hline & 1 & 1-a & 1-a+b & 1-a & 3-a & \underline{2-a} \end{array}$$

$$2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Continuando, a aplicar a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 1-a & 1-a+b & 1-a & 3-a \\ & & 1 & 2-a & 3-2a+b & 4-3a+b \\ \hline & 1 & 2-a & 3-2a+b & 4-3a+b & \underline{7-4a+b} \end{array}$$

$$7 - 4a + b = 0 \wedge a = 2 \Leftrightarrow 7 - 4 \times 2 + b = 0 \wedge a = 2$$

$$b = 1 \wedge a = 2$$

Novamente, pela regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2-a & 3-2a+b & 4-3a+b \\ & & 1 & 3-a & 6-3a+b \\ \hline & 1 & 3-a & 6-3a+b & \underline{10-6a+2b} \end{array}$$

$$10 - 6a + 2b = 0 \wedge a = 2 \wedge b = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - 6 \times 2 + 2 \times 1 = 0 \wedge a = 2 \wedge b = 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge a = 2 \wedge b = 1 \quad (\text{verdade})$$

Aplicando, de novo, a regra de Ruffini, tem-se

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 3-a & 6-3a+b \\ & & 1 & 4-a \\ \hline & 1 & 4-a & \underline{10-4a+b} \end{array}$$

$$10 - 4a + b = 0 \wedge a = 2 \wedge b = 1.$$

$$\Leftrightarrow 10 - 4 \times 2 + 1 = 0 \wedge a = 2 \wedge b = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 = 0 \wedge a = 2 \wedge b = 1 \quad (\text{falso})$$

Donde, podemos concluir que $n = 3$, $b = 1$ e $a = 2$.

- 9.1. $P(a) + P(-a) =$

$$= a^{2n-1} - a^{2n-2} - a + 1 + (-a)^{2n-1} - (-a)^{2n-2} - (-a) + 1 =$$

$$= a^{2n-1} - a^{2n-2} - a + 1 - a^{2n-1} + a^{2n-2} + a + 1 =$$

$$= 2 - 2a^{n-2} = 2(1 - a^{n-2}) =$$

$$= 2(1 - a^{2n} \times a^{-2}) = 2\left(1 - \frac{a^{2n}}{a^2}\right)$$

7.

$$\begin{array}{r}
 -2x^5 + 0x^4 + x^3 - x^2 + x + 0 \quad \left| \begin{array}{l} 4x^2 - 2x \\ -\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \end{array} \right. \\
 \hline
 -x^4 + x^3 - x^2 + x + 0 \\
 \hline
 x^4 - \frac{x^3}{2} \\
 \hline
 \frac{x^3}{2} - x^2 + x + 0 \\
 \hline
 -\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} \\
 \hline
 -\frac{3x^2}{4} + x + 0 \\
 \hline
 \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{8}x \\
 \hline
 \frac{5}{8}x + 0
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $-\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{3}{16}$

Polinómio-resto: $\frac{5}{8}x$

8.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 6 & 13 & 24 & 36 \\
 -3 & & -3 & -9 & -12 & -36 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 4 & 12 & 0 \\
 -3 & & -3 & 0 & -12 & \\
 \hline
 & 1 & 0 & 4 & 0 &
 \end{array}$$

Polinómio-quociente: $x^2 + 4$

Polinómio-resto: 0

9. Pretende-se que o polinómio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4$

seja um quadrado perfeito, pelo que:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4 = (x^2 + cx + d)^2, \text{ pois o quadrado de}$$

um polinómio de grau 2 é um polinómio de grau 4.

Assim, vem que:

$$\begin{aligned}
 x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4 &= (x^2 + cx + d)(x^2 + cx + d) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4 = x^4 + cx^3 + dx^2 + \\
 &\quad + cx^3 + c^2x^2 + cdx + dx^2 + cdx + d^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4 = \\
 &\quad = x^4 + 2cx^3 + (2d + c^2)x^2 + 2cdx + d^2
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ 2cd = 8 \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ 2cd = 8 \\ d = -2 \vee d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = a \\ -4 + c^2 = b \\ -4c = 8 \\ d = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2c = a \\ 4 + c^2 = b \\ 4c = 8 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \\ c = -2 \\ d = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \\ c = 2 \\ d = 2 \end{cases}$$

Se $d = -2$, $b - a = 0 + 4 = 4$.

Se $d = 2$, $b - a = 8 - 4 = 4$.

Em qualquer dos casos, tem-se que $b - a = 4 \Leftrightarrow a = b - 4$.

10.1. Sabemos que $P(1) = 0$.

$$1^3 + a \times 1^2 + b \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c = 0$$

Por outro lado, também, sabemos que $P(-x) + P(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
 (-x)^3 + a(x)^2 + b(-x) + c + x^3 + ax^2 + bx + c &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -x^3 + ax^2 - bx + c + x^3 + ax^2 + bx + c &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2ax^2 + 2c &= 0 \Leftrightarrow ax^2 + c = 0
 \end{aligned}$$

Pela igualdade de dois polinómios, tem-se que:

$$a = 0 \wedge c = 0$$

E, substituindo $a = 0 \wedge c = 0$ na equação $1 + a + b + c = 0$, tem-se que $b = -1$.

Assim, $P(x) = x^3 - x$.

10.2. Determinemos o valor exato de $\frac{1}{P(\sqrt[3]{2}) - 2}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{P(\sqrt[3]{2}) - 2} &= \frac{1}{\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - \sqrt[3]{2}\right] - 2} = \\
 &= \frac{1}{\left[\sqrt[3]{2^3} - \sqrt[3]{2}\right] - 2} = \frac{1}{2 - \sqrt[3]{2} - 2} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \\
 &= -\frac{1 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}
 \end{aligned}$$

11.1. $P(x)$ é divisível por $x + 1$, significa que, pelo teorema do resto, $P(-1) = 0$. Assim:

$$\begin{aligned}
 P(-1) = 0 &\Leftrightarrow (2a + 1)(-1)^3 + \left(\frac{7}{2} - a\right)(-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (2a + 1)(-1) + \left(\frac{7}{2} - a\right)(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -2a - 1 + \frac{7}{2} - a - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -3a + \frac{7}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow -3a + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -6a = -3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

11.2. Substituindo a por $\frac{1}{2}$ na expressão de $P(x)$, tem-se que:

$$P(x) = \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)x^3 + \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 - 1 = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 T(x) &= 2(x+1)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) = 2(x^2 + 2x + 1) \left(x - \frac{1}{2}\right) = \\
 &= 2 \left(x - \frac{1}{2}\right) (x^2 + 2x + 1) = (2x - 1)(x^2 + 2x + 1) = \\
 &= 2x^3 + 4x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1 = 2x^3 + 3x^2 - 1
 \end{aligned}$$

Logo, $T(x) = P(x)$.

Ficha para praticar 13

Págs. 38 e 39

1.1. $4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$

1.2. $18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 - x)(3 + x)$

1.3. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 = (x - 5)(x - 5)$

1.4. $x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$

$$1.5. \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8} = \frac{x}{2} \left(x - \frac{1}{4} \right)$$

$$1.6. \quad 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \vee x = \frac{-1 - 3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$$

$$2x^2 + x - 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 1)$$

$$1.7. \quad -3x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-3) \times 2}}{-6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{-6} \vee x = \frac{-5 - 7}{-6} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 2$$

$$-3x^2 + 5x + 2 = -3 \left(x + \frac{1}{3} \right) (x - 2)$$

$$1.8. \quad 16x + 6 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \times (-6) \times 6}}{-12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm 20}{-12} \Leftrightarrow x = \frac{-16 + 20}{-12} \vee x = \frac{-16 - 20}{-12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 3$$

$$16x + 6 - 6x^2 = -6 \left(x + \frac{1}{3} \right) (x - 3)$$

$$1.9. \quad -2x^3 - 8x^2 + 10x = -2x(x^2 + 4x - 5) \\ x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-5)}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 + 6}{2} \vee x = \frac{-4 - 6}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$$

$$-2x^3 - 8x^2 + 10x = -2x(x^2 + 4x - 5) = -2x(x - 1)(x + 5)$$

$$1.10. \quad 2x^2 + 5x^3 + 4x^4 = x^2(2 + 5x + 4x^2) \\ 4x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(4)(2)}}{2(4)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{8} \rightarrow \text{impossível em } \mathbb{R}$$

$$\text{Assim, } 2x^2 + 5x^3 + 4x^4 = x^2(2 + 5x + 4x^2)$$

2. O polinómio $P(x)$ é do segundo grau e tem dois zeros simples, pelo que $P(x) = a(x - b)(x - c)$, onde b e c são os seus zeros e a é um número real. Assim, tem-se que:

$$P(x) = a \left(x + \frac{1}{3} \right) (x - 3), \text{ onde } a \text{ é um número real diferente}$$

de zero. Por outro lado, temos que $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{4}$, daí que:

$$a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} - 3 \right) = \frac{25}{4} \Leftrightarrow a \left(\frac{5}{6} \right) \left(-\frac{5}{2} \right) = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{25}{12} a = \frac{25}{4} \Leftrightarrow a = \frac{25}{4} \times \left(-\frac{12}{25} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a = -\frac{12}{4} \Leftrightarrow a = -3$$

$$\text{Logo, } P(x) = -3 \left(x + \frac{1}{3} \right) (x - 3) = (-3x - 1)(x - 3) \\ = -3x^2 + 9x - x + 3 = -3x^2 + 8x + 3$$

3. O polinómio $P(x)$ é de quarto grau e admite os zeros simples -3 e -1 e o 1 como zero de multiplicidade dois, pelo que $P(x) = a(x + 3)(x + 1)(x - 1)^2$, onde a é um número real diferente de zero.

Por outro lado, sabemos que o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ é igual a -9 , isto é, $P(-2) = -9$. Assim, tem-se que:

$$a(-2 + 3)(-2 + 1)(-2 - 1)^2 = -9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a(1)(-1)(9) = -9 \Leftrightarrow -9a = -9 \Leftrightarrow a = 1$$

$$P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)^2$$

4.1. O polinómio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ admite a raiz 1 .

Pela regra de Ruffini, tem-se:

1	1	-2	-1	2
1	0	1	-1	-2
1	1	-1	-2	0

Determinemos os zeros do polinómio-quociente $x^2 - x - 2$.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 + 3}{2} \vee x = \frac{1 - 3}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$$

4.2. O polinómio $-x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 11x + 6$ admite 1 com zero de multiplicidade dois. Pela regra de Ruffini, tem-se:

1	-1	3	3	-11	6
1	0	-1	2	5	-6
1	-1	2	5	-6	0
1	-1	1	6	0	0

Determinemos os zeros do polinómio-quociente:

$$-x^2 + x + 6$$

$$-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times 6}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + 5}{-2} \vee x = \frac{-1 - 5}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

$$-x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 11x + 6 = -(x - 1)^2(x + 2)(x - 3)$$

4.3. O polinómio $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ admite -1 como zero de multiplicidade 3.

Pela regra de Ruffini, tem-se:

-1	1	3	4	4	3	1
-1	0	-1	-2	-2	-2	-1
-1	1	2	2	2	1	0
-1	0	-1	-1	-1	-1	0
-1	1	1	1	1	0	0
-1	0	0	0	0	0	0

Determinemos, caso existam, os zeros do polinómio-quociente $x^2 + 1$.

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ é impossível em } \mathbb{R}.$$

$$x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 (x^2 + 1)$$

- 4.4. O polinómio $-2x^3 + 2x^2 + 20x + 16$ é divisível por $x - 4$. Pela regra de Ruffini, tem-se:

4	-2	2	20	16
	-8	-24	-16	
	-2	-6	-4	0

Determinemos os zeros do polinómio-quociente:

$$-2x^2 - 6x - 4$$

$$-2x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-2) \times (-4)}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{6+2}{-4} \vee x = \frac{6-2}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

$$-2x^3 + 2x^2 + 20x + 16 = -2(x-4)(x+2)(x+1)$$

- 4.5. O polinómio $-x^3 + x^2 + 5x + 3$ é divisível por $x - 3$. Pela regra de Ruffini, tem-se que:

3	-1	1	5	3
	-3	-6	-3	
	-1	-2	-1	0

Determinemos os zeros do polinómio-quociente:

$$-x^2 - 2x - 1$$

$$-x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow -(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

-1 é um zero de multiplicidade dois do polinómio:

$$-x^2 - 2x - 1$$

Assim:

$$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = -(x-3)(x+1)^2$$

5. Sabemos que o polinómio $P(x) = 2x^3 - x^2 - 25x - 12$ é divisível por $2x + 1$, pelo que uma das suas raízes é $-\frac{1}{2}$, já

$$\text{que } 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Utilizando a regra de Ruffini, tem-se:

$-\frac{1}{2}$	2	-1	-25	-12
	-1	1	12	
	2	-2	-24	0

Determinemos, agora, as raízes do polinómio-quociente, $2x^2 - 2x - 24$.

$$2x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2 \times (-24)}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 14}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2+14}{4} \vee x = \frac{2-14}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -3$$

$$2x^3 - x^2 - 25x - 12 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4)(x+3)$$

- 6.1. $-\sqrt{2}$ é uma das raízes do polinómio.

$$P(x) = x^3 - 2\sqrt{2}x^2 - 2x + 4\sqrt{2} \text{ se } P(-\sqrt{2}) = 0.$$

$$P(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 2\sqrt{2}(-\sqrt{2})^2 - 2(-\sqrt{2}) + 4\sqrt{2} =$$

$$= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}(2) + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} =$$

$$= -2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} =$$

$$= 0, \text{ pelo que } -\sqrt{2} \text{ é uma raiz das raízes de } P(x).$$

- 6.2. Sabemos que $-\sqrt{2}$ é uma das raízes de $P(x)$. Pela regra de Ruffini tem-se que:

$-\sqrt{2}$	1	$-2\sqrt{2}$	-2	$4\sqrt{2}$
	$-\sqrt{2}$	6	$-4\sqrt{2}$	
	1	$-3\sqrt{2}$	4	0

Determinemos as raízes do polinómio-quociente:

$$x^3 - 3\sqrt{2}x + 4$$

$$x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4 \times 4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

As outras raízes de $P(x)$ são $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

$$\text{Assim, } P(x) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}).$$

- 6.3. $\frac{|a| + |b| + |c| + 3}{a + b + c - 3} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 3}{-\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3} =$

$$= \frac{(4\sqrt{2} + 3)(2\sqrt{2} + 3)}{(2\sqrt{2} - 3)(2\sqrt{2} + 3)} = \frac{16 + 12\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 9}{8 - 9} =$$

$$= -18\sqrt{2} - 25$$

- 7.1. Sabemos que $P(x) = (x-2)^3(-x^2 + x + 2)$

Vamos fatorizar o polinómio $-x^2 + x + 2$.

$$-x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times 2}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1-3}{-2} \vee x = \frac{-1+3}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1.$$

Assim, $P(x) = (x-2)^3(-(x-2)(x+1))$, ou seja:

$$P(x) = -(x-2)^4(x+1)$$

A afirmação é falsa, já que 2 é um zero de multiplicidade quatro.

- 7.2. Temos que $P(x) = -(x-2)^4(x+1)$ e $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, pelo que:

$$T(x) = P(x) \times (x^2 - 1) =$$

$$= -(x-2)^4(x+1) \times (x-1)(x+1) =$$

$$= -(x-2)^4(x+1)^2(x-1)$$

$$\begin{aligned}
7.3. \quad P(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2}-2)^3(-(\sqrt{2})+\sqrt{2}+2) = \\
&= (\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-2)^2(-2+\sqrt{2}+2) = \\
&= (\sqrt{2}-2)(2-4\sqrt{2}+4)(\sqrt{2}) = \\
&= (\sqrt{2}-2)(6-4\sqrt{2})(\sqrt{2}) = \\
&= (6\sqrt{2}-8-12+8\sqrt{2})(\sqrt{2}) = \\
&= (14\sqrt{2}-20)(\sqrt{2}) = \\
&= 28-20\sqrt{2}
\end{aligned}$$

8. O polinômio $P(x)$ é de quarto grau e admite os zeros duplos 3 e -1, pelo que $P(x) = a(x-3)^2(x+1)^2$, onde a é um número real diferente de zero. Por outro lado, sabemos que o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é igual a 18, daí que $P(2) = 18$. Assim, tem-se que:
- $$a(2-3)^2(2+1)^2 = 18 \Leftrightarrow a \times 1 \times 9 = 18 \Leftrightarrow 9a = 18 \Leftrightarrow a = 2$$
- Logo, $P(x) = 2(x-3)^2(x+1)^2$.

- 9.1. Sabemos que $P(x)$ é divisível por $x-2$, pelo que $P(2) = 0$ e sabemos, também, que -3 é um zero de $P(x)$, pelo que $P(-3) = 0$.

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-3) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^3 + 2b + c = 0 \\ (-3)^3 - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 2b + c = 0 \\ -27 - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -8 - 2b \\ c = 3b + 27 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3b + 27 = -8 - 2b \\ c = 3b + 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b + 2b = -8 - 27 \\ c = 3b + 27 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5b = -35 \\ c = 3b + 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -7 \\ c = 3 \times (-7) + 27 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = -7 \\ c = 6 \end{cases}
\end{aligned}$$

- 9.2. Sabemos que $b = -7$ e $c = 6$, pelo que $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
& 1 & 0 & -7 & 6 \\
2 & & 2 & 4 & -6 \\
\hline
& 1 & 2 & -3 & 0 \\
-3 & & -3 & 3 & \\
\hline
& 1 & -1 & 0 &
\end{array}$$

Logo, $P(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$.

- 9.3. Sabe-se, por 9.1., que $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Assim:

$$\begin{aligned}
P(x) = 6 &\Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 6 \Leftrightarrow x^3 - 7x = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x(x^2 - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 7 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{7} \vee x = \sqrt{7} \\
\text{C.S.} &= \{-\sqrt{7}, 0, \sqrt{7}\}
\end{aligned}$$

Ficha para praticar 14

Págs. 40 e 41

- 1.1. $B(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 4(-2) + 4 = -8 - 4 + 8 + 4 = 0$, pelo que -2 é uma raiz de $B(x)$.

- 1.2. Utilizando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & -1 & -4 & 4 \\
& & -2 & 6 & -4 \\
\hline
& 1 & -3 & 2 & 0
\end{array}$$

Determinemos, agora, as raízes do polinômio-quociente:

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x + 2 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(2)}}{2(1)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3+1}{2} \vee x = \frac{3-1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1
\end{aligned}$$

As outras raízes de $B(x)$ são 1 e 2, pelo que

$$B(x) = (x+2)(x-2)(x-1).$$

- 1.3. $B(x) < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x-1) < 0$

Vamos construir um quadro de sinais.

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$B(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Assim, tem-se que $B(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]1, 2[$

- 1.4. $A(x) = -x^3 - 2x^2 - x = -x(x^2 + 2x + 1) = -x(x+1)^2$

Vamos construir um quadro de sinais.

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$-x$	+	+	+	0	-
$(x+1)^2$	+	0	+	+	+
$A(x)$	+	0	+	0	-

Assim, tem-se que: $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0]$

- 2.1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$

Substituindo x^2 por y , vem que

$$\begin{aligned}
y^2 - 10y + 9 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm 8}{2} \Leftrightarrow y = \frac{10+8}{2} \vee y = \frac{10-8}{2} \\
&\Leftrightarrow y = 9 \vee y = 1
\end{aligned}$$

- 2.2. Sabemos que $y = 9 \vee y = 1$ e como $x^2 = y$, vem que $x^2 = 9 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = -1 \vee x = 1$

- 3.1. $x^4 - x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - x^2 - 6 = 0$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$$\begin{aligned}
y^2 - y - 6 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1+5}{2} \vee y = \frac{1-5}{2} \Leftrightarrow y = 3 \vee y = -2
\end{aligned}$$

Voltando à variável x :

$$x^2 = 3 \vee x^2 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

($x^2 = -2$ é impossível em $\mathbb{R}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$)

$$3.2. \quad -2x^4 + 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow -2(x^2)^2 + 6x^2 + 8 = 0$$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$$-2y^2 + 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-2) \times 8}}{-4} \Leftrightarrow y = \frac{-6 \pm 10}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-6 + 10}{-4} \vee y = \frac{-6 - 10}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \vee y = 4$$

Voltando à variável x :

$$x^2 = -1 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

($x^2 = -1$ é impossível em $\mathbb{R}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$)

$$3.3. \quad 3x^4 = 7x^2 - 2 \Leftrightarrow 3x^4 - 7x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2)^2 - 7x^2 + 2 = 0$$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$$3y^2 + 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 3 \times 2}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{7 \pm 5}{6} \Leftrightarrow y = \frac{7 + 5}{6} \vee y = \frac{7 - 5}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{3}$$

Voltando à variável x :

$$x^2 = 2 \vee x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3.4. \quad 2x^4 + (2x - 1)^2 = x(x - 4) \Leftrightarrow 2x^4 + 4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + 4x^2 - x^2 - 4x + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2)^2 + 3x^2 + 1 = 0$$

Substituindo x^2 por y :

$$2y^2 + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{-3 + 1}{4} \vee y = \frac{-3 - 1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \vee y = -1$$

Voltando à variável x :

$$x^2 = -\frac{1}{2} \vee x^2 = -1$$

Estas equações são impossíveis dado que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

3.5. Vamos fatorizar o polinómio $3x^3 - 6x^2 + 6x - 12$. Para tal, experimentam-se, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente, que são $-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6$ e 12 .

Como para $x = 2$ o polinómio tem o valor numérico zero, 2 é raiz do polinómio, pelo que:

2	3	-6	6	-12
	3	0	6	0

O polinómio-quociente $3x^2 + 6$ não tem raízes, já que $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 + 6 \neq 0$.

Assim, tem-se que:

$$3x^3 - 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(3x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

3.6. Vamos fatorizar o polinómio $x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Para tal, experimentam-se, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente que são $-4, -2, -1, 1, 2$ e 4 .

Como para $x = 1$ o valor numérico do polinómio é zero, 1 é raiz do polinómio, pelo que:

	1	-	4	4
	1	0	-4	-4
	1	0	-4	0

Assim, $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x^2 - 4)$.

Resolvendo, agora, a equação, tem-se:

$$(x^3 - 2x)(x^3 - x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2)(x - 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2 = 0 \vee x - 1 = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \vee x = 1 \vee x = -2 \vee x = 2$$

4.1. O polinómio $A(x) = -2x^4 + 2x^3 + 14x^2 + kx - 12$ é divisível por $x + 1$, pelo que $A(-1) = 0$. Assim, vem que:

$$A(-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \times (-1)^4 + 2 \times (-1)^3 + 14 \times (-1)^2 - k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 - 2 + 14 - k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

4.2. Sabemos que $k = -2$, pelo que

$$A(x) = -2x^4 + 2x^3 + 14x^2 - 2x - 12.$$

Pela regra de Ruffini, temos que:

-1	-2	2	14	-2	-12
	2	-4	-10	12	
	-2	4	10	-12	0

O polinómio-quociente $Q(x)$, é igual a

$$Q(x) = -2x^3 + 4x^2 + 10x - 12.$$

Para fatorizar este polinómio, experimentam-se, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente que são $-12, -6, -4, -3, -2, -1, 2, 3, 4, 6$ e 12 .

Como $Q(1) = 0$, 1 é raiz de $Q(x)$, pelo que:

1	-2	4	10	-12
	-2	2	12	
	-2	2	12	0

Determinemos, agora, as raízes de $-2x^2 + 2x + 12$.

$$-2x^2 + 2x + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-1) \times 12}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 10}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + 10}{-4} \vee x = \frac{-2 - 10}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

Assim, temos que $A(x) = -2(x - 1)(x + 2)(x + 1)(x - 3)$.

Vamos, agora, resolver a inequação $A(x) > 0$ com recurso a um quadro de sinais.

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
-2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$x-1$	—	—	—	—	—	0	+	+	+
$x+2$	—	0	+	+	+	+	+	+	+
$x+1$	—	—	—	0	+	+	+	+	+
$x-3$	—	—	—	—	—	—	—	0	+
$A(x)$	—	0	+	0	—	0	+	0	—

$$A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -1[\cup]1, 3[$$

5.1. Determinemos as raízes do polinômio $4x - 21$.

$$4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{21}{4}$$

Vamos, agora, resolver a condição $(4x - 21)B(x) \leq 0$

recorrendo a um quadro de sinais.

x	$-\infty$	5		$\frac{21}{4}$	$+\infty$
$4x - 21$	—	—	—	0	+
$B(x)$	—	0	+	+	+
$(4x - 21) \cdot B(x)$	+	0	—	0	+

$$(4x - 21)B(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[5, \frac{21}{4}\right]$$

5.2. O polinômio $-x^2 - 3$ não tem raízes reais, pois $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 - 3 < 0$. Para resolver a condição $(-x^2 - 3)B(x) > 0$ vamos recorrer a um quadro de sinais.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$-x^2 - 3$	—	—	—
$B(x)$	—	0	+
$(-x^2 - 3)B(x)$	+	0	—

$$(-x^2 - 3)B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 5[$$

5.3. Determinemos as raízes do polinômio $x^2 - 6x + 5$.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6+4}{2} \vee x = \frac{6-4}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$$

Daí que $x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$

Vamos, agora, resolver a condição $(x^2 - 6x + 5)B(x) \leq 0$ recorrendo a um quadro de sinais.

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$x - 5$	—	—	—	0	+
$x - 1$	—	0	+	+	+
$B(x)$	—	—	—	0	+
$(x^2 - 6x + 5)B(x)$	—	0	+	0	+

$$(x^2 - 6x + 5) \cdot B(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup \{5\}$$

6.1. Considerando $x^8 = (x^4)^2$ e substituindo na equação x^4 por y , temos:

$$y^2 - 17y + 16 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = \frac{17 \pm 15}{2} \Leftrightarrow y = \frac{17-15}{2} \vee y = \frac{17+15}{2} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 16$$

Voltando à variável x , tem-se que:

$$x^4 = 16 \vee x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} \vee x = \pm \sqrt[4]{1} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = -1 \vee x = 1$$

As raízes de $P(x)$ são $-2, -1, 1$ e 2 .

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^4 - 16)(x^4 - 1) = \\ &= (x^2 - 4)(x^2 + 4)(x^2 - 1)(x^2 + 1) = \\ &= (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 1) \\ P(x) &= (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

6.2. Vamos recorrer a um quadro de sinais para resolver a inequação $P(x) \leq 0$. Para tal, temos que:

$$P(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 1)$$

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
$x + 2$	—	0	+	+	+	+	+	+	+
$x + 1$	—	—	—	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	—	—	—	—	—	0	+	+	+
$x - 2$	—	—	—	—	—	—	—	0	+
$x^2 + 4$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	—	0	+	0	—	0	+

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$$

7. Sabemos que $-\frac{1}{2}$ é uma das raízes do polinômio

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$. Pela regra de Ruffini, tem-se que:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

Determine, agora, as raízes do polinômio-quociente:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2 \times (-4)}}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-2+6}{4} \vee x = \frac{-2-6}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Como $a > b$, $a = 1$ e $b = -2$, então $a^b = 1^{-2} = \frac{1}{1^2} = 1$.

8.1. $x^3 \geq x \Leftrightarrow x^3 - x \geq 0$

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

Recorrendo a um quadro de sinais, vamos resolver a inequação $x^3 - x \geq 0$.

x	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
x	—	—	—	0	+	+	+
$x - 1$	—	—	—	—	—	0	+
$x + 1$	—	0	+	+	+	+	+
$x^3 - x$	—	0	+	0	—	0	+

$$x^3 \geq x \Leftrightarrow x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty[$$

8.2. $x^3 - 7x < 6 \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 < 0$

Para fatorizar o polinômio $x^3 - 7x - 6$, experimentam-se, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente, que são $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ e 6 .

Para $x = 3$, o polinómio tem o valor numérico zero, logo 3 é uma das raízes do polinómio.

Pela regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & 3 & 9 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Determinemos, agora, as raízes de $x^2 + 3x + 2$.

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{2} \vee x = \frac{-3-1}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

Recorrendo a um quadro de sinais, vamos resolver a inequação $x^3 - 7x < 6$.

x	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
x^3-7x-6	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{Assim, } x^3 - 7x < 6 \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-1, 3[$$

8.3. $x^3 - 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

Vamos fatorizar o polinómio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$,

experimentando, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente que são $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ e 6 .

Para $x = 1$, o polinómio tem o valor numérico zero, logo 1 é uma das raízes do polinómio.

Pela regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Determinemos, agora, as raízes de $x^2 - x - 6$.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+5}{2} \vee x = \frac{1-5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2.$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

Recorrendo a um quadro de sinais, vamos resolver a inequação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, -1] \cup [3, +\infty[$$

8.4. $x^6 + 3x^5 \leq 4x^3 \Leftrightarrow x^6 + 3x^5 - 4x^3 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3(x^3 + 3x^2 - 4) \leq 0$$

Para fatorizar o polinómio $x^3 + 3x^2 - 4$, experimentam-se, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente que são $-4, -2, -1, 1, 2, 4$.

Para $x = 1$, o valor numérico do polinómio é zero, logo 1 é uma das raízes do polinómio.

Pela regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2$$

Recorrendo, agora, a um quadro de sinais, vamos resolver a inequação:

$$x^6 + 3x^5 \leq 4x^3, \text{ tendo em conta que:}$$

$$x^6 + 3x^5 \leq 4x^3 \Leftrightarrow x^6 + 3x^5 - 4x^3 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3(x^3 + 3x^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)(x+2)^2 \leq 0$$

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
x^3	-	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	+	0	-	0	+

$$x^6 + 3x^5 \leq 4x^3 \Leftrightarrow x^6 + 3x^5 - 4x^3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-2\} \cup [0, 1]$$

8.5. Determinemos as raízes do polinómio $x^3 - 2x^2 - 9$,

experimentando, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente que são $-9, -3, -1, 1, 3$ e 9 .

Para $x = 3$, o polinómio tem o valor numérico zero, logo 3 é uma das raízes do polinómio. Pela regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & 0 & -9 \\ & & 3 & 3 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Determinemos, agora, as raízes de $x^2 + x + 3$.

$$x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

impossível em $\mathbb{R}$, pelo que o polinómio $x^3 - 2x^2 - 9$ não tem mais raízes.

Para resolver a inequação $(x+1)(x^3 - 2x^2 - 9) \leq 0$, vamos

recorrer a um quadro de sinais.

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
x^2+x+3	+	+	+	+	+
$(x+1)(x^3-2x^2-9)$	+	0	-	0	+

$$(x+1)(x^3 - 2x^2 - 9) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 3].$$

8.6. $-x^3 + 6x^2 - 9x \geq 0 \Leftrightarrow -x(x^2 - 6x + 9) \geq 0 \Leftrightarrow -x(x-3)^2 \geq 0$

Recorrendo a um quadro de sinais, tem-se que:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$-x$	+	0	-	-	-
$(x-3)^2$	+	+	+	0	+
$-x^3+6x^2-9x$	+	0	-	0	-

$$-x^3 + 6x^2 - 9x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup \{3\}$$

8.7. $x^4 \geq 15 + 2x^2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 15 \geq 0$

Vamos fatorizar o polinômio $x^4 - 2x^2 - 15$.

$$x^4 - 2x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2x^2 - 15 = 0$$

Substituindo x^2 por y :

$$y^2 - 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-15)}}{2(1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2 \pm 8}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2+8}{2} \vee y = \frac{2-8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \vee y = -3$$

Voltando à variável x :

$$x^2 = 5 \vee x^2 = -3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$$

(A equação $x^2 = -3$ é impossível em $\mathbb{R}$ porque

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.)$$

$$x^4 - 2x^2 - 15 \geq 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{5})(x^2 + 3) \geq 0$$

Construindo um quadro de sinais, tem-se:

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$x - \sqrt{5}$	-	-	-	0	+
$x + \sqrt{5}$	-	0	+	+	+
$x^2 + 3$	+	+	+	+	+
$x^4 - 2x^2 - 15$	+	0	-	0	+

$$x^4 - 2x^2 - 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$$

8.8. Temos que:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (2x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = 0 \vee (2x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \vee 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$$

Construindo um quadro de sinais, tem-se:

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$	-	-	-	0	+
$(2x + 4)^2$	+	0	+	+	+
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (2x + 4)^2$	-	0	-	0	+

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (2x + 4)^2 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\setminus \{-2\}$$

9.1. • Fatorização do polinômio $A(x)$:

$$A(x) = (2x - 1)(x^2 - 1) = (2x - 1)(x - 1)(x + 1)$$

• Fatorização do polinômio $B(x)$

$$B(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$$

Para fatorizar este polinômio, experimentam-se, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente que são -9, -3, -1, 1, 3 e 9.

Como $B(-1) = 0$, -1 é uma das raízes do polinômio $B(x)$.

Pela regra de Ruffini:

	1	-5	3	9
-1		-1	6	-9
	1	-6	9	0

Determinemos as raízes do polinômio-quociente $x^2 - 6x + 9$.

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

(3 é uma raiz dupla.)

$$B(x) = (x + 1)(x - 3)(x - 3).$$

• Fatorização do polinômio $C(x)$.

$$C(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$$

Para fatorizar este polinômio, experimentam-se, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente que são -3, -1, 1 e 3.

Como $C(3) = 0$, então 3 é uma das raízes do polinômio

$C(x)$. Pela regra de Ruffini:

	4	-12	-1	3
3		12	0	-3
	4	0	-1	0

Determinemos as raízes do polinômio-quociente $4x^2 - 1$.

$$4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

$$C(x) = 4(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

• Fatorização do polinômio $D(x)$:

Vamos determinar as raízes do polinômio $D(x)$.

Começamos por determinar as raízes do polinômio $x^4 - 10x^2 + 9$, e posteriormente, determinemos as raízes do polinômio $4x^2 - 1$.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$$

Substituindo x^2 por y , tem-se que:

$$y^2 - 10y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 9}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm 8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{10 - 8}{2} \vee y = \frac{10 + 8}{2} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 9$$

Voltando à variável x , tem-se:

$$x^2 = 1 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = -3 \vee x = 3$$

$$4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } D(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

9.1. a) $A(x) \times C(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \vee C(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 3$$

b) $P(x) < 0 \Leftrightarrow B(x) \times C(x) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3)(x - 3) \times 4(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x + 1)(x - 3)^3\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3)^3\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0$$

Construindo um quadro de sinais, tem-se:

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$(x-3)^3$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x+\frac{1}{2}$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x-\frac{1}{2}$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$B(x) \times C(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -1, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, 3 \right[$$

c) $-\sqrt{2}D(x) \geq 0 \Leftrightarrow D(x) \leq \frac{0}{-\sqrt{2}} \Leftrightarrow D(x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-3)(x+3) \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) \leq 0$$

Construindo um quadro de sinais, tem-se que:

x	$-\infty$	-3		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		3	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x+\frac{1}{2}$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-\frac{1}{2}$	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+
$D(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$-\sqrt{2}D(x) \geq 0 \Leftrightarrow D(x) \leq 0, \text{ pelo que}$$

$$-\sqrt{2}D(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, -1] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cup [1, 3]$$

9.2. a) Sejam as proposições elementares:

p_1 : 1 é a raiz do polinômio $A(x)$

p_2 : 1 é a raiz do polinômio $B(x)$

p_1 é verdade e p_2 é falsa.

A proposição p pode ser traduzida, simbolicamente, por $p_1 \Rightarrow p_2$, pelo que p é falsa.

Sejam as proposições elementares:

q_1 : $-\frac{1}{2}$ é raiz do polinômio $A(x)$

q_2 : $-\frac{1}{2}$ é raiz do polinômio $D(x)$

q_1 é falsa e q_2 é verdadeira.

A proposição q pode ser traduzida simbolicamente por $q_1 \Leftrightarrow q_2$, pelo que q é falsa.

Sejam as proposições elementares:

r_1 : 3 é raiz do polinômio $B(x)$

r_2 : 3 é raiz do polinômio $C(x)$

r_1 é verdadeira, assim como r_2 .

A proposição r pode ser traduzida, simbolicamente, por $r_1 \wedge r_2$, pelo que r é verdadeira.

Finalmente, consideremos as proposições elementares:

t_1 : -1 é raiz do polinômio $D(x)$

t_2 : -1 é raiz do polinômio $B(x)$

t_1 e t_2 são ambas verdadeiras.

A proposição t pode ser traduzida simbolicamente por $t_1 \vee t_2$, pelo que t é verdadeira.

b) Sabemos que:

- p é falsa;
- q é falsa;
- r é verdadeira;
- t é verdadeira.

Assim, tem-se que:

p	q	r	t	$p \wedge r$	$\sim(p \wedge r)$	$\sim q$	$t \vee \sim q$	$\sim(p \wedge r) \Rightarrow$ $\Rightarrow (t \vee \sim q)$
F	F	V	V	F	V	V	V	V

A proposição $\sim(p \wedge r) \Rightarrow (t \vee \sim q)$ é verdadeira.

9.3. a) As raízes do polinômio $B(x)$ são -3, -1 e 3, pelo que é verdadeira a proposição $\exists x \in A$: x é raiz do polinômio $B(x)$ já que todas as raízes de $B(x)$ pertencem ao conjunto A .

b) As raízes do polinômio $C(x)$ são $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ e 3, pelo que não é verdade que todo o elemento do conjunto A seja raiz do polinômio $C(x)$.

A proposição $\forall x \in A$, x é raiz do polinômio $C(x)$ é falsa.

c) As raízes do polinômio $D(x)$ são

$-3, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ e 3 pelo que todo o elemento do conjunto A é raiz do polinômio $D(x)$. Assim, a proposição $\forall x \in A$, x é raiz do polinômio $D(x)$ é verdadeira.

d) Vamos resolver a equação $-B(x) = 0$.

$$-B(x) = 0 \Leftrightarrow B(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = -3$$

É verdade que existe pelo menos um elemento do conjunto A que é solução da equação $-B(x) = 0$.

A proposição $\exists x \in A$: x é solução da equação $-B(x) = 0$ é verdadeira.

e) Vamos resolver a equação $A(x) \times B(x) \times C(x) = 0$

$$\begin{aligned} A(x) \times B(x) \times C(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(x) = 0 \vee B(x) = 0 \vee C(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = -1 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \right) \vee (x = -1 \vee x = 3) \vee \\ &\quad \vee \left(x = 3 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

As soluções da equação $A(x) \times B(x) \times C(x) = 0$ são $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ e 3 .

Assim, a proposição $\forall x \in A, x$ é solução da equação

$A(x) \times B(x) \times C(x) = 0$ é falsa dado que -3 não é solução.

Ficha de teste 6**Págs. 42 e 43**

1. $x^2 > 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) > 0$

Construindo um quadro de sinais, tem-se que:

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
$x-3$		-	-	0	+
$x+3$		-	0	+	+
x^2-9		+	0	-	0

$$x^2 > 9 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$$

Resposta: (C)

2. Vamos construir um quadro de sinais.

x	$-\infty$	-3		-1		2		4	$+\infty$
$P(x)$		-	0	+	+	+	0	+	+
$T(x)$		+	+	+	0	+	0	-	0
$P \times T$		-	0	+	0	+	0	-	0

$$\text{Assim, } P(x)T(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup \{-1\} \cup [2, 4]$$

Resposta: (B)

3. Vamos fatorizar o polinómio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$. Para tal, experimentam-se, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente: $-3, -1, 1$ e 3 . Como $P(-1) = 0$, -1 é uma das raízes do polinómio $P(x)$.

Pela regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -4 & 3 \\ -1 & & -2 & 7 & -3 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

Determinemos, agora, as raízes do polinómio-quociente:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 7x + 3 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 2 \times 3}}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7+5}{4} \vee x = \frac{7-5}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim, $P(x) = 2(x+1)(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, ou seja,

$$P(x) = (x-3)(2x-1)(x+1).$$

Resposta: (C)

4. $72 = -2x^4 + 10x^2 \Leftrightarrow 2x^4 - 10x^2 + 72 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(x^2)^2 - 10x^2 - 72 = 0$$

Substituindo x^2 por y , tem-se:

$$2y^2 - 10y + 72 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 2 \times 72}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{-476}}{4}$$

A equação é impossível

Assim, o conjunto-solução da equação é $\emptyset$.

Resposta: (C)

5. Sabemos que 2 é uma raiz do polinómio $P(x)$, pelo que, utilizando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 9 & 0 & -31 & -10 \\ 2 & & 18 & 36 & 10 \\ \hline & 9 & 18 & 5 & 0 \end{array}$$

$$9x^2 + 18x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 4 \times 9 \times 5}}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm 12}{18} \Leftrightarrow x = \frac{-18+12}{18} \vee x = \frac{-18-12}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Assim, } p^2 + q^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{25}{9} = \frac{26}{9}.$$

Resposta: (C)

6.1. Vamos utilizar a regra de Ruffini para determinar o grau de multiplicidade da raiz 1.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & -5 & -1 & 8 & -4 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & & 1 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 5 & 9 & 0 & 0 \end{array}$$

Como as três primeiras divisões são exatas (resto igual a zero) e a quarta divisão tem resto igual a 9, podemos afirmar que 1 é uma raiz de multiplicidade três do polinómio $P(x)$.

6.2. Já sabemos que $P(x) = (x-1)^3(x^2 + 4x + 4)$ e por outro lado, temos que $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Assim:

$$P(x) = (x-1)^3(x+2)^2$$

Para resolver a inequação $P(x) \geq 0$, vamos construir um quadro de sinais.

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$(x-1)^3$		-	-	0	+
$(x+2)^2$		+	0	+	+
$P(x)$		-	0	-	0

$$\text{Assim, } P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{-2\} \cup [1, +\infty[$$

7. Sabemos que o polinómio $P(x)$ tem grau seis e que admite o zero triplo -1 , o zero duplo 2 e o zero simples 0 , pelo que $P(x) = a(x+1)^3(x-2)^2x$, onde a é um número real diferente de zero. Por outro lado, sabemos que o resto da divisão de $P(x)$ por $x-1$ é igual a -12 , daí que $P(1) = -12$.

$$P(1) = -12 \Leftrightarrow a(1+1)^3(1-2)^2(1) = -12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \times 8 \times 1 \times 1 = -12 \Leftrightarrow 8a = -12 \Leftrightarrow a = -\frac{12}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$P(x) = -\frac{3}{2}(x+1)^3(x-2)^2x.$$

$$\begin{aligned} 8.1. \quad T\left(\frac{1}{3}\right) &= 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 13 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7 \times \frac{1}{3} - 1 = \\ &= \frac{3}{27} - \frac{13}{9} + \frac{7}{3} - 1 = \frac{1}{9} - \frac{13}{9} + \frac{7}{3} - \frac{3}{3} = \\ &= -\frac{12}{9} + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$8.2. \quad \text{Como } T\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \frac{1}{3} \text{ é uma das raízes do polinômio } T(x).$$

Pela regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -13 & 7 & -1 \\ \frac{1}{3} & & & & \\ \hline & 3 & -12 & 3 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 12x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 3 \times 3}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{108}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm 6\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \vee x = 2 - \sqrt{3}$$

As dimensões do paralelepípedo são $\frac{1}{3}$, $2 - \sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$.

$$8.3. \quad \text{A maior das raízes do polinômio } T(x) \text{ é } 2 + \sqrt{3}, \text{ pelo que } C = 2 + \sqrt{3}.$$

Assim, tem-se que:

$$\frac{\frac{1}{3} + 2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\frac{7}{3} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{7}{3} - \sqrt{3}\right)(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{\frac{14}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3}{2^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{\frac{23}{3} - \frac{13}{3}\sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{23}{3} - \frac{13}{3}\sqrt{3}$$

$$9.1. \quad \text{Sabemos que } 2 \text{ é uma raiz dupla do polinômio } A(x).$$

Sendo assim, $A(2) = 0$.

$$A(2) = 0 \Leftrightarrow 4(2)^3 - 19(2)^2 + 28(2) + k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 8 - 19 \times 4 + 56 + k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -12$$

$$9.2. \quad k = -12, \text{ pelo que } A(x) = 4x^3 - 19x^2 + 28x - 12 \text{ e } 2 \text{ é uma raiz dupla do polinômio } A(x).$$

Pela regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -19 & 28 & -12 \\ 2 & & & & \\ \hline & 4 & -11 & 6 & 0 \\ 2 & & & & \\ \hline & 4 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$A(x) = (x-2)^2(4x-3)$$

Para resolver a inequação $A(x) \leq 0$, vamos construir um quadro de sinais.

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$		2	$+\infty$
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+
$(4x-3)$	-	0	+	+	+
$A(x)$	-	0	+	0	+

$$\text{Assim, } A(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\infty, \frac{3}{4}\right] \cup \{2\}$$

$$10. \quad \text{Inicialmente, vamos determinar as soluções da equação:}$$

$$x^4 - 34x^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 34x^2 + 64 = 0$$

Substituindo x^2 por y , tem-se:

$$y^2 - 34y + 64 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{34 \pm \sqrt{1156 - 4 \times 1 \times 64}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{34 \pm 30}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{34 + 30}{2} \vee y = \frac{34 - 30}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 32 \vee y = 2$$

Voltando à variável x , tem-se:

$$x^2 = 32 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{32} \vee x = \sqrt{32} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4\sqrt{2} \vee x = 4\sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

As soluções positivas da equação são $\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$.

O retângulo tem área igual a 8 e largura quádrupla do comprimento.

Seja x a medida da largura do retângulo. Logo, $\frac{x}{4}$ será a

medida do comprimento e, como a área é igual a 8, tem-se que:

$$x \times \frac{x}{4} = 8 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = 8 \Leftrightarrow x^2 = 32$$

Como $x > 0$, então $x = \sqrt{32}$, ou seja, $x = 4\sqrt{2}$.

Assim:

- largura: $4\sqrt{2}$

- comprimento: $\frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

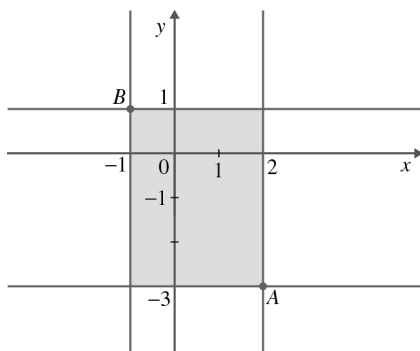
Portanto, concluímos que as dimensões do retângulo são as soluções positivas da equação $x^4 - 34x^2 + 64 = 0$.

p

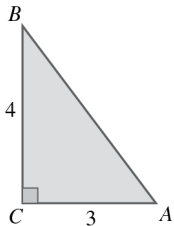
Ficha para praticar 15

Págs. 44 e 45

1.

Seja C o ponto de interseção da reta t com a reta s , onde:

- t é a reta vertical que contém o ponto B ;
- s é a reta horizontal que contém o ponto A .



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 20$$

Como $\overline{AB} > 0$, $\overline{AB} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, pelo que $d(A, B) = 2\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} 2.1. \text{ a) } d(A, B) &= \sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)^2 + (2+3)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(A, B) = \sqrt{1^2 + 5^2} \Leftrightarrow d(A, B) = \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } d(C, D) &= \sqrt{(\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2})^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(C, D) = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow d(C, D) = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} \\ &\Leftrightarrow d(C, D) = \sqrt{\frac{17}{4}} \Leftrightarrow d(C, D) = \frac{\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } d(E, F) &= \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 1 + 1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(E, F) = \sqrt{3 - 2\sqrt{6} + 2 + 2} \Leftrightarrow d(E, F) = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \\ &\Leftrightarrow d(E, F) = \sqrt{1 - 2\sqrt{6} + 6} \Leftrightarrow d(E, F) = \sqrt{(1 - \sqrt{6})^2} \\ &\text{Como } 1 - \sqrt{6} < 0, \quad d(E, F) = |1 - \sqrt{6}| = \sqrt{6} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } d(D, F) &= \sqrt{(\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2})^2 + (1+1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(D, F) = \sqrt{2^2 + 2^2} \Leftrightarrow d(D, F) = \sqrt{8} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(D, F) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$2.2. \quad C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ e } D(\sqrt{2} + 2, 1), \text{ pelo que:}$$

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2}{2}, \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} \right) \Leftrightarrow M = \left(\frac{2\sqrt{2} + 2}{2}, \frac{\frac{3}{2}}{2} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M = \left(\sqrt{2} + 1, \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

2.3. a) Sendo $P(x, y)$ um ponto da mediatriz do segmento de reta $[AB]$, tem-se que $d(P, A) = d(P, B)$. Logo:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + (y+3)^2 &= \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 + 6y + 9 = \\ &= x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + 6y + 9 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - 4y + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6y + 4y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9} + 4 - \frac{16}{9} - 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10y = -2x - \frac{20}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-2x}{10} - \frac{20}{30} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{5} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) Sendo $P(x, y)$ um ponto da mediatriz do segmento de reta $[DF]$, tem-se que $d(P, A) = d(P, B)$. Logo:

$$\begin{aligned} \left(x - (\sqrt{2} + 2)\right)^2 + (y-1)^2 &= \left(x - \sqrt{2}\right)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2(\sqrt{2} + 2)x + (\sqrt{2} + 2)^2 + y^2 - 2y + 1 = \\ &= x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x - 4x + 2 + 4\sqrt{2} + 4 + y^2 - 2y + 1 = \\ &= x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4x + 2 + 4\sqrt{2} + 4 - 2y + 1 = 2 + 2y + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2y - 2y = 4x + 3 - 7 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4y = 4x - 4 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = -x + 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

2.4. Vamos determinar o raio, r , da circunferência.

$$\begin{aligned} r = d(C, F) &= \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{0 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Assim, uma equação da circunferência de centro

$$A\left(-\frac{4}{3}, -3\right) \text{ e raio } \frac{3}{2} \text{ é } \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + (y+3)^2 = \frac{9}{4}.$$

2.5. O centro da circunferência de diâmetro $[CD]$ é o ponto M , ponto médio do segmento de reta $[CD]$.

$$\text{Por 2.2. sabe-se que } M\left(\sqrt{2} + 1, \frac{3}{4}\right).$$

$$\text{O raio é igual a } \frac{d(C, D)}{2}, \text{ ou seja, } \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Assim, a equação reduzida da circunferência de diâmetro

$$\begin{aligned} [CD] \text{ é } \left(x - (\sqrt{2} + 1)\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2} - 1\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16} \end{aligned}$$

- 3.1. A circunferência tem centro no ponto de coordenadas $(-1, 1)$ e raio igual a 2.

Determinemos a distância do ponto W ao centro da circunferência e caso essa distância seja superior a 2, o ponto diz-se exterior à circunferência; se for igual a 2, o ponto pertence à circunferência e se for superior a 2, o ponto diz-se exterior à circunferência.

$$\begin{aligned}\sqrt{(-2+1)^2 + \left(\frac{5}{2}-1\right)^2} &= \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{4}\end{aligned}$$

Como $\frac{\sqrt{13}}{4} < 2$, o ponto W é interior à circunferência.

3.2. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2 = 0$$

- 3.3. Determinemos as coordenadas dos pontos em que a circunferência intersesta os eixos coordenados.

- Interseção com o eixo Ox :

$$(x+1)^2 (y-1)^2 = 4 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (0-1)^2 = 4 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = 4 \wedge y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 3 \wedge y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) = -\sqrt{3} \vee x+1 = \sqrt{3} \wedge y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -\sqrt{3} - 1 \vee x = \sqrt{3} - 1) \wedge y = 0$$

- Interseção com o eixo Oy :

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \wedge x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \wedge x = 0 \Leftrightarrow$$

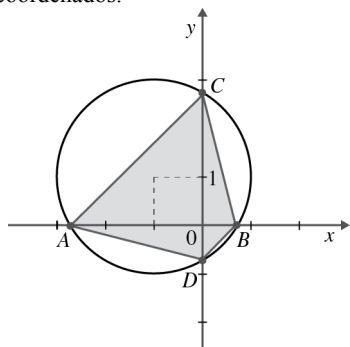
$$\Leftrightarrow 1 + (y-1)^2 = 4 \wedge x = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 3 \wedge x = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1 = \sqrt{3} \vee y-1 = -\sqrt{3}) \wedge x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3} + 1 \vee y = -\sqrt{3} + 1 \wedge x = 0$$

Os pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy têm coordenadas: $C(0, \sqrt{3}+1)$ e $D(0, -\sqrt{3}+1)$

Vamos representar, num referencial ortonormado, a circunferência, bem como os pontos de interseção desta com os eixos coordenados.



$$\begin{aligned}\text{Área } [ABCD] &= \text{Área } [ABC] + \text{Área } [ABD] \\ &= \frac{AB \times OC}{2} + \frac{AB \times OD}{2} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{[\text{abscissa de } A | + \text{abscissa de } B] \times \text{ordenada de } C}{2} + \\ &+ \frac{[\text{abscissa de } A | + \text{abscissa de } B] \times \text{ordenada de } D}{2} = \\ &= \frac{(|-\sqrt{3}-1| + \sqrt{3}-1) \times (\sqrt{3}+1)}{2} + \\ &+ \frac{(|-\sqrt{3}-1| + \sqrt{3}-1) \times (-\sqrt{3}+1)}{2} = \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1) \times (\sqrt{3}+1)}{2} + \\ &+ \frac{(\sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1) \times (-\sqrt{3}+1)}{2} = \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} + \frac{2\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{2} = \\ &= \frac{6+2\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ u. a.}\end{aligned}$$

- 4.1. A elipse tem focos $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$, pelo que $c = 8$.

Como os focos se situam sobre o eixo Ox , tem-se que $a^2 = b^2 + c^2$ ($a > b$).

O eixo menor tem comprimento igual a $2b$, logo $2b = 12 \Leftrightarrow b = 6$.

Assim, vem:

$$a^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow a^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow a^2 = 100, \text{ pelo que } a = 10.$$

Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse. Por definição de elipse, tem-se $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$. Substituindo, vem:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+8)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + (y-0)^2} &= 2 \times 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+8)^2 + y^2} + \sqrt{(x-8)^2 + y^2} &= 20\end{aligned}$$

4.2. $\sqrt{(x+8)^2 + y^2} + \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = 20 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(x+8)^2 + y^2} = 20 - \sqrt{(x-8)^2 + y^2}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem que:

$$\begin{aligned}(x+8)^2 + y^2 &= 400 - 40\sqrt{(x-8)^2 + y^2} + (x-8)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 &= \\ &= 400 - 40\sqrt{(x-8)^2 + y^2} + x^2 - 16x + 64 + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 40\sqrt{(x-8)^2 + y^2} &= 400 - 32x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{(x-8)^2 + y^2} &= 50 - 4x\end{aligned}$$

Elevando, novamente, ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned}25((x-8)^2 + y^2) &= 2500 - 400x + 16x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 25(x^2 - 16x + 64 + y^2) &= 2500 - 400x + 16x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 25x^2 - 400x + 1600 + 25y^2 &= 2500 - 400x + 16x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 &= 900 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{900} + \frac{25y^2}{900} = \frac{900}{900} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} &= 1\end{aligned}$$

- 4.3. • Interseção da elipse com o eixo das abscissas:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \wedge y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{0}{36} = 1 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{100} = 1 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -100 \vee x = 10) \wedge y = 0$$

$$A_1(10, 0) \text{ e } A_2(-10, 0)$$

- Interseção com o eixo das ordenadas:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \wedge x = 0 \Leftrightarrow \frac{0}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \wedge x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{36} = 1 \wedge x = 0 \Leftrightarrow y^2 = 36 \wedge x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y = -6 \vee y = 6) \wedge x = 0$$

$$B_1(0, -6) \text{ e } B_2(0, 6)$$

5. O ponto P é equidistante dos pontos A e B , pelo que $d(A, P) = d(B, P)$. Assim, vem:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (3+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 - 8x + 16 + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 5 = -8x + 52 \Leftrightarrow 4x + 8x = 52 - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x = 47 \Leftrightarrow x = \frac{47}{12}$$

- 6.1. • Determinação do centro e do raio da circunferência C_1 :

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + 9 - 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Centro: $(2, 3)$

Raio: 2

- Determinação do centro e do raio da circunferência C_2 :

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 5 - 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$$

Centro: $(-1, -2)$

Raio: $\sqrt{10}$

- 6.2. • Determinação das coordenadas do ponto C . A equação da elipse E_1 é $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, pelo que $a^2 = 9$ e $b^2 = 1$, donde

$a = 3$ e $b = 1$. Assim, os vértices da elipse têm coordenadas $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -1)$ e $(0, 1)$, pelo que $C(-3, 0)$.

- Determinação das medidas de comprimento de cada um dos lados do triângulo $[ABC]$.

- $d(A, B)$, sendo $A(2, 3)$ e $B(-1, -2)$

$$d(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

- $d(A, C)$, sendo $A(2, 3)$ e $C(-3, 0)$.

$$d(A, C) = \sqrt{(-3-2)^2 + (0-3)^2} =$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

- $d(B, C)$, sendo $B(-1, -2)$ e $C(-3, 0)$

$$d(B, C) = \sqrt{(-3+1)^2 + (0+2)^2} =$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

O triângulo tem exatamente dois lados com o mesmo comprimento, $[AB]$ e $[AC]$, pelo que é um triângulo isósceles.

- 6.3. • Determinação das coordenadas do ponto médio do segmento de reta que tem por extremos os centros das circunferências C_1 e C_2 .

$$\text{Seja } M \text{ esse ponto. } M = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{3-2}{2} \right) \Leftrightarrow M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

- Determinação das coordenadas dos focos da elipse:

Como $a > b$, $a^2 = b^2 + c^2$, em que $a^2 = 9$ e $b^2 = 1$.

Assim, $9 = 1 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 8$, pelo que $c = 2\sqrt{2}$.

Logo, $F_1(2\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(-2\sqrt{2}, 0)$.

- Determinação de $d(M, F_1) + d(M, F_2)$.

$$d(M, F_1) + d(M, F_2) =$$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(-2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{8 - 2\sqrt{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \sqrt{8 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{17}{2} - 2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{17}{2} + 2\sqrt{2}} \approx 5,747$$

Como $d(M, F_1) + d(M, F_2) < 6$, sendo 6 o comprimento do eixo maior da elipse $(2a)$, podemos concluir que M é interior à elipse E_1 .

Ficha para praticar 16

Págs. 46 e 47

- 1.1. $A(2, 2)$ e $C(5, 2)$, pelo que as coordenadas do ponto médio D do segmento de reta $[AC]$ são:

$$D = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{2+2}{2} \right) \Leftrightarrow D = \left(\frac{7}{2}, 2 \right)$$

- 1.2. Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AC]$, tem-se que $d(A, P) = d(C, P)$.

Como os pontos A e C têm a mesma ordenada e as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AC]$ são

$$D\left(\frac{7}{2}, 2\right), \text{ uma equação da mediatriz do segmento de reta}$$

$$[AC] \text{ é, imediatamente, } x = \frac{7}{2}.$$

- 1.3. A circunferência tem diâmetro $[AB]$, pelo que o seu centro é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$. Determinemos as suas coordenadas:

$$\left(\frac{2+5}{2}, \frac{2+7}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

O raio da circunferência é igual à distância entre este ponto e o ponto A (ou o ponto B), pelo que:

$$\begin{aligned} \text{Raio} &= \sqrt{\left(\frac{7}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2} \end{aligned}$$

Assim, a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$.

- 2.1.** Os focos da elipse são os pontos de coordenadas $F_1(-2, 0)$ e $F_2(2, 0)$, pelo que $c = 2$ e como se situam sobre o eixo Ox , tem-se que $a > b$ e $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, o comprimento do eixo maior é igual a $2a$, ou seja, $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$. Logo, $3^2 = b^2 + 2^2 \Leftrightarrow 9 = b^2 + 4 \Leftrightarrow b^2 = 5$, pelo que $b = \sqrt{5}$. A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

- 2.2.** Os focos da elipse são os pontos de coordenadas $F_1(0, -3)$ e $F_2(0, 3)$, pelo que $c = 3$ e como se situam sobre o eixo Oy , tem-se que $b > a$ e $b^2 = a^2 + c^2$. Assim, o comprimento do eixo menor é igual a $2a$, ou seja, $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$. Logo, $b^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow b^2 = 25$, pelo que $b = 5$. A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

- 3.1.** Uma equação da circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\sqrt{10}$ é:
 $(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$

Os pontos A e B são os pontos da circunferência com abscissa igual a $2\sqrt{2}$, pelo que determinemos as suas ordenadas.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10 \wedge x = 2\sqrt{2} &\Leftrightarrow (2\sqrt{2})^2 + y^2 = 10 \wedge x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8 + y^2 = 10 \wedge x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow y^2 = 2 \wedge x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y = -\sqrt{2} \vee y = \sqrt{2}) \wedge x = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Como A pertence ao primeiro quadrante, tem abscissa e ordenada positiva, pelo que $A(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $B(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

- 3.2.** O ponto C é o ponto da circunferência que pertence ao semieixo negativo Ox , pelo que as suas coordenadas são do tipo $C(x, 0)$, com $x < 0$.

Determinemos as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10 \wedge y = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 = 10 \wedge y = 0 &\Leftrightarrow (x = -\sqrt{10} \vee x = \sqrt{10}) \wedge y = 0 \end{aligned}$$

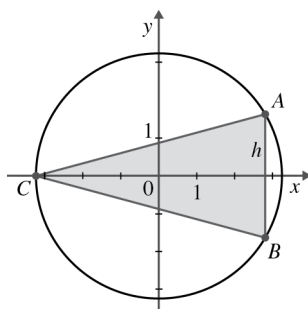
Esses pontos têm coordenadas $(-\sqrt{10}, 0)$ e $(\sqrt{10}, 0)$, logo, $C(-\sqrt{10}, 0)$.

$$\text{Área } \Delta[ABC] = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}, \text{ onde}$$

$$\text{base} = d(A, B) = 2\sqrt{2}$$

$$\text{altura} = d(C, M) = \sqrt{10} + 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Área } \Delta[ABC] &= \frac{2\sqrt{2} \times (\sqrt{10} + 2\sqrt{2})}{2} = \frac{2\sqrt{20} + 8}{2} = \sqrt{20} + 4 = \\ &= 2\sqrt{5} + 4 \end{aligned}$$



- 3.3.** O ponto R tem coordenadas $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5} - 5)$.

Vamos determinar uma equação da mediatriz do segmento de reta $[AC]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AC]$, tem-se:

$$d(A, P) = d(C, P). \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} (x - 2\sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 &= (x + \sqrt{10})^2 + (y - 0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 &= x^2 + 2\sqrt{10}x + 10 + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 10 &= 2\sqrt{10}x + 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y &= 2\sqrt{10}x \Leftrightarrow -4\sqrt{2}x - 2\sqrt{10}x = 2\sqrt{2}y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{2}x - \sqrt{10}x &= \sqrt{2}y \Leftrightarrow -2x - \sqrt{5}x = y \end{aligned}$$

A equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AC]$ é $y = -2x - \sqrt{5}x$, ou seja, $y = (-2 - \sqrt{5})x$.

Substituindo as coordenadas do ponto R na equação $y = (-2 - \sqrt{5})x$:

$$-2\sqrt{5} - 5 = (-2 - \sqrt{5})\sqrt{5} \Leftrightarrow -2\sqrt{5} - 5 = -2\sqrt{5} - 5 \quad (\text{verdade})$$

O ponto R pertence à mediatriz do segmento de reta $[AC]$.

- 4.1.** A ordenada do ponto Q é $\sqrt{2}$.

Por outro lado, sabemos que o quadrado da abscissa do ponto Q é igual ao quádruplo da sua ordenada, pelo que, sendo x a sua abscissa, tem-se que $x^2 = 4 \times \sqrt{2}$, ou seja:

$$\begin{aligned} x^2 = 4\sqrt{2} &\Leftrightarrow x = -\sqrt{4\sqrt{2}} \vee x = \sqrt{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -2\sqrt{\sqrt{2}} \vee x &= 2\sqrt{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -2^{\frac{3}{4}}\sqrt{2} \vee x = 2^{\frac{3}{4}}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Q pode ter coordenadas $(-2^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ou $(2^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Seja $Q_1(-2^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $Q_2(2^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} d(Q, P) &= \sqrt{(-2^{\frac{3}{4}}\sqrt{2} - 0)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \\ &= \sqrt{(-2^{\frac{3}{4}}\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{4^{\frac{3}{4}}2^{\frac{3}{2}} + 2 - 2\sqrt{2} + 1} = \\ &= \sqrt{4^{\frac{3}{4}}2^{2\frac{1}{2}} + 3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{4\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} \end{aligned}$$

Como $1 + \sqrt{2} > 0$, temos que $d(Q_1, P) = 1 + \sqrt{2}$.

Facilmente, se verifica que $d(Q_2, P) = d(Q_1, P) = 1 + \sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} \text{pois } d(Q_2, P) &= \sqrt{(2^{\frac{3}{4}}\sqrt{2} - 0)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \\ &= \sqrt{4^{\frac{3}{4}}2^{\frac{3}{2}} + 2 - 2\sqrt{2} + 1} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

- 4.2.** A ordenada do ponto Q é, agora, y , pelo que $x^2 = 4y$, ou seja:

$$x = \pm\sqrt{4y} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \times \sqrt{y} \Leftrightarrow x = \pm 2 \times \sqrt{y} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{y}$$

Sejam $Q_1(2\sqrt{2y}, y)$ e $Q_2(-2\sqrt{y}, y)$.

$$\begin{aligned} \text{Determinemos } d(P, Q_1) &= \sqrt{(2\sqrt{y} - 0)^2 + (y - 1)^2} = \\ &= \sqrt{4y + y^2 - 2y + 1} = \sqrt{y^2 + 2y + 1} = \sqrt{(1 + y)^2} \end{aligned}$$

Como $1 + y > 0$, tem-se que $d(P, Q_1) = 1 + y$.

Obviamente $d(P, Q_2) = d(P, Q_1) = 1 + y$.

- 5.1. A circunferência tem centro no ponto de coordenadas $A(-4, 6)$ e raio igual a 5, pelo que:

$$\begin{aligned}(x+4)^2 + (y-6)^2 &= 5^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 &= 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x + y^2 - 12y + 52 - 25 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x + y^2 - 12y + 27 &= 0\end{aligned}$$

- 5.2. Vamos determinar as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy .

$$\begin{aligned}x^2 + 8x + y^2 - 12y + 27 &= 0 \wedge x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - 12y + 27 &= 0 \wedge x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(1)(27)}}{2(1)} \wedge x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{12 \pm 6}{2} \wedge x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(y = \frac{12+6}{2} \vee y = \frac{12-6}{2} \right) \wedge x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y = 9 \vee y = 3) \wedge x = 0\end{aligned}$$

Os pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy têm coordenadas $(0, 9)$ e $(0, 3)$. Como C tem maior ordenada que G , tem-se que $C(0, 9)$.

Por outro lado, sabemos que a corda $[CD]$ é paralelo ao eixo Ox , pelo que os pontos C e D têm a mesma ordenada. Assim, $D(x, 9)$. Como o ponto D pertence à circunferência, tem-se:

$$\begin{aligned}x^2 + 8x + y^2 - 12y + 27 &= 0 \wedge y = 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x + 9^2 - 12 \times 9 + 27 &= 0 \wedge y = 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x &= 0 \wedge y = 9 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \wedge y = 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = 0 \vee x + 8 = 0) \wedge y = 9 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -8) \wedge y = 9\end{aligned}$$

O ponto D tem abscissa negativa, pelo que $D(-8, 9)$.

- 5.3. Sabemos que $C(0, 9)$ e $G(0, 3)$, logo

$$d(C, G) = |9 - 3| = 6.$$

O comprimento da corda CG é igual a 6.

- 5.4. Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AD]$, tem-se que $d(A, P) = d(D, P)$. Logo:

$$\begin{aligned}(x+4)^2 + (y-6)^2 &= (x+8)^2 + (y-9)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 &= \\ = x^2 + 16x + 64 + y^2 - 18y + 81 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8x - 12y + 52 &= 16x - 18y + 145 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -12y + 18y &= 16x - 8x + 145 - 52 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6y &= 8x + 93 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{8}{6}x + \frac{93}{6} &\Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{31}{2}\end{aligned}$$

- 5.5. Área do trapézio $[ABCD] = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times \overline{BC} =$

$$= \frac{8+4}{2} \times 3 = 6 \times 3 = 18$$

$$\text{Área do losango } [ADEF] = \frac{\overline{AE} \times \overline{DF}}{2}$$

$A(-4, 6)$ e $D(-8, 9)$

- O ponto F tem a mesma abscissa que o ponto A e a sua ordenada é igual à diferença entre a ordenada do ponto A e o raio da circunferência. Assim, tem-se abscissa de F igual a -4 e ordenada de F igual a $6 - 5 = 1$ pelo que $F(-4, 1)$.

- O ponto E tem a mesma abscissa que o ponto D e a sua ordenada é igual à diferença entre a ordenada do ponto D e o raio da circunferência. Assim, tem-se abscissa de E igual a -8 e ordenada de E igual a $9 - 5 = 4$, pelo que $E = -8 - 5 = 4$

$$\begin{aligned}d(A, E) &= \sqrt{(-8+4)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \\ &= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(D, F) &= \sqrt{(-4+8)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \\ &= \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Área do losango } [ADEF] &= \frac{2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5}}{2} = \frac{8 \times (\sqrt{5})^2}{2} = \\ &= \frac{8 \times 5}{2} = 20\end{aligned}$$

A razão entre a área do trapézio $[ABCD]$ e o losango $[ADEF]$ é igual a $\frac{18}{20} = \frac{9}{10}$.

6. Como B e C pertencem a uma circunferência de centro A , tem-se $d(A, B) = d(A, C)$.

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \sqrt{(5-3)^2 + (2-2-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \\ &= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4\end{aligned}$$

Assim, $d(A, C) = 4$, donde:

$$\sqrt{(5-2)^2 + (2-y)^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + (2-y)^2} = 4$$

Elevando os membros da equação ao quadrado, tem-se:

$$3^2 + (2-y)^2 = 4^2 \Leftrightarrow 9 + (2-y)^2 = 16 \Leftrightarrow (2-y)^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2-y-\sqrt{7} \vee 2-y = \sqrt{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{7} \vee y = 2 - \sqrt{7}$$

Logo, $C(2, 2 + \sqrt{7})$ ou $C(2, 2 - \sqrt{7})$.

Assim, a ordenada do ponto C é $2 + \sqrt{7}$ ou $2 - \sqrt{7}$.

Ficha de teste 7

Págs. 48 e 49

1. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$, onde $P(2, a)$ e $Q(-a-2, 1)$.

$$M = \left(\frac{2-a-2}{2}, \frac{a+1}{2} \right) \Leftrightarrow M = \left(\frac{-a}{2}, \frac{a+1}{2} \right)$$

$a < -1$, pelo que $-a > 1 \Leftrightarrow \frac{-a}{2} > \frac{1}{2}$ e, assim, a abscissa do ponto M é positiva.

Por outro lado, tem-se que:

$$a < -1 \Leftrightarrow a+1 < 0 \Leftrightarrow \frac{a+1}{2} < \frac{0}{2} \Leftrightarrow a+1 < 0$$

Logo, a ordenada do ponto M é negativa. Assim, o ponto M situa-se no 4.º quadrante.

Resposta: (D)

2. Sabemos que $d(A, B) = d(A, C)$. Logo:

$$\sqrt{(0-0)^2 + (18-8)^2} = \sqrt{(0-x)^2 + (8-0)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{10^2} = \sqrt{(-x)^2 + 8^2} \Leftrightarrow 10 = \sqrt{x^2 + 64}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado,

$$\text{tem-se: } 100 = x^2 + 64 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 6$$

Como a abscissa do ponto C é positiva, tem-se que $C(6, 0)$.

$$\text{Área } \Delta[ABC] = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}, \text{ onde:}$$

$$\text{base} = d(A, B) = 10; \quad \text{altura} = \text{abscissa de } C = 6$$

$$\text{Assim, Área } \Delta[ABC] = \frac{10 \times 6}{2} = 30.$$

Resposta: (C)

3. Vamos determinar a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$. Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AB]$, tem-se $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\text{Logo, } (x - \sqrt{2})^2 + (y - 1)^2 = (x - 2\sqrt{2})^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - 2y + 1 = \\ = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2}x - 2y + 3 = -4\sqrt{2}x + 2y + 9$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}x + 3 - 9 = 2y + 2y$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x - 5 = 4y \Leftrightarrow \sqrt{2}x - 3 = 2y \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3}{2}$$

Substituindo as coordenadas do ponto $C(k, \frac{5}{2})$ na equação

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3}{2}, \text{ tem-se:}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}k - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}k \Leftrightarrow 4 = \frac{\sqrt{2}}{2}k \Leftrightarrow k = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{8\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow k = 4\sqrt{2}$$

Resposta: (D)

4. Equação reduzida da circunferência:

$$x^2 - 4x + y^2 + 8y + 17 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 + 17 - 4 - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 3$$

A circunferência tem centro no ponto de coordenadas $(2, -4)$ pelo que as coordenadas da imagem do ponto que é o centro da circunferência pela reflexão de eixo Ox são $(2, 4)$.

Resposta: (B)

5. A expressão da elipse é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, logo

$a^2 = 25$ e $b^2 = 9$, ou seja, $a > b$. Assim, tem-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ donde } 25 = 9 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 16, \text{ pelo que } c = 4.$$

As coordenadas dos focos da elipse são $F_1(4, 0)$ e $F_2(4, 0)$.

Como os focos da elipse se situam sobre o eixo Ox , a base do triângulo será igual a $d(F_1, F_2) = 8$ e a altura do triângulo

igual ao valor absoluto da ordenada do ponto P , ou seja, $|-6| = 6$.

Assim, tem-se que:

$$\text{Área } \Delta[PF_1F_2] = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

Resposta: (B)

- 6.1. O triângulo $[ABC]$ é equilátero e o seu perímetro é igual a $3a$, pelo que cada um dos seus lados mede a unidades. Por outro lado, o eixo Oy é a mediatriz do segmento de reta $[CB]$, pelo que a abscissa do ponto B é $\frac{a}{2}$ e abscissa do ponto C é $-\frac{a}{2}$.

Determinemos, agora, a ordenada destes dois pontos.

Determinação da altura do triângulo $[ABC]$.

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 \Leftrightarrow a^2 = \overline{AM}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Como } \overline{AM} > 0, \text{ tem-se que } \overline{AM} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

$$\overline{AM} = \overline{MO} + \overline{OA} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = \overline{MO} + \frac{\sqrt{3}}{3}a \Leftrightarrow$$

(Repare que $\overline{OA}$ = ordenada do ponto A .)

$$\Leftrightarrow \overline{MO} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{3}a \Leftrightarrow \overline{MO} = \frac{3\sqrt{3}}{6}a - \frac{2\sqrt{3}}{6}a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{MO} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\text{Pelo que a ordenada do ponto } M \text{ é } -\frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Assim, conclui-se que a ordenada do ponto C , que é igual à ordenada do ponto B , é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{6}a$, a mesma que a ordenada do ponto M .

$$\text{Logo, } B\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}a\right) \text{ e } C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$$

- 6.2. Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AC]$, tem-se que $d(A, P) = d(C, P)$. Logo:

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}ay + \frac{1}{3}a^2 =$$

$$= x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}ay + \frac{1}{12}a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3}ay + \frac{1}{3}a^2 = ax + \frac{a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}ay + \frac{1}{12}a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3}ay - \frac{\sqrt{3}}{3}ay = ax + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{3}ay = ax \Leftrightarrow -\sqrt{3}ay = ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}y = x \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

A equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AC]$ é

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

Para verificar se o ponto B pertence à mediatriz do segmento de reta $[AC]$, vamos substituir as suas coordenadas na equação $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$. $B\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$, pelo que:

$$-\frac{\sqrt{3}}{6}a = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{6}a = -\frac{\sqrt{3}}{6}a \quad (\text{verdade})$$

O ponto B pertence à mediatriz do segmento de reta $[AC]$.

- 7.1. Para mostrar que o ponto $A(2, 1)$ pertence à circunferência C_2 , vamos substituir as suas coordenadas na equação da circunferência. Assim, tem-se:

$$2^2 - 6(2) + 1^2 + 4(1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 12 + 1 + 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{verdade})$$

O ponto A pertence à circunferência C_2 .

- 7.2. Vamos escrever a equação reduzida da circunferência C_2 .

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 4y + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + 3 - 9 - 4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 10 \end{aligned}$$

A circunferência C_2 tem centro no ponto $B(3, -2)$ e raio igual a $\sqrt{10}$.

- 7.3. A circunferência C_1 tem centro no ponto de coordenadas $A(2, 1)$ e passa pela origem, O , do referencial, pelo que o seu raio é igual a $d(A, O)$.

$$d(A, O) = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

O raio da circunferência C_1 é igual a $\sqrt{5}$, logo:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \text{ é a sua equação reduzida.}$$

- 8.1. O ponto P tem coordenadas $\left(3, -\frac{12}{5}\right)$.

Substituindo as coordenadas do ponto P na equação da elipse, $9x^2 + 25y^2 = 225$, tem-se que:

$$\begin{aligned} 9 \times 3^2 + 25 \times \left(-\frac{12}{5}\right)^2 &= 225 \Leftrightarrow 9 \times 9 + 25 \times \frac{144}{25} = 225 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 81 + 144 &= 225 \Leftrightarrow 225 = 225 \quad (\text{verdade}) \end{aligned}$$

O ponto P pertence à elipse.

Vamos determinar a equação reduzida da elipse.

$$\begin{aligned} 9x^2 + 25y^2 = 225 &\Leftrightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, pelo que

$$a^2 = 25 \text{ e } b^2 = 9.$$

Como $a^2 = 25$, tem-se que $a = 5$, daí que sendo $P(x, y)$

um ponto qualquer da elipse, por definição desta,

tem-se:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a, \text{ sendo } F_1 \text{ e } F_2 \text{ os focos da elipse.}$$

Assim, a distância, d , pedida é igual a $2 \times 5 = 10$.

- 8.2. Tem-se que $a = 5$ e $a > b$ (pois $b^2 = 9$, logo $b = 3$), pelo que os vértices da elipse que pertencem ao eixo das abscissas têm coordenadas $R(-5, 0)$ e $Q(5, 0)$.

Assim, tem-se que:

$$\text{Área } \Delta[PQR] = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}, \text{ onde}$$

$$\text{base} = d(R, Q) = 10$$

$$\text{altura} = |\text{ordenada do ponto } P| = \left| -\frac{12}{5} \right| = \frac{12}{5}, \text{ daí que}$$

$$\text{Área } \Delta[PQR] = \frac{10 \times \frac{12}{5}}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ u.a.}$$

$$R(-5, 0) \text{ e } Q(5, 0)$$

Ficha para praticar 17

Págs. 50 e 51

- 1.1. **Identificação:** semiplano aberto à direita da reta de equação $x = -3$

Definição analítica: $x > -3$

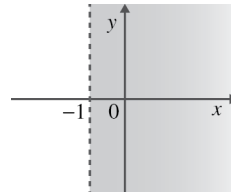
- 1.2. **Identificação:** semiplano fechado inferior em relação à reta de equação $y = 2$

Definição analítica: $y \leq 2$

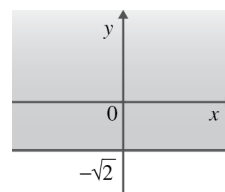
- 1.3. **Identificação:** semiplano fechado superior em relação à reta de equação $y = -x$

Definição analítica: $y \geq -x$

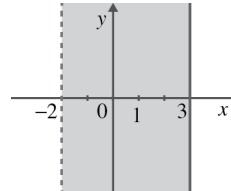
2.1.



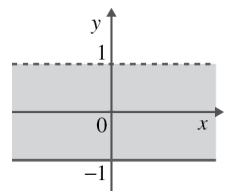
2.2.



2.3.



2.4.

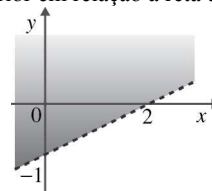


- 2.5. $x - 2y < 2 \Leftrightarrow 2y > x - 2 \Leftrightarrow y > \frac{1}{2}x - 1$

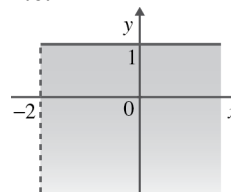
Trata-se do semiplano aberto superior em relação à reta de

$$\text{equação } y = \frac{1}{2}x - 1$$

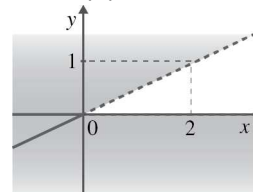
x	$y = \frac{1}{2}x - 1$
0	-1
2	0



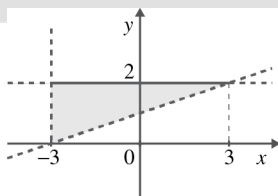
2.6.



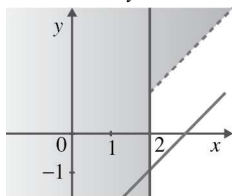
2.7.



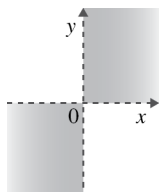
$$\begin{aligned}
 2.8. \quad & 3y - x \geq 3 \wedge x > -3 \wedge 2 - y \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 3y \geq x + 3 \wedge x > -3 \wedge y \leq 2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{3}x + 1 \wedge x > -3 \wedge y \leq 2
 \end{aligned}$$



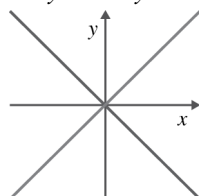
$$\begin{aligned}
 2.9. \quad & x - y < 1 \vee 4 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -y < -x + 1 \vee -2x \geq 4 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow y > x - 1 \vee 2x \leq 4 \Leftrightarrow y > x - 1 \vee x \leq 2
 \end{aligned}$$



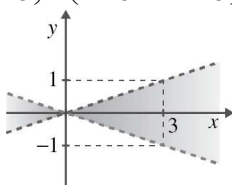
2.10.



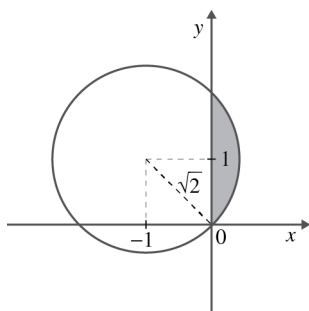
$$\begin{aligned}
 2.11. \quad & x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x - y = 0 \vee x + y = 0 \Leftrightarrow y = x \vee y = -x
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2.12. \quad & x^2 - 9y > 0 \Leftrightarrow (x - 3y)(x + 3y) > 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (x - 3y > 0 \wedge x + 3y > 0) \vee (x - 3y < 0 \wedge x + 3y < 0) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (-3y > -x \wedge 3y > -x) \vee (-3y < -x \wedge 3y < -x) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left(3y < x \wedge y > -\frac{x}{3} \right) \vee \left(3y > x \wedge y < -\frac{x}{3} \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left(y < \frac{x}{3} \wedge y > -\frac{x}{3} \right) \vee \left(y > \frac{x}{3} \wedge y < -\frac{x}{3} \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 3. \quad & (x + 1)^2 (y - 1)^2 \leq 2 \rightarrow \text{círculo de centro no ponto de ponto de} \\
 & \text{coordenadas } (-1, 1) \text{ e raio igual a } \sqrt{2} \text{ unidades.} \\
 & x \geq 0 \rightarrow \text{semiplano fechado à direita da reta de equação} \\
 & x = 0.
 \end{aligned}$$



Resposta: (C)

$$4.1. \quad B(0, 2) \text{ e } D(0, -8), \text{ pelo que } d(B, D) = 10.$$

Como $[BD]$ é uma diagonal do quadrado $[ABCD]$, tem-se que $d(C, A) = 10$, pois $[CA]$ é outra diagonal deste quadrado. Assim, $A(5, -3)$ e $C(-5, -3)$.

Coordenadas do ponto E :

$$E = \left(\frac{5+0}{2}, \frac{-3+2}{2} \right) \Leftrightarrow E = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Coordenadas do ponto F :

$$F = \left(\frac{0-5}{2}, \frac{2-3}{2} \right) \Leftrightarrow F = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Coordenadas do ponto G :

$$G = \left(\frac{-5+0}{2}, \frac{-3-8}{2} \right) \Leftrightarrow G = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{11}{2} \right)$$

Coordenadas do ponto H :

$$H = \left(\frac{5+0}{2}, \frac{-3-8}{2} \right) \Leftrightarrow H = \left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{2} \right)$$

$$4.2. \quad \text{Equação da reta } FG: x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Equação da reta } CA: y = -3$$

$$\text{Equação da reta } OB: x = 0$$

$$\text{Equação da reta } FE: y = -\frac{1}{2}$$

Equação da reta CD :

$$C(-5, -3) \text{ e } D(0, -8)$$

$$m_{CD} = \frac{-8 - (-3)}{0 - (-5)} \Leftrightarrow m_{CD} = \frac{-8 + 3}{5} \Leftrightarrow m_{CD} = -1$$

Como $D(0, -8)$, a ordenada na origem da reta CD é -8 , pelo que $y = -x - 8$ é a equação reduzida da reta CD .

Equação reduzida da reta AB :

A reta AB é paralela à reta CD , logo tem o mesmo declive que esta e como $B(0, 2)$, a ordenada na origem da reta AB é 2 . Assim, $y = -x + 2$ é a equação reduzida da reta AB .

Condição pedida:

$$\begin{aligned}
 & \left(y \geq -x - 8 \wedge x \leq -\frac{5}{2} \wedge y \leq -3 \right) \vee \\
 & \vee \left(y \leq -x + 2 \wedge y \geq -\frac{1}{2} \wedge x \geq 0 \right)
 \end{aligned}$$

$$4.3. \quad \text{Sendo } P(x, y) \text{ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta } [GB], \text{ tem-se que: } d(P, G) = d(P, B). \text{ Logo}$$

$$\left(x + \frac{5}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{11}{2} \right)^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + \frac{25}{4} + y^2 + 11y + \frac{121}{4} = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 11y + \frac{146}{4} = -4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11y + 4y = -5x + 4 - \frac{146}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15y = -5x - \frac{65}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{15}x - \frac{65}{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{13}{6}$$

- 4.4. O círculo inscrito no quadrado $[EFGH]$ tem centro no ponto médio do segmento de reta $[CA]$, cujas coordenadas são $(0, -3)$ e raio igual a, por exemplo, $\frac{d(F, F)}{2}$, ou seja $\frac{5}{2}$ unidades.

Assim, o círculo pode ser definido analiticamente pela condição $x^2 + (y+3)^2 \leq \frac{25}{4}$.

- 5.1. Equação da reta AB : $y = x$

Equação da circunferência de centro $C(3, 2)$ e raio 2: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

Condição pedida:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \wedge y \leq x \wedge x \leq 3 \wedge y \leq 2$$

- 5.2. A reta AB e a circunferência de centro $C(3, 2)$ e raio 2 têm em comum, apenas o ponto A e o ponto B , pelo que:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \wedge y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (x-2)^2 = 4 \wedge y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 = 4 \wedge y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 9 = 0 \wedge y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(2)(9)}}{2(2)} \wedge y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{4} \wedge y = x \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{4} \wedge y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2} \wedge y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \right) \wedge y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \wedge y = x \right) \vee \left(x = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \wedge y = x \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \wedge y = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \right) \vee \left(x = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \wedge y = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \right)$$

Assim, tem-se que:

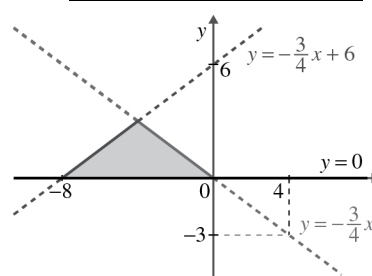
$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{2} - \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \right)^2 + \left(\frac{5 + \sqrt{7}}{2} - \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{7}}{2} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{2} \right)^2} = \sqrt{7+7} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

- Determinemos as coordenadas de dois pontos da reta de equação $y = \frac{3}{4}x + 6$.

x	$y = \frac{3}{4}x + 6$	(x, y)
0	$y = 6$	$(0, 6)$
-8	$y = 0$	$y \leq -\frac{3}{4}x$

- Determinemos, agora, as coordenadas de dois pontos da reta de equação $y = -\frac{3}{4}x$.

x	$y = -\frac{3}{4}x$	(x, y)
0	$y = 6$	$(0, 6)$
-8	$y = 0$	$y \leq -\frac{3}{4}x$



A condição dada define o triângulo $[OPQ]$.

$$A_{[OPQ]} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{d(O, P) \times \text{ordenada de } Q}{2}$$

$O(0, 0)$ e $P(-8, 0)$, pelo que $d(O, P) = 8$.

O ponto Q é o ponto de interseção da reta de equação

$y = \frac{3}{4}x + 6$ com a reta de equação $y = -\frac{3}{4}x$, logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 6 \\ y = -\frac{3}{4}x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 6 \\ \frac{3}{4}x + 6 = -\frac{3}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 6 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 6 \\ \frac{3}{2}x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 6 \\ x = -6 \times \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 6 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4} \times (-4) + 6 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Área } \Delta[OPQ] = \frac{8 \times 3}{2} = 12 \text{ u. a.}$$

- Perímetro $\Delta[OPQ] = d(O, P) + d(P, Q) + d(Q, O)$

$$\bullet d(O, P) = 8$$

$$\begin{aligned} \bullet d(P, Q) &= \sqrt{(-8+4)^2 + (0-3)^2} = \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet d(Q, O) &= \sqrt{(-4-0)^2 + (3-0)^2} = \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5 \end{aligned}$$

$$\text{Perímetro } \Delta[OPQ] = 8 + 5 + 5 = 18$$

Ficha para praticar 18

Págs. 52 e 53

- 1.1. $y \geq 0 \wedge y \leq \frac{3}{4}x + 6 \wedge -4y - 3x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \wedge y \leq \frac{3}{4}x + 6 \wedge -4y \geq 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \wedge y \leq \frac{3}{4}x + 6 \wedge 4y \leq -3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \wedge y \leq \frac{3}{4}x + 6 \wedge y \leq -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow$$

- 2.1. • Equação da reta OA : $y = 0$
 • Equação da reta AB : $x = 4$
 • Equação da reta OC : $x = 0$
 • Equação da reta CB : o ponto A pertence ao eixo Ox e à reta AB , cuja equação é $x = 4$, pelo que $A(4, 0)$.

O ponto B pertence à reta AB e à bissetriz dos quadrantes ímpares, cuja equação é $y = x$, pelo que $B(4, 4)$.

Os pontos $B(4, 4)$ e $E(-6, 0)$ são pontos da reta CB , logo

$$m_{CB} = \frac{0-4}{-6-4} = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}. \text{ Assim, tem-se que:}$$

$$CB: y = \frac{2}{5}x + b$$

$E(-6, 0)$ pertence à reta CB , pelo que:

$$0 = \frac{2}{5}(-6) + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{12}{5} + b \Leftrightarrow b = \frac{12}{5}$$

$$\text{Donde, } CB: y = \frac{2}{5}x + \frac{12}{5}.$$

$$\text{Condição pedida: } y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge y \leq \frac{2}{5}x + \frac{12}{5}$$

- 2.2. Perímetro do trapézio $[OABC] =$
 $= d(O, A) + d(A, B) + d(B, C) + d(C, O)$
 $d(O, A) = 4; d(A, B) = 4 \quad \text{e} \quad d(C, O) = \frac{12}{5}$ (ordenada do ponto C).

$$\begin{aligned} d(B, C) &= \sqrt{(4-0)^2 + \left(4 - \frac{12}{5}\right)^2} = \\ &= \sqrt{4^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{464}{25}} = \\ &= \frac{\sqrt{464}}{\sqrt{25}} = \frac{4\sqrt{29}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Perímetro do trapézio } [OABC] &= 4 + 4 + \frac{12}{5} + \frac{4\sqrt{29}}{5} = \\ &= \frac{52 + 4\sqrt{29}}{5} \text{ u. c.} \end{aligned}$$

- 2.3. O centro do círculo é o ponto médio do segmento de reta $[EB]$. Seja M esse ponto.

$$M\left(\frac{-6+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) \Leftrightarrow M(-1, 2)$$

O raio do círculo é igual a $d(M, E)$.

$$\text{raio} = \sqrt{(-1+6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

Assim, o círculo de diâmetro $[EB]$ pode ser definido analiticamente por $(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 29$.

- 2.4. Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz do segmento de reta $[EB]$, tem-se que $d(P, E) = d(P, B)$

Logo:

$$\begin{aligned} (x+6)^2 + (y-0)^2 &= (x-4)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12x + 36 &= -8x - 8y + 32 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8y &= -8x - 12x + 32 - 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8y &= -20x - 4 \Leftrightarrow y = -\frac{20}{8}x - \frac{4}{8} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 2.5. A equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[EB]$ é $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$.

O ponto P pertence ao eixo Ox pelo que as suas coordenadas são do tipo $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } P\left(-\frac{1}{5}, 0\right).$$

$$\begin{aligned} d(P, B) &= \sqrt{\left(-\frac{1}{5}-4\right)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{\left(-\frac{21}{5}\right)^2 + (-4)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{441}{25} + 16} = \sqrt{\frac{841}{25}} = \frac{29}{5} \end{aligned}$$

A distância do ponto P ao ponto B é igual a $\frac{29}{5}$.

- 3.1. Determinemos a equação reduzida da circunferência.
 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

A circunferência tem centro no ponto $C(2, 2)$ e raio igual a 2. Assim, $A(2, 0)$, $B(0, 2)$ e $C(2, 2)$.

- 3.2. Equação da reta AB :

$$m_{AB} = \frac{2-0}{0-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

O ponto $B(0, 2)$ pertence à reta AB , pelo que a ordenada na origem desta reta é igual a 2, daí que $y = -x + 2$ seja a equação reduzida da reta AB .

$$\text{Condição pedida: } (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \wedge y \leq -x + 2$$

- 3.3. A circunferência tem raio igual a 2, pelo que a área do círculo limitado por esta circunferência é igual a 4π . O setor circular BCA tem área igual a π , já que corresponde a um quarto do círculo.

O triângulo $[ABC]$ tem área igual a:

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{d(C, B) \times d(C, A)}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

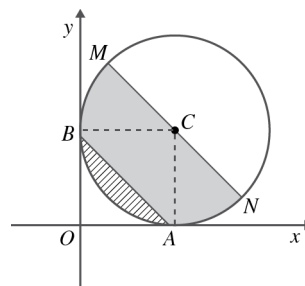
pelo que a área da região tracejada é igual a $\pi - 2$ (diferença entre a área de um quarto do círculo e a área do triângulo $[ABC]$).

Por outro lado, a área sombreada é igual à diferença entre a área do semicírculo e a área tracejada, logo:

$$\text{Área sombreada} = \frac{4\pi}{2} - (\pi - 2) = 2\pi - \pi + 2 = \pi + 2$$

- 4.1. Os pontos $A(1, 0)$ e $B(0, 3)$ pertencem à reta r , logo:

$$m_{AB} = m_r = \frac{3-0}{0-1} = \frac{3}{-1} = -3$$



Como $B(0, 3)$, a ordenada na origem da reta r é 3.

Assim, $r: y = -3x + 3$

Por outro lado, os pontos $C(4, 0)$ e $D(0, 2)$ pertencem à

reta t , pelo que $m_{CD} = m_r = \frac{2-0}{0-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

Como $D(0, 2)$, a ordenada na origem da reta t é 2.

Assim, $t: y = -\frac{1}{2}x + 2$.

4.2. O ponto I é a interseção das retas r e t :

$$\begin{cases} y = -3x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 = -3x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x = 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{1}{5} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}$$

Assim, $I\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$

4.3. Condição pedida:

$$\left(x \geq 0 \wedge y \geq -\frac{1}{2}x + 2 \wedge y \leq -3x + 3 \right) \vee \left(y \geq 0 \wedge y \leq -\frac{1}{2}x + 2 \wedge y \geq -3x + 3 \right)$$

4.4. Área sombreada = Área $\Delta[BDI]$ + Área $\Delta[ACI]$ =

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} + \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \\ &= \frac{d(B, D) \times \text{abscissa de } I}{2} + \frac{d(A, C) \times \text{ordenada de } I}{2} = \\ &= \frac{1 \times \frac{2}{5}}{2} + \frac{3 \times \frac{9}{5}}{2} = \frac{\frac{2}{5}}{2} + \frac{\frac{27}{5}}{2} = \frac{2}{10} + \frac{27}{10} = \frac{29}{10} \text{ u. a.} \end{aligned}$$

4.5. O ponto A é a mediatriz do segmento de reta $[BC]$ quando e apenas quando $d(A, B) = d(A, C)$.

Assim, tem-se que:

$$d(A, B) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(1-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-3)^2} = 3$$

Como $d(A, B) \neq d(A, C)$, o ponto A não pertence à mediatriz do segmento de reta $[BC]$.

4.6. O círculo tem centro no ponto $A(1, 0)$ e raio igual a $d(A, C) = 3$, logo a inequação reduzida deste círculo é $(x-1)^2 + y^2 \leq 9$.

O ponto I tem coordenadas $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$; substituindo as suas coordenadas na inequação reduzida do círculo, vem que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 &\leq 9 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{81}{25} \leq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{25} + \frac{81}{25} \leq 9 \Leftrightarrow \frac{90}{25} \leq 9 \Leftrightarrow 3,6 \leq 9 \text{ (verdade)} \end{aligned}$$

Logo, o ponto I pertence ao círculo.

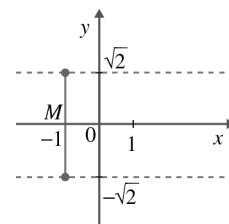
Ficha de teste 8

Págs. 54 e 55

1. O círculo é definido analiticamente pela condição $x^2 + y^2 \leq 3$.

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \overline{OB}^2 &= \overline{MB}^2 + \overline{OM}^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3^2 &= \overline{MB}^2 + 1^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{MB} &= \sqrt{9-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{MB} &= 2\sqrt{2} \\ \overline{AB} &= 2 \times \overline{MB} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$



$[AB]$ é um segmento de reta vertical cuja medida de comprimento é igual a $4\sqrt{2}$ unidades.

Resposta: (C)

2. Equação reduzida da elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Neste caso, $a = 6$ e $b = 3$, pelo que $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ é a equação

reduzida da elipse da figura.

A circunferência tem centro na origem e raio igual a 3 unidades, logo a sua equação reduzida é $x^2 + y^2 = 9$.

Condição que define a região sombreada:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \geq 9 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 0 \right) \vee \\ &\vee \left(\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \geq 9 \wedge y \leq 0 \wedge x \geq 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \geq 9 \wedge xy \leq 0 \end{aligned}$$

Resposta: (D)

3. O conjunto de pontos do plano que não distam do ponto $P(3, -4)$ mais de cinco unidades pode ser definido por

$$\sim \left[(x-3)^2 + (y+4)^2 > 25 \right] \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 \leq 25$$

Resposta: (C)

4. Para que um ponto pertença à condição dada terá de verificar a condição $x \cdot y \leq 0$, pelo que não poderá ter abscissa e ordenada com o mesmo sinal. Assim, ficam desde já excluídas as opções (A) e (B).

Caso seja a opção (C), o ponto $C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ terá de verificar a condição $x^2 + (y+\sqrt{3})^2 \leq 27$. Vejamos, se tal acontece.

$$(2\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3} + \sqrt{3})^2 \leq 27 \Leftrightarrow 12 + 0 \leq 27 \Leftrightarrow 12 \leq 27$$

(verdade)

O ponto C pertence ao conjunto de pontos dado.

Todavia, vamos verificar que o ponto D não pertence a este conjunto de pontos.

$$\begin{aligned} (-2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{3})^2 &\leq 27 \Leftrightarrow 12 + (3\sqrt{3})^2 \leq 27 \\ \Leftrightarrow 12 + 27 &\leq 27 \Leftrightarrow 39 \leq 27 \quad (\text{falso}) \end{aligned}$$

Resposta: (C)

5.1. A circunferência tem centro na origem do referencial e raio igual a 5 unidades, pelo que a sua equação reduzida é $x^2 + y^2 = 25$.

Por outro lado, o ponto B tem abscissa 3 e pertence à circunferência, pelo que:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 25 \wedge x = 3 \Leftrightarrow 3^2 + y^2 = 25 \wedge x = 3 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 9 + y^2 = 25 \wedge x = 3 \Leftrightarrow y^2 = 16 \wedge x = 3 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (y = -4 \vee y = 4) \wedge x = 3 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (y = -4 \wedge x = 3) \vee (y = 4 \wedge x = 3)\end{aligned}$$

Como o ponto B tem ordenada positiva, as suas coordenadas são (3, 4), logo a sua ordenada é igual a 4.

- 5.2. O ponto A pertence à circunferência e ao eixo das abscissas, pelo que as suas coordenadas são (-5, 0).

$A(-5, 0)$ e $B(3, 4)$

$$m_{AB} = \frac{4-0}{3-(-5)} \Leftrightarrow m_{AB} = \frac{4}{8} \Leftrightarrow m_{AB} = \frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}x + b$. Como o ponto A pertence à reta AB , então:

$$0 = \frac{1}{2}(-5) + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$$

Assim, a equação reduzida da reta AB é $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

- 5.3. Condição pedida: $x \geq 3 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 25$

- 5.4. A região tracejada é um trapézio retângulo.

$$\begin{aligned}\text{Área do trapézio} &= \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{altura} = \\&= \frac{\text{ordenada de } B + \text{ordenada na origem da reta } AB}{2} \times \\&\quad \times \text{abscissa de } B =\end{aligned}$$

$$= \frac{4 + \frac{5}{2}}{2} \times 3 = \frac{\frac{13}{2}}{2} \times 3 = \frac{13}{4} \times 3 = \frac{39}{4} \text{ u. a.}$$

6. $A(1, 2)$, $B(-3, 5)$ e $\left(x, \frac{3}{5}\right)$

$$d(C, A) = d(B, A) \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(\frac{3}{5}-2\right)^2 = (-3-1)^2 + (5-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{49}{25} = 16 + 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{576}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \pm \sqrt{\frac{576}{25}} \Leftrightarrow x-1 = \frac{24}{5} \vee x-1 = -\frac{24}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{19}{5} \vee x = \frac{29}{5}$$

- 7.1. a) Uma reta perpendicular ao eixo Oy é horizontal.

O ponto C tem coordenadas (5, -2), então $y = -2$ é uma condição cartesiana que define a reta perpendicular ao eixo Oy que passa pelo ponto C .

- b) Trata-se da mediatriz do segmento de reta $[BC]$. Seja $P(x, y)$ um ponto genérico desta mediatriz, tem-se $d(P, B) = d(P, C)$. Logo:

$$\begin{aligned}(x+4)^2 + (y-2)^2 &= (x-5)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = \\&\quad = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow \\&\quad \Leftrightarrow 8x - 4y + 20 = -10x + 4y + 29 \Leftrightarrow \\&\quad \Leftrightarrow -4y - 4y = -10x - 8x + 29 - 20 \\&\quad \Leftrightarrow -8y = -18x + 9\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 8y = 18x - 9 \Leftrightarrow y = \frac{18}{8}x - \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{9}{4}x - \frac{9}{8}$$

Logo, uma condição cartesiana que define o conjunto de pontos do plano que estão à mesma distância de B e de C é

$$y = \frac{9}{4}x - \frac{9}{8}.$$

- c) Trata-se do círculo de centro A e raio 3 unidades.

Assim, $(x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 9$ é uma condição cartesiana que define o conjunto de pontos do plano que distam do ponto A três ou menos unidades.

- 7.2. O ponto $A(2, -3)$ pertence ao quarto quadrante, pelo que a proposição a é falsa.

$$d(A, B) = \sqrt{(2+4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{61}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(5+4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9^2 + (-4)^2} = \sqrt{97}$$

Como $d(A, B) < d(B, C)$, a proposição b é verdadeira.

Assim:

a	$\sim a$	b	$\sim a \wedge b$	$a \vee b$	$\sim (a \vee b)$	$\sim a \wedge b \Rightarrow \sim (a \vee b)$
F	V	V	V	V	F	F

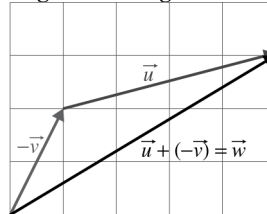
A proposição é falsa.

Ficha para praticar 19

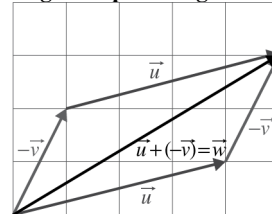
Págs. 56 e 57

1.

Regra do triângulo



Regra do paralelogramo



2.1. $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = -\vec{v}$

2.2. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \vec{v}$

2.3. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \vec{u} + \overrightarrow{OE} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v}$

2.4. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 2(\vec{u} + \vec{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

2.5. $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = -(\vec{u} + \vec{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = -\vec{u} - \vec{v}$

2.6. $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{FC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CF} = -2\vec{u}$

3.1. a) $A + \overrightarrow{JH} = A + \overrightarrow{AN} = N$, pelo que $A + \overrightarrow{JH} = \boxed{N}$

b) $M + \overrightarrow{HF} = M + \overrightarrow{MB} = B$, pelo que $\boxed{M} + \overrightarrow{HF} = B$

c) $\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{LE}$, pelo que $\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{BD} = \boxed{\overrightarrow{LE}}$

d) $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{MB}$, pelo que $\overrightarrow{IG} + \boxed{\overrightarrow{GO}} = \overrightarrow{MB}$

e) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{MG}$, pelo que $\overrightarrow{AE} + \boxed{\overrightarrow{EF}} = \overrightarrow{MG}$

f) $\overrightarrow{LN} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{LO} = \overrightarrow{JH}$, pelo que

$$\overrightarrow{LN} - \boxed{\overrightarrow{ON}} = \overrightarrow{JH}$$

3.2. a) $\|\overrightarrow{EL}\| = 2\|\overrightarrow{AB}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EL}\| = 2 \times 4 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EL}\| = 8$

- b) $\|\overrightarrow{BM}\| = 5$, pois pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$\|\overrightarrow{BM}\|^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\overline{BM}\|^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \|\overline{BM}\|^2 = 25$$

Como $\|\overline{BM}\| \geq 0$, vem $\|\overline{BM}\| = 5$.

c) $\|\overline{AF}\| = \sqrt{145}$, pois pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\|\overline{AF}\|^2 = \|\overline{AC}\|^2 + \|\overline{CF}\|^2, \|\overline{AC}\| = 2\|\overline{AB}\| \Leftrightarrow \|\overline{AC}\| = 8 \text{ e } \|\overline{CF}\| = 3\|\overline{AM}\| \Leftrightarrow \|\overline{CF}\| = 9.$$

$$\text{Assim, } \|\overline{AF}\|^2 = 8^2 + 9^2 \Leftrightarrow \|\overline{AF}\|^2 = 145.$$

Como $\|\overline{AF}\| \geq 0$, vem $\|\overline{AF}\| = \sqrt{145}$.

d) $\|\overline{EF}\| - \|\overline{MF}\| = \|\overline{EF}\| + \|\overline{FM}\| = \|\overline{EM}\|$. Daí que

$$\|\overline{EM}\| = \sqrt{73}, \text{ pois pelo Teorema de Pitágoras tem-se}$$

$$\|\overline{EM}\|^2 = \|\overline{MD}\|^2 + \|\overline{ED}\|^2, \|\overline{MD}\| = 2\|\overline{AB}\| \Leftrightarrow \|\overline{MD}\| = 8$$

$$\text{e } \|\overline{ED}\| = \|\overline{AM}\| \Leftrightarrow \|\overline{ED}\| = 3.$$

$$\text{Assim, } \|\overline{EM}\|^2 = 8^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\overline{EM}\|^2 = 73.$$

Como $\|\overline{EM}\| \geq 0$, vem $\|\overline{EM}\| = \sqrt{73}$, pelo que

$$\|\overline{EF} - \overline{MF}\| = \sqrt{73}.$$

$$4.1. -\frac{\vec{u}}{3} + 2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} = -\frac{2}{6}\vec{u} + \frac{6}{3}\vec{v} + \frac{3}{6}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{5}{3}\vec{v}$$

$$4.2. -2(\vec{a} - \vec{b}) + 2\vec{b} - (-\vec{a} + \vec{b}) = -2\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$4.3. -\frac{2}{3}(\vec{x} - 3\vec{y}) - \frac{1}{3}\left(-9\vec{x} + \frac{3}{2}\right)\vec{y} = -\frac{2}{3}\vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = -\frac{2}{3}\vec{x} + \frac{4}{2}\vec{y} + \frac{9}{3}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{7}{3}\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y}$$

$$4.4. \frac{2}{5}(10\vec{a} - 2\vec{b}) - \frac{3}{2}\left(-4\vec{a} + \frac{2}{15}\vec{b}\right) = 4\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b} + 6\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} = 10\vec{a} - \vec{b}$$

$$5. \vec{u} = \frac{7}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}(-6\vec{b} - \vec{a}) + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{7}{2}\vec{a} + 9\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \vec{u} = 5\vec{a} + 10\vec{b}$$

$$\vec{v} = -\vec{b} - 2\left(-\frac{5}{4}\vec{a} - 3\vec{b}\right) \Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{a} + 6\vec{b} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{5}{2}\vec{a} + 5\vec{b}$$

Assim tem-se que $\vec{u} = 2\vec{v}$ ou $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$, pelo que os vetores

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

$$6. \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \vec{0}$$

Por outro lado, e como M, N, P e Q são os pontos médios dos lados do quadrilátero a que pertencem, tem-se que:

$$\overline{AB} = 2\overline{MB}, \overline{BC} = 2\overline{BN}, \overline{CD} = 2\overline{PD} \text{ e } \overline{DA} = 2\overline{DQ}, \text{ daí}$$

que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{MB} + 2\overline{BN} + 2\overline{PD} + 2\overline{DQ} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2(\overline{MB} + \overline{BN}) + 2(\overline{PD} + \overline{DQ}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{MN} + 2\overline{PQ} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2(\overline{MN} + \overline{PQ}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{MN} + \overline{PQ} = \vec{0}$$

$$1.4. \overline{AO} - \overline{OE} = \overline{AO} + \overline{EO} = \overline{AO} + \overline{OI} = \overline{AI}, \text{ pelo que } \overline{AO} - \overline{OE} = \overline{AI}$$

$$1.5. \overline{MO} - \overline{NP} = \overline{MO} + \overline{PN} = \overline{MO} + \overline{OE} = \overline{ME}, \text{ pelo que } \overline{MO} - \overline{NP} = \overline{ME} \text{ e } \overline{ME} = \overline{AC}$$

$$1.6. \overline{LP} + \overline{PN} + \overline{NF} = \overline{LN} + \overline{NF} = \overline{LF}, \text{ pelo que } \overline{LP} + \overline{PN} + \overline{NF} = \overline{LF} \text{ e } \overline{LF} = \overline{AE}$$

$$1.7. \overline{BL} + \overline{BN} + \overline{PB} = \overline{BL} + \overline{LP} + \overline{PB} = \overline{BP} + \overline{PB} = \overline{BP} - \overline{BP} = \vec{0}, \text{ pelo que } \overline{BL} + \overline{BN} + \overline{PB} = \vec{0} \text{ e } \vec{0} = \overline{AA}.$$

$$1.8. \frac{1}{2}\overline{CK} - \overline{BN} + \overline{AF} = \overline{CM} + \overline{NB} + \overline{AF} = \overline{CM} + \overline{MA} + \overline{AF} = \overline{CA} + \overline{AF} = \overline{CF} = \overline{AP}$$

$$2. \vec{w} = -2\vec{u} + 4\vec{v} \text{ e } \vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} \text{ e } \vec{v} = 2\vec{a} - \frac{5}{2}\vec{b}, \text{ pelo que:}$$

$$\vec{w} = -2\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}\right) + 4\left(2\vec{a} - \frac{5}{2}\vec{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{w} = \vec{a} - 6\vec{b} + 8\vec{a} - 10\vec{b} \Leftrightarrow \vec{w} = 9\vec{a} - 16\vec{b}$$

$$3.1. \|\overline{DE} + \overline{EC}\| = \|\overline{DC}\|$$

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$\|\overline{DC}\|^2 = \|\overline{DE}\|^2 + \|\overline{EC}\|^2 \Leftrightarrow \|\overline{DC}\|^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \|\overline{DC}\|^2 = 25$$

Como $\|\overline{DC}\|$ é um número não negativo, $\|\overline{DC}\| = 5$.

$$3.2. \|\overline{AC}\| + \|\overline{CD}\| = \|\overline{AD}\|. \text{ Como } [ABCD] \text{ é um losango, os seus lados têm a mesma medida de comprimento, logo } \|\overline{AD}\| = \|\overline{DC}\|, \text{ ou seja, } \|\overline{AD}\| = 5.$$

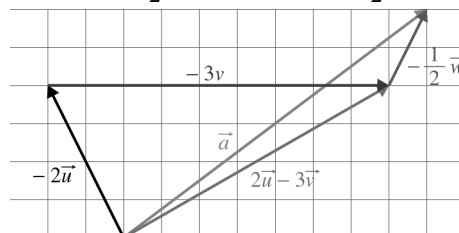
$$3.3. \|\overline{CD}\| + \|\overline{CB}\| = \|\overline{CA}\| = 8$$

$$3.4. \|\overline{BC}\| + \|\overline{DA}\| = \|\overline{BC}\| + \|\overline{CB}\| = \|\overline{BC}\| - \|\overline{BC}\| = \|\vec{0}\| = 0$$

$$3.5. \|\overline{AD} - \overline{BD}\| = \|\overline{AD} + \overline{DB}\| = \|\overline{AB}\| = \|\overline{AD}\| = 5$$

$$4. \frac{1}{2}(\overline{RP} + \overline{SQ}) = \frac{1}{2}\overline{RP} + \frac{1}{2}\overline{SQ} = \overline{RW} + \overline{WQ} = \overline{RQ}$$

$$5. \vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} \Leftrightarrow \vec{a} = (2\vec{u} - 3\vec{v}) - \frac{1}{2}\vec{w}$$



$$6.1. (\overline{CA} + \overline{BC}) + \overline{DE} = (\overline{CA} + \overline{AD}) + \overline{DE} = \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{CE}$$

$$6.2. 2\overline{DA} - 2\overline{CE} = 2\overline{DA} + 2\overline{EC} = 2(\overline{DA} + \overline{EC}) = 2(\overline{DA} + \overline{AE}) = 2\overline{DE} = \overline{DB}$$

$$6.3. -\overline{AB} + (-\overline{CB}) + \overline{DC} = \overline{BA} + \overline{BC} + \overline{DC} = \overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$$

$$7. \text{ I. } \vec{x} = 2\left(\frac{3}{2}\vec{u} - \vec{v}\right) - \vec{u} - 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = 3\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{u} - 2\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = 2\vec{u} - 4\vec{v}$$

$$\vec{y} = -\sqrt{8}\vec{u} - \sqrt{2}(-2\vec{v} - \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{y} = -\sqrt{8}\vec{u} - \sqrt{2}(-2\vec{v} - \vec{u})$$

$$\Leftrightarrow \vec{y} = -2\sqrt{2}\vec{u} + 2\sqrt{2}\vec{v} + \sqrt{2}\vec{u} \Leftrightarrow$$

Ficha para praticar 20

Págs. 58 e 59

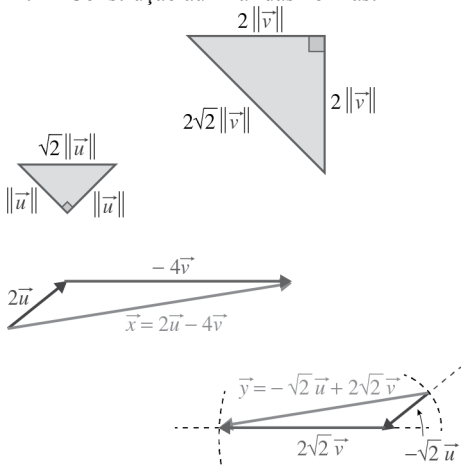
$$1.1. \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$$

$$1.2. \overline{AC} + \overline{DC} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}, \text{ pelo que } \overline{AC} + \overline{DC} = \overline{AB}$$

$$1.3. \overline{AK} + \overline{AN} = \overline{AK} + \overline{KH} = \overline{AH}, \text{ pelo que } \overline{AK} + \overline{AN} = \overline{AH}$$

$$\Leftrightarrow \vec{y} = -\sqrt{2}\vec{u} + 2\sqrt{2}\vec{v}$$

II. Construção auxiliar das normas:



III. $\vec{x} = -\sqrt{2}\vec{y}$, pelo que os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são colineares.

Ficha de teste 9

Págs. 60 e 61

1. $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{FH} + \vec{CA} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{AE} + \vec{CA} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{CE} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{CE} \Leftrightarrow \vec{u} = -\vec{EC}$

Resposta: (A)

2. $\vec{BD} = \vec{BE} + \vec{ED} \Leftrightarrow \vec{BD} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}$, pelo que

$a = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

Resposta: (B)

3. (A) Falsa, já que o vetor $\vec{a}$ tem o mesmo sentido que o vetor $\vec{b}$ quando e apenas quando $\lambda > 0$.

(B) Falsa, pois $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{b}\|$

(C) Falsa, pois quando $0 < \lambda < 1$, tem-se que $\|\vec{a}\| < \|\vec{b}\|$.

(D) Verdadeira

Resposta: (D)

4. (A) $\vec{EI} - \vec{CG} = \vec{EF} \Leftrightarrow \vec{EI} + \vec{GC} = \vec{EF} \Leftrightarrow \vec{EI} + \vec{IF} = \vec{EF} \Leftrightarrow \vec{EF} = \vec{EF}$ (verdade)

(B) $\vec{HG} - \vec{AH} = \vec{GC} \Leftrightarrow \vec{HG} + \vec{HA} = \vec{GC} \Leftrightarrow \vec{HI} = \vec{GC} \Leftrightarrow \vec{GC} = \vec{GC}$ (verdade)

(C) $\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{IH} = \vec{AI} \Leftrightarrow \vec{AH} + \vec{IH} = \vec{AI} \Leftrightarrow \vec{EI} + \vec{IH} = \vec{AI} \Leftrightarrow \vec{EH} = \vec{AI}$ (falsidade)

(D) $\frac{1}{2}\vec{DB} - \vec{GF} = \vec{O} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{DB} + \vec{FG} = \vec{O} \Leftrightarrow \vec{DI} + \vec{ID} = \vec{O} \Leftrightarrow \vec{DI} - \vec{DI} = \vec{O}$ (verdade)

Resposta: (C)

5. $\vec{u} = \sqrt{2}(\sqrt{2}\vec{a} + 2\sqrt{2}\vec{b}) - 4\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 4\vec{b} - 4\vec{a} + 2\vec{b} \Leftrightarrow \vec{u} = -2\vec{a} + 6\vec{b}$

$4\vec{a} - 12\vec{b} = -2(-2\vec{a} + 6\vec{b})$, pelo que $\vec{w} = 4\vec{a} - 12\vec{b}$ e tem-se que $\vec{w} = -2\vec{u}$.

Resposta: (D)

6. $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}$ e $\vec{CA} = \vec{c}$

$\vec{w} = 2\vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{CA} = 2(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CA} =$

$2\vec{AC} + \vec{CA} =$

$= \vec{AC} + \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{0} = -\vec{CA} = -\vec{c}$

Por outro lado, tem-se que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a 12 unidades, logo a medida do comprimento de cada um dos seus lados é igual a 4 unidades.

$\|\vec{w}\| = \|\vec{c}\|$ e $\|\vec{c}\| = \|\vec{AC}\|$, sendo $[AC]$ um dos lados do triângulo $[ABC]$, tem-se que $\|\vec{w}\| = 4$.

7.1. **Identificação:** Círculo de centro no ponto $C(4, -5)$ e raio igual a 3 unidades

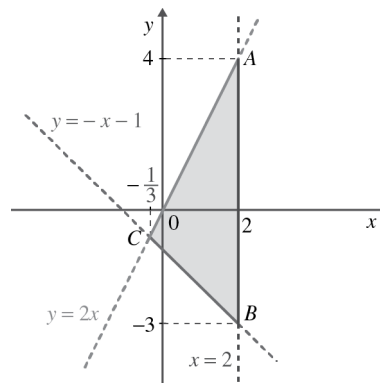
Definição analítica: $(x-4)^2 + (y+5)^2 \leq 9$

7.2. **Identificação:** Pontos de coordenadas $(-4, 0)$ e $(0, -4)$

Definição analítica: São os pontos $Q(x, y)$ tais que

$d(Q, O) = d(Q, P) \wedge (x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$

8.



$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{|4+3| \times \left(2 + \frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{49}{6} \text{ u. a.}$$

9.1. A bissetriz dos quadrantes pares pode ser definida pela equação $y = x$.

Substituindo as coordenadas do ponto Q nesta equação, tem-se que:

$k^2 - 3 = -(-1 + 3k) \Leftrightarrow k^2 - 3 = 1 - 3k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-3+5}{2} \vee k = \frac{-3-5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 1 \vee k = -4$

9.2. a) $k = \sqrt{2}$, pelo que $Q(-1+3\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2 - 3)$, ou seja,

$Q(-1+3\sqrt{2}, -1)$. Assim:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = (-1+3\sqrt{2}, -1) - (-1, \sqrt{2}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = (-1+3\sqrt{2}+1, -1-\sqrt{2}+1) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = (3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})\| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} =$$

$$= \sqrt{18+2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

A norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$ é $2\sqrt{5}$.

b) O raio da circunferência é igual a $\frac{d(P, Q)}{2}$, ou seja, é igual

$$a \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

O centro da circunferência é o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$. Seja C esse ponto.

$$C = \left(\frac{-1+3\sqrt{2}-1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}-1}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \left(-1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Logo, uma equação da circunferência de diâmetro $[PQ]$ é:

$$\left(x + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(y + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 5$$

Ficha para praticar 21

Págs. 62 e 63

1.1. $\vec{u}(-2, 5)$ e $\vec{v}(3, -4)$, pelo que:

$$\vec{w} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - (3, -4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{w} = \left(1, -\frac{5}{2} \right) - (3, -4) \Leftrightarrow \vec{w} = \left(-2, \frac{3}{2} \right)$$

1.2. $\vec{u}(-2, 5)$ e $\vec{v}(3, -4)$, pelo que:

$$\vec{x} = \frac{2}{5}(-2, 5) - \frac{1}{5}(3, -4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \left(-\frac{4}{5}, 2 \right) - \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) \Leftrightarrow \vec{x} = \left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5} \right)$$

1.3. $\vec{u}(-2, 5)$ e $\vec{v}(3, -4)$, pelo que:

$$\frac{3}{2}(-2, 5) = 2\vec{y} + \frac{1}{3}(3, -4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-3, \frac{15}{2} \right) = 2\vec{y} + \left(1, -\frac{4}{3} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-3, \frac{15}{2} \right) - \left(1, -\frac{4}{3} \right) = 2\vec{y} \Leftrightarrow \left(-4, \frac{53}{6} \right) = 2\vec{y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(-4, \frac{53}{6} \right) = \vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} = \left(-2, \frac{53}{12} \right)$$

1.4. $\vec{u}(-2, 5)$ e $\vec{v}(3, -4)$, pelo que:

$$-(-2, 5) = \frac{1}{2}\vec{t} - \frac{2}{3}(3, -4) \Leftrightarrow (2, -5) = \frac{1}{2}\vec{t} - \left(2, -\frac{8}{3} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2, -5) + \left(2, -\frac{8}{3} \right) = \frac{1}{2}\vec{t} \Leftrightarrow \left(4, -\frac{23}{3} \right) = \frac{1}{2}\vec{t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{t} = 2 \left(4, -\frac{23}{3} \right) \Leftrightarrow \vec{t} = \left(8, -\frac{46}{3} \right)$$

$$2.1. \overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -3) - (-1, 2) = (-3, -5)$$

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (-1, 2) - \left(1, -\frac{1}{2} \right) = \left(-2, \frac{5}{2} \right)$$

Assim:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = (-3, -5) + \left(-2, \frac{5}{2} \right) = \left(-5, -\frac{5}{2} \right)$$

$$2.2. \overrightarrow{CA} \left(-2, \frac{5}{2} \right), \text{ pelo que } \overrightarrow{AC} \left(2, -\frac{5}{2} \right).$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \left(1, -\frac{1}{2} \right) - (-4, -3) = \left(5, \frac{5}{2} \right)$$

Assim,

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \left(2, -\frac{5}{2} \right) - \left(5, \frac{5}{2} \right) = (-3, -5)$$

$$2.3. \overrightarrow{AC} \left(2, -\frac{5}{2} \right) \text{ e } \overrightarrow{AB}(-3, -5), \text{ pelo que } \overrightarrow{BA}(3, 5) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{BC} \left(5, \frac{5}{2} \right), \text{ daí que } \overrightarrow{CB} \left(-5, -\frac{5}{2} \right).$$

Assim:

$$\vec{t} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = 2 \left(2, -\frac{5}{2} \right) - 3(3, 5) + \left(-5, -\frac{5}{2} \right) =$$

$$= (4, -5) - (9, 15) + \left(-5, -\frac{5}{2} \right) =$$

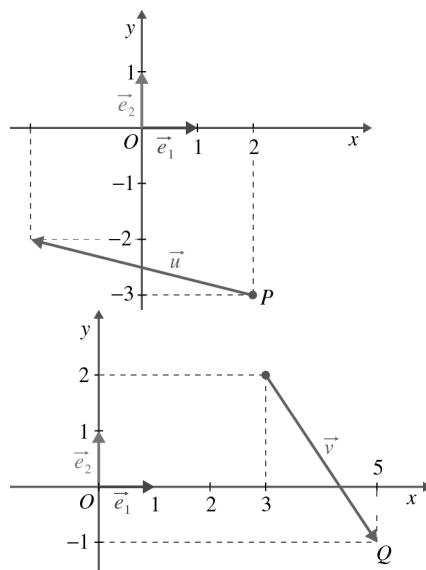
$$= (-5, -20) + \left(-5, -\frac{5}{2} \right) = \left(-10, -\frac{45}{2} \right)$$

$$2.4. \overrightarrow{BA}(3, 5) \text{ e } \overrightarrow{CB} \left(-5, -\frac{5}{2} \right), \text{ pelo que:}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}(3, 5) - \frac{2}{5} \left(-5, -\frac{5}{2} \right) =$$

$$= \left(1, \frac{5}{3} \right) - (-2, -1) = \left(3, \frac{8}{3} \right)$$

3.1.



4.1. O quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo, pelo que $A + \overrightarrow{AD} = D$ e como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, tem-se que

$D = A + \overrightarrow{BC}$. Assim:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-4, -2) - (-1, 3) = (-3, -5)$$

$$D = A + \overrightarrow{BC} = (5, -1) + (-3, -5) = (2, -6)$$

$$4.2. \quad \overline{CA} = A - C = (5, -1) - (-4, -2) = (9, 1)$$

$$\overline{DB} = B - D = (-1, 3) - (2, -6) = (-3, 9)$$

$$\overline{CA} - \overline{DB} = (9, 1) - (-3, 9) = (12, -8)$$

$$\vec{w} = \overline{CA} - \overline{DB} = (12, -8), \text{ pelo que}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{12^2 + (-8)^2} = \sqrt{144 + 64} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

$$4.3. \quad x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} - 2 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

A circunferência tem centro em $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Seja M o ponto médio de $[AC]$:

$$M\left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-2-1}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Donde, a circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0$ tem centro no ponto médio do segmento de reta $[AC]$.

5.1. Seja $\vec{v}$ o vetor pedido.

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se existe um número real λ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, isto é, $\exists \lambda \in \mathbb{R} : v = \lambda\vec{u}$.

$$\vec{v} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = \lambda(-4, 3) \Leftrightarrow \vec{v} = (-4\lambda, 3\lambda)$$

Por outro lado, pretende-se que $\vec{v}$ tenha norma igual a 10, pelo que:

$$\|\vec{v}\| = 10 \Leftrightarrow \|(-4\lambda, 3\lambda)\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(-4\lambda)^2 + (3\lambda)^2} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16\lambda^2 + 9\lambda^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{25\lambda^2} = 10$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, tem-se que: $25\lambda^2 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{100}{25} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -2$

Assim, os vetores colineares a $\vec{u}$ de norma 10 são:

$$\vec{v} = 2(-4, 3) \text{ ou } \vec{v} = -2(-4, 3), \text{ isto é,}$$

$$\vec{v} = (-8, 6) \text{ ou } \vec{v} = (8, -6).$$

Deste, o que tem sentido contrário ao de $\vec{u}$ é $\vec{v}(8, -6)$.

5.2. Seja $\vec{w}$ o vetor pedido. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se existe um número real λ tal que $\vec{w} = \lambda\vec{u}$.

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow \vec{w} = \lambda(-4, 3) \Leftrightarrow \vec{w} = (-4\lambda, 3\lambda)$$

Por outro lado, pretende-se que $\vec{w}$ tenha norma igual a 6, pelo que:

$$\|\vec{w}\| = 6 \Leftrightarrow \|(-4\lambda, 3\lambda)\| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(-4\lambda)^2 + (3\lambda)^2} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25\lambda^2} = 6$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, tem-se que: $25\lambda^2 = 36 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{36}{25} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{5} \vee \lambda = -\frac{6}{5}$

Assim, os vetores colineares a $\vec{u}$ e de norma 6 são:

$$\vec{w} = \frac{6}{5}(-4, 3) \text{ ou } \vec{w} = -\frac{6}{5}(-4, 3), \text{ isto é,}$$

$$\vec{w}\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right) \text{ ou } \vec{w}\left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}\right).$$

Deste, o que tem o mesmo sentido de $\vec{u}$ é $\vec{w}\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$.

6.1. O centro do quadrado $[ABCD]$ tem coordenadas $(0, -1)$.

Considerando $M(0, -1)$, tem-se que:

$$C = A + 2\overline{AM} \text{ e } D = B + 2\overline{BM}$$

$$\overline{AM} = M - A \Leftrightarrow \overline{AM} = (0, -1) - (4, -4) \Leftrightarrow \overline{AM} = (-4, 3)$$

$$\overline{BM} = M - B \Leftrightarrow \overline{BM} = (0, -1) - (-3, -5) \Leftrightarrow \overline{BM} = (3, 4)$$

Logo:

$$C = (4, -4) + 2(-4, 3) \Leftrightarrow C = (4, -4) + (-8, 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = (-4, 2)$$

$$D = (-3, -5) + 2(3, 4) \Leftrightarrow D = (-3, -5) + (6, 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D = (3, 3)$$

As coordenadas de C e de D são: $C(-4, 2)$ e $D(3, 3)$

6.2. A circunferência inscrita no quadrado $[ABCD]$ tem centro no centro do quadrado e raio igual a metade do comprimento do lado do quadrado.

Assim:

$$d(A, B) = \sqrt{(4+3)^2 + (-4+5)^2} \Leftrightarrow d(A, B) = \sqrt{7^2 + 1^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(A, B) = \sqrt{50} \Leftrightarrow d(A, B) = 5\sqrt{2}$$

Pelo que o raio da circunferência é igual a $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Assim, uma

equação da circunferência inscrita no quadrado $[ABCD]$ é

$$x^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ ou seja, } x^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{2}.$$

$$6.3. \quad \overline{AB} = B - A \Leftrightarrow \overline{AB} = (-3, -5) - (4, -4) \Leftrightarrow \overline{AB} = (-7, -1)$$

$$\overline{AC} = C - A \Leftrightarrow \overline{AC} = (-4, 2) - (4, -4) \Leftrightarrow \overline{AC} = (-8, 6)$$

Assim, vem que:

$$\overline{AB} - 2\vec{u} = 2\overline{AC} \Leftrightarrow -2\vec{u} = 2\overline{AC} - \overline{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\vec{u} = 2(-8, 6) - (-7, -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\vec{u} = (-16, 12) - (-7, -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\vec{u} = (-9, 13) \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{1}{2}(-9, 13) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \left(\frac{9}{2}, -\frac{13}{2}\right)$$

$$7.1. \quad \vec{F} = A + 2\overline{AE} \Leftrightarrow \vec{F} = (1, 2) + 2(\sqrt{2}, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} = (1, 2) + (2\sqrt{2}, 0) \Leftrightarrow \vec{F} = (1 + 2\sqrt{2}, 2).$$

$$\vec{M} = A + \overline{AM} \Leftrightarrow \vec{M} = A + (\overline{AF} + \overline{FM}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{M} = A + (\overline{AF} + \overline{AJ}) \Leftrightarrow \vec{M} = A + (2\overline{AE} + \overline{AJ}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{M} = (1, 2) + (2(\sqrt{2}, 0) + (0, \sqrt{2})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{M} = (1, 2) + ((2\sqrt{2}, 0) + (0, \sqrt{2})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{M} = (1, 2) + (2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Leftrightarrow \vec{M} = (1 + 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

Finalmente:

$$I = A + \overline{AI} \Leftrightarrow I = A + (\overline{AE} + \overline{EI}) \Leftrightarrow I = A + (\overline{AE} + 2\overline{AJ})$$

$$\Leftrightarrow I = (1, 2) + ((\sqrt{2}, 0) + 2(0, \sqrt{2}))$$

$$\Leftrightarrow I = (1, 2) + ((\sqrt{2}, 0) + (0, 2\sqrt{2})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I = (1, 2) + (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow I = (1 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$$

Logo, $J(1, 2\sqrt{2}), F(1+2\sqrt{2}, 2), M(1+2\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ e $I(1+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$.

$$7.2. \quad \overrightarrow{FM} = M - F \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = (1+2\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}) - (1+2\sqrt{2}, 2) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = (1+2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}-2) \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = (0, \sqrt{2})$$

Repare, que é imediato que $\overrightarrow{FM}(0, \sqrt{2})$ pois $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{AJ}$.

Por outro lado, tem-se que:

$$\overrightarrow{IM} = M - I \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = (1+2\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}) - (1+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = (1+2\sqrt{2}-1-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

Assim, $\overrightarrow{FM} - \vec{i} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \vec{i} = \overrightarrow{FM} - 2\overrightarrow{IM}$

$$\Leftrightarrow \vec{i} = (0, \sqrt{2}) - 2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow \vec{i} = (0, \sqrt{2}) - (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \vec{i} = (-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$

$$7.3. \quad \overrightarrow{DJ} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{MJ} = \\ = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{HJ}$$

Logo, $k = -\frac{2}{3}$.

7.4. A circunferência tem centro no ponto de coordenadas $M(1+2\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ e raio igual a $d(2, M) = d(A, E)$.

Como $d(A, E) = \|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, o raio é igual a 2. Assim, a circunferência pode ser definida pela equação $(x-1-2\sqrt{2})^2 + (y-2-\sqrt{2})^2 = 2$

Ficha para praticar 22

Págs. 64 e 65

1.1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, H é o ponto médio de $[AD]$ e G é o ponto médio de $[DC]$, pelo que:

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HD} + 2\overrightarrow{DG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HG}$$

Determinemos, agora, as coordenadas de $\overrightarrow{HG}$.

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HG} \Leftrightarrow (7, -5) = 2\overrightarrow{HG} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(7, -5) = \overrightarrow{HG} \Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = \left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

1.2. Coordenadas do ponto G :

$$\overrightarrow{HG} = G - H \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right) = G - \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right) = G \Leftrightarrow G = (1, 2)$$

Coordenadas do ponto F :

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{FG} \Leftrightarrow (5, 1) = 2\overrightarrow{FG} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(5, 1) = \overrightarrow{FG} \Leftrightarrow \overrightarrow{FG} = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Por outro lado, $\overrightarrow{FG} = G - F$ e $G(1, 2)$, pelo que:

$$\overrightarrow{FG} = G - F \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = (1, 2) - F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F = (1, 2) - \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow F = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Coordenadas do ponto E :

$$E = F + \overrightarrow{FE}, \text{ mas } \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{HG} = \left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Assim:

$$E = F + \overrightarrow{FE} \Leftrightarrow E = F + (-\overrightarrow{HG}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow E = (-5, 4)$$

1.3. O quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo e os pontos E e G são pontos médios de $[AB]$ e $[CD]$, respetivamente

$$\text{Logo, } \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \\ = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$$

Coordenadas do ponto C :

$$F + \overrightarrow{FC} = C \Leftrightarrow F + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = C \Leftrightarrow F + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = C$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\overrightarrow{EG} = G - E = (1, 2) - (-5, 4) = (6, -2).$$

Assim:

$$C = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}(6, -2) = \\ = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{6}{2}, -\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Coordenadas do ponto B :

$$B = C + 2\overrightarrow{CF} \text{ e } \overrightarrow{CF} = F - C = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = (-3, 1)$$

Assim:

$$B = C + 2\overrightarrow{CF} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + 2(-3, 1) = \\ = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + (-6, 2) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$B\left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Coordenadas do ponto A :

$$A = B + 2\overrightarrow{BE} \text{ e } \overrightarrow{BE} = E - B = (-5, 4) - \left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$A = B + 2\overrightarrow{BE} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \\ = \left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right) = \left(-\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

$$A\left(-\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

Coordenadas do ponto D :

$$A + \overrightarrow{AD} = D \text{ e } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = (6, -2)$$

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right) + (6, -2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

- 2.1. Sejam D e E os outros dois vértices do losango, onde $[AD]$ e $[BE]$ são as respectivas diagonais. Assim, tem-se que:

$$E = B + \overrightarrow{BE} = B + 2\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1, -3) - (5, 1) = (-4, 4), \text{ daí que:}$$

$$E = B + 2\overrightarrow{BC} = (5, 1) + 2(-4, 4) = (5, 1) + (-8, 8) = (-3, -7)$$

$$E(-3, -7)$$

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -3) - (-1, -1) = (2, -2), \text{ daí que:}$$

$$D = A + 2\overrightarrow{AC} = (-1, -1) + 2(2, -2) = (-1, -1) + (4, -4) = (3, -5)$$

$$D(3, -5)$$

As coordenadas dos outros dois vértices do losango são $(-3, -7)$ e $(3, -5)$.

- 2.2. A área de um losango é igual ao semiproduto das diagonais.

$$\text{Assim, Área do losango} = \frac{\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{BE}}{2}.$$

$$\overrightarrow{AD} = \sqrt{(3+1)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BE} = \sqrt{(-3-5)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{Área do losango} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = \frac{32(\sqrt{2})^2}{2} = \frac{32 \times 2}{2} = 32$$

- 2.3. Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz do segmento de reta $[AB]$, tem-se que $d(A, P) = d(B, P)$.

Logo:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y = -10x - 2x + 26 - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = -12x + 24 \Leftrightarrow y = -3x + 6$$

A equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é $y = -3x + 6$.

3. Os vetores $\vec{u}(\sqrt{5}, k-2)$ e $\vec{v}(2k-1, \sqrt{5})$ são colineares se e apenas se $\frac{2k-1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{k-2}$.

$$\sqrt{5} \times (\sqrt{5}) = (k-2)(2k-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 = 2k^2 - k - 4k + 2 \Leftrightarrow 2k^2 - 5k - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(-3)}}{2(2)} \Leftrightarrow k = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5+7}{4} \vee k = \frac{5-7}{4} \Leftrightarrow k = 3 \vee k = -\frac{1}{2}$$

- 4.1. $D = C + 2\overrightarrow{AB}$ ou $D = C - 2\overrightarrow{AB}$, assim tem-se:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, -5) - (2, -1) = (3, -4)$$

$$D = C + 2\overrightarrow{AB} = (8, -7) + 2(3, -4) =$$

$$= (8, -7) + (6, -8) = (14, -15) \text{ ou}$$

$$D = C - 2\overrightarrow{AB} = (8, -7) - 2(3, -4) =$$

$$= (8, -7) - (6, -8) = (2, 1)$$

O ponto D tem coordenadas $(14, -15)$ ou $(2, 1)$.

- 4.2. Tem-se que $A(2, 1)$, $B(5, -5)$, $C(8, -7)$ e $D(2, 1)$.

Sejam E , F , G e H os pontos médios de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[AD]$, respectivamente. Assim, vem que:

$$E\left(\frac{2+5}{2}, \frac{-1-5}{2}\right) \Leftrightarrow E\left(\frac{7}{2}, -3\right)$$

$$F\left(\frac{5+8}{2}, \frac{-5-7}{2}\right) \Leftrightarrow F\left(\frac{13}{2}, -6\right)$$

$$G = \left(\frac{8+2}{2}, \frac{-7+1}{2}\right) \Leftrightarrow G(5, -3)$$

$$H\left(\frac{2+2}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) \Leftrightarrow H(2, 0)$$

Como $[ABCD]$ é um trapézio e E , F , G e H são os pontos médios de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[AD]$, respectivamente, os pontos E , F , G e H não são colineares. Para provar que $[EFGH]$ é um paralelogramo, basta provar que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

$$\overrightarrow{EF} = F - E \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \left(\frac{13}{2}, -6\right) - \left(\frac{7}{2}, -3\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = (3, -3)$$

$$\overrightarrow{HG} = G - H \Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = (5, -3) - (2, 0) \Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = (3, -3)$$

pelo que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

O quadrilátero definido pelos pontos médios dos lados do trapézio $[ABCD]$ é um paralelogramo.

- 5.1. Seja $\vec{v}$ o vetor pedido.

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se $\exists \lambda \in \mathbb{R} : v = \lambda \vec{u}$.

$$\vec{v} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = \lambda(-2, 2\sqrt{3}) \Leftrightarrow \vec{v} = (-2\lambda, 2\sqrt{3}\lambda).$$

Por outro lado, pretende-se que $\vec{v}$ tenha norma 3, pelo que

$$\|\vec{v}\| = 3 \Leftrightarrow \|(-2\lambda, 2\sqrt{3}\lambda)\| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(-2\lambda)^2 + (2\sqrt{3}\lambda)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4\lambda^2 + 12\lambda^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{16\lambda^2} = 3$$

Elevando ao quadrado, ambos os membros da equação, tem-se que:

$$16\lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{4} \vee \lambda = \frac{3}{4}$$

Assim, os vetores colineares a $\vec{u}$ e de norma 3 são:

$$\vec{v} = -\frac{3}{4}(-2, 2\sqrt{3}) \text{ e } \vec{v} = \frac{3}{4}(-2, 2\sqrt{3}), \text{ isto é,}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \text{ e } \vec{v} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

O vetor com sentido contrário ao de $\vec{u}$ é $\vec{v}\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

- 5.2. $\overrightarrow{AB} = B - A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (1, -2) - (-1, k) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (2, -2-k)$

Os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares se e apenas se:

$$-2 \times (-2-k) = 2\sqrt{3} \times 2 \Leftrightarrow 4+2k = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k = 4\sqrt{3} - 4 \Leftrightarrow k = 2\sqrt{3} - 2$$

- 5.3. $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 5$$

A circunferência tem raio igual a $\sqrt{5}$, pelo que

$$d(A, B) = \sqrt{5}, \text{ donde } \sqrt{(1+1)^2 + (-2-k)^2} = \sqrt{5}, \text{ elevando}$$

ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se que:

$$(1+1)^2 + (-2-k)^2 = 5 \Leftrightarrow (2+k)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+k = 1 \vee 2+k = -1 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = -3$$

- 6.1. Seja $\vec{t}$ os vetores pretendidos. $\vec{t}$ é colinear a $\vec{u}$ quando e apenas quando $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{t} = k\vec{u}$. Assim, vem que:

$$\vec{t} = k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{t} = k\left(-\frac{5}{3}, 4\right) \Leftrightarrow \vec{t} = \left(-\frac{5}{3}k, 4k\right)$$

Pretende-se que o vetor $\vec{t}$ tenha norma igual a 10, pelo que

$$\begin{aligned} \|\vec{t}\| = 10 &\Leftrightarrow \left\| \left(-\frac{5}{3}k, (4k)^2\right) \right\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{9}k^2 + 16k^2} = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{169}{9}k^2} = 10 \Leftrightarrow \frac{169}{9}k^2 = 10^2 \Leftrightarrow \frac{169}{9}k^2 = 100 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^2 = \frac{900}{169} \Leftrightarrow k = -\frac{30}{13} \vee k = \frac{30}{13} \end{aligned}$$

Logo, $\vec{t}\left(-\frac{5}{3} \times \left(-\frac{30}{13}\right), 4 \times \left(-\frac{30}{13}\right)\right)$ ou $\vec{t}\left(-\frac{5}{3} \times \frac{30}{13}, 4 \times \frac{30}{13}\right)$,

ou seja, $\vec{t}\left(\frac{50}{13}, -\frac{120}{13}\right)$ ou $\vec{t}\left(-\frac{50}{13}, \frac{120}{13}\right)$.

- 6.2. Sabe-se que $\vec{t}\left(-\frac{5}{3}k, 4k\right)$ por 6.1.. Todavia, pretende-se, agora, que a norma de $\vec{t}$ seja igual a 6. Assim:

$$\begin{aligned} \|\vec{t}\| = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{5}{3}k\right)^2 + (4k)^2} = 6 \Leftrightarrow \frac{169}{9}k^2 = 6^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{169}{9}k^2 = 36 \Leftrightarrow k^2 = \frac{324}{169} \Leftrightarrow k = -\frac{18}{13} \vee k = \frac{18}{13} \end{aligned}$$

Para além de ter norma igual a 6, pretende-se que tenha sentido contrário ao de $\vec{u}$, pelo que:

$$\vec{t} = -\frac{18}{13}\left(-\frac{5}{3}, 4\right) \Leftrightarrow \vec{t} = \left(\frac{30}{13}, -\frac{72}{13}\right)$$

- 6.3. $C = A + 2\overline{AB}$

$$\overline{AB} = B - A = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2}{3}, -1\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } C = A + 2\overline{AB} &= \left(-\frac{2}{3}, -1\right) + 2\left(1, \frac{3}{2}\right) = \\ &= \left(-\frac{2}{3}, -1\right) + (2, 3) = \left(\frac{4}{3}, 2\right) \end{aligned}$$

- 6.4. $\overline{AP} - B = 2u \Leftrightarrow \overline{AP} = 2u + B \Leftrightarrow P - A = 2\vec{u} + B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P = 2\vec{u} + B + A \Leftrightarrow P = 2\left(-\frac{5}{3}, 4\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}, -1\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \left(-\frac{10}{3}, 8\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}, -1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = \left(-\frac{10}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}, 8 + \frac{1}{2} - 1\right) \Leftrightarrow P = \left(-\frac{11}{3}, \frac{15}{2}\right)$$

- 7.1. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 80 \wedge y = 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (7-3)^2 = 80 \wedge y = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 16 = 80 \wedge y = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 80 - 16 \wedge y = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 64 \wedge y = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2 = \sqrt{64} \vee x+2 = -\sqrt{64}) \wedge y = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2 = 8 \vee x+2 = -8) \wedge y = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 6 \vee x = -10) \wedge y = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 6 \wedge y = 7) \vee (x = -10 \wedge y = 7)$$

Os pontos têm coordenadas $(6, 7)$ e $(-10, 7)$.

- 7.2. A circunferência C_1 tem centro no ponto de coordenadas $(-2, 3)$ e raio igual a $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Assim, as retas tangentes à circunferência e paralelas ao eixo Oy têm equações $x = -2 - 4\sqrt{5}$ e $x = -2 + 4\sqrt{5}$ e as retas tangentes à circunferência e paralelas ao eixo Ox têm equações $y = 3 - 4\sqrt{5}$ e $y = 3 + 4\sqrt{5}$.

- 7.3. O segmento e reta $[AB]$ é um diâmetro da circunferência C_1 quando e apenas quando:

- o ponto médio de $[AB]$ é o centro da circunferência;
- o raio da circunferência é igual a $\frac{d(A, B)}{2}$.

Seja C o ponto médio de $[AB]$.

$C\left(\frac{-6+2}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \Leftrightarrow C(-2, 3)$, pelo que o ponto médio de $[AB]$ é o centro da circunferência.

Por outro lado, tem-se que:

$$d(A, B) = \sqrt{(-6-2)^2 + (1-5)^2}$$

$$\sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\frac{d(A, B)}{2} = 2\sqrt{5} \quad \text{e} \quad 2\sqrt{5} \quad \text{é diferente do raio da}$$

circunferência que é igual a $4\sqrt{5}$.

Assim, e apesar do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ coincidir com o centro da circunferência, este segmento não é um diâmetro desta.

Ficha de teste 10

Págs. 66 e 67

1. $Q = P + \overline{BA}$

$$\overline{BA} = A - B = (1, -3) - (5, -1) = (-4, -2)$$

$$\text{Assim, } Q = P + \overline{BA} = (-2, 4) + (-4, -2) = (-6, 2)$$

Resposta: (D)

2. $\overline{BA} + \vec{u} = 2\vec{u} - 2\vec{v} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\vec{u} - \vec{u} - 2\vec{v} \Leftrightarrow \overline{AB} = \vec{u} - 2\vec{v} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow B - A = \vec{u} - 2\vec{v} \Leftrightarrow B = A + \vec{u} - 2\vec{v}$

$$A(5, 2), \vec{u}(-3, 2) \text{ e } \vec{v}\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \text{ pelo que:}$$

$$B = (5, 2) + (-3, 2) - 2\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (2, 4) - (-1, 2) = (3, 2)$$

Resposta: (A)

3. Os vetores $\vec{u}(3, k-2)$ e $\vec{v}(\sqrt{2}, -1)$ são colineares se e apenas se:

$$\frac{k-2}{-1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3 \times (-1) = (k-2) \times \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 = \sqrt{2}k - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{\sqrt{2}} + 2 \Leftrightarrow k = \frac{-3\sqrt{2}}{2} + 2$$

Resposta: (C)

4. O centro da circunferência de diâmetro $[AB]$ é o ponto médio deste segmento de reta. Seja C o centro da circunferência.

$$C\left(\frac{3-9}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) \Leftrightarrow C(-3, 1)$$

O raio da circunferência é igual a $d(A, C)$.

$$d(A, C) = \sqrt{(-3-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Equação da circunferência:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 45 \Leftrightarrow x^2 + 6x + y^2 - 2y - 35 = 0$$

Resposta: (B)

$$5. \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-2, -1) - (-3, 2) = (1, -3)$$

$$\overrightarrow{OB} = B - O = B = (4, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{OB} = (1, -3) - 2(4, -3) =$$

$$= (1, -3) - (8, -6) =$$

$$= (-7, 3)$$

$$\|\vec{w}\| = \|(-7, 3)\| = \sqrt{(-7)^2 + 3^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

Resposta: (A)

6.1. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e apenas se

$$\frac{8}{k} = \frac{k - \sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow k(k - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \times 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - \sqrt{2}k = 4 \Leftrightarrow k^2 - \sqrt{2}k - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+16}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \vee k = \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4\sqrt{2}}{2} \vee k = \frac{-2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 2\sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$$

Como se pretende que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tenham o mesmo sentido,

$$k = 2\sqrt{2}.$$

$$6.2. \quad k = 2\sqrt{2}, \text{ pelo que } \vec{u} \left(2\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ e } \vec{v} (8, \sqrt{2}).$$

Assim, vem que:

$$\frac{1}{2}\vec{v} = 2\vec{w} - \vec{u} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(8, \sqrt{2}) = 2\vec{w} - \left(2\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\vec{w} - \left(2\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(2\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right) = 2\vec{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4 + 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\vec{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(4 + 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right) = \vec{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{w} = \left(2 + \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{4} \right)$$

$$7.1. \quad D = A + \overrightarrow{BC}, D = A + \overrightarrow{CB} \text{ ou } D = B + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (8, 10) - (-4, 2) = (12, 8)$$

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = (-12, -8)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (8, 10) - (-1, -2) = (9, 12)$$

Assim:

$$D = A + \overrightarrow{BC} = (-1, -2) + (12, 8) = (11, 6) \text{ ou}$$

$$D = A + \overrightarrow{CB} = (-1, -2) + (-12, -8) = (-13, -10) \text{ ou}$$

$$D = B + \overrightarrow{AC} = (-4, 2) + (9, 12) = (5, 14)$$

Logo, $D(11, 6)$ ou $D(-13, -10)$ ou $D(5, 14)$.

7.2. Seja W o centro do círculo.

$$W \left(\frac{-1+8}{2}, \frac{-2+10}{2} \right) \Leftrightarrow W \left(\frac{7}{2}, 4 \right)$$

Por outro lado, tem-se que raio = $d(A, B)$.

$$d(A, B) = \sqrt{(-4+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

Assim, a inequação reduzida do círculo é:

$$\left(x - \frac{7}{2} \right)^2 + (y - 4)^2 \leq 25$$

8.1. O quadrilátero $[ABCD]$ é um quadrado e R é o seu centro, pelo que: $A + 2\overrightarrow{AR} = C$ e $D + 2\overrightarrow{DR} = B$

Assim:

$$\overrightarrow{AR} = R - A = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right) - (4, -1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

$$C = A + 2\overrightarrow{AR} = (4, -1) + 2 \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right) = (4, -1) + (-1, 7) = (3, 6)$$

$$\overrightarrow{DR} = R - D = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right) - (0, 2) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$B = D + 2\overrightarrow{DR} = (0, 2) + 2 \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2} \right) = (0, 2) + (7, 1) = (7, 3)$$

Logo, $B(7, 3)$ e $C(3, 6)$.

8.2. Área da região sombreada =

$$= \frac{\text{Área do círculo} - \text{Área do quadrado}}{4}$$

$$\text{Área do círculo} = \pi \times \text{raio}^2 = \pi \times \overline{AR}^2$$

$$\overline{AR} = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 4 \right)^2 + \left(\frac{5}{2} + 1 \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{7}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}}$$

Assim:

$$\text{Área do círculo} = \pi \times \left(\sqrt{\frac{50}{4}} \right)^2 = \pi \times \frac{50}{4} = \frac{25\pi}{2}$$

$$\text{Área do quadrado} = \overline{AB}^2 = 5^2 = 25 \quad (\text{por 8.1. } d(A, B) = 5)$$

$$\text{Área da região sombreada} = \frac{\frac{25\pi}{2} - 25}{4} = \frac{25\pi - 50}{4} =$$

$$= \frac{25\pi - 50}{8} \text{ u. a.}$$

8.3. $\overline{AD} = D - A \Leftrightarrow \overline{AD} = (0, 2) - (4, -1) \Leftrightarrow \overline{AD} = (-4, 3)$

Seja $\vec{w}$ o vetor pedido.

Os vetores $\overline{AD}$ e $\vec{w}$ são colineares se $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{w} = \lambda \overline{AD}$.

$$\vec{w} = \lambda \overline{AD} \Leftrightarrow \vec{w} = \lambda(-4, 3) \Leftrightarrow \vec{w} = (-4\lambda, 3\lambda)$$

Por outro lado, pretende-se que $\vec{w}$ tenha norma 7, pelo que:

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\| = 7 &\Leftrightarrow \|(-4\lambda, 3\lambda)\| = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(-4\lambda)^2 + (3\lambda)^2} = 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{16\lambda^2 + 9\lambda^2} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{25\lambda^2} = 7 \Leftrightarrow 5\sqrt{\lambda^2} = 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5|\lambda| = 7 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{5} \vee \lambda = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Assim, os vetores colineares a $\overline{AD}$ e de norma 7 são:

$$\vec{w} = \frac{7}{5}(-4, 3) \text{ ou } \vec{w} = -\frac{7}{5}(-4, 3), \text{ isto é,}$$

$$\vec{w}\left(-\frac{28}{5}, \frac{21}{5}\right) \text{ ou } \vec{w}\left(\frac{28}{5}, -\frac{21}{5}\right).$$

Ficha para praticar 23

Págs. 68 e 69

1.1. $(x, y) = (-2, 3) + t(-1, 2), t \in \mathbb{R}$

Pontos: $(-2, 3)$ e $(-3, 5)$, por exemplo

Para $t = 1$, $(x, y) = (-2, 3) + 1(-1, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (-3, 5)$

Vetores diretores: $(-1, 2)$ e $(-2, 4)$, por exemplo

1.2. $(x, y) = t(-10, 4), t \in \mathbb{R}$

Pontos: $(0, 0)$ e $(10, -4)$, por exemplo

Para $t = -1$: $(x, y) = -1(-10, 4) \Leftrightarrow (x, y) = (10, -4)$

Vetores diretores: $(-10, 4)$ e $(10, -4)$, por exemplo

1.3. $y = -\frac{3}{2}x + 1$

Pontos: $(0, 1)$ e $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$, por exemplo

Para $x = 1$, $y = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$.

Vetores diretores: $(2, -3)$ e $(6, -9)$, por exemplo.

1.4. $y = x + 2$

Pontos: $(0, 2)$ e $(1, 3)$, por exemplo.

Para $x = 1$, $y = 2 + 1 \Leftrightarrow y = 3$

Vetores diretores: $(1, 1)$ e $(-2, -2)$, por exemplo.

1.5. $12y - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow 12y = 6x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}$

Pontos: $\left(0, -\frac{1}{12}\right)$ e $\left(1, \frac{5}{12}\right)$, por exemplo.

Para $x = 1$, $y = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{12} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow y = \frac{5}{12}$

Vetores diretores: $(2, 1)$ e $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, por exemplo.

1.6. $\begin{cases} x - 1 - 2\lambda \\ y + \lambda = -3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

Pontos: $(1, -3)$ e $(3, -2)$, por exemplo.

Para $\lambda = -1$, $\begin{cases} x = 1 - 2(-1) \\ y = -3 - (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = -3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

Vetores diretores: $(-2, -1)$ e $(2, 1)$, por exemplo.

1.7. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{5}$

Pontos: $(1, -4)$ e $(4, 1)$, por exemplo.

Para $x = 4$, $\frac{4-1}{3} = \frac{y+4}{5} \Leftrightarrow 1 = \frac{y+4}{5} \Leftrightarrow 5 = y+4 \Leftrightarrow y = 1$

Vetores diretores: $(3, 5)$ e $(-6, -10)$, por exemplo.

1.8. $x = 2$

Pontos: $(2, 3)$ e $(2, -10)$, por exemplo.

Vetores diretores: $(0, -3)$ e $(0, 1)$, por exemplo.

1.9. $\frac{2-x}{4} = \frac{2y-4}{3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-4} = \frac{\frac{2y}{2}-\frac{4}{2}}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-4} = \frac{y-2}{\frac{3}{2}}$

Pontos: $(2, 2)$ e $\left(-2, \frac{7}{2}\right)$, por exemplo.

Para $x = -2$, $\frac{-2-2}{-4} = \frac{y-2}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 1 = \frac{y-2}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = y-2$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + 2 = y \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}$$

Vetores diretores: $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$ e $(8, -3)$, por exemplo.

1.10. $2x = \frac{9-3y}{4} \Leftrightarrow \frac{2x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{4}-\frac{3y}{4}}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{3-y}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{-\frac{3}{4}}$

Pontos: $(0, 3)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$, por exemplo.

Vetores diretores: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}\right)$ e $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$, por exemplo

1.11. $3y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}$

Pontos: $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$ e $\left(10, \frac{5}{3}\right)$, por exemplo.

Vetores diretores: $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, por exemplo.

1.12. $-\frac{2-x}{3} = 3y + 2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{\frac{37}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$

Pontos: $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$ e $\left(5, -\frac{1}{3}\right)$, por exemplo.

Para $x = 5$, $\frac{5-2}{3} = \frac{y+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 1 = \frac{y+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = y + \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}$$

Vetores diretores: $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ e $(9, 1)$, por exemplo.

2.1. Para $t = 0$, tem-se que $(x, y) = (1, 2)$.

Para $t = 1$, tem-se que:

$$(x, y) = (1, 2) + (-5, 3) \Leftrightarrow (x, y) = (-4, 5)$$

Para $t = -1$, tem-se que:

$$(x, y) = (1, 2) + (-5, 3) \Leftrightarrow (x, y) = (6, -1)$$

Por exemplo, $(1, 2)$, $(-4, 5)$ e $(6, -1)$

- 2.2.** O ponto tem ordenada -7 , pelo que

$$(x, -7) = (1, 2) + t(-5, 3), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, -7) = (1, 2) + (-5t, 3t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, -7) = (1-5t, 2+3t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1-5t \wedge -7-2 = 3t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1-5t \wedge -7-2 = 3t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1-5t \wedge -9 = 3t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1-5t \wedge t = -3, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1-5(-3) \wedge t = -3, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = 16 \wedge t = -3, t \in \mathbb{R}$$

A abscissa do ponto da reta r que tem ordenada -7 é 16 .

- 2.3.** O ponto tem abscissa 6 , logo:

$$(6, y) = (1, 2) + t(-5, 3), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6, y) = (1, 2) + (-5t, 3t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6, y) = (1-5t, 2+3t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = 1-5t \wedge y = 2+3t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6-1 = -5t \wedge y = 2+3t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 = -5t \wedge y = 2+3t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \wedge y = 2+3t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \wedge y = 2+3(-1), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \wedge y = -1, t \in \mathbb{R}$$

A ordenada do ponto da reta r que tem abscissa 6 é -1 .

- 2.4.** Substituindo, na equação da reta r , x por 2 e y por $\frac{7}{5}$, vem:

$$\left(2, \frac{7}{5}\right) = (1, 2) + t(-5, 3), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2, \frac{7}{5}\right) = (1-5t, 2+3t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1-5t \wedge \frac{7}{5} = 2+3t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t = -1 \wedge 3t = -\frac{3}{5}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5} \wedge t = -\frac{1}{5}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{5}$$

Existe $t = -\frac{1}{5}$ tal que $\left(2, \frac{7}{5}\right) = (1, 2) + t(-5, 3)$, pelo que o

ponto de coordenadas $\left(2, \frac{7}{5}\right)$ pertence à reta r .

- 2.5.** As coordenadas de um ponto do eixo das ordenadas são do tipo $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Assim, tem-se que:

$$(0, y) = (1, 2) + t(-5, 3), t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0, y) = (1-5t, 2+3t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 1-5t \wedge y = 2+3\left(\frac{1}{5}\right), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{5} \wedge y = 2+3\left(\frac{1}{5}\right), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t = \frac{1}{5} \wedge y = \frac{13}{5}, t \in \mathbb{R}$$

O ponto pedido tem coordenadas $\left(0, \frac{13}{5}\right)$.

- 2.6.** O declive da reta r , m_r , é $m_r = \frac{3}{-5} \Leftrightarrow m_r = -\frac{3}{5}$.

$$\text{Assim, } r: y = -\frac{3}{5}x + b.$$

Pela alínea **2.5.** sabemos que $\left(0, \frac{13}{5}\right)$ são as coordenadas do ponto de interseção da reta r com os eixos das ordenadas, pelo que a ordenada na origem é $\frac{13}{5}$. Assim, $y = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5}$ é a equação reduzida da reta r .

- 2.7.** $(x, y) = (1, 2) + t(-5, 3), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (1-5t, 2+3t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-5t \\ y = 2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- 2.8.** Retas paralelas têm o mesmo declive. O declive da reta r é $-\frac{3}{5}$, pelo que o declive da reta s é, também $-\frac{3}{5}$. Assim,

$$s: y = -\frac{3}{5}x + b. \text{ Como } P(-4, 1) \in s, \text{ tem-se que:}$$

$$1 = -\frac{3}{5}(-4) + b \Leftrightarrow 1 = \frac{12}{5} + b \Leftrightarrow b = 1 - \frac{12}{5} \Leftrightarrow b = -\frac{7}{5}$$

$$\text{Logo, a equação reduzida da reta } s \text{ é } y = -\frac{3}{5}x - \frac{7}{5}.$$

- 2.9.** O ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas tem coordenadas $\left(0, \frac{13}{5}\right)$ (calculado em **2.5.**). A equação

$$\text{reduzida da reta } r \text{ é } y = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5} \text{ (calculada em 2.6.).}$$

Vamos, agora, determinar as coordenadas do ponto A .

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{3}{5}x = \frac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{13}{3} \end{cases}$$

$$\text{Assim, } A\left(\frac{13}{3}, 0\right) \text{ e } B\left(0, \frac{13}{5}\right).$$

Seja C o centro da circunferência de diâmetro $[AB]$.

$$C = \left(\frac{\frac{13}{3} + 0}{2}, \frac{0 + \frac{13}{5}}{2}\right) \Leftrightarrow C = \left(\frac{13}{6}, \frac{13}{10}\right)$$

O raio da circunferência é igual a $d(A, C)$.

$$\begin{aligned} d(A, C) &= \sqrt{\left(\frac{13}{6} - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{13}{10}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{13}{6}\right)^2 + \left(-\frac{13}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{36} + \frac{169}{100}} = \sqrt{\frac{2873}{450}} \end{aligned}$$

Logo, uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$ é

$$\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{10}\right)^2 = \frac{2873}{450}$$

3.1. Interseção com eixo Ox :

As coordenadas deste ponto são do tipo $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, pelo que:

$$-x + 2y + 4 = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow -x + 4 = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x = 4 \wedge y = 0$$

A reta s interseca o eixo Ox no ponto de coordenadas $(4, 0)$

Interseção com o eixo Oy :

As coordenadas deste ponto são do tipo $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, logo:

$$-x + 2y + 4 = 0 \wedge x = 0 \Leftrightarrow 2y + 4 = 0 \wedge x = 0 \Leftrightarrow y = -2 \wedge x = 0$$

A reta s interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -2)$.

$$3.2. \quad -x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow 2y = x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$$

O declive da reta s é $\frac{1}{2}$, pelo que $(2, 1)$ e $(4, 2)$ são coordenadas de dois vetores da reta s , por exemplo.

$$3.3. \quad \text{Substituindo na equação da reta } s, x \text{ por } 1 \text{ e } y \text{ por } \frac{3}{2}, \text{ tem-se}$$

$$\text{que } -1 + 2 \times \frac{3}{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow -1 + 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow 6 = 0 \text{ (falso)}$$

O ponto de coordenadas $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ não pertence à reta s .

3.4. Um vetor diretor da reta s tem coordenadas $(2, 1)$ e o ponto de coordenadas $(4, 0)$ pertence à reta s pelo que uma equação vetorial que defina a reta s , é

$$(x, y) = (4, 0) + \lambda(2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3.5. \quad \text{Por exemplo: } \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

4.1. Substituindo x por 1 e y por -3 no sistema de equações paramétricas que define a reta p , tem-se que:

$$\begin{cases} 1 = -\lambda \\ -3 = -2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Existe $\lambda = -1$ tal que $\begin{cases} 1 = -\lambda \\ -3 = -2 + \lambda \end{cases}$, pelo que o ponto de

coordenadas $(1, -3)$ pertence à reta p .

4.2. Substituindo x por -2 no sistema de equações paramétricas que define a reta p , tem-se que:

$$\begin{cases} -2 = -\lambda \\ y = -2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = -2 + 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

A ordenada do ponto da reta p que tem abscissa -2 é 0.

4.3. $(-2, 0)$ são as coordenadas de um ponto da reta p e $(-1, 1)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta p , pelo que uma equação vetorial que defina a reta p é:

$$(x, y) = (-2, 0) + \lambda(-1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$4.4. \quad \text{O declive da reta } p \text{ é } m_p = \frac{1}{-1} \Leftrightarrow m_p = -1.$$

O ponto de coordenadas $(0, -2)$ pertence à reta p , pelo que a ordenada na origem é -2 . Assim, a equação reduzida da reta p é $y = -x - 2$.

5.1. Duas retas, r e s , não verticais, são paralelas se e somente se tiverem o mesmo declive. Seja m_r e m_s os declives das retas r e s , respetivamente. $m_r = \frac{k}{4}$ e $m_s = -\frac{1}{2}$, pois $(4, k)$

é um vetor diretor da reta r e $2x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$.

$$\text{Assim, } r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s \Leftrightarrow \frac{k}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -2.$$

5.2. $p \parallel s$, pelo que o declive da reta p é $-\frac{1}{2}$ (o mesmo que a reta s). Por outro lado, sabemos que a reta p passa pelo ponto de coordenadas $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$, pelo que um sistema de equações paramétricas da reta p , pode ser:

$$\begin{cases} x = -4 + 2\lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ por exemplo.}$$

5.3. $k = -8$, pelo que a reta r fica definida por $(x, y) = (-2, 1) + t(4, -8)$, $t \in \mathbb{R}$.

O declive da reta r é $\frac{-8}{4} = -2$. Assim, $r: y = -2x + b$.

O ponto de coordenadas $(-2, 1)$ pertence à reta r , pelo que:

$$1 = -2(-2) + b \Leftrightarrow 1 = 4 + b \Leftrightarrow b = -3$$

A equação reduzida da reta r é $y = -2x - 3$.

Ficha para praticar 24**Págs. 70 e 71****1.1.** Interseção com o eixo Ox :

As coordenadas deste ponto são do tipo $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$3x + 2y + 1 = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \wedge y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \wedge y = 0$$

A reta r interseca o eixo Ox no ponto de coordenadas

$$\left(-\frac{1}{3}, 0\right).$$

Interseção com eixo Oy :

As coordenadas deste ponto são do tipo $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

$$3x + 2y + 1 = 0 \wedge x = 0 \Leftrightarrow 2y + 1 = 0 \wedge x = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \wedge x = 0$$

A reta r interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas

$$\left(0, -\frac{1}{2}\right).$$

1.2. Substituindo x por -2 na equação da reta s , tem-se que:

$$(-2, y) = (-1, 4) + t(-4, -6), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2, y) = (-1, 4) + (-4t, -6t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2, y) = (-1 - 4t, 4 - 6t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 = -1 - 4t \wedge y = 4 - 6t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t = 1 \wedge y = 4 - 6t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \wedge y = 4 - 6\left(\frac{1}{4}\right), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \wedge y = \frac{5}{2}, t \in \mathbb{R}$$

A ordenada do ponto da reta s que tem abscissa -2 é $\frac{5}{2}$.

1.3. $r: 3x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3x - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

O declive da reta r é $-\frac{3}{2}$, pelo que $(2, -3)$ são as

coordenadas de um vetor diretor da reta r , por exemplo.

$$s: (x, y) = (-1, 4) + t(-4, -6), t \in \mathbb{R}$$

As coordenadas de um vetor diretor da reta s são $(-4, -6)$, por exemplo.

$$p: \begin{cases} 3x = 4 + 2\lambda \\ -y = -2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

As coordenadas de um vetor diretor da reta p são $(\frac{2}{3}, -1)$,

por exemplo.

- 1.4. As coordenadas de um ponto da reta s , por exemplo, $(-1, 4)$ e as coordenadas de um vetor diretor da reta s são $(-4, -6)$, por exemplo, pelo que o declive da reta s é $\frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$. Assim, $s: y = \frac{3}{2}x + b$.

$$(-1, 4) \in s \text{ pelo que } 4 = \frac{3}{2}(-1) + b \Leftrightarrow 4 = -\frac{3}{2} + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = -\frac{3}{2} + b \Leftrightarrow 4 + \frac{3}{2} = b \Leftrightarrow b = \frac{11}{2}$$

A equação reduzida da reta s é $y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$.

- 1.5. Retas, não verticais, são paralelas se e somente se tiverem o mesmo declive.

$$m_r = -\frac{3}{2}, m_s = \frac{3}{2} \text{ e } m_p = \frac{-1}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow m_p = -\frac{3}{2}$$

As retas r e p são paralelas já que têm o mesmo declive.

2. Duas retas, r e s , não verticais são paralelas se e somente se tiverem o mesmo declive.

$(3, -5)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta r , pelo que o declive desta reta é $-\frac{5}{3}$ e, consequentemente, o declive da reta s será, também, $-\frac{5}{3}$.

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto de interseção da reta p com eixo Ox . As coordenadas deste ponto são do tipo $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, pelo que:

$$4x + y - 2 = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge y = 0$$

A reta p intersesta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 0)$.

Este ponto também pertence à reta s , pelo que:

$$s: y = -\frac{5}{3}x + b$$

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \in s, \text{ logo } 0 = -\frac{5}{3} \times \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{5}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{6}$$

A equação reduzida da reta s é $y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{6}$.

3. Vamos determinar a equação reduzida da reta r e a equação reduzida da reta s .

$$\frac{x-9}{4} = \frac{y-6}{3} \Leftrightarrow 3x - 27 = 4y - 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = 3x - 27 + 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = 3x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

A equação reduzida da reta s é $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

$$\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$(-1, -1)$ são as coordenadas de um ponto da reta s

$(-3, -2)$ são as coordenadas de um vetor da reta s , pelo

que o declive desta reta é $\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$. Assim, $s: y = \frac{2}{3}x + b$.

$$(-1, -1) \in s, -1 = \frac{2}{3}(-1) + b \Leftrightarrow -1 = -\frac{2}{3} + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{2}{3} = b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}$$

A equação reduzida da reta s é $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto de interseção das duas retas.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4 = 9x - 9 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 9 = 9x - 8x \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = x \\ y = \frac{2}{3}(5) - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

As retas, r e s , intersestam-se no ponto de coordenadas $(5, 3)$, pelo que o círculo tem o seu centro neste ponto. Por outro lado, o círculo é tangente ao eixo Oy , pelo que o seu raio é igual a 5 (valor absoluto da abcissa do ponto que corresponde ao centro do círculo).

Assim, $(x-5)^2 + (y-3)^2 \leq 25$ é a inequação reduzida do círculo pedido.

- 4.1. $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta AB .

$$\overrightarrow{AB} = B - A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (1, -4) - (-2, 3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (3, -7)$$

O ponto A pertence à reta AB , pelo que um sistema de equações paramétricas da reta AB é $\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 3 - 7\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$,

por exemplo.

- 4.2. O ponto da reta r que tem abcissa e a ordenada simétricas tem coordenadas do tipo $(x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação da reta r y por $-x$, tem-se que:

$$4(-x) + 10x - 1 = 0 \Leftrightarrow -4x + 10x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

Assim, o ponto pedido tem coordenadas $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$.

5. O ponto $P(k, k^2)$ pertence à reta de equação $y - 8 = 2x$, pelo que, substituindo x por k e y por k^2 , tem-se que:

$$\begin{aligned} k^2 - 8 &= 2k \Leftrightarrow k^2 - 2k - 8 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k &= \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow k = \frac{2+6}{2} \vee k = \frac{2-6}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k &= 4 \vee k = -2 \end{aligned}$$

6.1. $p: \frac{x}{2} = \frac{4-y}{4} \Leftrightarrow \frac{2x}{4} = \frac{4-y}{4} \Leftrightarrow 2x = 4-y \Leftrightarrow y = -2x+4$

O declive da reta p é -2 , pelo que a proposição a é verdadeira.

$r: 2x + y = 5 \Leftrightarrow y = -2x + 5$, o declive da reta r é -2 .

$s: (x, y) = (-1, 4) + t(-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R}$, um vetor diretor

da reta s é, por exemplo, $(-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, pelo que o declive

desta reta é $\frac{4\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$, ou seja, -2 .

Como as retas r e s têm o mesmo declive, então são paralelas.

A proposição b é verdadeira.

Determinemos a ordenada do ponto de interseção da reta p com o eixo Oy .

$$\begin{cases} x=0 \\ \frac{x}{2} = \frac{4-y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 0 = \frac{4-y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 0 = 4-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$$

A ordenada é 4 e não 3, pelo que a proposição c é falsa.

Assim, vem que:

$$\sim a \vee b \Leftrightarrow F \vee V \Leftrightarrow V$$

$$(\sim a \vee b \Rightarrow c) \Leftrightarrow (V \Rightarrow F) \Leftrightarrow F$$

$$a \wedge c \Leftrightarrow V \wedge F \Leftrightarrow F$$

$$[\sim b \Rightarrow (a \wedge c)] \Leftrightarrow (F \Rightarrow F) \Leftrightarrow V$$

Logo, $\sim a \vee b \Rightarrow c \Leftrightarrow (\sim b \Rightarrow a \wedge c)$ é falsa.

6.2. $(0, y) = (-1, 4) + t(-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0, y) = (-1, 4) + (-2\sqrt{2}t, 4\sqrt{2}t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0, y) = (-1 - 2\sqrt{2}t, 4 + 4\sqrt{2}t), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = -1 - 2\sqrt{2}t \wedge y = 4 + 4\sqrt{2}t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}t = -1 \wedge y = 4 + 4\sqrt{2}t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \wedge y = 4 + 4\sqrt{2}t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\sqrt{2}}{4} \wedge y = 4 + 4\sqrt{2}t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\sqrt{2}}{4} \wedge y = 4 + 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\sqrt{2}}{4} \wedge y = 2, t \in \mathbb{R}$$

As coordenadas do ponto da reta s que tem abcissa é $(0, 2)$.

- 6.3. O produto das coordenadas é um número real negativo, quando e apenas quando, $xy < 0$. Assim:

$$\frac{x}{2} = \frac{4-y}{4} \wedge xy < 0 \text{ é a condição que define o conjunto de}$$

pontos pedido.

7. $B(0, -3)$ e $A(-y, 0)$, $y > 0$; $A_{[ABC]} = \frac{|-3| \times |-y|}{2} = \frac{3y}{2}$
 $\frac{3y}{2} = 9 \Leftrightarrow 3y = 18 \Leftrightarrow y = 6$; $A(-6, 0)$; $m_{AB} = \frac{-3-0}{0+6} = -\frac{1}{2}$
 A reta r tem declive negativo, pelo que $m = -\frac{1}{2}$.

Ficha de teste 11

Págs. 72 e 73

1. A família dos vetores diretores da reta r é $k(8, 6)$, $k \in \mathbb{R}$.

$$-\frac{1}{8}(8, -6) = \left(-1, \frac{3}{4}\right), \text{ pelo que } \left(-1, \frac{3}{4}\right) \text{ são}$$

coordenadas de um vetor diretor da reta r .

Resposta: (D)

2. A reta r é perpendicular ao segmento de reta $[PQ]$ e passa pelo ponto médio deste, pelo que tem declive positivo e ordenada na origem negativo, isto é, $m > 0$ e $b < 0$.

Resposta: (C)

3. Duas retas, r e p , são paralelas se e somente se tiverem o mesmo declive. $r: 2y = -\frac{2}{3}kx + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}kx + 2$, logo o

declive da reta r é igual a $-\frac{1}{3}k$.

$$p: \begin{cases} -x = -1 + \lambda \\ 2y = 8\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, (-1, 4) \text{ são}$$

as coordenadas de um vetor diretor da reta p , pelo que o declive desta reta é igual a $\frac{4}{-1} = -4$.

$$\text{Assim, tem-se que } -\frac{1}{3}k = -4 \Leftrightarrow k = 12$$

Resposta: (A)

4. • Coordenadas do ponto A :

$$2y + 6x = 12 \wedge y = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 0$$

A reta s intersesta o eixo das abcissas no ponto $A(2, 0)$.

• Coordenadas do ponto B :

$$2y + 6x = 12 \wedge x = 0 \Leftrightarrow 2y = 12 \wedge x = 0 \Leftrightarrow y = 6 \wedge x = 0$$

A reta s intersesta o eixo das ordenadas no ponto $B(0, 6)$

• Coordenadas do vetor $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = B - A \Leftrightarrow \overline{AB} = (0, 6) - (2, 0) \Leftrightarrow \overline{AB} = (-2, 6)$$

• Norma do vetor $\overline{AB}$

$$\|\overline{AB}\| = \|(-2, 6)\| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Resposta: (B)

5. Equação reduzida da reta s : $\begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = -2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

$(-3, -2)$ são as coordenadas de um ponto da reta s

$(5, 1)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta s , pelo

que $\frac{1}{5}$ é o declive desta reta. Assim, $s: y = \frac{1}{5}x + b$.

$$(-3, -2) \in s, \text{ pelo que } -2 = \frac{1}{5}(-3) + b \Leftrightarrow -2 = -\frac{3}{5} + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + \frac{3}{5} = b \Leftrightarrow b = -\frac{7}{5}$$

A equação reduzida da reta s é $y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$.

Coordenadas do ponto I

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y - 4 = 0 \\ y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{2}{5}x - \frac{14}{5} - 4 = 0 \\ y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 2x - 14 - 20 = 0 \\ y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x = 34 \\ y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2}{5} - \frac{7}{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

O ponto I tem coordenadas $(2, -1)$, pelo que se situa no 4.º quadrante.

Resposta: (D)

- 6.1. Duas retas, r e s , são paralelas se e somente se tiverem o mesmo declive. $(-3, 6)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta r , pelo que o declive desta reta é igual a $\frac{6}{-3} = -2$. Por outro lado, tem-se que:

$$4y + 8x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y = -8x + 2 \Leftrightarrow y = -2x + \frac{1}{2} \text{ é equação}$$

reduzida da reta s , pelo que o seu declive é, também, -2 .

As retas r e s são paralelas pois têm o mesmo declive.

- 6.2. O declive da reta s é -2 , pelo que as coordenadas de um vetor diretor desta reta são, por exemplo, $(1, -2)$. A reta s passa pelo ponto de coordenadas $(0, \frac{1}{2})$, já que a ordenada com origem é $\frac{1}{2}$. Assim, um sistema de equações paramétricas

$$\text{que define a reta } s \text{ é, por exemplo, } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- 6.3. Se o ponto tem ordenada igual ao simétrico do triplo da abscissa, $y = -3x$, pelo que este ponto terá coordenadas $(x, -3x)$, $x \in \mathbb{R}$. Substituindo y por $-3x$ na equação da reta s , tem-se que: $4(-3k) + 8x - 2 = 0 \Leftrightarrow -12x + 8x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}. \text{ A abscissa deste ponto é } -\frac{1}{2}, \text{ pelo}$$

que a sua ordenada é $-3 \times (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$. As coordenadas do

ponto pedido são $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

- 7.1. O ponto B pertence ao eixo Oy e tem ordenada -3 , pelo que as suas coordenadas são $(0, -3)$.

Por outro lado, sabemos que o ponto A pertence ao eixo Ox e a área do triângulo $[ABO]$ é igual a 6 unidades quadradas.

$$\text{Área } \Delta[ABO] = \frac{\overline{AO} \times \overline{BO}}{2} \Leftrightarrow 6 = \frac{\overline{AO} \times 3}{2} \Leftrightarrow 12 = \overline{AO} \times 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AO} = 4$$

A abscissa do ponto A é negativa, pelo que $A(-4, 0)$.

▪ Equação reduzida da reta AB

$\overline{AB}$ é um vetor diretor da reta AB .

$$\overline{AB} = B - A \Leftrightarrow \overline{AB} = (0, -3) - (-4, 0) \Leftrightarrow \overline{AB} = (4, -3)$$

pelo que o declive da reta AB é igual a $-\frac{3}{4}$. A ordenada na origem é -3 , pois o ponto B tem coordenadas $(0, -3)$.

A equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{3}{4}x - 3$.

- 7.2. A circunferência tem centro na origem e raio 3, pelo que pode ser definida pela equação $x^2 + y^2 = 9$.

A condição pedida é:

$$x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq -\frac{3}{4}x - 3 \wedge y \leq 0 \wedge x \leq 0$$

- 8.1. Coordenadas do ponto C :

O ponto C é o ponto de interseção das retas BC e CD .

Equação reduzida da reta BC :

$$2y - x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Equação reduzida da reta CD :

$(-1, 9)$ são as coordenadas de um ponto da reta CD .

$(2, -4)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta CD ,

pelo que o declive desta reta é $\frac{-4}{2} = -2$.

Assim, $CD: y = -2x + b$.

$$(-1, 9) \in CD, \text{ pelo que } 9 = -2(-1) + b \Leftrightarrow 9 - 2 = b \Leftrightarrow b = 7$$

A equação reduzida da reta CD é $y = -2x + 7$.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 7 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 14 = x - 1 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x = -15 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \times 3 + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

pelo que $C(3, 1)$.

Coordenadas do ponto D :

$[ABCD]$ é um retângulo, pelo que $\overline{CD} = \overline{BA}$.

Assim, $C + \overline{CD} = D \Leftrightarrow C + \overline{BA} = D$.

Determinemos as coordenadas do vetor $\overline{BA}$.

$$\overline{BA} = A - B \Leftrightarrow \overline{BA} = (-2, 1) - (-1, -1) \Leftrightarrow \overline{BA} = (-1, 2)$$

daí que $D = C + \overline{BA} = (3, 1) + (-1, 2) = (2, 3)$.

As coordenadas pedidas são $C(3, 1)$ e $D(2, 3)$.

- 8.2. Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AB]$, tem-se que $d(P, A) = d(P, B)$. Logo:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2y + 5 = 2x + 2y + 2 \Leftrightarrow -2y - 2y = 2x - 4x + 2 - 5$$

$$\Leftrightarrow -4y = -2x - 3 \Leftrightarrow 4y = 2x + 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

O declive desta reta é $\frac{1}{2}$, pelo que $(2, 1)$ são as coordenadas

de um vetor diretor da reta, por exemplo. Por outro lado, a

ordenada na origem desta reta é $\frac{3}{4}$, pelo que $(0, \frac{3}{4})$ são as

coordenadas de um ponto da reta.

Assim, uma equação vetorial da mediatriz do segmento de

reta $[AB]$ é, por exemplo, $(x, y) = (0, \frac{3}{4}) + t(2, 1), t \in \mathbb{R}$.

Ficha para praticar 25

Págs. 74 e 75

1.1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (2, -1, 0) + (-4, 0, 0) = (-2, -1, 0)$

1.2. a) $z = 8$

b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow 8y = 8 \Leftrightarrow y = 1$

c) $x = 2 \wedge y = 3$

d) $z = 4$

e) $y = 3 \wedge z = 8 \wedge -2 \leq x \leq 2$

f) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16$

1.3. Volume do prisma = área da base $\times$ altura =
 $= 4^2 \times 8 = 16 \times 8 = 128$

1.4. Área total do prisma = $2 \times$ área da base + área lateral =
 $= 2 \times 4^2 + 4 \times 4 \times 8 = 32 + 128 = 160$

2.1. $x^2 + 2x + y^2 - 8y + z^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 + z^2 -$
 $-4z + 4 - 3 - 1 - 16 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 24$

Assim, tem-se que $C(-1, 4, 2)$ e o raio da superfície é igual a $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

2.2. a) O eixo Oy pode ser definido por $x = 0 \wedge z = 0$, pelo que:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 &= 24 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1^2 + (y-4)^2 + (-2)^2 &= 24 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + (y-4)^2 + 4 &= 24 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y-4)^2 &= 19 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y-4) &= \sqrt{19} \vee y-4 = -\sqrt{19} \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y = \sqrt{19} + 4 \vee y &= -\sqrt{19} + 4) \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y = \sqrt{19} + 4 \wedge x &= 0 \wedge z = 0) \vee \\ \vee (y = -\sqrt{19} + 4 \wedge x &= 0 \wedge z = 0) \end{aligned}$$

A interseção da superfície esférica com o eixo Oy são os pontos de coordenadas $(0, \sqrt{19} + 4, 0)$ e $(0, -\sqrt{19} + 4, 0)$.

b) $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 24 \wedge x = -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-1+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 24 \wedge x = -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (y-4)^2 + (z-2)^2 = 24 \wedge x = -1$

Circunferência de centro no ponto coordenadas $(-1, 4, 2)$ e raio $\sqrt{24}$, contida no plano de equação $x = -1$

c) $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 24 \wedge z = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 + (4-2)^2 = 24 \wedge z = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 + 4 = 24 \wedge z = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \wedge z = 4$

A interseção da superfície esférica com o plano de equação $z = 4$ é a circunferência de centro $(-1, 4, 4)$ e raio $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, contida no plano de equação $z = 4$.

2.3. Substituindo, na equação da superfície esférica, x por -3 , y por 0 e z por 0 , tem-se que:

$$\begin{aligned} (-3)^2 + 2 \times (-3) + 0^2 - 8 \times 0 + 0^2 - 4 \times 0 - 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 - 6 - 3 &= 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{verdade}) \end{aligned}$$

O ponto A pertence à superfície esférica.

$$(x+3)^2 + y^2 + z^2 \leq 24$$

O ponto A pertence à superfície esférica e o ponto C é o seu centro, pelo que $\overline{AC}$ é o raio da superfície esférica. Assim, a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$ é $(x+3)^2 + y^2 + z^2 \leq 24$.

3.1. $\left(\frac{3+x}{2}, \frac{y+4}{2}, \frac{z-1}{2}\right) = (-1, 1, 4)$, pelo que

$$\begin{aligned} \frac{3+x}{2} = -1 \wedge \frac{y+4}{2} = 1 \wedge \frac{z-1}{2} = 4 \\ \Leftrightarrow 3+x = -2 \wedge y+4 = 2 \wedge z-1 = 8 \\ \Leftrightarrow x = -5 \wedge y = -2 \wedge z = 9 \end{aligned}$$

$$C = B + \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 4) + (-4, -3, 5) = (-5, -2, 9)$$

Assim, $C(-5, -2, 9)$

3.2. A esfera tem diâmetro $[AB]$, pelo que o ponto médio de $[AB]$ é o centro da esfera. Determinemos as suas coordenadas.

$$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{4+1}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right). \text{ Assim, a esfera de diâmetro } [AB] \text{ tem centro no ponto } D\left(1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

O raio desta esfera é $\overline{AD}$.

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \sqrt{(3-1)^2 + \left(4-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-1-\frac{3}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{4 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

A inequação reduzida da esfera de diâmetro $[AB]$ é

$$(x-1)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ou seja: $(x-1)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{2}$

4.1. $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10 \wedge x = 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (5-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10 \wedge x = 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9 \wedge x = 5$

T trata-se da circunferência de centro no ponto de coordenadas $(5, -2, 3)$ e raio 3 contida no plano de equação $x = 5$.

4.2. A superfície esférica S tem centro no ponto de coordenadas $(4, -2, 3)$ e raio igual a $\sqrt{10}$, pelo que $y = -2 + \sqrt{10}$ e $y = -2 - \sqrt{10}$ são equações de planos tangentes à superfície esférica S . Assim, os valores de a para os quais o plano de equação $y = a$ tem interseção não vazia com a superfície esférica S são $a \in [-2 - \sqrt{10}, -2 + \sqrt{10}]$.

4.3. $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10 \wedge z = b \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 + (b-3)^2 = 10 \wedge z = b \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 10 - (b-3)^2 \wedge z = b$

Pretende-se que a interseção da superfície esférica S com o plano de equação $z = b$ seja uma circunferência de raio $2\sqrt{2}$, pelo que $r = 2\sqrt{2}$, daí que, $r^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow r^2 = 8$.

Assim, vem que:

$$10 - (b-3)^2 = 8 \Leftrightarrow (b-3)^2 = 10 - 8 \Leftrightarrow (b-3)^2 = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b-3 = \sqrt{2} \vee b-3 = -\sqrt{2} \Leftrightarrow b = 3 + \sqrt{2} \vee b = 3 - \sqrt{2}$$

- 5.1. O ponto M tem abcissa e cota igual a 5. Apenas se desconhece a sua ordenada, pelo que as suas coordenadas são do tipo $M(5, y, 5)$, onde $0 < y < 5$. Por outro lado, sabe-se

que M pertence ao plano MNQ . Substituindo na equação deste plano as coordenadas de M , tem-se que:

$$10 \times 5 + 15y + 6 \times 5 = 125 \Leftrightarrow 50 + 15y + 30 = 125 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15y = 25 - 80 \Leftrightarrow 15y = 45 \Leftrightarrow y = 3$$

Assim, $M(5, 3, 5)$.

O ponto N tem ordenada e cota igual a 5. Apenas se desconhece a sua abcissa, pelo que as suas coordenadas são do tipo $N(x, 5, 5)$, onde $0 < x < 5$. Por outro lado, sabe-se

que N pertence ao plano MNQ . Substituindo na equação deste plano as coordenadas de N , tem-se que:

$$10x + 15 \times 5 + 6 \times 5 = 125 \Leftrightarrow 10x + 75 + 30 = 125 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x = 125 - 105 \Leftrightarrow 10x = 20 \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, $N(2, 5, 5)$.

5.2.
$$V_{[MNUQ]} = \frac{\text{Área da base} \times \text{altura}}{3} = \frac{\text{Área } \Delta[MNU] \times \overline{UQ}}{3} =$$

$$= \frac{\frac{\overline{MU} \times \overline{UN}}{2} \times \overline{UQ}}{3} = \frac{\frac{2 \times 3}{2} \times 5}{3} = 5 \text{ u. v.}$$

O volume da pirâmide $[MNUQ]$ é igual a 5 unidades cúbicas.

- 5.3. A superfície esférica que contém os oito vértices do cubo $[OPQRSTUVWXYZ]$ tem centro no centro do cubo e raio igual a $\frac{d(O, U)}{2}$. Assim, vem que:

• Centro = $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

• Raio = $\frac{d(O, U)}{2} = \frac{\sqrt{(5-0)^2 + (5-0)^2 + (5-0)^2}}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{25+25+25}}{2} = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$$

A equação reduzida da superfície esférica pedida é:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$$

c) $y = \frac{7}{2}$

d) $x = 10 \wedge z = 10$

e) $x = 10 \wedge y = 3$

f) $x = 5 \wedge z = 0$

g) $x = 0 \wedge y = 10 \wedge 0 \leq z \leq 10$

h) $x = 10 \wedge z = 10 \wedge y \geq 3$

- 2.1. A superfície esférica de diâmetro $[AC]$ em centro no ponto médio de $[AC]$.

Seja M esse ponto.

$$M\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{4+6}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{2}, 1, 5\right)$$

O raio desta superfície é $\overline{AM}$.

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2 + (4-5)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

A equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[AC]$ é:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = \frac{17}{4}$$

2.2. Raio = $\overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (0-2)^2 + (6-4)^2}$

$$= \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

A inequação reduzida da esfera de centro B e raio $\overline{AC}$ é:

$$x^2 + (y-2)^2 + z^2 \leq 17$$

2.3. $\overline{AB} = \sqrt{(0+1)^2 + (2-2)^2 + (0-4)^2} =$

$$= \sqrt{1^2 + 0 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{17} \text{ (ver 2.2.)}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2 + (6-0)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4+4+36} =$$

$$= \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ e $\overline{AC} \neq \overline{BC}$, pelo que o triângulo $[ABC]$ é isósceles não equilátero.

- 3.1. A área de cada uma das faces do cubo é igual a 36 unidades quadradas pelo que a aresta do cubo mede 6 unidades ($\sqrt{36} = 6$).

a) Reta FG

b) Segmento de reta $[AB]$

c) Semirreta $\overrightarrow{DA}$

- 3.2. a) $x = -3 \wedge y = -3 \wedge 0 \leq z \leq 6$

b) $B(-3, 3, 0)$

O conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto B é igual a 5 é a superfície esférica de centro no ponto B e raio 5, pelo que este conjunto de pontos pode ser definido por $(x+3)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25$.

c) $z = 3$

1.1. $P(10, 3, 10)$, $Q(0, 7, 10)$ e $S(5, 10, 0)$

1.2. a) $y = 3$

b) $x = 5$

3.3. $A(3, 3, 0)$ e $G(-3, -3, 6)$

Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico do plano mediador do segmento de reta $[AG]$, tem-se que $d(A, P) = d(G, P)$.

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2 &= (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 &= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 12z + 36 \\ \Leftrightarrow -6x - 6y + 18 &= 6x + 6y - 12z + 54 \\ \Leftrightarrow -12x - 12y + 12z - 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow x + y - z + 3 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4.1. \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \wedge x = 0 &\Leftrightarrow 0^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \wedge x = 0 \\ \Leftrightarrow y^2 + z^2 \leq 25 \wedge x = 0\end{aligned}$$

Círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 0, 0)$ e raio 5 contido no plano de equação $x = 0$.

4.2. Seja C o centro da superfície esférica.

$$C\left(\frac{2-6}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) \Leftrightarrow C(-2, 1, 2)$$

O raio da superfície esférica é $\overline{OC}$, sendo O a origem do referencial.

$$\overline{OC} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

A superfície esférica pedida pode ser definida por $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$

$$4.3. \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \wedge x \geq 0$$

4.4. A esfera tem centro no ponto de coordenadas $(-1, 0, 2)$ e raio igual a $\sqrt{6}$, pelo que os planos tangentes a esta esfera e paralelos ao plano xOy podem ser definidos por $z = 2 + \sqrt{6}$ e $z = 2 - \sqrt{6}$.

Ficha de teste 12

Págs. 78 e 79

1. Uma reta paralela ao eixo Oy que passa no ponto $P(a, b, c)$ pode ser definida por $x = a \wedge z = c$.

Assim, a reta paralela ao eixo Oy que passa no ponto $A(2, -2, -4)$ pode ser definida por $x = 2 \wedge z = -4$.

Resposta: (C)

2. A superfície esférica tem centro no ponto de coordenadas $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e raio $2\sqrt{2}$, pelo que os planos tangentes

a esta superfície esférica tem as seguintes equações:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} \\ x &= \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \\ y &= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2} \\ y &= \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow y = -\sqrt{2} \\ z &= -\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow z = \sqrt{2} \\ z &= -\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow z = -3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Resposta: (D)

3. Sabe-se que $d(P, R) = 6$, pelo que

$$\begin{aligned}\sqrt{(5-1)^2 + (-1-3)^2 + (k+2)^2} &= 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (k+2)^2} &= 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 4k + 36} &= 6\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se que:

$$\begin{aligned}k^2 + 4k + 36 &= 36 \Leftrightarrow k^2 + 4k = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k(k+4) &= 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -4\end{aligned}$$

Resposta: (C)

$$\begin{aligned}4. \quad (A) \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 &= \\ &= (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + z^2 &= x^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + z^2 &= x^2 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x &= -4z \Leftrightarrow x = z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B) \quad (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 &= \\ &= (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 &= (y-2)^2 \Leftrightarrow y^2 = y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y &= 4 \Leftrightarrow y = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(C) \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 &= \\ &= (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x + 4 &= 0 \Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D) \quad (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 &= \\ &= (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 &= x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x &= -4y \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow x - y = 0\end{aligned}$$

Resposta: (D)

5. A reta definida pela condição $x = \sqrt{2} \wedge z = -\sqrt{3}$ não intersecta o plano de equação $x = -1$ porque $-1 \neq \sqrt{2}$.

Resposta: (D)

6.1. a) $E(2, 2, 2)$ e $F(2, 4, 2)$

O plano mediador da aresta $[EF]$ pode ser definido pela equação $y = 3$.

$$b) \quad y = 4 \wedge z = 2 \wedge 0 \leq x \leq 2$$

$$c) \quad z = 2 \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge 2 \leq y \leq 4$$

6.2. O centro da esfera tangente a todas as faces do cubo é o centro do cubo, ou seja, é o ponto de coordenadas $(1, 3, 1)$

e o raio é igual a metade da aresta do cubo, isto é, igual a 1. Assim, a inequação reduzida desta esfera é $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \leq 1$.

6.3. $T(1, 2, 2)$ e $P(1, 4, 1)$

Seja $W(x, y, z)$ um ponto genérico do plano mediador do segmento de reta $[TP]$, tem-se que $d(T, W) = d(P, W)$.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 &= (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 \\ \Leftrightarrow (y-2)^2 + (z-2)^2 &= (y-4)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 &= y^2 - 8y + 16 + z^2 - 2z + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y - 4z + 8 &= -8y - 2z + 17 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y + 8y - 4z + 2z + 8 - 17 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y - 2z - 9 &= 0\end{aligned}$$

O plano mediador do segmento de reta $[TP]$ pode ser definido por $4y - 2z - 9 = 0$.

- 7.1. A superfície esférica tem centro $C(2, 2, 2)$ e é tangente ao plano de equação $y = 2 - \sqrt{6}$, pelo que o raio da superfície esférica é $\sqrt{6}$.

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 6$$

Por outro lado, a superfície esférica contém apenas dois pontos que têm as três coordenadas iguais, ou seja, pontos com coordenadas da forma (a, a, a) , $a \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação da superfície esférica, tem-se que:

$$(a-2)^2 + (a-2)^2 + (a-2)^2 = 6 \Leftrightarrow 3 \times (a-2)^2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 = \frac{6}{3} \Leftrightarrow (a-2)^2 \Leftrightarrow a-2 = \sqrt{2} \vee a-2 = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 2 + \sqrt{2} \vee a = 2 - \sqrt{2}$$

Os pontos pedidos têm as seguintes coordenadas:

$$(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) \text{ e } (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}).$$

- 7.2. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 6 \wedge x = a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \wedge x = a$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 + (z-2)^2 = 6 - (a-2)^2 \wedge x = a$$

Pretende-se que a interseção da superfície esférica com o plano de equação $x = a$ seja uma circunferência de raio $\sqrt{5}$. $r = \sqrt{5}$, pelo que $r^2 = 5$ e assim, tem-se que:

$$6 - (a-2)^2 = 5 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 6 - 5 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a-2 = -1 \vee a-2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = 3$$

8. O triângulo $[ABC]$ é equilátero pelo que:

$$d(A, B) = d(A, C) = d(B, C). \text{ Assim:}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(6-0)^2 + (0-6)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 0} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(6-0)^2 + (p-6)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{6^2 + (p-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + (p-6)^2 + 36} = \sqrt{72 + (p-6)^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(6-6)^2 + (p-0)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{0 + p^2 + (-6)^2} = \sqrt{p^2 + 36}$$

$$\sqrt{72 + (p-6)^2} = \sqrt{p^2 + 36} = \sqrt{72}$$

Como os dois membros das igualdades e os respetivos radicandos são positivos, qualquer que seja o número real p , vem:

$$\begin{cases} 72 + (p-6)^2 = 72 \\ p^2 + 36 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-6)^2 = 0 \\ p^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 6 \\ p = -6 \vee p = 6 \end{cases}$$

Logo, $p = 6$.

Ficha para praticar 27

Págs. 80 e 81

- 1.1. $B - 2\vec{u} = (-1, 2, -2) - 2(4, 2, -6) =$

$$= (-1, 2, -2) - (8, 4, -12) = (-9, -2, 10)$$

- 1.2. $\vec{AB} + 2(-2\vec{u}) = (B - A) - 4\vec{u} =$

$$= ((-1, 2, -2) - (-4, 3, 2)) - 4(4, 2, -6) =$$

$$= (3, -1, -4) - (16, 8, -24) = (-13, -9, 20)$$

$$1.3. \quad 2\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{u} = 2(3, -1, -4) - \frac{3}{2}(4, 2, -6) = (6, -2, -8) - (6, 3, -9) = (0, -5, 1)$$

$$1.4. \quad -\frac{1}{2}\vec{u} + 3\vec{BA} = -\frac{1}{2}(4, 2, -6) + 3(-3, 1, 4) = (-2, -1, 3) + (-9, 3, 12) = (-11, 2, 15)$$

$$1.5. \quad A - 2(3\vec{u} - 2\vec{AB}) = (-4, 3, 2) - 2(3(4, 2, -6) - 2(3, -1, -4)) = (-4, 3, 2) - 2((12, 6, -18) - (6, -2, -8)) = (-4, 3, 2) - 2(6, 8, -10) = (-4, 3, 2) - (12, 16, -20) = (-16, -13, 22)$$

$$2.1. \quad \text{a)} \quad \vec{EH} + \vec{EB} = \vec{EH} + \vec{HC} = \vec{EC}$$

$$\text{b)} \quad \vec{BH} - \vec{CD} = \vec{BH} + \vec{DC} = \vec{BH} + \vec{HG} = \vec{BG}$$

$$\text{c)} \quad \vec{FG} - \vec{BA} = \vec{FG} + \vec{AB} = \vec{FG} + \vec{EF} = \vec{EG}$$

$$2.2. \quad \vec{EA} = A - E = (1, 2, 4) - (1, 2, 0) = (0, 0, 4)$$

$$\vec{EF} = F - E = (-3, 2, 0) - (1, 2, 0) = (-4, 0, 0)$$

$$\vec{EH} = H - E = (1, 6, 0) - (1, 2, 0) = (0, 4, 0)$$

$$G = H + \vec{EF} = (1, 6, 0) + (-4, 0, 0) = (-3, 6, 0)$$

$$B = F + \vec{EA} = (-3, 2, 0) + (0, 0, 4) = (-3, 2, 4)$$

$$C = G + \vec{EA} = (-3, 6, 0) + (0, 0, 4) = (-3, 6, 4)$$

$$\text{a)} \quad \vec{AG} = G - A = (-3, 6, 0) - (1, 2, 4) = (-4, 4, 4)$$

$$\vec{EC} = C - E = (-3, 6, 4) - (1, 2, 0) = (-4, 4, 4)$$

$$\vec{HB} = B - H = (-3, 2, 4) - (1, 6, 0) = (-4, -4, 4)$$

Assim, vem que:

$$\vec{W} = \vec{AG} + \vec{EC} - \frac{1}{2}\vec{HB} = (-4, 4, 4) + (-4, 4, 4) - \frac{1}{2}(-4, -4, 4) = (-8, 8, 0) - (-2, -2, 2) = (-6, 10, -2)$$

$$\text{b)} \quad \|\vec{AB} - \vec{HB}\| = \|\vec{AB} + \vec{BH}\| = \|\vec{AH}\|$$

$$\vec{AH} = H - A = (1, 6, 0) - (1, 2, 4) = (0, 4, -4),$$

pelo que:

$$\|\vec{AH}\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Assim, } \|\vec{AB} - \vec{HB}\| = 4\sqrt{2}.$$

- c) O centro da superfície esférica é o centro do cubo, isto é, é o ponto de coordenadas $(-1, 4, 2)$ e o raio é igual a metade da medida de comprimento da aresta do cubo, ou seja, igual a 2. Logo, a equação reduzida da superfície esférica tangente a todas as faces do cubo é $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 4$.

- d) $D(1, 6, 4)$ e como a reta é paralela ao eixo Oy , um vetor diretor pode ser $\vec{v}(0, 1, 0)$. Assim, a reta pode ser definida por:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$$

- 3.1. Um vetor diretor da reta AB é, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 2) - (2, -3, 1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 1)$$

Uma equação vetorial da reta AB é:
 $(x, y, z) = (2, -3, 1) + t(-1, 2, 1), t \in \mathbb{R}$

- 3.2. $\overrightarrow{CA} = A - C \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = (2, -3, 1) - (3, -1, 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = (-1, -2, 1)$

Uma equação vetorial do segmento de reta $[CA]$ é:
 $(x, y, z) = (3, -1, 0) + t(-1, -2, 1), t \in [0, 1]$

- 3.3. Um vetor diretor da reta BC é, por exemplo, $\overrightarrow{BC}$.
 $\overrightarrow{BC} = C - B \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = (3, -1, 0) - (1, -1, 2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = (2, 0, -2)$

Assim, um sistema de equações paramétricas que define a reta BC é, por exemplo:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- 4.1. Seja M o centro da base de pirâmide.

$R = P + 2\overrightarrow{PM}$, onde $P(0, 0, 10)$ e $M(4, 3, 5)$.

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{PM} &= M - P \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = (4, 3, 5) - (0, 0, 10) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = (4, 3, -5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Daí que, } R &= P + 2\overrightarrow{PM} = (0, 0, 10) + 2(4, 3, -5) = \\ &= (0, 0, 10) + (8, 6, -10) = (8, 6, 0) \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que $Q = R + \overrightarrow{RQ}$, mas $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OP}$,
 donde:

$$Q = R + \overrightarrow{OP} = R + P = (8, 6, 0) + (0, 0, 10) = (8, 6, 10)$$

Assim, $R(8, 6, 0)$ e $Q(8, 6, 10)$.

- 4.2. A reta que contém a altura da pirâmide, tem a direção do vetor $\overrightarrow{VM}$ e contém o ponto V (e, obviamente, o ponto M).

$$\overrightarrow{VM} = M - V = (4, 3, 5) - (-2, 11, 5) = (6, -8, 0)$$

Uma equação vetorial desta reta é:

$$(x, y, z) = (-2, 11, 5) + t(6, -8, 0), t \in \mathbb{R}$$

- 4.3. Volume da pirâmide = $\frac{\text{Área da base} \times \text{altura}}{3} =$

$$= \frac{\text{Área}[OPQR] \times \overline{VM}}{3} = \frac{\overline{OP}^2 \times \overline{VM}}{3}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{(10-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} \Leftrightarrow \overline{OP} = 10$$

(é imediato que $\overline{OP}$ é igual à cota de P)

$$\overline{VM} = \sqrt{(4+2)^2 + (3-1)^2 + (5-5)^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 0} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{10^2 \times 10}{3} = \frac{1000}{3}$$

- 4.4. $T = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{11+0}{2}, \frac{5+10}{2} \right) \Leftrightarrow T = \left(-1, \frac{11}{2}, \frac{15}{2} \right)$

$$W = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{6+0}{2}, \frac{10+10}{2} \right) \Leftrightarrow W = (4, 3, 10)$$

O centro da esfera é o ponto médio do segmento de reta $[TW]$.

$$\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{\frac{11}{2}+3}{2}, \frac{\frac{15}{2}+10}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}, \frac{35}{4} \right)$$

O raio da esfera é igual à distância do centro ao ponto W .

$$\begin{aligned} \text{raio} &= \sqrt{\left(4 - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(3 - \frac{17}{4} \right)^2 + \left(10 - \frac{35}{4} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{2} \right)^2 + \left(-\frac{5}{4} \right)^2 + \left(\frac{5}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{16} + \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{75}{8}} \end{aligned}$$

A inequação reduzida da esfera de diâmetro $[TW]$ é

$$\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{17}{4} \right)^2 + \left(z - \frac{35}{4} \right)^2 \leq \frac{75}{8}$$

- 4.5. Sendo $W(x, y, z)$ um ponto genérico do plano mediador do segmento de reta $[PV]$, tem-se que:

$$\begin{aligned} d(W, P) &= d(W, V) \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-10)^2 = \\ &= (x+2)^2 + (y-11)^2 + (z-5)^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 100 =$$

$$= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 22y + 121 + z^2 - 10z + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -20z + 100 = 4x - 22y - 10z + 150 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 22y - 10z + 100 - 150 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 22y - 10z - 50 = 0 \Leftrightarrow 2x - 11y + 5z + 25 = 0$$

Uma equação do plano mediador do segmento de reta $[PV]$ é $2x - 11y + 5z + 25 = 0$.

- 5.1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 + 4 - 1 - 4 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10 \Leftrightarrow$$

A superfície esférica tem centro no ponto de coordenadas $(1, -2, 3)$ e raio igual a $\sqrt{10}$.

- 5.2. Vamos mostrar, inicialmente, que o ponto $A(1, -3, 0)$ pertence à superfície esférica. Substituindo as coordenadas do ponto A na equação da superfície esférica, tem-se que:

$$1^2 + (-3)^2 + 0^2 - 2 \times 1 + 4 \times (-3) - 6 \times 0 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 9 - 2 - 12 + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{verdade})$$

O ponto A pertence à superfície esférica.

Determinemos, as coordenadas do ponto B . Sendo

$C(1, -2, 3)$ o centro da superfície esférica, tem-se que:

$$B = A + 2\overrightarrow{AC} = A + 2(C - A) = A + 2C - 2A = 2C - A =$$

$$= 2(1, -2, 3) - (1, -3, 0) = (2, -4, 6) - (1, -3, 0) =$$

$$= (1, -1, 6)$$

$$B(1, -1, 6)$$

- 5.3. Um vetor diretor da reta AC (C é o centro da superfície esférica), é por exemplo, $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -2, 3) - (1, -3, 0) = (0, 1, 3)$$

O ponto A pertence a esta reta, pelo que um sistema de equações paramétricas é:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Ficha para praticar 28

Págs. 82 e 83

1.1. $G + \overrightarrow{CD} = G + \overrightarrow{GL} = L$

1.2. $K + \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{LK} = K + \overrightarrow{KE} - LK = E - \overrightarrow{LK} =$
 $= E + \overrightarrow{KL} = E + \overrightarrow{EF} = F$

1.3. $A - \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{HJ} = A + \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{HJ} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HJ} =$
 $= B + \overrightarrow{HJ} = B + \overrightarrow{BD} = D$

1.4. $\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FA} = \vec{0}$

1.5. $\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IH} =$
 $= \overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IH} = \vec{0} + \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IH}$

1.6. $K + \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{BA} = K + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = K + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} =$
 $= K + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = K + \overrightarrow{AB} + 0 = K + \overrightarrow{AB} = K + \overrightarrow{KJ} = J$

1.7. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{HG} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + 2\overrightarrow{AE} =$
 $= \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AE}$

1.8. $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{KJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{KJ} =$
 $= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{KJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KJ} =$
 $= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KJ} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KJ} =$
 $= 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KJ} = 2(\vec{0}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KJ} =$
 $= \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$

2.1. $\overrightarrow{AB} = B - A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (1, -3, 2) - (-2, -1, 4) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (3, -2, -2)$

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} - 2\vec{v} + \vec{u} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{w} = (3, -2, -2) - 2\left(-2, 3, \frac{1}{2}\right) + (-1, 4, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{w} = (3, -2, -2) - (-4, 6, 1) + (-1, 4, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{w} = (7, -8, -3) + (-1, 4, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{w} = (6, -4, -3)$

2.2. $\frac{1}{2}\vec{x} + \vec{u} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{x} + (-1, 4, 0) = 2\left(-2, 3, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{x} + (-1, 4, 0) = (4, -6, -1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{x} = (4, -6, -1) - (-1, 4, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{x} = (5, -10, -1) \Leftrightarrow \vec{x} = 2(5, -10, -1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{x} = (10, -20, -2)$

2.3. $\frac{3}{2}\vec{v} = 2\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{u} + 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(-2, 3, \frac{1}{2}\right) = 2\vec{y} - \frac{1}{2}(-1, 4, 0) + 2(-3, 2, 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-3, \frac{9}{2}, \frac{3}{4}\right) = 2\vec{y} - \left(-\frac{1}{2}, 2, 0\right) + (-6, 4, 4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-3, \frac{9}{2}, \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}, 2, 0\right) - (-6, 4, 4) = 2\vec{y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{3}{4}\right) - (-6, 4, 4) = 2\vec{y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{13}{4}\right) = 2\vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{13}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{y} = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{13}{8}\right)$

3. Seja $\vec{v}$ o vetor pedido. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares quando e apenas quando existe $k \in \mathbb{R}$, tal que, $\vec{v} = k\vec{u}$.

$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = k(2\sqrt{2}, 3, \sqrt{3}) \Leftrightarrow \vec{v} = (2\sqrt{2}k, 3k, \sqrt{3}k)$

Pretende-se que o vetor $\vec{v}$ tenha norma $3\sqrt{5}$, pelo que:

$\|\vec{v}\| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \|(2\sqrt{2}k, 3k, \sqrt{3}k)\| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2\sqrt{2}k)^2 + (3k)^2 + (\sqrt{3}k)^2} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{8k^2 + 9k^2 + 3k^2} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{20k^2} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20k^2 = 45 \Leftrightarrow k^2 = \frac{45}{20} \Leftrightarrow k^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \vee k = -\frac{3}{2}$

Assim, $\vec{v} = -\frac{3}{2}(2\sqrt{2}, 3, \sqrt{3})$ ou $\vec{v} = \frac{3}{2}(2\sqrt{2}, 3, \sqrt{3})$, ou

seja, $\vec{v} \left(-3\sqrt{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $\vec{v} \left(3\sqrt{2}, \frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Todavia, pretende-se que o vetor $\vec{v}$ tenha sentido contrário

ao do vetor $\vec{u}$, pelo que $\vec{v} \left(-3\sqrt{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

4.1. $x + 1 = 0 \wedge z = 2 \Leftrightarrow x = -1 \wedge z = 2$

Pontos: $(-1, 0, 2)$ e $(-1, 1, 2)$, por exemplo.

Vetores diretores: $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$, por exemplo.

4.2. $x = 6 \wedge y + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \wedge y = -2$

Pontos: $(6, -2, 3)$ e $(6, -2, 4)$, por exemplo.

Vetores diretores: $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, por exemplo.

4.3. $\frac{1}{2} = y \wedge z - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \wedge z = 3$

Pontos: $\left(1, \frac{1}{2}, 3\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}, 3\right)$, por exemplo.

Vetores diretores: $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$, por exemplo.

5.1. Volume do cubo = (aresta)³ = $(\overline{AD})^3$

$\overline{AD} = \sqrt{(3+3)^2 + (5-3)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2}$
 $= \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$

Assim, volume do cubo = $7^3 = 343$

5.2. $E + \overrightarrow{EH} = H$, mas $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, pelo que, $H = E + \overrightarrow{AD}$.

Determinemos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-3, 3, 6) - (3, 5, 3) = (-6, -2, 3)$

Assim: $H = (1, 2, -3) + (-6, -2, 3) = (-5, 0, 0)$

A proposição p é verdadeira, já que o ponto H pertence ao eixo Ox , pois tem ordenada e cota nulas.

5.3. Sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico do segmento de reta $[AE]$, tem-se que $d(P, A) = d(P, E)$.

$(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 6z + 9 =$

$= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x - 10y - 6z + 43 = -2x - 4y + 6z + 14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x + 2x - 10y + 4y - 6z - 6z + 43 - 14 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x - 6y - 12z + 29 = 0 \Leftrightarrow$

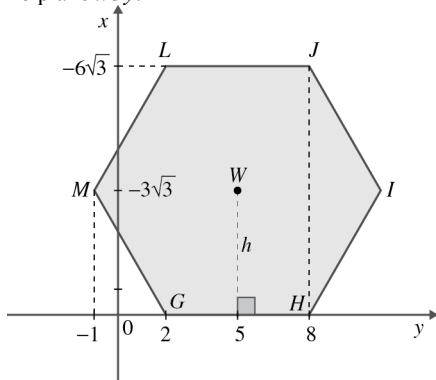
$\Leftrightarrow 4x + 6y + 12z - 29 = 0$

O plano mediador do segmento de reta $[AE]$ pode ser definido por $4x + 6y + 12z - 29 = 0$.

- 5.4. a) A esfera E_1 tem centro $A(3, 5, 3)$ e raio $\overline{CG}$.
 $\overline{CG} = \overline{AD}$, pois $[CG]$ e $[AD]$ são arestas do mesmo cubo, pelo que $\overline{CG} = 7$.
 Assim, $(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 \leq 49$.

b) Volume da esfera = $\frac{4}{3}\pi(\text{raio})^3 = \frac{4}{3}\pi \times 7^3 = \frac{1372\pi}{3}$

- 6.1. O perímetro do hexágono $[ABCDEF]$ é igual a 36 unidades e como este é regular tem lado igual a 6 unidades (36 : 6), tal como o hexágono $[GHIJLM]$.
 Vamos fazer um esboço da representação da base $[GHIJLM]$ no plano xOy .



Seja W o centro da base $[GHIJLM]$.

A altura, h , do triângulo $[GHW]$, pode ser determinada, usando o Teorema de Pitágoras. Assim:

$$h^2 = 6^2 - 3^2 \Leftrightarrow h^2 = 36 - 9 \Leftrightarrow h^2 = 27$$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{27} \Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}$.

Logo, $M(-3\sqrt{3}, -1, 0)$.

Por outro lado, tem-se que $S(-6\sqrt{3}, 8, 0)$, pelo que $D(-6\sqrt{3}, 8, 16)$, já que o ponto D tem a mesma abcissa e ordenada que o ponto S e pertence ao plano de equação $z = 16$.

Logo, $M(-3\sqrt{3}, -1, 0)$ e $D(-6\sqrt{3}, 8, 16)$ (c.q.m.)

- 6.2. Um vetor diretor da reta GM é, por exemplo, $\overline{GM}$.

Determinemos as suas coordenadas.

$$\overline{GM} = M - G = (-3\sqrt{3}, -1, 0) - (0, 2, 0) = (-3\sqrt{3}, -3, 0)$$

A reta GM contém o ponto G , pelo que

$$(x, y, z) = (0, 2, 0) + k(\sqrt{3}, 1, 0), k \in \mathbb{R} \text{ é uma equação vetorial}$$

da reta GM .

- 6.3. Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico do plano mediador do segmento de reta $[MD]$.

$$d(P, M) = d(P, D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3\sqrt{3})^2 + (y+1)^2 + (z-0)^2 =$$

$$= (x+6\sqrt{3})^2 + (z-8)^2 + (z-16)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6\sqrt{3}x + 27 + y^2 + 2y + 1 + z^2 =$$

$$= x^2 + 12\sqrt{3}x + 108 + y^2 - 16y + 64 + z^2 - 32z + 256$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{3}x + 2y + 28 = 12\sqrt{3}x - 16y - 32z + 428 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{3}x - 12\sqrt{3}x + 2y + 16y + 32z + 28 - 428 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6\sqrt{3}x + 18y + 32z - 400 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}x - 9y - 16z + 200 = 0$$

O plano mediador do segmento de reta $[MD]$ pode ser definido por $3\sqrt{3}x - 9y - 16z + 200 = 0$.

Ficha de teste 13

Págs. 84 e 85

1. $\overline{TR} = -\vec{u} - 2\vec{v} = -(2, 4, -1) - 2(-3, 1, -2) =$

$$= (-2, -4, 1) - (-6, 2, -4) = (4, -6, 5)$$

$$\overline{TR} = (4, -6, 5) \Leftrightarrow R - T = (4, -6, 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = (4, -6, 5) + T \Leftrightarrow R(4, -6, 5) + (2, -1, -4)$$

$$\Leftrightarrow R = (6, -7, 1)$$

Resposta: (C)

2. Uma reta paralela ao eixo Oy tem vetores diretores do tipo $\lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pelo que (A) e (C) ficam desde já excluídas. A reta definida pela condição $y = 2 \wedge z = 2$ é paralela e o eixo Ox .

Resposta: (D)

3. Seja C o centro da esfera, $C(1, 2, 3)$. $A = B + 2\overline{BC}$

$$\overline{BC} = C - B \Leftrightarrow \overline{BC} = (1, 2, 3) - (4, 1, 2) \Leftrightarrow \overline{BC} = (-3, 1, 1).$$

Assim:

$$A = B + 2\overline{BC} \Leftrightarrow A = (4, 1, 2) + 2(-3, 1, 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = (4, 1, 2) + (-6, 2, 2) \Leftrightarrow A = (-2, 3, 4)$$

Resposta: (B)

4. A reta A tem a direção do vetor de coordenadas $(0, 0, 1)$, pelo que é paralela ao eixo Oz . Por outro lado, uma reta paralela ao eixo Oz pode ser definida por uma condição do tipo $x = a \wedge y = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, pelo que (B) e (D) ficam desde já excluídas.

A reta s contém o ponto de coordenadas $(2, 3, 4)$ e a reta definida por $x = 2 \wedge y = 3$, também, contém neste ponto, pelo que as retas são coincidentes, ou seja, são paralelas não estritamente. Assim, a reta estritamente paralela à reta s é a reta definida pela condição $x = -1 \wedge y = -2$.

Resposta: (C)

5. Determinação das coordenadas dos pontos de interseção da superfície esférica com o eixo Ox :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z - 3 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{-2+4}{2} \vee x = \frac{-2-4}{2} \right) \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -3 \wedge y = 0 \wedge z = 0)$$

A superfície esférica intersesta o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-3, 0, 0)$ e $(1, 0, 0)$ e o que tem menor abcissa é o ponto A , pelo que $A(-3, 0, 0)$.

• Coordenadas do centro da superfície esférica:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z - 3 &= 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 6z - 3 = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 6z + 9 - 3 - 1 - 9 = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 13\end{aligned}$$

Logo, $C(-1, 0, 3)$.

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= C - A \Leftrightarrow \overline{AC} = (-1, 0, 3) - (-3, 0, 0) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \overline{AC} = (2, 0, 3)\end{aligned}$$

Resposta: (A)

6. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se:

$$\begin{aligned}\frac{2}{k} &= \frac{k+\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{k} \wedge k \neq 0 \Leftrightarrow \frac{k+\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{k} \wedge k \neq 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow k^2 + \sqrt{3}k = 6 \wedge k \neq 0 \Leftrightarrow k^2 + \sqrt{3}k - 6 = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow k = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{27}}{2} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} \vee k = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow k = \sqrt{3} \vee k = -2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Assim, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares quando $k = \sqrt{3}$ ou quando $k = -2\sqrt{3}$.

7.1. $E = F + \overline{FE} = (-2, 1, -1) + (-1, 2, 2) = (-3, 3, 1)$

7.2. A reta é paralela à reta EF , pelo que tem a direção do vetor $\overline{EF}$, ou $\overline{FE}$ (já que, $\overline{EF}$ e $\overline{FE}$, apesar de terem sentidos opostos, têm a mesma direção). Por outro lado, sabemos que a reta passa pelo ponto A . Assim um sistema de equações paramétricas que define a reta pedida é, por exemplo:

$$\begin{cases}x = -2 - \lambda \\y = -2 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\z = 2 + 2\lambda\end{cases}$$

7.3. Volume da pirâmide = $\frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$

$$\begin{aligned}\text{Altura} &= d(E, F) = \sqrt{(-3+2)^2 + (3-1)^2 + (1+1)^2} = \\&= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = 3\end{aligned}$$

$$\text{Área da base} = \overline{AB}^2$$

$$\begin{aligned}d(A, F) &= \sqrt{(-2+2)^2 + (-2-1)^2 + (2+1)^2} = \\&= \sqrt{0 + (-3)^2 + 3^2} = \\&= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

pelo que

$$d(A, C) = 2 \times 3\sqrt{2} \Leftrightarrow d(A, C) = 6\sqrt{2}$$

Por outro lado, sabe-se que a medida de comprimento diagonal de um quadrado de lado a unidades é $a\sqrt{2}$ unidades. $\overline{AC} = 6\sqrt{2}$, pelo que $\overline{AB} = 6$.

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{6^2 \times 3}{3} = 36.$$

O volume da pirâmide é igual a 36 unidades cúbicas.

7.4. $C = A + 2\overline{AF}$

$$\begin{aligned}\overline{AF} &= F - A \Leftrightarrow \overline{AF} = (-2, 1, 1) - (-2, -2, 2) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \overline{AF} = (0, 3, -3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= A + 2\overline{AF} \Leftrightarrow C = (-2, -2, 2) + 2(0, 3, -3) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow C = (-2, -2, 2) + (0, 6, -6) \Leftrightarrow C = (-2, 4, -4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Raio} &= \overline{CE} = \sqrt{(-3+2)^2 + (3-4)^2 + (1+4)^2} = \\&= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

A inequação reduzida da esfera de centro no ponto C e raio

$$\overline{CE} \text{ é } (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z+4)^2 \leq 27.$$

8.1. Substituindo y por zero no sistema de equações paramétricas da reta r , tem-se que:

$$\begin{aligned}\begin{cases}x = 1 + 2\lambda \\0 = 3 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\z = 3\lambda\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}x = 1 + 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ \lambda = -\frac{3}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \\z = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)\end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases}x = 1 - 3 \\ \lambda = -\frac{3}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \\z = -\frac{9}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -2 \\ \lambda = -\frac{3}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \\z = -\frac{9}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

O ponto da reta r que tem ordenada nula tem coordenadas $\left(-2, 0, -\frac{9}{2}\right)$.

8.2. Seja $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores diretores das retas r e s , respetivamente.

Tem-se que $\vec{r}(2, 2, 3)$ e $\vec{s}(-4, -4, -6)$.

$\vec{s} = -2\vec{r}$, logo, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são colineares e, consequentemente as retas r e s têm a mesma direção, ou seja, são paralelas.

As retas serão coincidentes desde que tenham um ponto em comum (caso contrário são estritamente paralelas).

O ponto de coordenadas $(1, 3, 0)$ pertence à reta r .

Determinemos o valor real de k para o qual as coordenadas deste ponto satisfazem a equação da reta s .

$$\begin{aligned}(1, 3, 0) &= (3, 5, k) + t(-4, -4, -6), t \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{R} \\&\Leftrightarrow (1, 3, 0) = (3, 5, k) + (-4t, -4t, -6t), t \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{R} \\&\Leftrightarrow (1, 3, 0) = (3 - 4t, 5 - 4t, k - 6t), t \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{R} \\&\Leftrightarrow \begin{cases}1 = 3 - 4t \\3 = 5 - 4t, t \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{R} \\0 = k - 6t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4t = 2 \\4t = 2, t \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{R} \\6t = k\end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases}t = \frac{1}{2} \\t = \frac{1}{2} \\6 \times \frac{1}{2} = k\end{cases}, t \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}t = \frac{1}{2} \\k = 3\end{cases}, t \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

As retas r e s são coincidentes quando e apenas quando $k = 3$.

9. $B(0, -2, 0)$ e $A(4, 0, 0)$

$$\overline{AB} = B - A = (0, -2, 0) - (4, 0, 0) = (-4, -2, 0)$$

$$(x, y, z) = (0, -2, 0) + k(-4, -2, 0), k \in \mathbb{R}$$

Ficha para praticar 29

Págs. 86 e 87

1.1. O par ordenado $(3, -1)$ pertence a $A \times B$, pelo que a proposição p é verdadeira.

Também o par ordenado $(-1, 1)$ pertence quer a $A \times B$ quer a B^2 , logo, a proposição q é verdadeira.

Assim, tem-se que:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$p \vee q \Leftrightarrow \sim q$	$(\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q \Leftrightarrow \sim q)$
V	V	F	F	V	V	F	F

A proposição é falsa.

1.2. a) $B \times A = \{(-1, -2), (-1, -1), (-1, 3), (\sqrt{7}, -2), (\sqrt{7}, -1), (\sqrt{7}, 3), (\sqrt{10}, -2), (\sqrt{10}, -1), (\sqrt{10}, 3)\}$

b) $A^2 = \{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 3), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 3), (3, -2), (3, -1), (3, 3)\}$

1.3. Por exemplo, $(-2, (-1, \sqrt{7}, \sqrt{7}))$ é um elemento de $A \times B^3$.

O cardinal de $A \times B^3$ é igual a 81, pois

$$3 \times 3^3 = 81 \quad (\#A = 3, \#B = 3 \text{ e } B^3 = (\#B)^3 = 3^3).$$

2.1. $D_f = \{-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}\}$

2.2. $f(-2\sqrt{3}) = \sqrt{2}(-2\sqrt{3}) \Leftrightarrow f(-2\sqrt{3}) = -2\sqrt{6}$

$f(-\sqrt{3}) = \sqrt{2}(-\sqrt{3}) \Leftrightarrow f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{6}$

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{2}(\sqrt{3}) \Leftrightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{6}$

$f(3\sqrt{3}) = \sqrt{2}(3\sqrt{3}) \Leftrightarrow f(3\sqrt{3}) = 3\sqrt{6}$

$f(5\sqrt{3}) = \sqrt{2}(5\sqrt{3}) \Leftrightarrow f(5\sqrt{3}) = 5\sqrt{6}$

Assim, $D_f = \{-2\sqrt{6}, -\sqrt{6}, \sqrt{6}, 3\sqrt{6}, 5\sqrt{6}\}$.

2.3. $G_{g \circ c} = \{(-\sqrt{3}, -\sqrt{6}), (\sqrt{3}, \sqrt{6}), (3\sqrt{3}, 3\sqrt{6})\}$

3.1. $D_a = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 2x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Caracterização da função a :

$$a: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{5}{1-2x}$$

3.2. $D_b = \{x \in \mathbb{R} : 2x - x^2 \neq 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x(2-x) \neq 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge 2-x \neq 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

Caracterização da função b :

$$b: \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{2x-x^2}$$

3.3. $D_c = \{x \in \mathbb{R} : 2+x^2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -2\} = \mathbb{R}$

Caracterização da função c :

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{2+x^2}$$

3.4. $D_d = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 3 \neq 0\}$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2-4}{2} \wedge x = \frac{-2+4}{2} \Leftrightarrow x = -3 \wedge x = 1$$

$$D_d = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$$

Caracterização da função d :

$$d: \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x}{x^2 + 2x - 3}$$

3.5. $D_e = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$

Caracterização da função e :

$$e:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{4}{\sqrt{x}}$$

3.6. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$

Caracterização da função f :

$$f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{4}$$

3.7. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{6-2x}{5} \geq 0\right\}$

$$\frac{6-2x}{5} \geq 0 \Leftrightarrow 6-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$D_g =]-\infty, 3]$$

Caracterização da função g :

$$g:]-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{6-2x}{5}}$$

3.8. $D_h = \{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (3-x)(3+x) \geq 0\}$

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
$3-x$	+	+	+	0	-
$3+x$	-	0	+	+	+
$9-x^2$	-	0	+	0	-

$$D_h = [-3, 3]$$

Caracterização da função h :

$$h: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{9-x^2}$$

3.9. $D_i = \mathbb{R}$ (a raiz cúbica de qualquer número real é um número real)

Caracterização da função i :

$$i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt[3]{x+3}$$

3.10. $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x+3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Caracterização da função j :

$$j: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x+3}}$$

4.1. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2a$ e $f(-6) = -4$, pelo que:

$$-4 = -\frac{1}{3}(-6) + 2a \Leftrightarrow -4 = 2 + 2a \Leftrightarrow a = -3$$

4.2. $f(x) = -\frac{1}{3}x - 6$, pois $a = -3$.

A função f é injetiva se e somente se:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_1 - 6 = -\frac{1}{3}x_2 - 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_1 = -\frac{1}{3}x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Logo, a função f é injetiva.

5.1. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{7}{2}\right) = -3$$

Assim, a função f pode ser definida pelo seguinte gráfico:

$$G_f = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, -1\right), \left(\frac{7}{2}, -3\right) \right\}$$

5.2. $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left|\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = -\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right| = -|1| = -1$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = -|0| = 0$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right| = -|-1| = -1$$

$$g\left(\frac{7}{2}\right) = -\left|\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right| = -|-3| = -3$$

Assim, $D'_g = \{-3, -1, 0\}$.

5.3. $D'_f = \{-3, -1, 0, 1\}$ e o conjunto de chegada da função f é $B = \{-3, -1, 0, 1\}$, pelo que a função f é sobrejetiva pois o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Mostremos, agora, que a função g é não sobrejetiva.

O contradomínio da função g é $D'_g = \{-3, -1, 0\}$ e o conjunto de chegada é $B = \{-3, -1, 0, 1\}$, pelo que a função

g é não sobrejetiva já que o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada.

6.1. $D_f = \mathbb{R}$, $D'_f = \mathbb{R}$ e o conjunto de chegada de f é $\mathbb{R}$. A função f é injetiva pois: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

A função f é sobrejetiva já que o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Assim, a função f é bijetiva já que é simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

A proposição p é verdadeira.

▪ $D_g = \mathbb{R}$, $D'_g = \mathbb{R}_0^+$ (o quadrado de qualquer número real é um número real não negativo) e o conjunto de chegada de g é $\mathbb{R}$.

A função g é não injetiva, pois, por exemplo, $g(-1) = g(1)$.

A proposição q é falsa.

▪ $D_h = \mathbb{R}_0^+$, $D'_h = \mathbb{R}_0^+$ e o conjunto de chegada da função h é $\mathbb{R}_0^+$.

A função h é sobrejetiva pois o contradomínio coincide com o conjunto de chegada. A proposição h é verdadeira.

6.2. Resposta do Carlos: $(p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow q \wedge r$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q)$
V	F	V	F	F	V	F

Resposta da Margarida: $(q \vee r \wedge p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

p	q	r	$q \vee r$	$q \vee r \wedge p$	$p \Leftrightarrow r$	$(q \vee r \wedge p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
V	F	V	V	V	V	V

O aluno que respondeu corretamente ao problema foi o Carlos.

Ficha para praticar 30

Págs. 88 e 89

1.1. A função f é bijetiva se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

A função f é injetiva se e somente se:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -6x_1 + 5 = -6x_2 + 5 \Leftrightarrow -6x_1 = -6x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Logo, f é injetiva.

Por outro lado, a função f é sobrejetiva se para todo o $y \in \mathbb{R}$, existir um elemento pertencente a $\mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$.

Assim:

$$-6x + 5 = y \Leftrightarrow -6x = y - 5 \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{-6}$$

Logo, $\forall y \in \mathbb{R}$ existe um $x \notin \mathbb{R}$, no caso $x = \frac{y-5}{-6}$, tal que

$y = f(x)$, pelo que f é uma função sobrejetiva.

E como f é uma função simultaneamente injetiva e sobrejetiva, então é bijetiva.

Determinemos, agora, uma expressão para $f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Assim, } y = -6x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{-6}.$$

Trocando as variáveis, tem-se $y = \frac{x-5}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{5-x}{6}$, daí

$$\text{que } f^{-1}(x) = \frac{5-x}{6}.$$

1.2. $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-6x + 5)$

$$= \frac{5 - (-6x + 5)}{6} = \frac{5 + 6x - 5}{6} = \frac{6x}{6} = x$$

$$\text{Logo, } (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{5-x}{6}\right) = -6\left(\frac{5-x}{6}\right) + 5 = \\ &= -5 + x + 5 = x \end{aligned}$$

$$\text{Logo } (f \circ f^{-1})(x) = x$$

2.1. a) $(g \circ h)(-2) = g(h(-2)) = g(-3 \times (-2) + 5) = g(6 + 5) = g(11) = 4 \times 11 - 2 = 42$

b) $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(4 \times (-2) - 2) = h(-10) = -3 \times (-10) + 5 = 35$

2.2. a) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(-3x + 5) = 4(-3x + 5) - 2 = -12x + 20 - 2 = 12x + 18$

$$D_{g \circ h} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_h \wedge h(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge -3x + 5 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Caracterização da função $g \circ h$

$$g \circ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -12x + 18$$

$$\text{b) } h \circ g(x) = h(g(x)) =$$

$$= h(4x - 2) = -3(4x - 2) + 5 = -12x + 11$$

$$D_{h \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_h\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge 4x - 2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

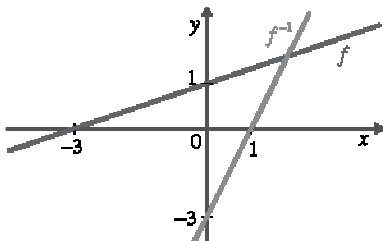
Caracterização da função $h \circ g$:

$$h \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -12x + 11$$

2.3. A proposição é verdadeira, pois $g \circ h$ não é igual a $h \circ g$, pelo que as funções g e h não são permutáveis.

3.



$$4.1. (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(-\frac{x}{3}\right) = 4\left(-\frac{x}{3}\right) = -\frac{4x}{3}; D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x) = -\frac{4x}{3}; D_{g \circ f} = \mathbb{R}$$

As funções f e g são permutáveis já que $f \circ g$ é igual a $g \circ f$.

$$4.2. \text{ a) } (f \circ g \circ f)\left(\frac{3}{4}\right) = (f \circ g)\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = (f \circ g)\left(4\left(\frac{3}{4}\right)\right) =$$

$$= (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f\left(-\frac{3}{3}\right) = f(-1) =$$

$$= 4 \times (-1) = -4$$

b) g é uma função injetiva, logo admite inversa.

$$y = -\frac{x}{3} \Leftrightarrow x = -3y$$

Trocando as variáveis, tem-se que $y = -3x$, ou seja, $g^{-1}(x) = -3x$. Assim:

$$(f \circ g^{-1})\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(g^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = f\left(-3\left(-\frac{2}{3}\right)\right) =$$

$$= f(2) = 4 \times 2 = 8$$

c) f é uma função injetiva, pelo que admite inversa.

$y = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y}{4}$, trocando as variáveis, tem-se que:

$y = \frac{x}{4}$, ou seja, $f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$. Assim:

$$(g \circ f^{-1})(24) = g(f^{-1}(24)) = g\left(\frac{24}{4}\right) = g(6) = -\frac{6}{3} = -2$$

$$4.3. \frac{f^{-1}(8)}{g(3\sqrt{3}) + (g \circ f)\left(-\frac{15}{4}\right)} = \frac{\frac{8}{4}}{-\frac{3\sqrt{3}}{3} + g\left(f\left(-\frac{15}{4}\right)\right)} =$$

$$= \frac{2}{-\sqrt{3} + g\left(4 \times \left(-\frac{15}{4}\right)\right)} = \frac{2}{-\sqrt{3} + g(-15)} =$$

$$= \frac{2}{-\sqrt{3} + \left(-\frac{15}{3}\right)} = \frac{2}{-\sqrt{3} + 5} = \frac{2}{5 - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2(5 + \sqrt{3})}{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{5^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{25 - 3} =$$

$$= \frac{10 + 2\sqrt{3}}{22} = \frac{5 + \sqrt{3}}{11}$$

5.1. A função f é injetiva se e somente se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_1 + 2 = -\frac{1}{3}x_2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_1 = -\frac{1}{3}x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Logo, f é uma função injetiva.

A função g é não injetiva pois, por exemplo $g(-1) = g(1)$.

A função h é injetiva se e somente se:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \sqrt{2}x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{2}x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}x_1 = -\sqrt{2}x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Logo, a função h é injetiva.

As funções f e h são injetivas.

5.2. A função g é não bijetiva, pelo que não admite inversa.

A proposição q é falsa, pois é verdade que a função g não admite inversa.

5.3. a) Para determinar a expressão da inversa, basta resolver em ordem a x a equação $-\frac{1}{3}x + 2 = y$. Assim, tem-se que:

$$-\frac{1}{3}x + 2 = y \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = y - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = 2 - y \Leftrightarrow x = 6 - 3y$$

Trocando as variáveis x e y , tem-se que $y = 6 - 3x$, pelo que $f^{-1}(x) = 6 - 3x$.

Logo, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. A função inversa de f pode-se caracterizar da seguinte forma:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 6 - 3x$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} - \sqrt{2}x = y \Leftrightarrow -\sqrt{2}x = y - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}x = -y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{y\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Trocando as variáveis x e y , tem-se que:

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ pelo que } h^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Logo, $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$.

$$h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$5.4. \text{ a) } (f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-3 \times (-2)^2) =$$

$$= f(-3 \times 4) = f(-12) = -\frac{1}{3} \times (-12) + 2 = 6$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (f \circ h)(\sqrt{18}) &= f(h(\sqrt{18})) = f\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2} \times (\sqrt{18})\right) = \\ &= -\frac{1}{3}(-12) + 2 = f\left(\frac{1}{2} - \sqrt{36}\right) = f\left(\frac{1}{2} - 6\right) = \\ &= f\left(-\frac{11}{2}\right) = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{11}{2}\right) + 2 = \frac{11}{6} + 2 = \frac{23}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad (f^{-1} \circ h^{-1})(-\sqrt{2}) &= f^{-1}(h^{-1}(-\sqrt{2})) = \\ &= f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = f^{-1}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \\ &= 6 - 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 6 - 3 - \frac{3\sqrt{2}}{4} = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$6.1. \quad g(x) = 5x - 2 \text{ e } (f \circ g)(x) = -15x + 7$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= -15x + 7 \Leftrightarrow f(g(x)) = -15x + 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(5x - 2) = -15x + 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(5x - 2) = -3(5x - 2) + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } f(x) = -3x + 1.$$

$$6.2. \quad g(x) = 4x - 1 \text{ e } (f \circ g)(x) = 8x + 5$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= 8x + 5 \Leftrightarrow f(g(x)) = 8x + 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(4x - 1) = 8x + 5 \Leftrightarrow f(4x - 1) = 2(4x - 1) + 7 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } f(x) = 2x + 7.$$

$$6.3. \quad g(x) = 3 - x \text{ e } (f \circ g)(x) = -18 + 12x - 2x^2$$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= -18 + 12x - 2x^2 \Leftrightarrow f(g(x)) = -18 + 12x - 2x^2 \\ &\Leftrightarrow f(3 - x) = -2(9 - 6x - x^2) \Leftrightarrow f(3 - x) = -2(3 - x)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } f(x) = -2x^2.$$

7.1. A função f é injetiva se e somente se:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Assim:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \vee x_1 + x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

Como, x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}^+$:

$$x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ pelo que a função } f \text{ é injetiva.}$$

Caracterizemos, agora, a função f^{-1} , inversa de f .

$$x^2 = y \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \wedge x > 0$$

Trocando as variáveis x e y , tem-se que $y = \sqrt{x}$, pelo que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

O domínio de f^{-1} é o contradomínio de f , ou seja, $\mathbb{R}^+$ (o quadrado de qualquer número real positivo é um número real positivo). Assim:

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$7.2. \quad D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+ \wedge x^2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+ \wedge x^2 \neq 3\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+ \wedge x \neq -\sqrt{3} \wedge x \neq \sqrt{3}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{g \circ f} =]0, +\infty[\setminus \{\sqrt{3}\}$$

$$\bullet (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{x^2 - 3}$$

• Caracterização da função $g \circ f$:

$$g \circ f:]0, +\infty[\setminus \{\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3}$$

$$8. \quad (f \circ f)(a) = 19a - 4 \Leftrightarrow f(f(a)) = 19a - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(4a + a) = 19a - 4 \Leftrightarrow f(5a) = 19a - 4$$

Por outro lado, sabe-se que $f(x) = 4x + a$. Substituindo x por $5a$, tem-se que $f(5a) = 4 \times (5a) + a = 21a$. Assim:

$$f(5a) = 19a - 4 \Leftrightarrow 21a = 19a - 4 \Leftrightarrow 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2$$

Ficha de teste 14

Págs. 90 e 91

$$1. \quad A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, 2), x \in A\} \text{ e como}$$

$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 4\}$, a representação gráfica de $A \times B$ é a da opção (C).

Resposta: (C)

$$2. \quad h(x) = (g \circ f \circ g \circ f)(x) = g \circ f \circ g(f(x)) =$$

$$= g \circ f \circ g\left(\frac{1}{x}\right) = g \circ f\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = g \circ f\left(1 - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= g\left(f\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = g\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) = g\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x}}\right) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{-1}{x-1}$$

Portanto, $h(x) = \frac{-1}{x-1}$. Por outro lado:

$$\bullet (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\bullet (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-x) = \frac{1}{1-x} = \frac{-1}{x-1}$$

Logo, $h(x) = (f \circ g)(x)$.

Resposta: (B)

$$3. \quad 2 - \frac{2}{5}x = y \Leftrightarrow -\frac{2}{5}x = y - 2 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x = 2 - y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 10 - 5y \Leftrightarrow x = 5 - \frac{5}{2}y.$$

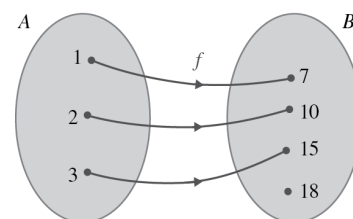
$$f^{-1}(x) = 5 - \frac{5}{2}x.$$

O gráfico da função f^{-1} é uma reta cuja ordenada na origem é 5, pelo que a representação gráfica da função f^{-1} é (A).

Resposta: (A)

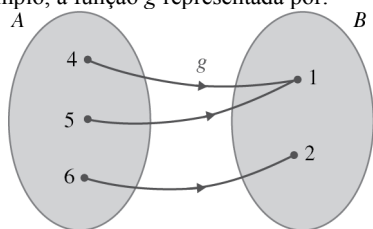
4. (A) A afirmação não é necessariamente verdadeira.

Por exemplo, a função f representada ao lado é injetiva, pois quaisquer dois elementos distintos de A têm imagens distintas. Todavia, é não sobrejetiva, já que o elemento 18 do conjunto B não é a imagem de qualquer elemento do conjunto A .



- (B) A afirmação não é necessariamente verdadeira.

Por exemplo, a função g representada por:



é sobrejetiva, pois qualquer elemento do conjunto B é imagem de pelo menos um elemento do conjunto A . No entanto, a função g é não injetiva já que os objetos distintos 4 e 5 têm a mesma imagem no caso 10.

- (C) A afirmação é necessariamente verdadeira.

Por definição, uma função é bijetiva se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

- (D) A afirmação não é necessariamente verdadeira.

Por exemplo, a função f (dada como exemplo na exclusão da opção (A)) é uma função injetiva, mas não é sobrejetiva, pelo que, também é não bijetiva.

Resposta: (C)

5. $f(32) = 400$ e $f\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{f(x)}{4}$, assim vem que

$$f\left(\frac{32}{4}\right) = \frac{f(32)}{4} \Leftrightarrow f(8) = \frac{400}{4} \Leftrightarrow f(8) = 100$$

$$f\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{f(8)}{4} \Leftrightarrow f(2) = \frac{100}{4} \Leftrightarrow f(2) = 25$$

Resposta: (D)

6. $D_g = \mathbb{R}$ e $D_f = \mathbb{R}_0^+$.

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 3x - 4 \in \mathbb{R}_0^+\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 4 \geq 0\}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times (-4)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$$

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) \geq 0$$

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$3 - x$	-	-	-	0	+
$3 + x$	-	0	+	+	+
$9 - x^2$	+	0	-	0	+

$$D_{f \circ g} =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$$

- 6.2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} - 4 =$
 $= |x| - 3\sqrt{x} - 4 = x - 3\sqrt{x} - 4$, pois $x \geq 0$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}_0^+ \wedge \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[\end{aligned}$$

- Caracterização da função $g \circ f$:

$$g \circ f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x - 3\sqrt{x} - 4$$

- 7.1. A função h é bijetiva se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

- h é injetiva se e somente se:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 - 4 = x_2^3 - 4 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

Logo, a função h é injetiva.

- h é sobrejetiva se para todo o $y \in \mathbb{R}$, existir um elemento de $\mathbb{R}$ tal que $y = h(x)$.

$$x^3 - 4 = y \Leftrightarrow x^3 = 4 + y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4 + y}$$

Assim, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = h(x)$.

Logo, como h é injetiva e sobrejetiva é bijetiva.

- 7.2. A função h é bijetiva pelo que admite inversa.

$$x^3 - 4 = y \Leftrightarrow x^3 = 4 + y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4 + y}$$

Trocando as variáveis x e y , tem-se que $y = \sqrt[3]{4 + x}$, pelo que $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{4 + x}$. Logo, $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$.

$$h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt[3]{4 + x}$$

- 8.1. $f(-3) = 3 + 1 \Leftrightarrow f(-3) = -2$

$$\bullet f(-2) = -2 + 1 \Leftrightarrow f(-2) = -1$$

$$\bullet f(-1) = -1 + 1 \Leftrightarrow f(-1) = 0$$

$$\bullet f(0) = 0 + 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

$$\bullet f(1) = 1 + 1 \Leftrightarrow f(1) = 2$$

A função f é bijetiva. Logo, admite inversa.

Logo, a proposição p é verdadeira.

- 8.2. A função f pode ser definida pelo seguinte gráfico:

$$G_f = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$$

9. $h \circ (g \circ f)(a) = 47 \Leftrightarrow h \circ [g(f(a))] = 47$

$$\Leftrightarrow h \circ [g(1 - a)] = 47 \Leftrightarrow h \circ [(1 - a)^2 - (1 - a) + 2] = 47$$

$$\Leftrightarrow h(1 - 2a + a^2 - 1 + a + 2) = 47 \Leftrightarrow h(a^2 - a + 2) = 47$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 - a + 2) + 3 = 47 \Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 4 + 3 - 47 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a - 40 = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{a \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-20)}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1 + 9}{2} \vee a = \frac{1 - 9}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 5 \vee a = -4$$

10. O número de elementos do conjunto A^2 é igual ao quadrado do número de elementos do conjunto A , assim, tem-se que $\#A^2 = [\#A]^2$, logo, $[\#A]^2 = 9$, ou seja, $\#A = 3$.

Como A é um conjunto de três elementos $(1, 2) \in A^2$ e $(4, 2) \in A^2$, conclui-se imediatamente que $A = \{1, 2, 4\}$.

Logo, A^2 é dado por:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$$

Ficha para praticar 31

Págs. 92 e 93

1.1. $D_f = \mathbb{R}$. Se $x \in D_f$, então $-x \in D_f$.

$$f(-x) = -5(-x) = 5x = -f(x)$$

Portanto, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$, logo f é uma função ímpar.

1.2. $D_f = \mathbb{R}$. Se $x \in D_f$, então $-x \in D_f$.

$$f(-x) = -6(-x)^2 = -6x^2 = f(x)$$

Portanto, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$, logo f é uma função par.

1.3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $x \in D_f$, então $-x \in D_f$.

$$f(-x) = \frac{8}{-x} = -\frac{8}{x} = -f(x)$$

Portanto, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$, logo f é uma função ímpar.

1.4. $D_f = \mathbb{R}$. Se $x \in D_f$, então $-x \in D_f$.

$$f(-x) = 7(-x)^3 = -7x^3 = -f(x)$$

Portanto, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$, logo f é uma função ímpar.

1.5. $D_f = \mathbb{R}$. Se $x \in D_f$, então $-x \in D_f$.

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x) = x^4 - x$$

$\exists x \in D_f : f(-x) \neq f(x) \wedge f(-x) \neq -f(x)$, pelo que a função f não é par nem é ímpar.

1.6. $D_f = \mathbb{R}$. Se $x \in D_f$, então $-x \in D_f$.

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x = -f(x)$$

Portanto, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$, logo f é uma função ímpar.

2. $f(-2) = 3$; $f^{-1}(3) = -2$; $f(2) = -3$; $f^{-1}(-3) = 2$

$$f(-1) = 2$$
; $f^{-1}(2) = -1$; $f(1) = -2$; $f^{-1}(-2) = 1$

$$f(3) = -4$$
; $f^{-1}(-4) = 3$; $f(-3) = 4$; $f^{-1}(4) = -3$

2.1. $f(1) + f(-3) = -2 + 4 = 2$

2.2. $f^{-1}(-4) - f^{-1}(4) = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

2.3. $f^{-1}(f^{-1}(3)) = f^{-1}(-2) = 1$

2.4. $f^{-1}((f^{-1} \circ f^{-1})(4)) = f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(4))) = f^{-1}(f^{-1}(-3)) = f^{-1}(2) = -1$

3. $g(-a) = b$. Como g é ímpar, $g(a) = -b$.

Logo, $g^{-1}(b) = -a$ e $g^{-1}(-b) = a$

$$g \circ g^{-1}(-b) = -g(-a) \Leftrightarrow g(g^{-1}(-b)) = -b \Leftrightarrow g(a) = -b \Leftrightarrow -b = -b$$

4.1. $g(x) = f(x+1)$ e $f(x) = -2x^2 + x$

$$g(x) = -2(x+1)^2 + (x+1) = -2(x^2 + 2x + 1) + x + 1 = -2x^2 - 4x - 2 + x + 1 = -2x^2 - 3x - 1$$

4.2. $h(x) = f(-x) + 2$ e $f(x) = -2x^2 + x$

$$h(x) = -2(-x)^2 + (-x) + 2 = -2x^2 - x + 2$$

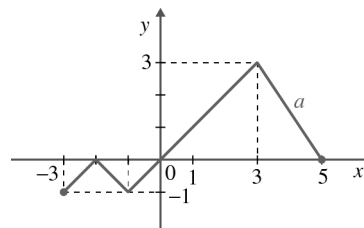
4.3. $j(x) = 2f(x-3) + 1$ e $f(x) = -2x^2 + x$

$$\begin{aligned} j(x) &= 2[-2(x-3)^2 + (x-3)] + 1 = \\ &= 2[-2(x^2 - 6x + 9) + x - 3] + 1 = \\ &= 2(-2x^2 + 12x - 18 + x - 3) + 1 = \\ &= 2(-2x^2 + 13x - 21) + 1 = -4x^2 + 26x - 42 + 1 \\ &= -4x^2 + 26x - 41 \end{aligned}$$

4.4. $m(x) = -f(3x) - 4$ e $f(x) = -2x^2 + x$

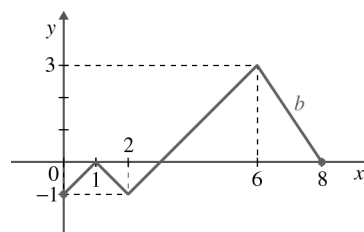
$$\begin{aligned} m(x) &= -[-2(3x)^2 + (3x)] - 4 = -[-2(9x^2) + 3x] - 4 = \\ &= -(-18x^2 + 3x) - 4 = 18x^2 - 3x - 4 \end{aligned}$$

5.1.



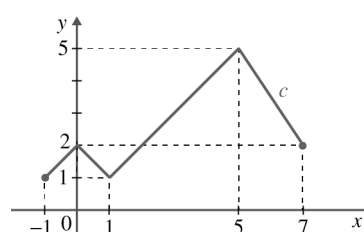
$$D_a = [-3, 5]; D'_a = [-1, 3]$$

5.2.



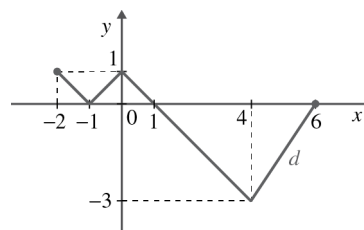
$$D_b = [0, 8]; D'_b = [-1, 3]$$

5.3.



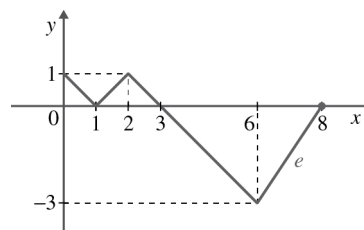
$$D_c = [-1, 7]; D'_c = [1, 5]$$

5.4.



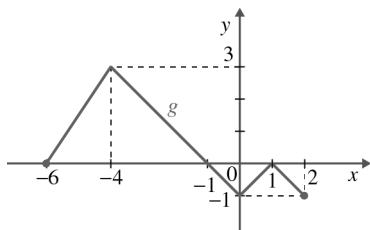
$$D_d = [-2, 6]; D'_d = [-3, 1]$$

5.5.



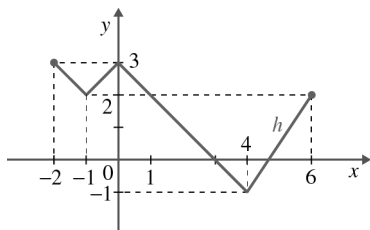
$$D_e = [0, 8]; D'_e = [-3, 1]$$

5.6.



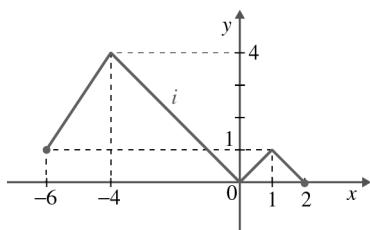
$$D_g = [-6, 2]; D'_g = [-1, 3]$$

5.7.



$$D_h = [-2, 6]; D'_h = [-1, 3]$$

5.8.



$$D_i = [-6, 2]; D'_i = [0, 4]$$

6.1. A função h é não injetiva porque, por exemplo:

$$h(-1) = h(1).$$

6.2. $D_h = \mathbb{R}$, pelo que $x \in D_h \Rightarrow -x \in D_h$

$$h(-x) = -\frac{(-x)^2}{4} = -\frac{x^2}{4} = h(x),$$

$$\forall x \in D_h, -x \in D_h \wedge h(-x) = h(x)$$

Logo, h é uma função par.6.3. A função h tem um único zero que é $x = 0$, pois

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

O gráfico da função h é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, pois $-\frac{1}{4} < 0$.

$$\text{a) } a \in]-\infty, 0[\quad \text{b) } a = 0 \quad \text{c) } a \in]0, +\infty[$$

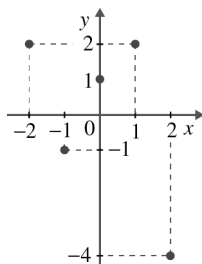
7. $G_g = \{(-3, 4), (-2, 2), (0, -1), (1, -6), (4, -8)\}$

$$G_h = \{(-4, 8), (-1, 6), (0, 1), (2, -2), (3, -4)\}$$

Ficha para praticar 32

Págs. 94 e 95

1.1.



1.2. O gráfico de g é a imagem geométrica de f pela transformação ϕ , ou seja, pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$.

1.3. $G_h = \{(-18, 2), (-9, -1), (0, 1), (9, 2), (18, -4)\}$

$$h(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$$

2.1. a) O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$, pelo que o contradomínio se mantém. Assim, $D'_g =]-\infty, 3]$.

O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela dilatação vertical de coeficiente 3, pelo que o contradomínio é alterado.

$$\text{Assim, } D'_h =]-\infty, 3 \times 3] =]-\infty, 9].$$

b) Os zeros da função g são -2 e 1 $\left(-\frac{4}{2} = -2 \text{ e } \frac{2}{2} = 1\right)$.

Os zeros da função h são -4 e 2 .

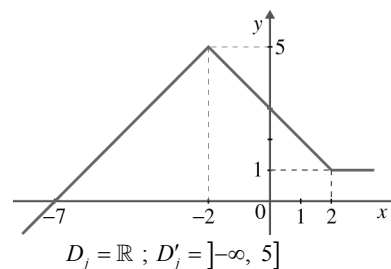
$$\text{c) } h(x) = -3 \Leftrightarrow 3f(x) = -3 \Leftrightarrow f(x) = -1$$

A equação tem uma infinidade de soluções.

2.2. Quando $a = 1$ e $b = -2$, tem-se que $j(x) = f(x+1) + 2$.

Assim, um esboço do gráfico de j é obtido a partir do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-1, 2)$.

a)



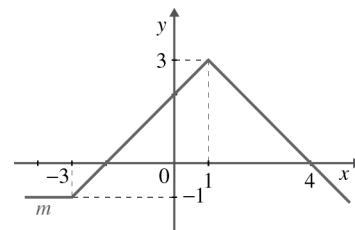
$$D_j = \mathbb{R}; D'_j =]-\infty, 5]$$

$$\text{b1) } a \in \mathbb{R} \wedge b \in]3, +\infty[$$

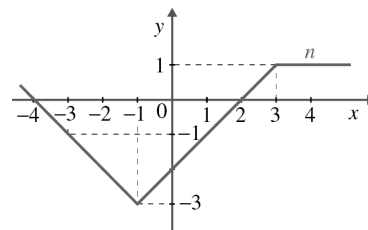
$$\text{b2) } a \in \mathbb{R} \wedge b = -1$$

$$\text{b3) } a \in \mathbb{R} \wedge b = 3$$

2.3. a)



b)



3.1. O gráfico da função a obtém-se a partir do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-1, 0)$.

- 3.2. O gráfico da função b obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(0, -3)$.
- 3.3. O gráfico da função c obtém-se a partir do gráfico da função f pela reflexão de eixo Oy seguida da translação de vetor $\vec{u}(0, 1)$.
- 3.4. O gráfico da função d obtém-se a partir do gráfico da função f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.
- 3.5. O gráfico da função e obtém-se a partir do gráfico da função f pela dilatação horizontal de coeficiente 2.
- 3.6. O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela dilatação vertical de coeficiente 4.
- 3.7. O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$ seguida da translação de vetor $\vec{u}(0, -2)$.
- 3.8. O gráfico da função i obtém-se a partir do gráfico da função f pela dilatação vertical de coeficiente 2, seguida pela reflexão de eixo O , e, finalmente, da translação de vetor $\vec{u}(0, 4)$.
- 4.1. O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(0, -2)$, pelo que o contradomínio é alterado. Assim, $D'_g = [-6 - 2, 4 - 2]$, ou seja, $D'_g = [-8, 2]$.
- 4.2. O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela reflexão de eixo Ox seguida da translação de vetor $\vec{u}(0, 10)$, pelo que o contradomínio é alterado. Assim, $D'_h = [-4 + 10, 6 + 10]$, ou seja, $D'_h = [6, 16]$.
- 4.3. O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função f pela dilatação vertical de coeficiente 8, pelo que o contradomínio é alterado. Assim, $D'_j = [-6 \times 8, 4 \times 8]$, ou seja, $D'_j = [-48, 32]$.
- 4.4. O gráfico da função m obtém-se a partir do gráfico da função f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ seguida da translação de vetor $\vec{u}(0, -6)$, pelo que o contradomínio é alterado. Assim, $D'_m = [-6 - 6, 4 - 6]$, ou seja, $D'_m = [-12, -2]$.
- 5.1.
 - O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(-2, 0)$. Assim, $D_g = [-6 - 2, 5 - 2]$, ou seja, $D_g = [-8, 3]$.
 - O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela dilatação horizontal de coeficiente 2. Assim, $D_h = [-6 \times 2, 5 \times 2]$, ou seja, $D_h = [-12, 10]$.
 - O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função f pela reflexão de eixo Ox , seguida da translação de vetor $\vec{u}(0, 1)$, pelo que o domínio de j se mantém inalterado em relação ao domínio de f . Assim, $D_j = [-6, 5]$.
- 5.2.
 - O contradomínio da função g mantém-se inalterado em relação ao contradomínio da função f . Assim, $D'_g = \left[-4, \frac{9}{2}\right]$.

- O contradomínio da função h também se mantém inalterado em relação ao contradomínio da função f . Assim,

$$D'_h = \left[-4, \frac{9}{2}\right].$$

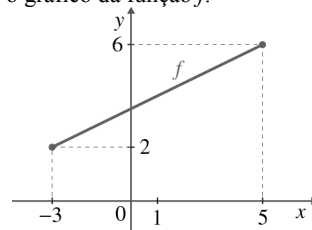
- O contradomínio da função j é alterado em relação ao contradomínio da função f .

$$\text{Assim, } D'_j = \left[-\frac{9}{2} + 1, 4 + 1\right], \text{ ou seja, } D'_j = \left[-\frac{7}{2}, 5\right].$$

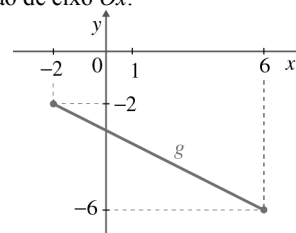
- 5.3. a) $g(-8) + h(-8) + j(2) =$
 $= f(-8 + 2) + f\left(\frac{-8}{2}\right) + (-f(2) + 1) =$
 $= f(-6) + f(-4) - f(2) + 1 = -4 + 2 - (-1) + 1 = 0$
- b) $g(0) + h(12j(-4)) =$
 $= f(0 + 2) + h(12(-f(-4) + 1)) =$
 $= f(2) + h(12(-2 + 1)) = f(2) + h(-12) =$
 $= f(2) + f\left(\frac{-12}{2}\right) = f(2) + f(-6) = -1 - 4 = -5$

6.1. $D_f = [-3, 5]$ e $D'_f = [2, 6]$

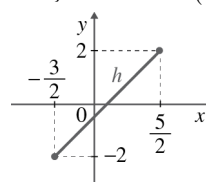
- 6.2. Vamos representar, num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função f .



- a) O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(1, 0)$ seguida pela reflexão de eixo Ox .



- b) O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ seguida pela translação de vetor $\vec{u}(0, -4)$.



Ficha de teste 15

Págs. 96 e 97

1. f é uma função par e $f(3) = -1$, pelo que $f(-3) = -1$. Por outro lado, tem-se que g é uma função ímpar e $g(-4) = 2$, pelo que $g(4) = -2$. Assim, vem que:
- $f(-3) + g(-4) = -1 + 2 = 1$
 - $f(3) + g(4) = -1 + (-2) = -3$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{f(3)}{g(4)} &= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \\ \bullet \frac{g(4)}{f(-3)} &= \frac{-2}{-1} = 2 \end{aligned}$$

Resposta: (A)

2. O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela reflexão de eixo Ox seguida da translação de vetor $\vec{u}(0, 1)$. Assim, tem-se que $D'_g = [-2 + 1, 4 + 1]$, ou seja, $D'_g = [-1, 5]$.

Resposta: (B)

3.
 - O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(-3, 0)$, pelo que a função g tem exatamente um zero que é -3 .
 - O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação do vetor $\vec{u}(-4, 3)$, pelo que a função h tem exatamente um zero que é 0 .
 - O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(3, 4)$, pelo que a função j não tem zeros.
 - O gráfico da função m obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(3, -3)$, pelo que a função m tem exatamente um zero que é -1 .

Resposta: (C)

4. $D_g = \{-16, -8, 4, 12\}$
 $g(-16) = f(-8) = -6 \rightarrow (-16, 6)$
 $g(-8) = f(-4) = 8 \rightarrow (-8, 8)$
 $g(4) = f(2) = -6 \rightarrow (4, -6)$
 $g(12) = f(6) = 10 \rightarrow (12, 10)$

Resposta: (C)

5. f é uma função bijetiva e ímpar. Sendo $f(-5) = 1$, tem-se que $f(5) = -1$ e, conseqüentemente, $f^{-1}(-1) = 5$.

Resposta: (A)

- 6.1. a) A expressão analítica de uma função afim f é do tipo $f(x) = ax + b$, onde b é a ordenada na origem, ou seja, a ordenada do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy . Assim, tem-se que: $f(x) = ax + 5$
 Por outro lado, sabe-se que o gráfico de f interseja o eixo Ox em $x = 4$, ou seja, $f(4) = 0$.

$$0 = a \times 4 + 5 \Leftrightarrow 0 = 4a + 5 \Leftrightarrow 4a = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$$

$$\text{A forma canónica de } f \text{ é } f(x) = -\frac{5}{4}x + 5.$$

- b) O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-2, 0)$ seguida da reflexão de eixo Ox .

O zero da função f é 4 pelo que o zero da função g é 2 .

Outra resolução:

$$f(x) = -\frac{5}{4}x + 5$$

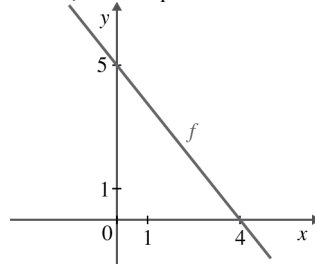
$$\begin{aligned} g(x) &= -f(x+2) = -\left[-\frac{5}{4}(x+2) + 5\right] = \\ &= \frac{5}{4}(x+2) - 5 = \frac{5}{4}x + \frac{5}{2} - 5 = \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 5x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

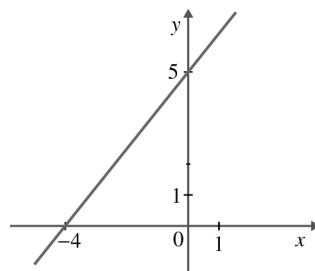
- 6.2. O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função f efetuando, sucessivamente, as seguintes transformações:

1. Reflexão de eixo Oy
2. Dilatação vertical de coeficiente 2
3. Translação de vetor $\vec{u}(0, -1)$

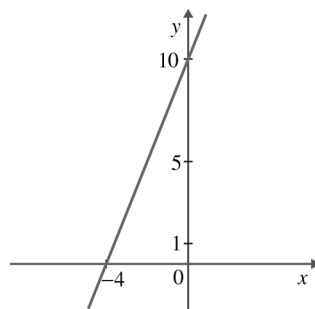
Assim, tem-se que:



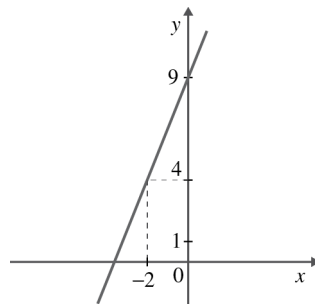
1.



2.



3.



- 7.1. O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela reflexão de eixo Oy .

Os zeros da função f são -4 e 2 , pelo que os zeros da função h são -2 e 4 .

- 7.2. O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função f pela reflexão de eixo Ox .

O contradomínio da função f é $[-4, 2]$, pelo que o contradomínio da função j é $[-2, 4]$.

- 7.3. O gráfico da função g é obtido do gráfico de f pela translação de vetor $(-a, 0)$.

Para que a soma dos zeros da função g seja um número não negativo é necessário que $-a > 0$ e que:

$$(-4 + (-a)) + (2 + (-a)) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 - a + 2 - a \geq 0 \Leftrightarrow -2a \geq 2 \Leftrightarrow a \leq -1$$

Logo, $a \in]-\infty, -1]$.

- 8.1. a) O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função g pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ seguida da dilatação vertical de coeficiente 4. O contradomínio da função j é $[-1, 1]$ pelo que o contradomínio da função j é $[-1 \times 4, 1 \times 4]$, ou seja, $[-4, 4]$.

- b) Sim, a função j tem dois zeros: $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, pois

$$j\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times g\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = 4 \times g(1) = 4 \times 0 = 0$$

$$j\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \times g\left(2 \times \frac{3}{2}\right) = 4 \times g(3) = 4 \times 0 = 0$$

- 8.2. $D_g =]-1, 3]$ e $D'_g = [-1, 1]$

- Efetuada a transformação ϕ do plano que transforma o ponto $P(x, y)$ no ponto $P'\left(x, \frac{1}{4}y\right)$, que se designa por contração vertical de coeficiente $\frac{1}{4}$, tem-se que $D =]-1, 3]$, ou seja, mantém-se inalterado $D' = \left[-1 \times \frac{1}{4}, 1 \times \frac{1}{4}\right] \Leftrightarrow D' = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$
- Após a translação, $T_{\vec{u}}$, de vetor $(-1, 1)$, tem-se que: $D =]-1-1, 3-1] \Leftrightarrow D =]-2, 2]$

$$D' = \left[-\frac{1}{4} + 1, \frac{1}{4} + 1\right] = \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$$

Assim, tem-se que:

- a) Domínio: $D_f =]-2, 2]$

- b) Contradomínio: $D'_f = \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$

- c) Expressão analítica: $f(x) = \frac{1}{4}g(x+1) + 1$

- 1.5. A função f é crescente em $[-4, 1]$, constante em $[1, 4]$ e decrescente em $[4, 8]$.

- 1.6. O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(-2, -3)$.

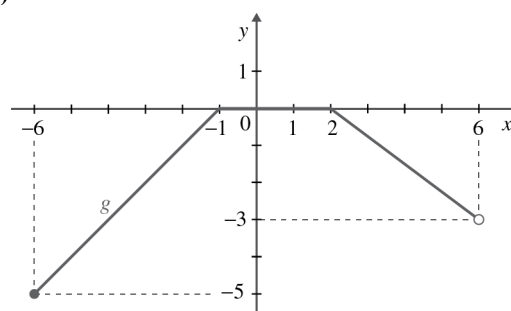
- a) O domínio da função f é $[-4, 8]$, pelo que o domínio da função g é $[-4-2, 8-2]$, ou seja, $D_g = [-6, 6]$.

O contradomínio da função f é $[-2, 3]$ pelo que o contradomínio da função g é $[-2-3, 3-3]$, ou seja, $D'_g = [-5, 0]$.

- b) O zero da função f é -2 .

Os zeros da função g são todos os números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 2]$

- c)



A função g é crescente em $[-6, -1]$, constante em $[-1, 2]$ e decrescente em $[2, 6]$.

- 2.1. A função f é decrescente em $\mathbb{R}$ quando e apenas quando:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow 5 - 2x_1 > 5 - 2x_2 \Leftrightarrow -2x_1 > -2x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

Logo, f é decrescente em $\mathbb{R}$.

- 2.2. A função f é decrescente em $\mathbb{R}$ pelo que a função g também é decrescente em $[-2, 3]$.

$$D'_g = [f(3), f(-2)].$$

$$f(3) = 5 - 2 \times 3 = 5 - 6 = -1 \text{ e}$$

$$f(-2) = 5 - 2 \times (-2) = 5 + 4 = 9$$

Logo, $D'_g = [-1, 9]$.

- 3.1. f é decrescente no sentido lato em $[a, b]$

- $g(d)$ não é mínimo absoluto (a função g não tem mínimo absoluto)

A proposição é falsa, pois $V \Leftrightarrow F$ é falso.

- 3.2. $f(a)$ é máximo absoluto

- $g(c)$ não é mínimo absoluto

A proposição é verdadeira, pois a equivalência de proposições verdadeiras é uma proposição verdadeira.

- 3.3. A função g não é decrescente em $[c, d]$, em $[c, d]$.

A proposição é falsa.

Ficha para praticar 33

Págs. 98 e 99

- 1.1. $D_f = [-4, 8]$ e $D'_f = [-2, 3]$

- 1.2. Zeros de f : -2

- 1.3. a) $[-4, 4]$ b) $[1, 8]$

- 1.4.

x	-4		1		4		8
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\rightarrow$	3	$\searrow$	n.d.

- 3.4. $\square$ g não tem mínimo absoluto (g tem apenas máximo absoluto, no caso é $g(c)$).

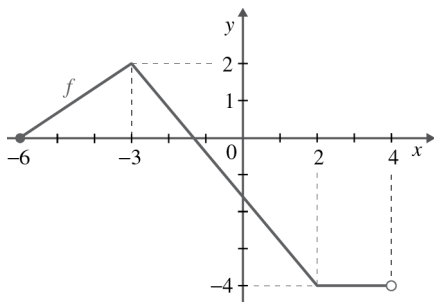
$\square$ f tem mínimo absoluto, que é $f(b)$.

Por outro lado, tem-se que:

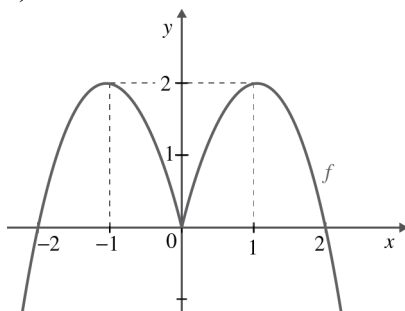
g não tem mínimo absoluto a menos que f tenha mínimo absoluto é equivalente a Se f não tem mínimo absoluto então g não tem mínimo absoluto.

$F \Rightarrow V$ é verdadeiro, pelo que a proposição é verdadeira.

4. Por exemplo:



- 5.1. a)



- b)

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$

- c) $\square$ Monotonia

A função f é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[0, 1]$.

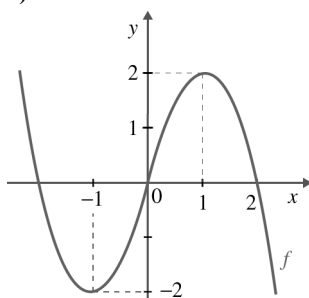
A função f é decrescente em $[-1, 0]$ e em $[1, +\infty[$.

- $\square$ Extremos

$f(-1) = 2$ e $f(1) = 2$ é o máximo absoluto de f (é também máximo relativo)

$f(0) = 0$ é mínimo relativo de f

- 5.2. a)



- b)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$

- c) $\square$ Monotonia

A função f é decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$.

A função f é crescente em $[-1, 1]$.

- $\square$ Extremos

$f(-1) = -2$ é mínimo relativo de f

$f(1) = 2$ é máximo relativo de f

6. A função f é decrescente quando e apenas quando

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

O que significa que para qualquer $x_1 \neq x_2$ se tem

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

Assim, tem-se que:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{ax_1 + b - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax_1 + b - ax_2 - b}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{ax_1 - ax_2}{x_1 - x_2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

Como $x_1 \neq x_2$, vem que $\frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$.

Logo, a função f é decrescente se e somente se, o valor real a for negativo.

Ficha para praticar 34

Págs. 100 e 101

- 1.1. $D_f = [-6, 2[$ e $D'_f = [-4, 4]$

- 1.2.

x	-6		-2		0		1		2
$f(x)$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	n.d.

- 1.3. $\square$ Monotonia

A função f é crescente em $[-6, -2]$ e em $[0, 1]$.

função f é decrescente em $[-2, 0]$ e em $[1, 2[$.

- $\square$ Extremos

$f(-6) = -4$ é mínimo absoluto (é também mínimo relativo)

$f(-2) = 4$ é máximo absoluto (é também máximo relativo)

$f(0) = 1$ é mínimo relativo

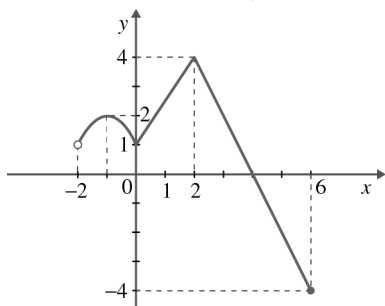
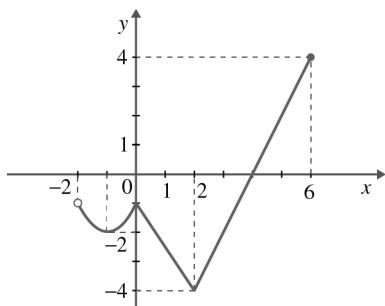
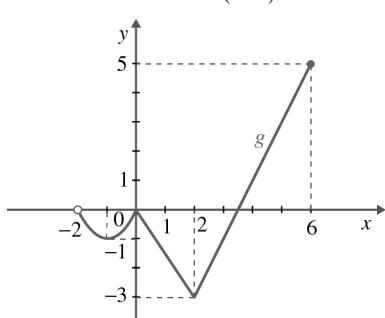
- 1.4. Por exemplo:

a) $[-2, -1]$

b) $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

c) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

- 1.5. O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f da reflexão de eixo Oy , seguida pela reflexão de eixo Ox e da translação de vetor $\vec{u}(0, 1)$.

1. Reflexão de eixo Oy 2. Reflexão de eixo Ox 3. Translação de vetor $\vec{u}(0, 1)$ 

a) $D_g =]2, 6]$ e $D'_g = [-3, 5]$

b) Monotonia

A função g é decrescente em $]-2, -1]$ e em $[0, 2]$ A função g é crescente em $[-1, 0]$ e em $[2, 6]$.

▪ Extremos

 $g(-1) = -1$ é mínimo relativo $g(0) = 0$ é máximo relativo $g(2) = -3$ é mínimo absoluto (também é mínimo relativo) $g(6) = 5$ é máximo absoluto (também é máximo relativo)

2.1. $f(-2) = 2$ é mínimo relativo

$f(2) = 3$ é máximo relativo

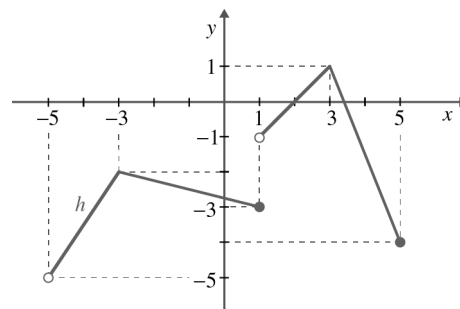
 $f(4) = -1$ é mínimo absoluto (também é mínimo relativo)

$f(6) = 4$ é máximo relativo

2.2. a) $D_h =]-5, 5]$ e $D'_h =]-5, 1]$

b) O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(-1, 0)$

seguida da

reflexão de eixo Ox .c) A função h é crescente em $]-5, -3]$ e em $[1, 3]$ A função h é decrescente em $[-3, 1]$ e em $[3, 5]$.3.1. Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$, tem-se que:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow -\frac{x_1^2}{3} < -\frac{x_2^2}{3} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Logo, a função f é crescente em $\mathbb{R}^-$, pois:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Por outro lado, se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, tem-se que:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -\frac{x_1^2}{3} > -\frac{x_2^2}{3} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Logo, a função f é decrescente em $\mathbb{R}^+$, pois:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3.2. A função f é do tipo $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$) com $a = -\frac{1}{3}$.Como $a < 0$, a concavidade do gráfico da função f é voltada para baixo.3.3. Por exemplo, uma reflexão de eixo Ox .A nova função obtida, a função g , é definida por

$$g(x) = -f(x).$$

4.1. a) A função f é crescente em $\mathbb{R}$ quando $2 - a^2 > 0$.

$$2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - a)(\sqrt{2} + a) > 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$\sqrt{2} - a$	+	+	+	0	-
$\sqrt{2} + a$	-	0	+	+	+
$2 - a^2$	-	0	+	0	-

$$2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$$

$$\text{Logo, } a \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[.$$

b) O gráfico da função f é uma reta paralela ao eixo Ox quando $2 - a^2 = 0$.

$$2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2} \vee a = \sqrt{2}$$

c) A função f tem 6 como zero, pelo que $f(6) = 0$.

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow (2 - a^2) \times 6 - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 - a^2) \times 6 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 - a^2 = \frac{3}{6} \Leftrightarrow -a^2 = \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

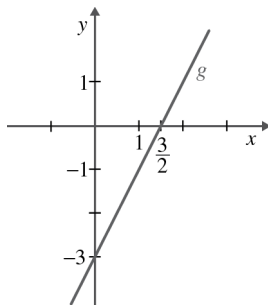
$$\Leftrightarrow a = -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee a = \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow a = -\frac{\sqrt{6}}{2} \vee a = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

4.2. a) $a = 2$, pelo que:

$$f(x) = (2 - 2^2)x - 3 \Leftrightarrow f(x) = -2x - 3$$

$$g(x) = f(-x) \Leftrightarrow g(x) = -2(-x) - 3 \Leftrightarrow g(x) = 2x - 3$$

Assim, tem-se que, uma representação gráfica da função g é:



b) O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f por uma dilatação horizontal de coeficiente 3.

O zero da função f é $-\frac{3}{2}$ pois:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 3 = 0 \Leftrightarrow -2x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

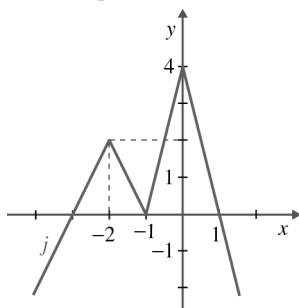
Logo, o zero da função h é igual a $-\frac{3}{2} \times 3$, ou seja, $-\frac{9}{2}$.

Outra resolução:

$$h(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) = -2\left(\frac{x}{3}\right) - 3 = -\frac{2x}{3} - 3$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{3} - 3 = 0 \Leftrightarrow -2x = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$$

5. Por exemplo



6. O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo, quando o coeficiente de x^2 for um número real negativo. Assim, tem-se que:

$$k^2 - 3 - 2\sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow k^2 - (3 + 2\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow k^2 - (1 + 2\sqrt{2} + 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - (1 + \sqrt{2})^2 < 0 \Leftrightarrow [k - (1 + \sqrt{2})][k + (1 + \sqrt{2})] < 0$$

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$		$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$k - (1 + \sqrt{2})$	-	-	-	0	+
$k + (1 + \sqrt{2})$	-	0	+	+	+
$k^2 - 3 - 2\sqrt{2}$	+	0	-	0	+

$$k^2 - 3 - 2\sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{2} < k < 1 + \sqrt{2}$$

Logo, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo quando $k \in]-1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$

Ficha de teste 16

Págs. 102 e 103

1. A função f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ quando $12 - p\sqrt{3} < 0$. Assim, vem que:

$$12 - p\sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow -p\sqrt{3} < -12 \quad p\sqrt{3} > 12 \Leftrightarrow p > \frac{12}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{12\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow p > 4\sqrt{3}$$

Resposta: (C)

2. Na opção (B), $f(b)$ é máximo absoluto.

Na opção (C), $f(a)$ não é mínimo absoluto.

Na opção (D), $f(a)$ não é mínimo absoluto e $f(b)$ é máximo absoluto.

Resposta: (A)

3. $g(x) = 2x^2 + 2kx^2 \Leftrightarrow g(x) = (2 + 2k)x^2$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo quando $2 + 2k < 0$.

Assim, $2 + 2k < 0 \Leftrightarrow 2k < -2 \Leftrightarrow k < -1$.

Resposta: (D)

4. $f(x) = g(-x) - 1$

O gráfico da função f obtém-se a partir do gráfico da função g pela reflexão de eixo Oy seguida pela translação de vetor $\vec{u}(0, -1)$. Assim, tem-se que:

$D_f' =]0, +\infty[$ e f é decrescente em $\mathbb{R}$.

$j(x) = -g(x) + 1$

O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função g pela reflexão de eixo Ox seguida pela translação de vetor $\vec{u}(0, 1)$. Assim, tem-se que:

$D_j' =]-\infty, 0[$ e j é decrescente em $\mathbb{R}$.

$m(x) = -g(-x) + 1$

O gráfico da função m obtém-se do gráfico da função g pela reflexão de eixo Oy , seguida da reflexão de eixo Ox e por fim da translação de vetor $\vec{u}(0, 1)$.

Assim, tem-se que: $D_m' =]-\infty, 0[$ e m é crescente em $\mathbb{R}$.

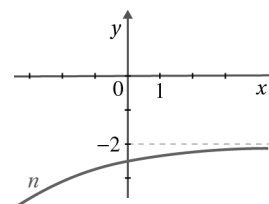
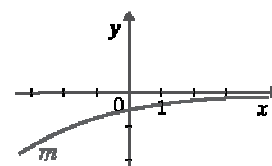
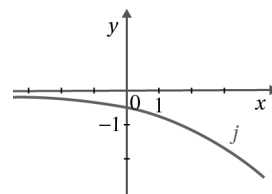
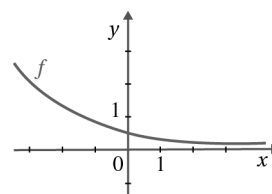
$n(x) = -g(-x) - 1$

O gráfico da função n obtém-se do gráfico da função g pela reflexão de eixo Oy , seguida da reflexão do eixo Ox e por fim da translação de vetor $\vec{u}(0, -1)$.

Assim, tem-se que: $D_n' =]-\infty, -2[$ e n é crescente em $\mathbb{R}$.

Resposta: (B)

5.1. $f(a)$ é mínimo absoluto da função f , logo é também mínimo relativo, pelo que a proposição p é verdadeira.



- A função f não tem qualquer extremo para $x = b$, pelo que a proposição q é falsa.
- $f(c)$ é mínimo relativo da função f , pelo que a proposição r é verdadeira.

▪ A função f tem apenas um mínimo relativo, que é $f(d)$, pelo que a proposição t é falsa.

Assim, conclui-se que: p é uma proposição verdadeira; q é uma proposição falsa; r é uma proposição verdadeira e t é uma proposição falsa.

5.2. a) A proposição p quando r é equivalente a $r \Rightarrow p$.

Como r e p são proposições verdadeiras, $r \Rightarrow p$ é também uma proposição verdadeira e, consequentemente, é verdadeira a proposição p quando r .

b) A proposição t a menos que q é equivalente a $\sim q \Rightarrow t$. q é uma proposição falsa, pelo que $\sim q$ é uma proposição verdadeira.

Por outro lado, t é uma proposição falsa, logo, a proposição $\sim q \Rightarrow t$ é, também, falsa.

Assim, é falsa a proposição t a menos que q .

6.1. $D_f =]-\infty, 4[$ e $D'_f = [-1, +\infty[$

6.2.

x	$-\infty$	1		2		4
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	n.d.

A função f é decrescente em $]-\infty, 1]$ e em $[2, 4[$.

A função f é crescente em $[1, 2]$.

6.3. $f(1) = -1$ é mínimo absoluto (também é mínimo relativo)

$f(2) = 1$ é máximo relativo

6.4. a) $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 1$

b) $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in]-3, 2[\cup]2, 4[$

6.5. Sejam $A(1, -1)$ e $B(2, 1)$ dois pontos do gráfico da função f . Vamos definir analiticamente o segmento de reta $[AB]$ e determinar a abscissa do ponto deste segmento que tem ordenada nula, a qual corresponde a um dos zeros da função f .

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1) - (1, -1) = (1, 2)$$

$$m_{AB} = \frac{2}{1} = 2. \text{ Logo } y = 2x + b.$$

Por outro lado, tem-se que o ponto $B \in AB$.

$$1 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -3$$

Assim, o segmento de reta $[AB]$ pode ser definido por

$$y = 2x - 3 \wedge 1 \leq x \leq 2$$

Determinemos, então, a abscissa referida:

$$0 = 2x - 3 \wedge 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \wedge 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Logo, os zeros da função f são: $-1, \frac{3}{2}$ e 3

7.1. ▪ $A(-2, 8)$ e $B(-1, -2)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -2) - (-2, 8) = (1, -6)$$

$$m_{AB} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$B(-1, -2) \text{ e } C(4, -32)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (4, -32) - (-1, -2) = (5, -30)$$

$$m_{BC} = \frac{-30}{5} = -6$$

As retas AB e BC têm declive, respetivamente, 6 e -6 .

Sabemos que o gráfico de f é uma parábola pelo que a sua concavidade tem o mesmo sentido em todo o domínio.

O declive da reta AB é maior que o declive da reta BC , logo o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.

7.2. a) A função g é crescente em $[-2, 0]$.

A função g é decrescente em $[0, 4]$.

b) $D'_g = [g(4), g(0)]$, ou seja, $D'_g = [-32, 0]$

c) $g(4) = -32$ é mínimo absoluto de g (também é mínimo relativo).

$g(0) = 0$ é máximo absoluto de g (também é máximo relativo).

Ficha para praticar 35

Págs. 104 e 105

1.1. $f(x) = -3x^2 + 12x = -3(x^2 - 4x) = -3(x^2 - 4x + 4) + 12 =$
 $= -3(x - 2)^2 + 12$

Vértice: $(2, 12)$

Equação do eixo de simetria: $x = 2$

1.2. $g(x) = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x) + 4 =$
 $= 4(x^2 - 2x + 1) + 4 - 4 = 4(x - 1)^2$

Vértice: $(1, 0)$

Equação do eixo de simetria: $x = 1$

1.3. $h(x) = -\frac{x^2}{2} - 4 = -\frac{1}{2}x^2 - 4 = -\frac{1}{2}(x - 0)^2 - 4$

Vértice: $(0, -4)$

Equação do eixo de simetria: $x = 0$

1.4. $j(x) = -x^2 + x - \frac{2}{9} = -(x^2 - x) - \frac{2}{9} =$
 $= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{9} + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{36}$

Vértice: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{36}\right)$

Equação do eixo de simetria: $x = \frac{1}{2}$

1.5. $m(x) = x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = \left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36}\right) - 2 - \frac{49}{36} =$
 $= \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{121}{36}$

Vértice: $\left(\frac{7}{6}, -\frac{121}{36}\right)$

Equação do eixo de simetria: $x = \frac{7}{6}$

$$1.6. \quad n(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 2 = \\ = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) + 2 - \frac{50}{16} = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

$$\text{Vértice: } \left(-\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$$

$$\text{Equação do eixo de simetria: } x = -\frac{5}{4}$$

$$2.1. \quad f(x) = -5\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$$

A parábola que define graficamente a função f tem a concavidade voltada para baixo ($a = -5 < 0$) e o seu vértice

tem coordenadas $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, pelo que $D'_f =]-\infty, 0]$ e f é

crescente em $]-\infty, -\frac{1}{3}]$ e decrescente em $[-\frac{1}{3}, +\infty[$.

$$2.2. \quad g(x) = -\frac{1}{2} + (x-3)^2 = (x-3)^2 - \frac{1}{2}$$

A parábola que define graficamente a função g tem a concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$) e o seu vértice

tem coordenadas $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$, pelo que $D'_g = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$, g é

crescente em $[3, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 3]$.

$$2.3. \quad h(x) = -x^2 + 3x = -(x^2 - 3x) = \frac{24}{3}x - \frac{8}{3}x^2 =$$

$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

A parábola que define graficamente a função h tem a concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$) e o seu vértice

tem coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ pelo que $D'_h = \left]-\infty, \frac{9}{4}\right]$, h é

crescente em $]-\infty, \frac{3}{2}]$ e decrescente em $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

$$2.4. \quad j(x) = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2} = \left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{1}{2} - \frac{4}{9} =$$

$$= \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{17}{18}$$

A parábola que define graficamente a função j tem a concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$) e o seu vértice

tem coordenadas $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{17}{18}\right)$, pelo que $D'_j = \left[-\frac{17}{18}, +\infty\right]$, j

é crescente em $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ e decrescente em $]-\infty, -\frac{2}{3}]$.

3. A função f tem um e um só zero quando o binómio discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, é igual a zero. Assim, tem-se que:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4m(m-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 8m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

Logo, a função f tem um e um só zero quando $m = -\frac{1}{4}$.

4.1. O contradomínio da função f é $[1, +\infty[$, pelo que a parábola que define graficamente a função f terá a concavidade voltada para cima e a ordenada do vértice igual a 1.

$$f(x) = 2x^2 - 4kx + 2k + 5 = 2\left(x^2 - 2kx\right) + 2k + 5 =$$

$$= 2\left(x^2 - 2kx + k^2\right) - 2k^2 + 2k + 5 =$$

$$= 2(x-k)^2 - 2k^2 + 2k + 5 =$$

$$V(k, -2k^2 + 2k + 5)$$

$$-2k^2 + 2k + 5 = 1 \Leftrightarrow -2k^2 + 2k + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -1 \vee k = 2$$

4.2. $f(x) = -3x^2 + 2(k-1)x + k + 1$, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo pois $a = -3 < 0$.

Assim, o contradomínio da função f é o intervalo $]-\infty, 2]$

sendo 2 a ordenada do vértice da parábola que define graficamente a função f .

$$f(x) = -3x^2 + 2(k-1)x + k + 1 =$$

$$= -3\left[x^2 - \frac{2}{3}(k-1)x + \frac{1}{9}(k-1)^2\right] + k + 1 + \frac{3}{9}(k-1)^2 =$$

$$= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}(k-1)x\right) + \frac{3}{9}(k-1)^2 + k + 1$$

$$\frac{3}{9}(k-1)^2 + k + 1 = 2 \Leftrightarrow 3(k^2 - 2k + 1) + 9k = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 - 6k + 3 + 9k - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 + 3k - 6 = 0 \Leftrightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow k = -2 \vee k = 1$$

$$5.1. \quad f(x) = \begin{cases} -2(x+1) + 6 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -2[-(x+1)] + 6 & \text{se } x+1 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -2x - 2 + 6 & \text{se } x \geq -1 \\ -2(-x-1) + 6 & \text{se } x < -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -2x + 4 & \text{se } x \geq -1 \\ 2x + 8 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$5.2. \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow -2|x+1| + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2|x+1| = -6 \Leftrightarrow |x+1| = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 3 \vee x+1 = -3 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -4$$

Os zeros de f são: -4 e 2

$$5.3. \quad \text{a) } f(x) = -4 \Leftrightarrow -2|x+1| + 6 = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2|x+1| = -10 \Leftrightarrow |x+1| = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = -5 \vee x+1 = 5 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 4$$

$$\text{Logo } S = \{-6, 4\}$$

$$\text{b) } f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -2|x+1| + 6 \leq 2 \Leftrightarrow -2|x+1| \leq -4$$

$$\Leftrightarrow |x+1| \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 2 \vee x+1 \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -3$$

$$\text{Logo } S =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$$

$$\text{c) } f(x) > 1 \Leftrightarrow -2|x+1| + 6 > 1 \Leftrightarrow -2|x+1| > -5$$

$$\Leftrightarrow |x+1| < \frac{5}{2} \Leftrightarrow x+1 < \frac{5}{2} \wedge x+1 > -\frac{5}{2}$$

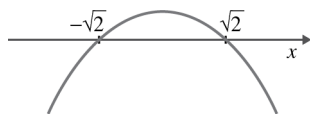
$$\Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \wedge x > -\frac{7}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$\text{Logo } C.S. = \left] -\frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right[.$$

$$6.1. -x^2 + 2 < 0$$

$$-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Graficamente, tem-se:



$$-x^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$$

$$\text{Logo, } S =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[.$$

$$6.2. 2x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq -\frac{1}{2} \text{ é uma condição universal em } \mathbb{R},$$

pois $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

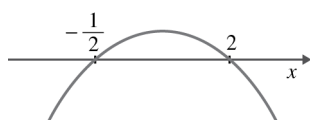
Assim, $S = \mathbb{R}$.

$$6.3. -2x^2 + 3x \geq -2 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 2 \geq 0$$

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-2) \times 2}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

Graficamente, tem-se:



$$-2x^2 + 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

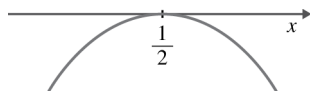
$$\text{Logo, } S = \left[-\frac{1}{2}, 2 \right].$$

$$6.4. -4x^2 + 4x - 1 > 0$$

$$-4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4 \times (-1)}}{-8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4}{-8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Graficamente, tem-se:



$$-4x^2 + 4x - 1 > 0 \Leftrightarrow -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Logo, $S = \emptyset$.

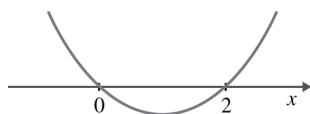
$$6.5. 2(x-1)^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) - 2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 - 2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Graficamente, tem-se:



$$2x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

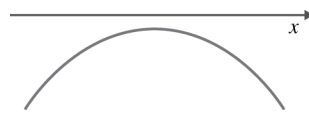
$$\text{Logo, } S =]0, 2[.$$

$$6.6. -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 6x - 3 > 0$$

$$-4x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 12}}{-8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{-12}}{-8} \text{ (impossível em } \mathbb{R} \text{)}$$

Graficamente, tem-se:



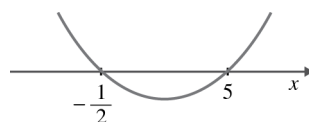
$$-4x^2 + 6x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset. \text{ Logo, } S = \emptyset.$$

$$6.7. 2x^2 - 9x \leq 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 \leq 0$$

$$2x^2 - 9x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 5$$

Graficamente, tem-se:



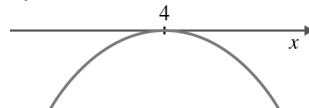
$$2x^2 - 9x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 5. \text{ Logo, } S = \left[-\frac{1}{2}, 5 \right].$$

$$6.8. -\frac{x^2}{2} + 4x \leq 8 \Leftrightarrow -x^2 + 8x \leq 16 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 16 \leq 0 \quad (1)$$

$$-x^2 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 16}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 0}{-2} \Leftrightarrow x = 4$$

Graficamente, tem-se:



$$-x^2 + 8x - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -(x-4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Logo, $S = \mathbb{R}$.

$$6.9. x(1 + 4x^2) < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + 4x^2 > 0$$

$$\text{Assim, } x(1 + 4x^2) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

$$\text{Logo, } S =]-\infty, 0[.$$

$$6.10. x^4 - 5x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 5x^2 + 4 > 0$$

Fazendo $y = x^2$, vem que, $y^2 - 5y + 4 > 0$.

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = 1$$

Graficamente, tem-se:

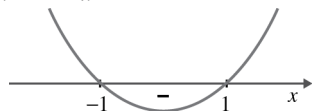


$$y^2 - 5y + 4 > 0 \Leftrightarrow y < 1 \vee y > 4$$

Voltando novamente à variável x :

$$x^2 < 1 \vee x^2 > 4 \Leftrightarrow (x^2 - 1 < 0 \vee x^2 - 4 > 0)$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$



$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$



Logo, $S =]-\infty, -2[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$.

7. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$, quando e apenas quando, o coeficiente de x^2 é positivo e o binômio discriminante é um número real negativo.

Assim, vem que

$$m > 0 \wedge \Delta < 0 \Leftrightarrow m > 0 \wedge (2m-1)^2 - 4m(m+1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m > 0 \wedge 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m > 0 \wedge -8m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 0 \wedge -8m < -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m > 0 \wedge 8m > 1 \Leftrightarrow m > 0 \wedge m > \frac{1}{8}$$

Logo, $m \in \left] \frac{1}{8}, +\infty \right[$.

$$8.1. f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x-2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(-4) = -(-4+2)^2 + 1 = -(-2)^2 + 1 = -3$$

Por outro lado, tem-se que $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7} - 2$.

$$\begin{aligned} \frac{f(-4)}{f(\sqrt{7})} &= \frac{-3}{\sqrt{7}-2} = \frac{-3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} = \frac{-3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7})^2 - 2^2} = \\ &= \frac{-3(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \frac{-3(\sqrt{7}+2)}{3} = -(\sqrt{7}+2) = -\sqrt{7}-2 \end{aligned}$$

$$8.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow (-(x+2)^2 + 1 = 0 \wedge x \leq 0) \vee (x-2 = 0 \wedge x > 0)$$

$$\Leftrightarrow ((x+2)^2 = 1 \wedge x \leq 0) \vee (x = 2 \wedge x > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x+2 = 1 \vee x+2 = -1) \wedge x \leq 0] \vee x = 2 \Leftrightarrow$$

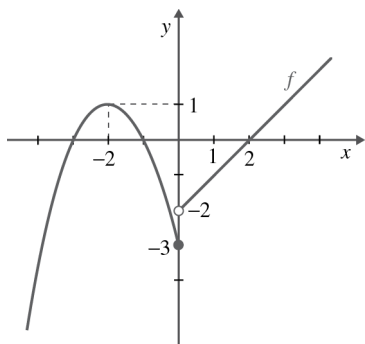
$$\Leftrightarrow [(x = -1 \vee x = -3) \wedge x \leq 0] \vee x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = -3) \vee x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3 \vee x = 2$$

Os zeros da função f são $-3, -1$ e 2 .

8.3.



• Monotonia:

A função f é crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, +\infty[$ e decrescente em $[-2, 0]$.

• Extremos:

$f(-2) = 1$ é um máximo relativo.

$f(0) = -3$ é um mínimo relativo.

- 8.4. O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela reflexão de eixo Oy .

Os zeros da função f são $-3, -1$ e 2 , pelo que, os zeros da função g são: $-2, 1$ e 3 .

- 9.1. O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f , mantendo os pontos de ordenada não negativa e transformando os pontos de ordenada negativa pela reflexão de eixo Ox .

O contradomínio da função f é $[-6, 2]$ pelo que o contradomínio da função g é $[0, 6]$.

- 9.2. O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função g pela reflexão de eixo Ox seguida da translação de vetor $(0, 2)$.

O contradomínio da função g é $[0, 6]$, pelo que o contradomínio da função h é $[-6+2, 0+2] = [-4, 2]$.

Ficha para praticar 36

Págs. 106 e 107

- 1.1. $y = 16x$ traduz a afirmação de que as ordenadas são 16 vezes superiores às abcissas. Assim, tem-se que:

$$-x^2 + 8x - 7 = 16x \wedge y = 16x \Leftrightarrow -x^2 - 8x - 7 = 0 \wedge y = 16x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \wedge y = 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1} \wedge y = 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 6}{2} \wedge y = 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{-8+6}{2} \vee x = \frac{-8-6}{2} \right) \wedge y = 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = -7) \wedge y = 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \wedge y = 16x) \vee (x = -7 \wedge y = 16x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \wedge y = 16) \vee (x = -7 \wedge y = -112)$$

Logo, os pontos pedidos têm coordenadas $(-1, -16)$ e $(-7, -112)$.

$$1.2. f(x) = -x^2 + 8x - 7 \Leftrightarrow f(x) = -(x^2 - 8x) - 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -(x^2 - 8x + 16) - 7 + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -(x-4)^2 + 9$$

O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $(-1, 0)$, seguida pela reflexão de eixo Ox .

- a) O vértice da parábola que define graficamente a função f tem coordenadas $(4, 9)$ pelo que as coordenadas do vértice da parábola que define graficamente a função g são $(4-1, -9)$, ou seja, $(3, -9)$.

b) Determinemos os zeros da função f .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 7}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 6}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 7$$

Os zeros da função f são 1 e 7, pelo que os zeros da função g são $1-1=0$ e $7-1=6$.

Os zeros da função g são 0 e 6.

c) A função f decrescente em $[4, +\infty[$ e crescente em $]-\infty, 4]$.

A função f tem um máximo absoluto que é $f(4) = 9$.

Assim, tem-se que a função g é decrescente em $]-\infty, 3]$ e crescente em $[3, +\infty[$.

A função g tem um mínimo absoluto que é $f(3) = 9$.

1.3. O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela reflexão de eixo Oy seguida da translação de vetor $(0, -2)$.

a) O vértice da parábola que define graficamente a função tem coordenadas $(4, 9)$ pelo que as coordenadas do vértice da parábola que define graficamente a função h são $(-4, 9-2)$, ou seja, $(-4, 7)$.

b) O contradomínio da função f é $]-\infty, 9]$ pelo que o contradomínio da função h é $]-\infty, 9-2]$, ou seja, $]-\infty, 7]$.

c) A função h é decrescente em $[-4, +\infty[$ e é crescente em $]-\infty, -4]$.

A função h tem um máximo absoluto que é $f(-4) = 7$.

$$2.1. |1-4x| < 3 \Leftrightarrow 1-4x < 3 \wedge 1-4x > -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x < 2 \wedge -4x > -4 \Leftrightarrow 4x > -2 \wedge 4x < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \wedge x < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1$$

$$\text{Logo, } S = \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[.$$

$$2.2. |4x+1| \geq 5 \Leftrightarrow 4x+1 \geq 5 \vee 4x+1 \leq -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x \geq 4 \vee 4x \leq -6 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -\frac{3}{2}$$

$$\text{Logo, } S = \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right] \cup [1, +\infty[$$

$$2.3. |2x|-6 > 2 \Leftrightarrow |2x| > 8 \Leftrightarrow 2x > 8 \vee 2x < -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 4 \vee x < -4$$

$$\text{Logo, } S =]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[.$$

$$2.4. |x^2-3x+1| \leq 5 \Leftrightarrow x^2-3x+1 \leq 5 \wedge x^2-3x+1 \geq -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-4 \leq 0 \wedge x^2-3x+6 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1, 4] \cap \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in [-1, 4]$$

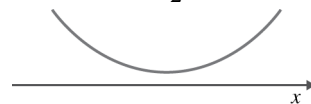
$$S = [-1, 4]$$

Cálculos auxiliares

$$x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$$



$$x^2-3x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-24}}{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in \emptyset$$



$$2.5. |x^2-4x+5| > 1 \Leftrightarrow x^2-4x+5 > 1 \vee x^2-4x+5 < -1 \Leftrightarrow$$

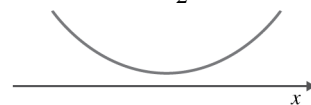
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4 > 0 \vee x^2-4x+6 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x \neq 2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Cálculos auxiliares

$$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \Leftrightarrow x = 2$$

$$x^2-4x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in \emptyset$$



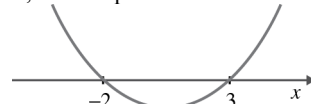
$$S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$2.6. |x^2-x-4| > 2 \Leftrightarrow x^2-x-4 > 2 \vee x^2-x-4 < -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-6 > 0 \vee x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow$$

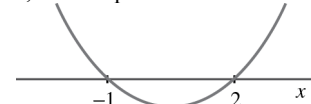
$$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

Graficamente, tem-se que:



$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

Graficamente, tem-se que:



$$x^2-x-6 > 0 \vee x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < -2 \vee x > 3) \vee (-1 < x < 2)$$

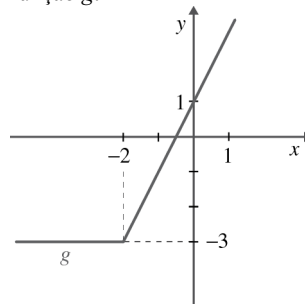
$$\text{Logo, } S =]-\infty, -2[\cup]-1, 2[\cup]3, +\infty[.$$

$$3.1. g(x) = \begin{cases} 2+x+x-1 & \text{se } 2+x \geq 0 \\ -(2+x)+x-1 & \text{se } 2+x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq -2 \\ -2-x+x-1 & \text{se } x < -2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq -2 \\ -3 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

3.2. Vamos, por exemplo, recorrer a um esboço do gráfico da função g .



- A função g é crescente, em sentido lato, em $\mathbb{R}$, pois $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Logo, a proposição p é verdadeira.

- $g(x) = 0 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \wedge x \geq -2$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

O zero da função g é $-\frac{1}{2}$, pelo que

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right], \text{ donde, a proposição } q \text{ é,}$$

também, verdadeira.

Por outro lado, tem-se que a proposição q a menos que p é equivalente a $\sim p \Rightarrow q$

p é uma proposição verdadeira, pelo que $\sim p$ é uma proposição falsa.

Logo, a implicação é verdadeira, pois o antecedente é falso!

Assim, a proposição q a menos que p é verdadeira.

- 4.1. $a = -1$ e $k = -4$, pelo que $f(x) = -(x+2)^2 - 4$.

A parábola que define graficamente a função f tem a concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$ e o vértice desta tem coordenadas $(-2, -4)$. Logo, o contradomínio da função f é $]-\infty, -4]$.

- 4.2. $a = 2$ e $k = 3$, logo, $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$.

A parábola que define graficamente a função f tem a concavidade voltada para cima, pois $a = 2 > 0$ e o vértice desta tem coordenadas $(-2, 3)$. Logo, a função f é decrescente em $]-\infty, -2]$ e crescente em $[-2, +\infty[$.

- 5.1. O comprimento do lado do retângulo contido no eixo Ox é dado por x , pois corresponde à abscissa do ponto P .

Por outro lado, o ponto P tem abscissa x e, como este ponto pertence à reta de equação $y = -2x + 8$, a sua ordenada é $\overline{AP} = -2x + 8$.

Portanto, a área do retângulo é dada, em função de x , por

$$A(x) = x(-2x + 8) \Leftrightarrow A(x) = -2x^2 + 8x$$

- 5.2. Tem-se:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 8x &= -2(x^2 - 4x) = -2(x^2 - 4x + 4) + 8 = \\ &= -2(x-2)^2 + 8 \end{aligned}$$

Portanto, o gráfico da função A é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo cujo vértice é o ponto de coordenadas $(2, 8)$.

Assim, o valor de x para o qual a área do retângulo é máxima é 2 e a respetiva área é 8.

Assim, $\overline{OA} = 2$ e $\overline{OB} = -2 \times 8 = -4$.

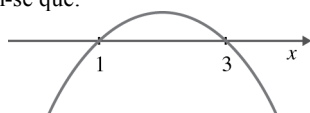
Logo, as dimensões do retângulo da área máxima são 2 e 4.

- 5.3. Uma condição que traduz o problema é:

$$-2x^2 + 8x < 6 \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 6 < 0 \wedge 0 < x < 4$$

$$-2x^2 + 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 12}}{-4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

Graficamente, tem-se que:



$$-2x^2 + 8x - 6 < 0 \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < 1 \vee x > 3) \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < 1 \wedge 0 < x < 4) \vee (x > 3 \wedge 0 < x < 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0 < x < 1) \vee (3 < x < 4)$$

Logo, o conjunto pedido é $]0, 1[\cup]3, 4[$.

6. x e y são os números em que a Diana e a Carolina pensaram, respetivamente.

Por outro lado, sabe-se que a soma do dobro do número que a Diana pensou com o número que a Carolina pensou é igual a 8, o que pode ser traduzido pela equação $2x + y = 8$, a qual é equivalente a $y = 8 - 2x$.

Tem-se, ainda, que o produto dos números deverá ser máximo.

xy é igual a $x(8 - 2x)$ pois $y = 8 - 2x$. Assim vem que $x(8 - 2x) = 8x - 2x^2$ é a expressão que traduz o produto dos dois números, em função do número em que a Diana pensou.

$$8x - 2x^2 = -2(x^2 - 4x) = -2(x^2 - 4x + 4) + 8 =$$

$$= -2(x-2)^2 + 8$$

Graficamente é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e cujo vértice é o ponto de coordenadas $(2, 8)$, logo, a função é máxima para $x = 2$. Assim, 2 é o número em que a Diana pensou e como $y = 8 - 2x$, substituindo x por 2, obtém-se $y = 4$, que foi o número em que a Carolina pensou. A Diana pensou no número 2 e a Carolina no número 4.

Ficha de teste 17

Págs. 108 e 109

1. $f(x) = x^2 - 5x + 6 = \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + 6 - \frac{25}{4} =$
 $= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

A parábola que define graficamente a função f tem a concavidade voltada para cima e vértice de coordenadas $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Logo, este é o ponto do gráfico da função f de menor ordenada.

Resposta: (B)

2. $f(x) = 3x^2 - 12 \Leftrightarrow f(x) = 3(x-0)^2 - 12$

O gráfico de f é parte de uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice tem coordenadas $(0, -12)$.

Por outro lado, tem-se que $f(3) = 3 \times 3^2 - 12 \Leftrightarrow f(3) = 15$ e para $x = -4$ a expressão $3x^2 - 12$ toma o valor 36, já que $3 \times (-4)^2 - 12 = 36$.

Logo, o contradomínio da função f é $[-12, 36[$.

Resposta: (B)

3. A imagem de 0 é 0 (ficam excluídas (C) e (D))

A imagem de a é a (fica excluída (B))

Resposta: (A)

$$4. \quad g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x^2 - 1 \geq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{se } x^2 - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 1 = x \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 4}}{2} \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 1) \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet \quad -x^2 + 1 = x \wedge -1 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x + 1 = 0 \wedge -1 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 4}}{-2} \wedge -1 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2} \wedge -1 < x < 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Calculamos, agora, a soma destas duas abscissas:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

Resposta: (D)

$$5. \quad \bullet \quad f(0) = 0 + \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow f(0) = \sqrt[3]{3}$$

$$\bullet \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[4]{4}$$

$$\bullet \quad f(1) = 1 - 1 + \sqrt[5]{6} \Leftrightarrow f(1) = \sqrt[5]{6}$$

Assim, $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{6} > \sqrt[4]{4}$, pelo que $f(0) > f(1) > f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Resposta: (A)

$$6. \quad \bullet \quad A = \{x \in \mathbb{N} : |x - 2| \leq 4\} = \{x \in \mathbb{N} : x - 2 \leq 4 \wedge x - 2 \geq -4\} = \\ = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 6 \wedge x \geq -2\} = \{x \in \mathbb{N} : -2 \leq x \leq 6\} = \\ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\bullet \quad B = \{x \in \mathbb{N} : |x - 7| < 2\} = \{x \in \mathbb{N} : x - 7 < 2 \wedge x - 7 > -2\} = \\ = \{x \in \mathbb{N} : x < 9 \wedge x > 5\} = \{x \in \mathbb{N} : 5 < x < 9\} = \\ = \{6, 7, 8\}$$

$$6.1. \quad A \cap B = \{6\}$$

$$6.2. \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

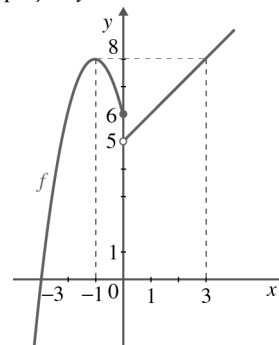
$$7.1. \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x^2 - 4x + 6 = 0 \wedge x \leq 0) \vee (x + 5 = 0 \wedge x > 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 12}}{-4} \wedge x \leq 0 \right) \vee (x = -5 \wedge x > 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{-4} \wedge x \leq 0 \right) \vee (x \in \emptyset) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((x = -3 \vee x = 1) \wedge x \leq 0) \Leftrightarrow x = -3$$

O único zero da função f é -3 .

7.2. Tem-se:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow f(x) = -2(x^2 + 2x) + 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) = -2(x^2 + 2x + 1) + 6 + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) = -2(x + 1)^2 + 8$$

Assim, para $x \leq 0$, o gráfico de f é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo e cujo vértice tem coordenadas $(-1, 8)$. Já, para $x > 0$, o gráfico de f é parte da reta de equação $y = x + 5$.



Monotonia

A função f é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $]0, +\infty[$.

A função f é decrescente em $[-1, 0]$.

Extremos

$f(-1) = 8$ é um máximo relativo.

8.1. Os triângulos $[AHC]$ e $[ADE]$ são semelhantes, logo:

$$\frac{CH}{ED} = \frac{AH}{AD} \Leftrightarrow \frac{4}{ED} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow ED = \frac{4}{3}x$$

Por outro lado, tem-se que $\overline{DG} = 6 - 2x$, assim a área do retângulo $[DGFE]$ é dada, em função de x por:

$$A(x) = \frac{4}{3}x(6 - 2x) = \\ = \frac{24}{3}x - \frac{8}{3}x^2 = \\ = 8x - \frac{8}{3}x^2$$

8.2. Tem-se:

$$8x - \frac{8}{3}x^2 = -\frac{8}{3}(x^2 - 3x) = -\frac{8}{3}\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{8}{3} \times \frac{9}{4} = \\ = -\frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 6$$

Portanto, o gráfico da função A é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, cujo vértice é o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$.

Assim, o valor de x para o qual a área do retângulo $[DGFE]$ é máxima é $\frac{3}{2}$ e a respetiva área é 6 u. a.

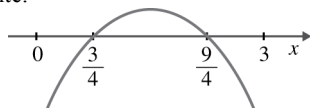
8.3. Uma condição que traduz o problema é:

$$8x - \frac{8}{3}x^2 \leq \frac{9}{2} \wedge 0 < x < 3$$

Assim, tem-se que:

$$48x - 16x^2 \leq 27 \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -16x^2 + 48x - 27 \leq 0 \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -16x^2 + 48x - 27 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-48 \pm \sqrt{(48)^2 - 4 \times 16 \times 27}}{-32} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-48 + 24}{-32} \vee x = \frac{-48 - 24}{-32} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \vee x = \frac{9}{4}$$

Graficamente:



$$-16x^2 + 48x - 27 \leq 0 \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{4}, 3\right[$$

Logo, o conjunto de valores de x para os quais a área do retângulo $[DGFE]$ é igual ou inferior a $\frac{9}{2}$ é

$$\left]0, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{4}, 3\right[.$$

Ficha para praticar 37

Págs. 110 e 111

1.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 8 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -x \geq -8\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 8\} =]-\infty, 8]$$

$$\sqrt{8-x} \geq 0, \forall x \in D_f \Leftrightarrow -2\sqrt{8-x} \leq 0, \forall x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{8-x} \leq 6, \forall x \in D_f \Leftrightarrow f(x) \leq 6, \forall x \in D_f$$

Logo, $D_f =]-\infty, 6]$.

1.2. A função f é injetiva se e somente se:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{8-x_1} = 6 - 2\sqrt{8-x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{8-x_1} = -2\sqrt{8-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{8-x_1} = \sqrt{8-x_2}$$

$$\Rightarrow 8 - x_1 = 8 - x_2 \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

A função f é injetiva.

1.3. Sabe-se que $x \leq 8 \wedge y \leq 6$. Tem-se:

$$y = 6 - 2\sqrt{8-x} \Leftrightarrow 2\sqrt{8-x} = 6 - y \Leftrightarrow \sqrt{8-x} = \frac{6-y}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8-x} = 3 - \frac{y}{2} \Leftrightarrow 8 - x = \left(3 - \frac{y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x = \left(3 - \frac{y}{2}\right)^2 - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 8 - \left(3 - \frac{y}{2}\right)^2$$

Trocando as variáveis x e y , tem-se:

$$f^{-1}(x) = 8 - \left(3 - \frac{x}{2}\right)^2$$

Por outro lado, $D_f =]-\infty, 8]$, pelo que, $D_{f^{-1}} =]-\infty, 8]$ e

$D_f =]-\infty, 6]$, pelo que, $D_{f^{-1}} =]-\infty, 6]$. Logo, a função

f^{-1} , inversa de f , pode caracterizar-se do seguinte modo:

$$f^{-1}:]-\infty, 6] \rightarrow]-\infty, 8]$$

$$x \mapsto 8 - \left(3 - \frac{x}{2}\right)^2$$

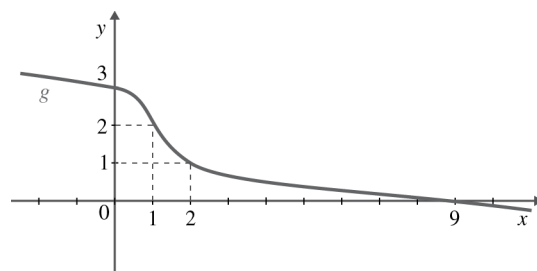
2.1. $D_g = \mathbb{R}$ e $D'_g = \mathbb{R}$

2.2. $g(x) = \sqrt[3]{1-x} + 2 = \sqrt[3]{-(x-1)} + 2$

O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função definida por $y = \sqrt[3]{x}$ pela reflexão de eixo Oy seguida da

translação de vetor $(1, 2)$.

Assim, tem-se que:



$$\bullet g(0) = \sqrt[3]{1-0} + 2 = 3$$

$$\bullet g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = -2 \Leftrightarrow 1-x = (-2)^3 \Leftrightarrow 1-x = -8 \Leftrightarrow x = 1+8 \Leftrightarrow x = 9$$

a) O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$.

b) A função g é decrescente em $\mathbb{R}$.

c) A função g não tem extremos.

2.3. $D_g = \mathbb{R}$, pelo que, $D'_{g^{-1}} = \mathbb{R}$ e $D'_g = \mathbb{R}$, pelo que, $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$.

$$y = \sqrt[3]{1-x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = y - 2 \quad 1-x = (y-2)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x = (y-2)^3 - 1 \Leftrightarrow x = 1 - (y-2)^3$$

Trocando as variáveis x e y , tem-se:

$$y = 1 - (x-2)^3, \text{ ou seja, } g^{-1}(x) = 1 - (x-2)^3.$$

$$g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - (x-2)^3$$

3.1. $\sqrt{1-2x} = 3 \Rightarrow (\sqrt{1-2x})^2 = 3^2 \Leftrightarrow 1-2x = 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2x = 8 \Leftrightarrow x = -4$

Verificação:

$$\sqrt{1-2 \times (-4)} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \quad (\text{verdade})$$

Logo, -4 é solução da equação. Assim, $S = \{-4\}$.

3.2. $\sqrt{3x-2} = 4 \Rightarrow (\sqrt{3x-2})^2 = 4^2 \Leftrightarrow 3x-2 = 16 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x = 18 \Leftrightarrow x = 6$

Verificação:

$$\sqrt{3 \times 6 - 2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (\text{verdade})$$

Logo, 6 é solução da equação. Assim, $S = \{6\}$.

3.3. $\sqrt{5x+10} + 4x = 17 \Leftrightarrow \sqrt{5x+10} = 17-4x \Leftrightarrow$
 $\Rightarrow (\sqrt{5x+10})^2 = (17-4x)^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x+10 = 289 - 136x + 16x^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 16x^2 - 136x - 5x + 289 - 10 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 16x^2 - 14x + 279 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{141 \pm \sqrt{(-141)^2 - 4 \times 16 \times 279}}{32} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{141 \pm \sqrt{2025}}{32} \Leftrightarrow x = \frac{93}{16} \vee x = 3$

Verificação:

$$\text{Para } x = \frac{93}{16}, \text{ tem-se } \sqrt{5 \times \frac{93}{16} + 10} + 4 \times \frac{93}{16} = 17 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{625}{16}} + \frac{93}{4} = 17 \Leftrightarrow \frac{25}{4} + \frac{93}{4} = 17 \Leftrightarrow \frac{59}{2} = 17$$

(falso)

Logo, $\frac{93}{16}$ não é solução da equação.

Para $x = 3$, tem-se $\sqrt{5 \times 3 + 10} + 4 \times 3 = 17 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt{25} + 12 = 17 \Leftrightarrow 5 + 12 = 17 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 17 = 17$ (verdade). $S = \{3\}$

$$\begin{aligned} 3.4. \quad 1 &= 2x - \sqrt{x^2 + 5x + 1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt{x^2 + 5x + 1})^2 = (2x - 1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - x^2 - 4x - 5x + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Verificação:

Para $x = 0$:

$$1 = 2 \times 0 - \sqrt{0^2 - 5 \times 0 + 1} \Leftrightarrow 1 = 0 - \sqrt{1} \Leftrightarrow 1 = -1 \text{ (falso)}$$

Logo, 0 não é solução da equação.

Para $x = 3$:

$$1 = 2 \times 3 - \sqrt{3^2 + 5 \times 3 + 1} \Leftrightarrow 1 = 6 - \sqrt{25} \Leftrightarrow 1 = 6 - 5 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (verdade)}$$

Logo, 3 é solução da equação. Assim, $S = \{3\}$.

$$\begin{aligned} 3.5. \quad 2 - x - 2\sqrt{x+1} &= 0 \Leftrightarrow 2 - x = 2\sqrt{x+1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2 - x)^2 = (2\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 = 4(x+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 = 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4x + 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 8 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8 \end{aligned}$$

Verificação:

Para $x = 0$:

$$2 - 0 - 2\sqrt{0+1} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 \times 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (verdade)}$$

Logo, 0 é solução da equação.

Para $x = 8$, tem-se:

$$2 - 8 - 2\sqrt{8+1} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2 \times 3 = 0 \Leftrightarrow -12 = 0 \text{ (falso)}$$

Logo, 8 não é solução da equação. Assim, $S = \{0\}$.

$$\begin{aligned} 3.6. \quad \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} &= x - 1 \Rightarrow (\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}})^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1 - 1 \Leftrightarrow -\sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^4 - x^2} = 2x - x^2 \Rightarrow (\sqrt{x^4 - x^2})^2 = (2x - x^2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^4 - x^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^4 - x^4 + 4x^2 + x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2(5 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 5 - 4x = 0 \end{aligned}$$

Verificação:

Para $x = 0$, tem-se:

$$\sqrt{1 - \sqrt{0^4 - 0^2}} = 0 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 - 0} = -1 \Leftrightarrow 1 = -1 \text{ (falso)}$$

Logo, 0 não é solução da equação.

Para $x = \frac{5}{4}$, tem-se:

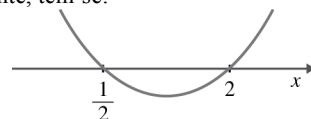
$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^4 - \left(\frac{5}{4}\right)^2}} &= \frac{5}{4} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \sqrt{\frac{625}{256} - \frac{25}{16}}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \sqrt{\frac{225}{256}}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ &\text{(verdade)} \end{aligned}$$

Logo, $\frac{5}{4}$ é solução da equação. Assim, $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$.

$$\begin{aligned} 4.1. \quad D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [1, +\infty[\wedge \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \wedge x - 1 \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \wedge x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = \\ &= [1, +\infty[\\ &\bullet (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = \\ &= 2(\sqrt{x-1})^2 - 5\sqrt{x-1} + 3 = 2(x-1) - 5\sqrt{x-1} + 3 = \\ &= 2x - 2 - 5\sqrt{x-1} + 3 = 2x - 5\sqrt{x-1} + 1 \\ &f \circ g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad \quad \quad x \mapsto 2x - 5\sqrt{x-1} + 1 \\ &\bullet D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge 2x^2 - 5x + 3 \in [1, +\infty[\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge 2x^2 - 5x + 3 \geq 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 5x + 2 \geq 0\} \end{aligned}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$$

Graficamente, tem-se:



$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 5x + 2 \geq 0\} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \bullet (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x^2 - 5x + 3) = \\ &= \sqrt{2x^2 - 5x + 3 - 1} = \sqrt{2x^2 - 5x + 2} \end{aligned}$$

$$g \circ f : \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad \quad x \mapsto \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$$

4.2. Tem-se que $f \circ g \neq g \circ f$, pelo que as funções f e g não são permutáveis, logo a proposição p é falsa.

Por outro lado, tem-se que:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 5x + 3 \Leftrightarrow f(x) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) + 3 - 2 \times \frac{25}{16} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

O gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice tem coordenadas $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$.

Logo, o contradomínio da função f é $\left[-\frac{1}{8}, +\infty\right[$.

Relativamente à função g :

$$\sqrt{x-1} \geq 0, \forall x \in D_g \Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in D_g$$

Logo, $D'_g = [0, +\infty[$.

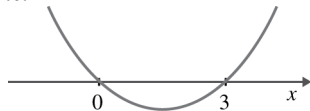
Assim, não é verdade que $D'_f \subset D'_g$, pelo que a proposição q é falsa.

A proposição p quando q é equivalente a $q \Rightarrow p$.

$F \Rightarrow F$ é verdadeiro, pelo que a proposição p quando q é verdadeira.

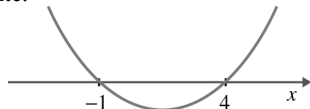
$$\begin{aligned} 5.1. \quad \sqrt{x^2 - 3x} < 2 &\Rightarrow 0 \leq x^2 - 3x < 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 0 \wedge x^2 - 3x < 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 0 \wedge x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x^2 - 3x &= 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Graficamente:



$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$$

Graficamente:



$$\begin{aligned} x^2 - 3x \geq 0 \wedge x^2 - 3x - 4 < 0 &\Leftrightarrow (x \leq 0 \vee x \geq 3) \wedge (-1 < x < 4) \\ &\Leftrightarrow -1 < x \leq 0 \vee 3 \leq x < 4 \end{aligned}$$

Logo, $S =]-1, 0] \cup [3, 4[$.

$$5.2. \quad \sqrt{2x+5} \leq x+1 \Rightarrow 0 \leq 2x+5 \leq (x+1)^2 \wedge x+1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x+5 \wedge 2x+5 \leq (x+1)^2 \wedge x+1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -5 \wedge 2x+5 \leq x^2+2x+1 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow$$

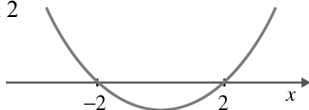
$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2} \wedge 0 \leq x^2+2x-2x+1-5 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2} \wedge 0 \leq x^2-4 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2} \wedge x \geq -1 \wedge x^2-4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x^2-2^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge (x \geq 2 \vee x \leq -2) \Leftrightarrow x \geq 2$$

Logo, $S = [2, +\infty[$



$$6.1. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{2}\right\} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2x-4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty[$$

$$6.2. \quad D_h = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap [2, +\infty[= [2, +\infty[$$

Assim, $D_h = [2, +\infty[$.

Determinemos, agora, os zeros da função h :

Tem-se:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - (5 - \sqrt{2x-4}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 5 - \sqrt{2x-4} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2x+1})^2 = (5 - \sqrt{2x-4})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = 25 - 10\sqrt{2x-4} + 2x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{2x-4} = 25 + 2x - 4 - 2x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{2x-4} = 20 \Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2x-4})^2 = 2^2 \Leftrightarrow 2x-4 = 4 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

Verificação:

$$\sqrt{2 \times 4 + 1} - (5 - \sqrt{2 \times 4 - 4}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9} - (5 - \sqrt{4}) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3 = 0 \quad (\text{Verdadeiro})$$

Logo, 4 é zero de h .

$$\begin{aligned} 6.3. \quad (f \circ g)(4) &= f(g(4)) = \sqrt{2 \times 4 + 1} \times [5 - \sqrt{2 \times 4 - 4}] = \\ &= \sqrt{9} \times [5 - \sqrt{4}] = 3 \times (5 - 2) = 9 \end{aligned}$$

7. Tem-se:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\} =]-\infty, 4]$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} =$$

$$=]-\infty, 4] \cap [0, +\infty[\cap \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} - 6 \neq 0\} =$$

$$= [0, 4] \cap \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} \neq 6\} =$$

$$= [0, 4] \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 36\} = [0, 4] \setminus \{36\} = [0, 4]$$

8. • Determinação das coordenadas do ponto A

O ponto A tem ordenada nula e pertence ao gráfico da função f , pelo que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5+x} = 0 \Leftrightarrow 5+x = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Logo, $A(-5, 0)$

• Determinação das coordenadas do ponto B

O ponto B tem ordenada nula e pertence ao gráfico da função g , pelo que $g(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Logo, $B(1, 0)$

• Determinação das coordenadas do ponto C

O ponto C é o ponto de interseção dos gráficos de f e de g , pelo que:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{5+x} = 1-x \Rightarrow (\sqrt{5+x})^2 = (1-x)^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5+x = 1-2x+x^2 \Leftrightarrow x^2-3x-4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$$

Verificação:

Para $x = 4$, tem-se $\sqrt{5+4} = 1-4 \Leftrightarrow 3 = -3$ (falso)

Logo, 4 não é solução da equação.

Para $x = -1$, tem-se $\sqrt{5+(-1)} = 1-(-1) \Leftrightarrow 2 = 2$ (verdade)

Logo, -1 é solução da equação.

Por outro lado, tem-se $f(-1) = 2$.

Assim, $C(-1, 2)$.

• Determinação da área do triângulo $[ABC]$:

$$\text{Área } \Delta[ABC] = \frac{d(A, B) \times \text{ordenada de } C}{2} = \frac{6 \times 2}{2} = 6$$

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a 6.

9. Fazendo $\sqrt[4]{x} = y$, tem-se que $(\sqrt[4]{x})^2 = y^2$, ou seja,

$$\sqrt{x} = y^2.$$

Substituindo $\sqrt[4]{x}$ por y e $\sqrt{x}$ por y^2 , na equação, vem que

$$y + 2y^2 = 1 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \vee y = \frac{1}{2}$$

Voltando à variável x , tem-se que:

$$\sqrt[4]{x} = -1 \vee \sqrt[4]{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{16}\right\}$.

10.1. $y = 3 - 2x + x^2 \Leftrightarrow y = x^2 - 2x + 1 + 3 - 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y = (x-1)^2 + 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = y - 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{y-2} \vee x - 1 = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y-2} \vee x = 1 + \sqrt{y-2}$

Trocando as variáveis x e y , tem-se que:

$$y = 1 - \sqrt{x-2} \vee y = 1 + \sqrt{x-2}$$

Todavia, $D_{f^{-1}} = D'_f = [2, +\infty[$ e $D'_{f^{-1}} = D_f = [1, +\infty[$.

Assim, $y \geq 2$, pelo que $y = 1 + \sqrt{x-2}$.

Logo, a expressão de f^{-1} é $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$.

Caracterização de f^{-1} :

$$f^{-1}: [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x \mapsto 1 + \sqrt{x-2}}$

10.2. $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$, pelo que:
 $f^{-1}(x) = 10 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x-2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\sqrt{x-2})^2 = 9^2 \Leftrightarrow x - 2 = 81 \Leftrightarrow x = 83$

Verificação:

Para $x = 83$, tem-se:

$$1 + \sqrt{83-2} = 10 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{81} = 10 \Leftrightarrow 1 + 9 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$$

(verdade)

Logo, $x = \{83\}$.

Ficha para praticar 38

Págs. 112 e 113

1.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{3}{2}\right\} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 25 - x^2 \geq 0\} = [-5, 5]$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : 5 + 4x \geq 0\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{5}{4}\right\} = \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$$

1.2. $f^{-1}(5) = a$ significa que $f(a) = 5$.

Assim, para determinarmos o valor de $f^{-1}(5)$, vamos resolver a equação $f(x) = 5$.

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = 5 \Rightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = 5^2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2x = 25 + 3 \Leftrightarrow 2x = 28 \Leftrightarrow x = 14$$

Verificação:

$$f(14) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2 \times 14 - 3} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5$$

(Verdadeiro)

Logo, $f^{-1}(5) = 14$.

1.3. $g(x) = 7 \Leftrightarrow x + \sqrt{25 - x^2} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} = 7 - x \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\sqrt{25 - x^2})^2 = (7 - x)^2 \Leftrightarrow 25 - x^2 = 49 - 14x + x^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 14x + 49 - 25 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 3$

Verificação:

$$x = 3$$

$$g(3) = 7 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{25 - 3^2} = 7 \Leftrightarrow 3 + 4 = 7 \quad (\text{Verdadeiro})$$

$$x = 4$$

$$g(4) = 7 \Leftrightarrow 4 + \sqrt{25 - 4^2} = 7 \Leftrightarrow 4 + 9 = 7 \quad (\text{Verdadeiro})$$

Logo, $S = \{3, 4\}$.

1.4. A bissetriz dos quadrantes ímpares pode ser definida pela equação $y = x$. Assim, tem-se

$$\sqrt{5+4x} = x \Rightarrow (\sqrt{5+4x})^2 = x^2 \Leftrightarrow 5+4x = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

Verificação:

Para $x = 5$, tem-se:

$$\sqrt{5+4 \times 5} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \quad (\text{verdade})$$

Logo, 5 é solução da equação.

Para $x = -1$, tem-se:

$$\sqrt{5+4(-1)} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{1} = -1 \Leftrightarrow 1 = -1 \quad (\text{falso})$$

O ponto pedido tem abscissa igual à ordenada, pois pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pelo que as suas coordenadas são $(5, 5)$.

2.1. $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 3 \in [1, +\infty[\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 3 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \geq 1\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\} =$

$$=]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$$

$$= f(x^2 - 3) = \sqrt{x^2 - 3 - 1} = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$f \circ g :]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}}$

2.2. $D_h = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

$$D_{\frac{h}{j}} = D_h \cap D_j \cap \{x \in \mathbb{R} : j(x) \neq 0\} =$$

$$= [-1, 1] \cap [0, +\infty[\cap \{x \in \mathbb{R} : 2 - \sqrt{x} \neq 0\} =$$

$$= [0, 1] \cap \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} \neq 2\} = [0, 1] \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 4\} =$$

$$= [0, 1]$$

$$\left(\frac{h}{j}\right)(x) = \frac{h(x)}{j(x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-\sqrt{x}}$$

$$\frac{h}{j}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-\sqrt{x}}$$

$$2.3. \quad D_{i-l} = D_i \cap D_l = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$h(x) = |x+1| \Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Assim:

$$(i-l)(x) = \begin{cases} -x - (-x-1) & \text{se } x < -1 \\ 2x - (x+1) & \text{se } x \geq -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x + x + 1 & \text{se } x < -1 \\ 2x - x - 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1 \\ x-1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

$$i-l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1 \\ x-1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

$$2.4. \quad \bullet D_m = \mathbb{R} \text{ e } D_n = \mathbb{R}, \text{ pelo que } D_{m+n} = D_m \cap D_n = \mathbb{R}$$

$$\bullet m(x) = |x-2| \Leftrightarrow m(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Assim, tem-se:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$m(x)$	$-x+2$	2	$-x+2$	0	$x-2$
$n(x)$	$2x-1$	-1	4	4	4
$m(x)+n(x)$	$x+1$	1	$-x+6$	4	$x+2$

Logo:

$$(m+n)(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ -x+6 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ x+2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

• Caracterização da função $m+n$

$$m+n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ -x+6 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ x+2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$3.1. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, +\infty[$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \Leftrightarrow D_g = [1, +\infty[$$

$$3.2. \quad D_h = D_{f-g} = D_f \cap D_g = [-1, +\infty[\cap [1, +\infty[= [1, +\infty[$$

$$D_j = D_{f+g} = D_f \cap D_g = [1, +\infty[$$

Determinemos, caso existam, os zeros da função h .

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (1 + \sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 1 + 2\sqrt{x-1} + x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1-1-x+1 = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow 1^2 = (2\sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4x-4 \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Verificação:

Para $x = \frac{5}{4}$, tem-se:

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1} - 1 - \sqrt{\frac{5}{4}-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9}{4}-1} - \sqrt{\frac{1}{4}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{verdade})$$

Logo, $\frac{5}{4}$ é solução da equação e consequentemente é o zero da função h .

Determinemos, agora, caso existam, os zeros da função j .

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow (f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 + \sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (1 - \sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 1 - 2\sqrt{x-1} + x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1+x-1-x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{x-1})^2 = 1^2 \Leftrightarrow 4(x-1) = 1 \Leftrightarrow 4(x-1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-4 = 1 \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Verificação:

Para $x = \frac{5}{4}$:

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1} - 1 + \sqrt{\frac{5}{4}-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9}{4}-1} - 4 + \sqrt{\frac{1}{4}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 = 0 \quad (\text{falso})$$

Logo, $\frac{5}{4}$ não é solução da equação, pelo que a função j não tem zeros.

Por outro lado, tem-se que a proposição:

A função h não tem zeros a menos que a função j tenha zeros. é equivalente à proposição:

Se a função j não tem zeros, então a função h não tem zeros.

É verdade que a função j não tem zeros e é falso que a função h não tem zeros, pelo que a implicação é falsa e, consequentemente, a proposição dada, é, também, falsa.

$$4.1. \quad 3\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x} - 1 = 0. \text{ Fazendo } \sqrt[4]{x} = y, \text{ tem-se:}$$

$$(\sqrt[4]{x})^2 = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = y$$

Assim, vem que:

$$3y - 2y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -2y^2 + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 8}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-3 \pm 1}{-4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = 1$$

Voltando à variável x , tem-se que:

$$\sqrt[4]{x} = \frac{1}{2} \vee \sqrt[4]{x} = 1 \Rightarrow (\sqrt[4]{x})^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \vee (\sqrt[4]{x})^4 = 1^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \vee x = 1$$

Verificação:

Para $x = \frac{1}{16}$:

$$3\sqrt[4]{\frac{1}{16}} - 2\sqrt{\frac{1}{16}} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} - 2\frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad (\text{verdade})$$

Logo, $\frac{1}{16}$ é solução da equação.

Para $x = 1$, tem-se:

$$3\sqrt[4]{1} - 2\sqrt[4]{1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3 - 2 - 1 = 0 \quad (\text{verdade})$$

Logo, 1 também é solução da equação. Assim, $S = \left\{\frac{1}{16}, 1\right\}$.

II. $9\sqrt[4]{x^3} - 8\sqrt{x^3} - 1 = 0$

Fazendo, $\sqrt[4]{x^3} = y$, tem-se:

$$\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^2 = y^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{(x^3)^2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^3} = y^2$$

Assim, vem que:

$$9y - 8y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -8y^2 + 9y - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 32}}{-16} \Leftrightarrow y = \frac{-9 \pm 7}{-16} \Leftrightarrow y = \frac{1}{8} \vee y = 1$$

Voltando à variável x , tem-se que:

$$\sqrt[4]{x^3} = \frac{1}{8} \vee \sqrt[4]{x^3} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{x^3}\right)^4 = \left(\frac{1}{8}\right)^4 \vee \left(\sqrt[4]{x^3}\right)^4 = 1^4 \\ \Leftrightarrow x^3 = \left[\left(\frac{1}{8}\right)^4\right] \vee x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{1}{8}\right)^4\right]} \vee x = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \vee x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \vee x = 1$$

Verificação:

Para $x = \frac{1}{16}$, tem-se:

$$9\sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)^3} - 8\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^3} - 1 = 0 \Leftrightarrow 9 \times \frac{1}{8} - 8 \times \frac{1}{64} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{9}{8} - \frac{1}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{8} - \frac{1}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 (\text{verdade})$$

Logo, $\frac{1}{16}$ é solução da equação.

Para $x = 1$, tem-se:

$$9\sqrt[4]{1^3} - 8\sqrt{1^3} - 1 = 0 \Leftrightarrow 9 \times 1 - 8 \times 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{verdade})$$

Logo, 1 é solução da equação. Assim, $S = \left\{\frac{1}{16}, 1\right\}$.

Conclui-se que foi o Antônio que respondeu corretamente ao exercício.

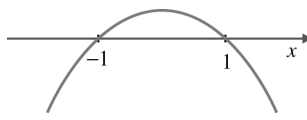
5.1. Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 \Leftrightarrow 1^2 = x^2 + \overline{CA}^2 \Leftrightarrow \overline{CA}^2 = 1 - x^2$$

Como $\overline{CA} > 0$, vem que, $\overline{CA} = \sqrt{1 - x^2}$.

Logo, $P = 1 + x + \sqrt{1 - x^2}$.

Determinemos, agora, o domínio da função P :

$$D_P = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0 \wedge x > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : (-1 < x < 1) \wedge x > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} =]0, 1[$$


5.2. Área $\Delta[ABC] = \frac{\overline{CA} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{1-x^2} \times x}{2} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$

Logo, $A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} (x \in]0, 1[)$.

5.3. $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow 4x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(4x\sqrt{1-x^2}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 16x^2(1-x^2) = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16x^2 - 16x^4 - 3 = 0 \Leftrightarrow -16x^4 + 16x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -16(x^2)^2 + 16x^2 - 3 = 0$

Fazendo $y = x^2$, vem que:

$$-16y^2 + 16y - 3 \Leftrightarrow y = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \times (-16) \times (-3)}}{-32} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{-16 \pm 8}{-32} \Leftrightarrow y = \frac{-16-8}{-32} \vee y = \frac{-16+8}{-32} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} \vee y = \frac{1}{4}$$

Voltando à variável x , tem-se

$$x^2 = \frac{3}{4} \vee x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \vee x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x = \pm\frac{1}{2}$$

Como $x \in]0, 1[$, tem-se que $x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Verificação:

Para $x = \frac{1}{2}$:

$$4 \times \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad (\text{Verdade})$$

Para $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad (\text{Verdade})$$

Logo, os valores de x para os quais a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\frac{\sqrt{3}}{8}$ são $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Sendo x a abscissa do ponto A , a sua ordenada y pode ser obtida resolvendo a equação da elipse em ordem a y , uma vez que o ponto A pertence à elipse. Assim, vem que:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400 \Leftrightarrow 25y^2 = 400 - 16x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 = \frac{400 - 16x^2}{25} \Leftrightarrow y^2 = \frac{16}{25}(25 - x^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{16}{25}(25 - x^2)} \Leftrightarrow y = \pm\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$$

O ponto A situa-se no 1.º quadrante pelo que a sua ordenada é positiva, logo $A\left(x, \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}\right)$.

A área do retângulo $[ABCD]$ pode ser obtida do modo que se segue:

$$\text{Área do retângulo } [ABCD] = \\ = (2 \times \text{abscissa de } A) \times (2 \times \text{ordenada de } A) = \\ = 2x \left(2 \times \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}\right) = \frac{16}{5}x\sqrt{25 - x^2} =$$

7.1. $f(10) = 10^2 - 4 \times 10 - 1 = 59$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} - 1 = 2 - 4\sqrt{2} - 1 = 1 - 4\sqrt{2}$$

$$\frac{3 + f(10)}{f(\sqrt{2})} = \frac{3 + 59}{1 - 4\sqrt{2}} = \frac{62(1 + 4\sqrt{2})}{(1 - 4\sqrt{2})(1 + 4\sqrt{2})} = \frac{62(1 + 4\sqrt{2})}{1^2 - (4\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{62(1 + 4\sqrt{2})}{1 - 32} = \frac{62(1 + 4\sqrt{2})}{-31} = -2(1 + 4\sqrt{2}) = -2 - 8\sqrt{2}$$

7.2. Zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{5} \vee x = 2 - \sqrt{5}$$

Os zeros da função f são $2 - \sqrt{5}$ e $2 + \sqrt{5}$.

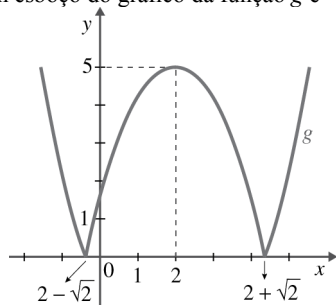
Por outro lado, tem-se que:

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 4 - 1 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (x - 2)^2 - 5$$

O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice tem coordenadas $(2, -5)$.

Assim, um esboço do gráfico da função g é



Assim, 0 é o mínimo absoluto (e também é mínimo relativo)

sendo $2 - \sqrt{5}$ e $2 + \sqrt{5}$ os respectivos minimizantes.

$f(2) = 5$ é máximo relativo.

7.3. $f(x) = x^2 - 4x - 1$, pelo que:

$$\sqrt{f(x)} = -f(x) + 6 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 1} = -(x^2 - 4x - 1) + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 1} + (x^2 - 4x - 1) - 6 = 0$$

Fazendo, $y = \sqrt{x^2 - 4x - 1}$, tem-se que $y^2 = x^2 - 4x - 1$, assim vem que:

$$y = -y^2 + 6 \Leftrightarrow y + y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 + 5}{2} \vee y = \frac{-1 - 5}{2} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -3$$

Voltando à variável x :

$$\sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2 \vee \sqrt{x^2 - 4x - 1} = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2 \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x^2 - 4x - 1})^2 = 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 + 6}{2} \vee x = \frac{4 - 6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

Verificação:

Para $x = 5$, tem-se:

$$\sqrt{f(5)} = -f(5) + 6 \Leftrightarrow \sqrt{4} = -4 + 6 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (\text{verdade})$$

Para $x = -1$, tem-se:

$$\sqrt{f(-1)} = -f(-1) + 6 \Leftrightarrow \sqrt{4} = -4 + 6 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (\text{verdade})$$

Logo, $S = \{-1, 5\}$.

Ficha de teste 18

Págs. 114 e 115

1. $D_h = D_f \cap D_g = [1, +\infty[\cap (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[) = [1, +\infty[$

Determinemos os zeros de h :

$$h(x) = 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow (f + g)(x) = 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -\sqrt{x^2-1} \wedge x \in D_h \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (-\sqrt{x^2-1})^2 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = x^2-1 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x = x^2 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1) \wedge x \in D_h$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1) \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x = 1$$

Verificação:

$$h(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) + g(1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-1} + \sqrt{1^2-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{Verdade})$$

A função h tem um único zero que é 1.

Logo, o conjunto dos zeros da função h é $\{1\}$.

Resposta: (A)

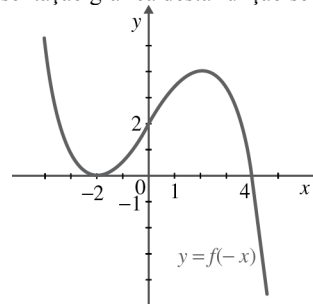
2. Pretende-se determinar t tal que $h(t) = 0$. Assim, vem que:

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{t} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{t} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{t})^3 = 2^3 \Leftrightarrow t = 8$$

Por outro lado, sabe-se que o reservatório começou a ser esvaziado às 7 horas de um certo dia. Como $7 + 8 = 15$, o reservatório fica vazio às 15 horas desse dia.

Resposta: (C)

3. O gráfico da função definida por $y = f(-x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f pela reflexão de eixo Oy . Logo, uma representação gráfica desta função será:



$$\text{Assim, } D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(-x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\} =]-\infty, 4].$$

Resposta: (D)

4. $f(x-2) = f(x) - f(2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - (x-2)^2} = \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{4 - 2^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2 + 4x - 4} = \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 4x} = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\forall x \in D_h, f(x-2) = f(x) - f(2) \text{ é falso.}$$

$$f(2x) = 2f(x) \Leftrightarrow \sqrt{4 - (2x)^2} = 2\sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{4 - 4x^2} = \sqrt{2^2(4 - x^2)} \Leftrightarrow \sqrt{4 - 4x^2} = \sqrt{16 - 4x^2}$$

$\forall x \in D_h, f(2x) = 2f(x)$ é falso.

$$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - x^2} \quad (\text{verdade})$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow \sqrt{4 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4 - x^2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{4 - x^2}} \quad (\text{falso})$$

$$\forall x \in D_h, f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$$

Resposta: (C)

$$5. \quad \begin{aligned} & \bullet D_f = \mathbb{R} \quad \bullet D_g = \mathbb{R} \\ & \bullet D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \\ & \quad = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \\ & \quad = \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

O domínio da função j é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Resposta: (B)

$$6.1. \quad \begin{aligned} f(x) = 0 & \Leftrightarrow (-x^2 = 0 \wedge x \geq -1) \vee (\sqrt{-1-x} - 2 = 0 \wedge x < -1) \\ & \Leftrightarrow (x = 0 \wedge x \geq -1) \vee (\sqrt{-1-x} = 2 \wedge x < -1) \Rightarrow \\ & \Rightarrow x = 0 \vee \left((\sqrt{-1-x})^2 = 2^2 \wedge x < -1 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 0 \vee (-1-x = 4 \wedge x < -1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 0 \vee (x = -1-4 \wedge x < -1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 0 \vee (x = -5 \wedge x < -1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5 \end{aligned}$$

Verificação: $f(-5) = \sqrt{-1+5} - 2 = \sqrt{4} - 2 = 0$

Os zeros da função f são -5 e 0 .

6.2. Tem-se que $-8 - 4\sqrt{3} < -1$, pelo que:

$$\begin{aligned} f(-8 - 4\sqrt{3}) &= \sqrt{-1 - (-8 - 4\sqrt{3})} - 2 \\ &= \sqrt{-1 + 8 + 4\sqrt{3}} - 2 = \\ &= \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - 2 = \\ &= \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3} - 2 = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - 2 \end{aligned}$$

Como $2 + \sqrt{3} > 0$, tem-se que $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}$.

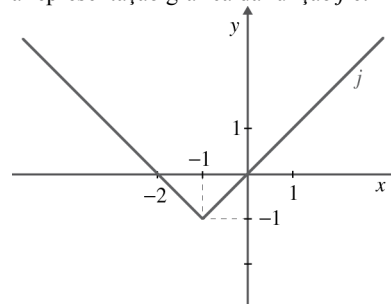
Assim, vem que $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - 2 = 2 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3}$.

$$7.1. \quad \begin{aligned} D_h = D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}_0^+\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\} = [-1, 1] \end{aligned}$$

por simples observação do gráfico da função g .

7.2. O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função g pela translação de vetor $(-1, 0)$ seguida pela reflexão de eixo Ox .

Assim, uma representação gráfica da função j é:



a) Monotonia

A função j é decrescente em $]-\infty, -1]$ e crescente em $[-1, +\infty[$.

Extremos

$f(-1) = -1$ é mínimo absoluto (também é mínimo relativo)

$$b) \quad j(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

$$8.1. \quad \bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, +\infty[$$

$$\bullet D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Assim, tem-se:

$$D_{\frac{f}{h}} = D_f \cap D_h \cap \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x} + 1 \neq 0\}$$

$$\sqrt[3]{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = -1 \Leftrightarrow x = (-1)^3 \Leftrightarrow x = -1$$

$$D_{\frac{f}{h}} = [-1, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-1, +\infty[$$

Logo, o domínio da função $\frac{f}{h}$ é $]-1, +\infty[$.

8.2. Determinemos, inicialmente, o domínio de validade da condição $f(x) < g(x)$.

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0 \wedge x - 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \geq 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\} = [4, +\infty[\end{aligned}$$

Para qualquer valor de x pertencente a D , tanto $\sqrt{x+1}$ como $2 + \sqrt{x-4}$ representam números positivos, pelo que:

$$\begin{aligned} f(x) < g(x) &\Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2 \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 < (2 + \sqrt{x-4})^2 \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 1 < 4 + 4\sqrt{x-4} + x - 4 \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 1 < 4\sqrt{x-4} + x \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 < 4\sqrt{x-4} \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} > \frac{1}{4} \wedge x \geq 4 \end{aligned}$$

Para $x \geq 4$, $\sqrt{x-4} \geq 0$ e $\frac{1}{4} \geq 0$. Logo:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} > \frac{1}{4} \wedge x \geq 4 &\Leftrightarrow x - 4 > \frac{1}{16} \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-4})^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2 \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - 4 > \frac{1}{16} \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow x > \frac{1}{16} + 4 \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > \frac{65}{16} \wedge x \geq 4 \Leftrightarrow x > \frac{65}{16} \end{aligned}$$

Logo, $S = \left] \frac{65}{16}, +\infty \right[$.

9.1. Área do triângulo $[ABC] = \frac{d(B, C) \times |\text{ordenada de } A|}{2}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow (-\sqrt{x-2})^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

e como $2 \in D_f$ ($D_f = [2, +\infty[$), 2 é o zero da função f , pelo que $B(2, 0)$. Logo, a distância entre o ponto médio do segmento $[BC]$ e o ponto B é $x-2$, logo $d(B, C) = 2(x-2)$.

O ponto A pertence ao gráfico da função f e a sua abcissa é x , pelo que a sua ordenada é $y = -\sqrt{x-2}$. Assim, vem que:

$$\begin{aligned} \text{Área do triângulo } [ABC] &= \frac{2(x-2) \times |-\sqrt{x-2}|}{2} = \\ &= (x-2) \times |-\sqrt{x-2}| = (x-2) \times (x-2)^{\frac{1}{2}} = (x-2)^{1+\frac{1}{2}} \\ &= (x-2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

9.2. Uma equação que traduz o problema é $(x-2)^{\frac{3}{2}} = 64$.

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} (x-2)^{\frac{3}{2}} = 64 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^3} = 64 \Rightarrow \left(\sqrt{(x-2)^3}\right)^2 = 64^2 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^3 = 64^2 \Leftrightarrow (x-2)^3 = (4^3)^2 \Leftrightarrow (x-2)^3 = (4^2)^3 \\ &\Leftrightarrow x-2 = 4^2 \Leftrightarrow x = 2 + 16 \Leftrightarrow x = 18 \end{aligned}$$

O valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 64 é 18.

Ficha para praticar 39

Págs. 116 e 117

- 1.1. Seja $\bar{x}$ a média das classificações dos alunos que tiveram classificação superior a 12 valores.

Tem-se que:

$$\bar{x} = \frac{14 \times 5 + 15 \times 3 + 18 \times 2}{5 + 3 + 2} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{151}{10} \Leftrightarrow \bar{x} = 15,1$$

Assim, a média das classificações dos alunos que tiveram classificação superior a 12 valores é de 15,1 valores.

- 1.2. Sabe-se que a mediana das classificações dos alunos da turma é 13 valores. Nenhum dos alunos obteve a classificação de 13 valores pelo que a mediana terá de ser a média aritmética das classificações 12 e 14, pois, $\frac{12+14}{2} = 13$. Logo, o

número de alunos que obteve classificação superior a 12 terá de ser igual ao número de alunos que obteve classificação igual ou inferior a 12. Assim tem-se que:

$$2 + a + a = 5 + 3 + 2 \Leftrightarrow 2 + 2a = 10 \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$$

O valor de a é 4.

- 2.1. O número de alunos da turma do António, no início do ano letivo, é par, pelo que a mediana será igual à média aritmética de $x_{(15)}$ e $x_{(16)}$. Como $x_{(15)} = 14$ e $x_{(16)} = 14$, a mediana das idades dos alunos da turma do António, no início do ano letivo é igual a 14 anos.

- 2.2. Seja x a idade do aluno mais novo que entrou na turma no final do primeiro período. O outro tem $x + 2$ anos de idade.

Tem-se que:

$$\bar{x} = \frac{14 \times 16 + 15 \times 5 + 16 \times 2 + 17 \times 7}{30} =$$

$$= \frac{14 \times 16 + 15 \times 5 + 16 \times 2 + 17 \times 7 + x + x + 2}{32}$$

$$\frac{450}{30} = \frac{450 + x + x + 2}{32} \Leftrightarrow 15 = \frac{452 + 2x}{32} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 \times 32 = 452 + 2x \Leftrightarrow 28 = 2x \Leftrightarrow x = 14$$

Os novos alunos tinham 14 e 16 anos, respetivamente, quando entraram, no final do primeiro período, na turma do António.

- 3.1. A moda do número de horas semanais da disciplina de Matemática das turmas dos cursos do ensino profissional deste agrupamento é 3 (é o valor que apresenta maior frequência).

- 3.2. Seja $\bar{x}$ o número médio de horas semanais na disciplina de Matemática das turmas dos cursos do ensino profissional deste agrupamento.

$$\bar{x} = \frac{1 \times 4 + 1,5 \times 10 + 2 \times 13 + 2,5 \times 8 + 3 \times 15}{4 + 10 + 13 + 8 + 15} = \frac{110}{50} = 2,2$$

2,2 é um número real não inteiro, pelo que a proposição é verdadeira.

4. Seja x a idade da Rita quando entrou para a turma e $\bar{x}$ a média das idades dos alunos da turma, sem a Rita.

$$\bar{x} = \frac{7 \times 14 + 11 \times 15 + 7 \times 16}{7 + 11 + 7} = \frac{375}{25} = 15$$

Como a média das idades dos alunos da turma ficou inalterada com a entrada da Rita para a turma, conclui-se que a Rita, quando entrou para a turma, tinha 15 anos.

Todavia, repare que a idade da Rita, quando entrou para a turma seria a solução da equação $15 = \frac{375 + x}{26}$.

5. $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \in [-\sqrt{3}, 2]\} = \{-1, 0, 1\}$, pelo que a média aritmética dos elementos do conjunto A é zero, pois $\frac{-1 + 0 + 1}{3} = 0$

6. Seja x a idade de cada uma das filhas do casal Silva e $\bar{x}$ a média das idades dos três filhos.

$$\bar{x} = \frac{x + x + 12}{3}, \text{ mas } \bar{x} = 14, \text{ pelo que:}$$

$$14 = \frac{2x + 12}{3} \Leftrightarrow \frac{14 \times 3 - 12}{2} = x \Leftrightarrow x = 15$$

Assim, conclui-se que a idade das filhas do casal Silva é 15 anos.

- 7.1. A amostra ordenada é $\tilde{x} = (184, 187, 192, 199, 199, 203, 203, 205, 208, 212)$, pelo que, $x_{(3)} = 192$ e $x_{(8)} = 205$.

- 7.2. $\tilde{x} = (184, 187, 192, 199, 203, 205, 208, 212)$

$$\begin{aligned} 7.3. \quad \bar{x} &= \frac{\sum_{j=1}^8 \tilde{x}_j n_j}{10} \\ \bar{x} &= \frac{184 + 187 + 192 + 199 \times 2 + 203 \times 2 + 205 + 208 + 212}{10} \\ &= 199,2 \end{aligned}$$

A média das alturas, em cm, destes 10 jogadores é igual a 199,2.

$$\begin{aligned} 8.1. \quad \sum_{i=1}^6 \sqrt{2}i &= \sqrt{2} \times 1 + \sqrt{2} \times 2 + \sqrt{2} \times 3 + \sqrt{2} \times 4 + \sqrt{2} \times 5 + \sqrt{2} \times 6 \\ &= 21\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.2. \quad \sum_{i=3}^7 (2i-1)^2 &= (2 \times 3 - 1)^2 + (2 \times 4 - 1)^2 + (2 \times 5 - 1)^2 + \\ &\quad + (2 \times 6 - 1)^2 + (2 \times 7 - 1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=3}^7 (2i-1)^2 = 25 + 49 + 81 + 121 + 169 = 445 \end{aligned}$$

$$8.3. \quad \sum_{i=-3}^1 \frac{i}{6} = \frac{-3}{6} + \frac{-2}{6} + \frac{-1}{6} + \frac{-1}{6} + \frac{0}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} 8.4. \quad \sum_{i=-2}^2 (\sqrt{3}-i)^2 &= (\sqrt{3}+2)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-0)^2 + \\ &\quad + (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-2)^2 \\ &= 3 + 4\sqrt{3} + 4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 + \\ &\quad + 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 25 \end{aligned}$$

$$9.1. \quad -3^4 + 3^5 - 3^6 + 3^7 - 3^8 = \sum_{i=4}^8 (-1)^{i+1} \times 3^i$$

$$9.2. \quad (a^2 - b^2) + (a^3 - b^3) + (a^4 - b^4) = \sum_{i=2}^4 (a^i - b^i)$$

$$\begin{aligned} 9.3. \quad (a^3 - b^3) + (b^4 - a^4) + (a^5 - b^5) &= \\ &= (a^3 - b^3) - (a^4 - b^4) + (a^5 - b^5) = \sum_{i=3}^5 (a^i - b^i) \times (-1)^{i+1} \end{aligned}$$

$$9.4. \quad 25 + 36 + 49 + 64 = \sum_{i=5}^8 i^2$$

Ficha para praticar 40

Págs. 118 e 119

$$1.1. \sum_{i=1}^3 2 = |4 - 2x| \Leftrightarrow (3 - 1 + 1) \times 2 = |4 - 2x|$$

$$\Leftrightarrow 6 = |4 - 2x| \Leftrightarrow 6 = 4 - 2x \vee -6 = 4 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = -2 \vee 2x = 10 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$$

Logo, $S = \{-1, 5\}$.

$$1.2. |x^2 - 5x| = \sum_{i=1}^2 2^i \Leftrightarrow |x^2 - 5x| = 2^1 + 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 5x| = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 6 \vee x^2 - 5x = -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 5x - 6 = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 7}{2} \vee x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 2$$

Logo, $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

2.1. A soma dos desvios em relação à média é igual a zero, pelo que $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = 0$.

Substituindo d_2 por -3 , d_3 por 2 , d_4 por -5 , d_5 por 1 e d_6 por -2 , tem-se que:

$$d_1 - 3 + 2 - 5 + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow d_1 - 7 = 0 \Leftrightarrow d_1 = 7$$

Logo, $d_1 = 7$.

$$2.2. SS_x = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2$$

Substituindo, os valores dos desvios, tem-se que:

$$SS_x = 7^2 + (-3)^2 + 2^2 + (-5)^2 + 1^2 + (-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SS_x = 49 + 9 + 4 + 25 + 1 + 4 \Leftrightarrow SS_x = 92$$

A soma dos quadrados dos desvios, SS_x , é igual a 92.

2.3. $d_i = x_i - \bar{x}$. No caso de $i = 1$, tem-se, $d_1 = x_1 - \bar{x}$, pelo que $7 = -10 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = -17$.

A média da amostra é igual a -17 .

Assim, vem que:

$$\bullet d_2 = x_2 - \bar{x} \Leftrightarrow -3 = x_2 + 17 \Leftrightarrow x_2 = -20$$

$$\bullet d_3 = x_3 - \bar{x} \Leftrightarrow 2 = x_3 + 17 \Leftrightarrow x_3 = -15$$

$$\bullet d_4 = x_4 - \bar{x} \Leftrightarrow -5 = x_4 + 17 \Leftrightarrow x_4 = -22$$

$$\bullet d_5 = x_5 - \bar{x} \Leftrightarrow 1 = x_5 + 17 \Leftrightarrow x_5 = -16$$

$$\bullet d_6 = x_6 - \bar{x} \Leftrightarrow -2 = x_6 + 17 \Leftrightarrow x_6 = -19$$

Logo, $\underline{x} = (-10, -20, -15, -22, -16, -19)$

$$3.1. \bar{x} = \frac{1,71 + 1,67 + 1,62 + 1,72 + 1,65 + 1,59}{6} = \frac{9,96}{6} = 1,66$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = (1,71 - 1,66)^2 + (1,67 - 1,66)^2 +$$

$$+ (1,62 - 1,66)^2 + (1,72 - 1,66)^2 +$$

$$+ (1,65 - 1,66)^2 + (1,59 - 1,66)^2 =$$

$$= 0,0025 + 0,0001 + 0,0016 + 0,0036 +$$

$$= 0,0128$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\underline{y} = (171, 167, 162, 172, 165, 159), \text{ donde,}$$

$$\bar{y} = \frac{171 + 167 + 162 + 172 + 165 + 159}{6} = \frac{996}{6} = 166$$

Assim:

$$SS_y = \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 = (171 - 166)^2 + (167 - 166)^2 +$$

$$+ (162 - 166)^2 + (172 - 166)^2 +$$

$$+ (165 - 166)^2 + (159 - 166)^2 =$$

$$= 25 + 1 + 16 + 36 + 1 + 49 = 128$$

Logo, $SS_x = 0,0128$ e $SS_y = 128$.3.2. $SS_x = k \times SS_y$, ou seja:

$$0,0128 = k \times 128 \Leftrightarrow k = \frac{0,0128}{128} \Leftrightarrow k = 0,0001$$

Logo, $SS_x = 0,0001 SS_y$.

4.1. Tem-se que:

$$\bar{x} = \frac{3 + 1 + 2 + 4 + 6 + 2 + 3}{7} = 3$$

Por outro lado, tem-se que $\bar{y} = \bar{x} + 2$, pelo que

$$\underline{y} = (3 + 2, 1 + 2, 2 + 2, 4 + 2, 6 + 2, 2 + 2, 3 + 2), \text{ ou seja,}$$

$$\underline{y} = (5, 3, 4, 6, 8, 4, 5).$$

Assim, vem que:

$$\bar{y} = \frac{5 + 3 + 4 + 6 + 8 + 4 + 5}{7} = 5$$

Logo, $\bar{y} = \bar{x} + 2$, pois $5 = 3 + 2$.

$$4.2. SS_x = \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = (3 - 3)^2 + (1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (4 - 3)^2 +$$

$$+ (6 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 3)^2$$

$$= 0 + 4 + 1 + 1 + 9 + 1 + 0 = 16$$

$$SS_y = \sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2 = (5 - 5)^2 + (3 - 5)^2 + (4 - 5)^2 + (6 - 5)^2 +$$

$$+ (8 - 5)^2 + (4 - 5)^2 + (5 - 5)^2$$

$$= 0 + 4 + 1 + 1 + 9 + 1 + 0 = 16$$

Logo, $SS_x = SS_y$.

$$5.1. \bar{x} = \frac{1 + 0 + 3 + 6 + 2}{5} = 2,4$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\underline{y} = (\sqrt[4]{2}x_1, \sqrt[4]{2}x_2, \sqrt[4]{2}x_3, \sqrt[4]{2}x_4, \sqrt[4]{2}x_5), \text{ daí que,}$$

$$\underline{y} = (\sqrt[4]{2}, 0, 3\sqrt[4]{2}, 6\sqrt[4]{2}, 2\sqrt[4]{2})$$

Assim vem que:

$$\bar{y} = \frac{\sqrt[4]{2} + 0 + 3\sqrt[4]{2} + 6\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{2}}{5} = \frac{12\sqrt[4]{2}}{5} = 2,4\sqrt[4]{2}$$

$$\bar{y} = 2,4\sqrt[4]{2} \wedge \bar{x} = 2,4, \text{ pelo que:}$$

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{2,4}{2,4\sqrt[4]{2}} \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \times 2^{\frac{1}{4}}$$

$$5.2. SS_y = \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = (\sqrt[4]{2} - 2,4\sqrt[4]{2})^2 + (0 - 2,4\sqrt[4]{2})^2 +$$

$$+ (3\sqrt[4]{2} - 2,4\sqrt[4]{2})^2 + (6\sqrt[4]{2} - 2,4\sqrt[4]{2})^2 +$$

$$+ (2\sqrt[4]{2} - 2,4\sqrt[4]{2})^2 =$$

$$= (-1,4\sqrt[4]{2})^2 + (-2,4\sqrt[4]{2})^2 + (0,6\sqrt[4]{2})^2 +$$

$$+ (3,6\sqrt[4]{2})^2 + (-0,4\sqrt[4]{2})^2 =$$

$$= 1,96\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 + 5,76\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 + 0,36\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 + \\ + 12,96\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 + 0,16\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = \\ = 1,96\sqrt{2} + 5,76\sqrt{2} + 0,36\sqrt{2} + 12,96\sqrt{2} + 0,16\sqrt{2} \\ = 21,2\sqrt{2}$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (1-2,4)^2 + (0-2,4)^2 + (3-2,4)^2 + \\ + (6-2,4)^2 + (2-2,4)^2 \\ = 1,96 + 5,76 + 0,36 + 12,96 + 0,16 = 21,2$$

Logo, $SS_y = 21,2\sqrt{2}$ e como $SS_x = 21,2$, tem-se que

$$SS_y = \sqrt{2}SS_x$$

6. A balança, tem um desvio positivo sistemático de 10 g. Pesaram-se os quatro melões nesta balança, um de cada vez e obteve-se a amostra $\tilde{x} = (3450, 4600, 2980, 5130)$. Sendo y a amostra dos verdadeiros pesos de cada um dos quatro melões, tem-se que:

$$y = (3450 - 10, 4600 - 10, 2980 - 10, 5130 - 10), \text{ ou seja,}$$

$$y = (3440, 4590, 2970, 5120). \text{ Assim, vem que}$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2$$

$$\bar{x} = \frac{3450 + 4600 + 2980 + 5130}{4} = 4040$$

$$SS_x = (3450 - 4040)^2 + (4600 - 4040)^2 + (2980 - 4040)^2 + \\ + (5130 - 4040)^2 \\ = 348\,100 + 313\,600 + 1\,123\,600 + 1\,188\,100 = 2\,973\,400$$

$$SS_y = \sum_{i=1}^4 (y_i - \bar{y})^2$$

$$\bar{y} = \frac{3440 + 4590 + 2970 + 5120}{4} = 4030$$

$$SS_y = (3440 - 4030)^2 + (4590 - 4030)^2 + (2970 - 4030)^2 + \\ + (5120 - 4030)^2 = 2\,973\,400$$

Assim, conclui-se que $SS_x = SS_y = 2\,973\,400$.

- 7.1. $\tilde{x} = (110, 150, 180, 200)$

- 7.2. De acordo com a definição, uma vez que $\frac{5 \times 30}{150} = 1,5$, o percentil 30 é o valor de ordem $[1,5] + 1$ da amostra ordenada, ou seja, $P_{30} = x_{(2)} = 150$ g.

Já o percentil 80 é uma vez que $\frac{5 \times 80}{100} = 4$ é um número

inteiro, é dado por $P_{80} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{180 + 200}{2} = 190$ g.

Interpretação:

$P_{30} = 150$ g, significa que pelo menos 30% das laranjas têm peso inferior ou igual a 150 g. No entanto, a percentagem de laranjas que verificam esta condição é 60% (três laranjas em cinco). Também é verdade que, no máximo, 70% das laranjas pesam mais do que 150 g, mas neste caso concreto essa percentagem é, apenas, de 40% (duas laranjas em cada cinco).

Discrepâncias desta natureza nos limiares dados pelos percentis ocorrem em amostras onde haja duas ou mais unidades estatísticas com valores idênticos.

$P_{80} = 190$ g, significa que pelo menos 80% das laranjas têm pesos inferiores ou iguais ao percentil 80 (190 g) e que, no máximo, 20% das laranjas têm pesos superiores ao percentil 80. Como facilmente se confirma, neste caso, exatamente 80% das laranjas tem peso inferior ou igual a 190 g (quatro laranjas em cinco) e temos exatamente 20% das laranjas com peso superior a 190 g (uma laranja em cinco).

8. $A_1 = 6, A_2 = 12, A_3 = 14$ e $A_4 = 8$, pelo que a área total é igual a 40.

Por outro lado, tem-se que $\frac{81 \times 40}{100} = 32,4$ (número inteiro), o

que significa que o percentil 81 se localiza no intervalo $[8, 10]$, mais precisamente, de modo a verificar a igualdade:

$$(P_{81} - 8) \times 4 + 6 + 12 = 28 \Leftrightarrow (P_{81} - 8) \times 4 = 32,4 - 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (P_{81} - 8) \times 4 = 0,4 \Leftrightarrow P_{81} - 8 = \frac{0,4}{4} \Leftrightarrow P_{81} = 8 + 0,1$$

$$\Leftrightarrow P_{81} = 8,1$$

Determinemos, agora, o percentil 30.

Tem-se $\frac{30 \times 40}{100} = 12$ o que significa que o percentil 30 se

localiza no intervalo $[4, 6]$, mais precisamente, de modo a verificar a igualdade:

$$(P_{30} - 4) \times 6 + 6 = 12 \Leftrightarrow (P_{30} - 4) \times 6 = 6 \Leftrightarrow P_{30} - 4 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{30} = 1 + 4 \Leftrightarrow P_{30} = 5$$

A proposição p é: $P_{81} = 8,1$ a menos que $P_{30} = 5,2$ é equivalente a: Se $P_{30} \neq 5,2$, então $P_{81} = 8,1$.

Trata-se de uma implicação em que o antecedente é verdadeiro e o consequente também é verdadeiro, pelo que a implicação é verdadeira, logo a proposição p é verdadeira.

- 9.1. Sejam $\bar{x}$ e $\bar{y}$ as médias das poupanças diárias, em euros, do

Diogo e da Catarina, respetivamente. Assim, tem-se que

$$\bar{x} = \frac{2,2 + 3,6 + 0,9 + 1,6 + 1,7 + 2,0 + 1,5 + 1,7}{8} = \frac{15,2}{8} = 1,9$$

$$\bar{y} = \frac{2,1 + 1,9 + 1,8 + 2,2 + 2,2 + 1,6 + 1,9 + 1,5}{8} = \frac{15,2}{8} = 1,9$$

Cada um dos dois amigos, o Diogo e a Catarina, poupou, em média, por dia, durante estes oito dias, 1,90 euros.

- 9.2. Sejam s_x e s_y os desvios-padrão relativos às poupanças

diárias, em euros, do Diogo e da Catarina, respetivamente.

Assim, tem-se que:

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}, \quad n = 8 \text{ e } SS_x = \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2.$$

Determinemos SS_x .

$$SS_x = \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = (2,2 - 1,9)^2 + (3,6 - 1,9)^2 + \\ + (10,9 - 1,9)^2 + (1,6 - 1,9)^2 + (1,7 - 1,9)^2 + \\ + (2,0 - 1,9)^2 + (1,5 - 1,9)^2 + (1,7 - 1,9)^2 = \\ = 0,09 + 2,89 + 1 + 0,09 + 0,04 + 0,01 + 0,16 + 0,04 = \\ = 4,32$$

$$s_x = \sqrt{\frac{4,32}{8-1}} = \sqrt{\frac{4,32}{7}} \approx 0,79$$

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}}, \quad n=8 \text{ e } SS_y = \sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2$$

Determinemos SS_y .

$$\begin{aligned} SS_y &= \sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2 = (2,1-1,9)^2 + (1,9-1,9)^2 + (1,8-1,9)^2 + \\ &\quad + (2,2-1,9)^2 + (2,2-1,9)^2 + (1,6-1,9)^2 + \\ &\quad + (1,9-1,9)^2 + (1,5-1,9)^2 = \\ &= 0,04 + 0 + 0,01 + 0,09 + 0,09 + 0,09 + 0 + 0,16 = 0,48 \end{aligned}$$

$$\text{Assim, tem-se que } s_y = \sqrt{\frac{0,48}{8-1}} = \sqrt{\frac{0,48}{7}} \approx 0,26.$$

Logo, $s_x \approx 0,79$ e $s_y \approx 0,26$, o que significa que a dispersão dos dados relativamente à média é maior no conjunto das poupanças do Diogo do que no conjunto das poupanças da Catarina, ou seja, a Catarina, poupou, diariamente, nestes oito dias quantias mais regulares do que o Diogo.

$$\begin{aligned} 10.1. \quad \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} &= \\ &= \frac{1}{(n+0)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n+i)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10.2. \quad \frac{1}{\sqrt{3}} + 1,5 + \frac{7}{\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{6}} + \frac{31}{\sqrt{7}} + \frac{63}{\sqrt{8}} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} + \frac{7}{\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{6}} + \frac{31}{\sqrt{7}} + \frac{63}{\sqrt{8}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{7}{\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{6}} + \frac{31}{\sqrt{7}} + \frac{63}{\sqrt{8}} = \sum_{i=1}^6 \frac{2^i - 1}{\sqrt{2+i}} \end{aligned}$$

Ficha de teste 19

Págs. 120 e 121

1. A soma de todas as frequências relativas é igual a 1, pelo que,

$$0,1 + 0,58 + 0,14 + a + 0,02 + a = 1 \Leftrightarrow 0,84 + 2a = 1$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1 - 0,84 \Leftrightarrow 2a = 0,16 \Leftrightarrow a = \frac{0,16}{2} \Leftrightarrow a = 0,08$$

Logo, o valor médio é igual a:

$$0 \times 0,1 + 1 \times 0,58 + 2 \times 0,14 + 3 \times 0,08 + 4 \times 0,02 + 5 \times 0,08 = 1,58$$

Resposta: (A)

2. Quer o desvio-padrão, quer a média serão aumentados em 20%. Assim, tem-se que:

$$\bullet \text{ nova média} = 1,2 \times 10 = 12$$

$$\bullet \text{ novo desvio-padrão} = 1,2 \times 2,5 = 3$$

Resposta: (A)

3. Para que a moda seja 30 um dos valores tem de ser 30. Seja $a = 30$. Como a média é 27, a soma de todos os valores é igual a $6 \times 27 = 162$. Portanto:

$$30 + 24 + 26 + 30 + b + 23 = 162 \Leftrightarrow b = 162 - 133 \Leftrightarrow b = 29$$

Logo, $a = 30$ e $b = 29$ ou $a = 29$ e $b = 30$.

De acordo com as possíveis respostas, temos que $a = 30$ e $b = 29$.

Resposta: (D)

4. A amostra ordenada é igual a:

$$\bar{x} = (8, 9, 10, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 18)$$

Determinação do percentil 25

$$\frac{12 \times 25}{100} = 3 \text{ (número inteiro), pelo que:}$$

$$P_{25} = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{10 + 11}{2} = 10,5$$

Determinação do percentil 50

$$\frac{12 \times 50}{100} = 6 \text{ (número inteiro), pelo que:}$$

$$P_{50} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2} = \frac{12 + 13}{2} = 12,5$$

Determinação do percentil 75

$$\frac{12 \times 75}{100} = 9, \text{ pelo que } P_{75} = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{14 + 15}{2} = 14,5$$

Assim, tem-se que:

$$\bullet P_{75} - P_{25} = 14,5 - 10,5 = 4$$

$$\bullet P_{50} - P_{25} = 12,5 - 10,5 = 2$$

$$\bullet P_{75} - P_{50} = 14,5 - 12,5 = 2$$

$$\bullet P_{75} - P_{50} = P_{50} - P_{25} \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (verdade)}$$

Resposta: (D)

$$5. \quad \sum_{i=1}^2 (-2i + x) \leq \sum_{i=1}^2 [(-x)^i - 2]$$

$$\Leftrightarrow (-2 \times 1 + x) + (-2 \times 2 + x) \leq ((-x)^1 - 2) + ((-x)^2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow -2 + x - 4 + x \leq -x - 2 + x^2 - 2$$

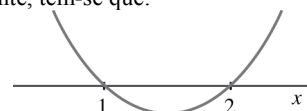
$$\Leftrightarrow -6 + 2x \leq x^2 - x - 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - x - 2x - 4 + 6$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Cálculos auxiliares

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

Graficamente, tem-se que:



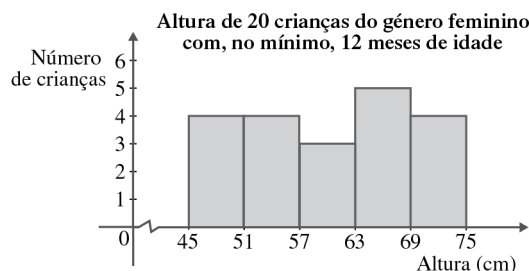
$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 2$$

Logo, $S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

- 6.1.

Altura (cm)	N.º de crianças
[45, 51[	4
[51, 57[	4
[57, 63[	3
[63, 69[	5
[69, 75[	4

- 6.2.



$$\text{Área total} = 6 \times 4 + 6 \times 4 + 6 \times 3 + 6 \times 5 + 6 \times 4 = 120$$

$$\text{Determinação do percentil 10: } \frac{10 \times 120}{100} = 12$$

Assim, o percentil 10 localiza-se no intervalo $[45, 51[$, pois a área do primeiro retângulo é superior a 12, mais precisamente, de modo a verificar a igualdade:

$$(P_{10} - 45) \times 4 + 0 = 12 \Leftrightarrow P_{10} - 45 = \frac{12}{4} \Leftrightarrow P_{10} = 3 + 45 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_{10} = 48$$

Determinação do percentil 85: $\frac{85 \times 120}{100} = 102$ (n.º inteiro)

Assim o percentil 85 localiza-se no intervalo $[69, 75[$,

pois a soma das áreas dos quatro primeiros retângulos é estritamente inferior a 102 mas que ao adicionar a área do quinto retângulo este valor é excedido, mais precisamente, de modo a verificar a igualdade:

$$(P_{85} - 69) \times 4 + (24 + 24 + 18 + 30) = 102 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (P_{85} - 69) \times 4 = 102 - 96 \Leftrightarrow P_{85} - 69 = \frac{6}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_{85} = \frac{3}{2} + 69 \Leftrightarrow P_{85} = 70,5$$

Logo, o percentil de ordem 10 é 48 cm e o percentil de ordem 85 é 70,5 cm.

6.3. $64,5 \in [63, 69[$

Tem-se que $(64,5 - 63) \times 5 = 7,5$.

Assim, vem que:

$$A_1 + A_2 + A_3 + 7,5 = 24 + 24 + 18 + 7,5 = 73,5$$

Daí que $\frac{k \cdot nh}{100} = 73,5 \Rightarrow k = \frac{73,5 \times 100}{120}$, pelo que $k = 61,25$.

Logo, o dado 64,5 cm pertence ao percentil 62.

6.4. Temos de determinar o percentil de ordem 30.

$$\frac{30 \times 120}{100} = 36$$

Assim, o percentil 30 localiza-se no intervalo $[51, 57[$, pois a área do primeiro retângulo é estritamente inferior a 36 mas que ao adicionarmos a área do segundo retângulo esse valor é excedido, mais precisamente, de modo a verificar a igualdade.

$$(P_{30} - 51) \times 4 = 36 - 24 \Leftrightarrow (P_{30} - 51) \times 4 = 12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (P_{30} - 51) = \frac{12}{4} \Leftrightarrow P_{30} = 3 + 51 \Leftrightarrow P_{30} = 54$$

Logo, $h = 54$ cm.

7.1. Área total = $10 \times 15 + 11 \times 15 + 7 \times 15 + 2 \times 15 + 2 \times 15 = 480$

Determinação do percentil 60: $\frac{60 \times 480}{100} = 288$

Assim, o percentil 60 localiza-se no intervalo $[15, 30[$, pois a área do primeiro retângulo é estritamente inferior a 288 mas que ao adicionarmos a área do segundo retângulo esse valor é excedido, mais precisamente, de modo a verificar a igualdade

$$(P_{60} - 15) \times 11 = 288 - 150 \Leftrightarrow (P_{60} - 15) \times 11 = 138 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_{60} - 15 = \frac{138}{11} \Leftrightarrow P_{60} = \frac{138}{11} + 15 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_{60} = \frac{303}{11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{60} \approx 27,5$$

O percentil de ordem 60 é, aproximadamente, igual a 27,5 minutos.

Interpretação: Significa que, pelo menos 60% dos percursos têm a duração inferior ou igual a 27,5 minutos e que, no máximo, 40% dos percursos têm a duração superior a 27,5 minutos.

7.2. Determinar o percentil de ordem 70: $\frac{70 \times 480}{100} = 336$

Assim, o percentil de ordem 70, localiza-se no intervalo $[30, 45[$, pois a soma das áreas dos dois primeiros retângulos é estritamente inferior a 336 mas que ao adicionarmos a área do terceiro retângulo esse valor é excedido, mais precisamente, de modo a verificar a igualdade:

$$(P_{70} - 30) \times 7 = 336 - (150 + 165) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (P_{70} - 30) \times 7 + 315 = 336 \Leftrightarrow P_{70} - 30 = \frac{21}{7} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_{70} = 3 + 30 \quad P_{70} = 33$$

Assim, dos 30% dos percursos com maior duração, aquele que tem menor duração tem, no mínimo, 33 minutos.

$$8. \quad A = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \\ = \frac{32}{64} + \frac{16}{64} + \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64} \\ B = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{64}{64} - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Logo, $A = B$.

9. Tem-se:

$$\sum_{j=1}^{30} (3j^2 + 12j + 5) = \sum_{j=1}^{30} [3(j^2 + 4j) + 5] = \\ = \sum_{j=1}^{30} [3(j^2 + 4j + 4) + 5 - 3 \times 4] = \\ = \sum_{j=1}^{30} [3(j+2)^2 - 7] = \sum_{j=1}^{30} 3(j+2)^2 - \sum_{j=1}^{30} 7 = \\ = 3 \sum_{j=1}^{30} (j+2)^2 - \sum_{j=1}^{30} 7 = \\ = 3 \left(\frac{30(30+1)(2 \times 30 + 13)}{6} + 4 \times 30 \right) - \sum_{j=1}^{30} 7 = \\ = 3 \left(\frac{30 \times 31 \times 73}{6} + 120 \right) - 7 \times 30 = \\ = 3(5 \times 31 \times 73 + 120) - 210 = \\ = 3 \times 11435 - 210 = 34\,095$$