AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA
Ficha de Trabalho de Trigonometria nº 3 – Matemática - 11º Ano
Exercícios dos Testes Intermédios 2006 – 2013

1 Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Qual das expressões seguintes dá o valor de $\operatorname{sen}\alpha$?

(A) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ **(B)** $-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

(C) $\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ **(D)** $-\sqrt{1+\cos^2\alpha}$

maio 2006

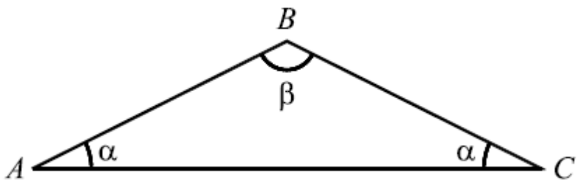
2 Sabe-se que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{5}$
Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\cos x = -\frac{1}{5}$?

(A) $\pi + \beta$ **(B)** $\frac{\pi}{2} + \beta$

(C) $-\beta$ **(D)** $\frac{\pi}{2} - \beta$

maio 2006

3 Na figura está representado um triângulo $[ABC]$ com dois ângulos de amplitude α e um ângulo de amplitude β.



Qual das igualdades seguintes é verdadeira, para qualquer triângulo nestas condições?

(A) $\cos\beta = \operatorname{sen}(2\alpha)$ **(B)** $\cos\beta = \cos(2\alpha)$

(C) $\cos\beta = -\operatorname{sen}(2\alpha)$ **(D)** $\cos\beta = -\cos(2\alpha)$

janeiro 2008

4 Seja θ um valor pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$
Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

(A) $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$ **(B)** $\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta$

(C) $\operatorname{sen}\theta \times \operatorname{tg}\theta$ **(D)** $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{tg}\theta$

Janeiro 2008

5 Considere a equação $1 + 3\operatorname{tg}(2x) = 4$
Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

(A) $-\frac{\pi}{8}$ **(B)** $\frac{3\pi}{8}$ **(C)** $\frac{5\pi}{8}$ **(D)** $\frac{7\pi}{8}$

janeiro 2008

6 Indique as soluções da equação $5 + 2\cos x = 6$ que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$

(A) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ **(D)** $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

maio 2007

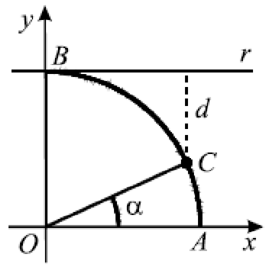
7 Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial e raio igual a 1.

A recta r tem equação $y = 1$

O ponto C pertence ao arco AB

Seja α a amplitude do ângulo AOC

Qual das expressões seguintes dá a distância d do ponto C à recta r?



(A) $1 + \operatorname{sen}(\alpha)$ **(B)** $1 - \operatorname{sen}(\alpha)$

(C) $1 + \cos(\alpha)$ **(D)** $1 - \cos(\alpha)$

maio 2008

8 Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $\cos(\pi - x)$ **(B)** $\operatorname{sen}(\pi - x)$

(C) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ **(D)** $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

maio 2008

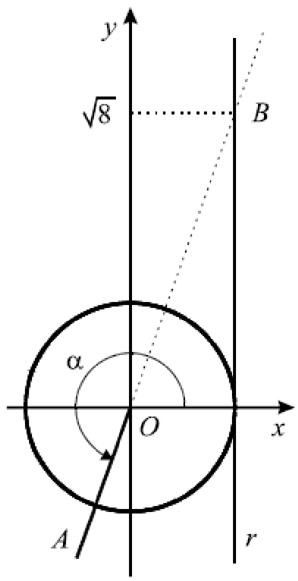
9.a) Na figura junta estão representados, em referencial o. n. xOy:

- o círculo trigonométrico
- a recta r, de equação $x = 1$
- o ângulo, de amplitude α, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}A$
- o ponto B, intersecção do prolongamento da semi-recta $\dot{O}A$ com a recta r.

Como a figura sugere, a ordenada de B é $\sqrt{8}$

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$$5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(3\pi - \alpha)$$



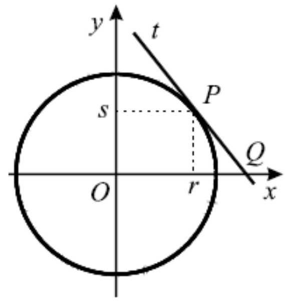
9.b) Considere agora um ponto P, do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1.

Sejam (r, s) as coordenadas do ponto P.

Seja t a recta tangente à circunferência no ponto P.

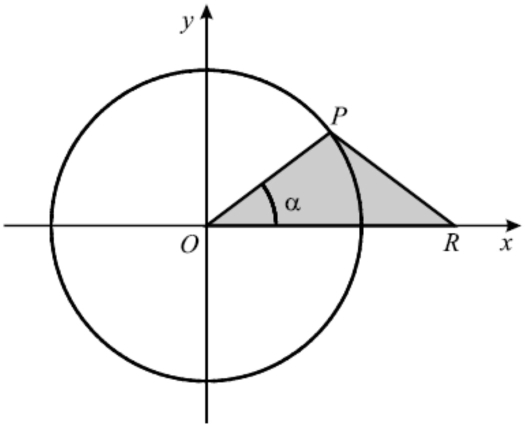
Seja Q o ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox.

Prove que a abcissa do ponto Q é $\frac{1}{r}$



Maio 2007

10 Na figura está representado o círculo trigonométrico e um triângulo $[OPR]$.



O ponto P desloca-se ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.
O ponto R desloca-se ao longo do eixo Ox, de tal modo que o triângulo $[OPR]$ é sempre isósceles.
Sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo ROP, qual das expressões seguintes dá a **área** do triângulo $[OPR]$, em função de α?

(A) $\operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$ **(B)** $2 \,.\, \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$

(C) $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha}{2}$ **(D)** $\dfrac{(1 + \cos\alpha) \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{2}$

maio 2006

11 Considere a equação trigonométrica $\cos x = -0{,}3$

Num dos intervalos seguintes, esta equação tem **apenas uma** solução. Em qual deles?

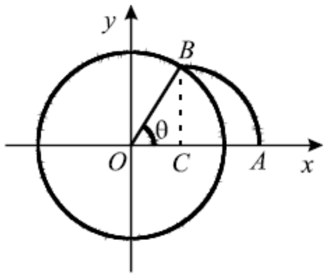
(A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **(B)** $[0, \pi]$

(C) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ **(D)** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

janeiro 2009

12 Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy:

- o círculo trigonométrico
- o raio $[OB]$ deste círculo
- o arco de circunferência AB, de centro no ponto C



Tal como a figura sugere, o ponto B pertence ao primeiro quadrante, os pontos A e C pertencem ao eixo Ox e a recta BC é perpendicular a este eixo.
Seja θ a amplitude do ângulo AOB

Qual é a abcissa do ponto A ?

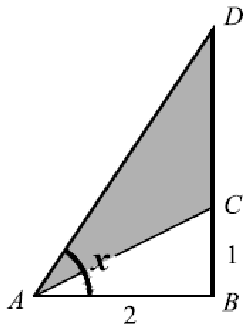
(A) $1 + \operatorname{sen}\theta$ **(B)** $1 + \cos\theta$

(C) $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ **(D)** $1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

Janeiro 2009

13 Relativamente à figura junta, sabe-se que:

- o triângulo $[ABD]$ é rectângulo
- o ponto C pertence ao cateto $[BD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAD
- $\overline{AB} = 2$ e $\overline{BC} = 1$



13.a) Mostre que a área do triângulo $[ACD]$ é dada por $2\,\operatorname{tg}(x) - 1$

13.b) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[ACD]$ é igual a 1

13.c) Sabendo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{5}{13}$ e que $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, determine o valor de $2\,\operatorname{tg}(a) - 1$

Janeiro 2009

14 Na figura 1 está representado, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico.

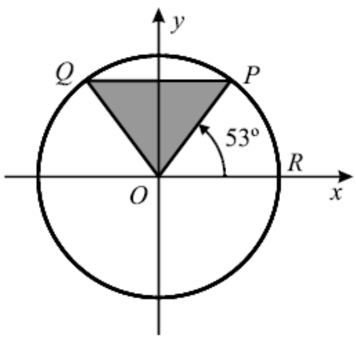


Figura 1

Os pontos P e Q pertencem à circunferência, sendo a recta PQ paralela ao eixo Ox.
O ponto R pertence ao eixo Ox. O ângulo ROP tem $53°$ de amplitude.

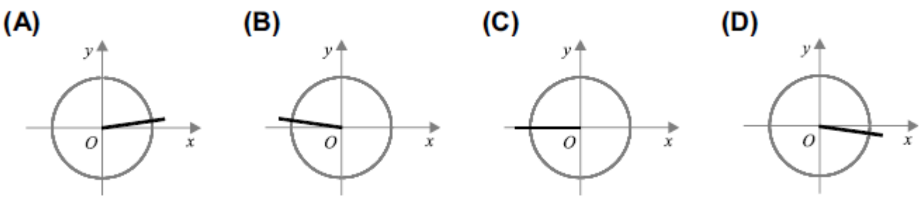
Qual é o perímetro do triângulo $[OPQ]$ (valor aproximado às décimas) ?

(A) $3{,}2$ **(B)** $3{,}4$ **(C)** $3{,}6$ **(D)** $3{,}8$

Maio 2009

15 Em cada uma das figuras seguintes, está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox

Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude?



Janeiro 2010

16 Considere a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = 0{,}1$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação **não** tem solução?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **(B)** $[0, \pi]$

(C) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ **(D)** $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

Janeiro 2010

17 A Inês olhou para o seu relógio quando este marcava 10 h e 45 min.
Passado algum tempo, ao ver novamente as horas, a Inês concluiu que o ponteiro dos minutos tinha rodado -3π radianos.

Que horas marcava o relógio da Inês, neste último instante?

(A) 11 h e 15 min **(B)** 11 h e 45 min **(C)** 12 h e 15 min **(D)** 13 h e 45 min ***Maio 2009***

18 Na figura 1, está representado o quadrado $[ABCD]$ de lado 2

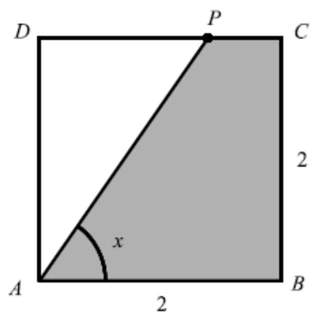


Figura 1

Considere que um ponto P se desloca ao longo do lado $[CD]$, nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto D

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP
$\left(x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Resolva os três itens seguintes, **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

18.a) Mostre que a área da região sombreada é dada por $4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$

18.b) Determine o valor de x para o qual a área da região sombreada é $\frac{12-2\sqrt{3}}{3}$

18.c) Para um certo valor de x, sabe-se que $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{17}$

Determine, para esse valor de x, a área da região sombreada. ***Janeiro 2010***

19 Na Figura 2, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- a recta r é tangente à circunferência no ponto $A(1{,}0)$
- a recta s passa na origem do referencial e intersecta a recta r no ponto P, cuja ordenada é 2
- o ponto Q, situado no terceiro quadrante, pertence à recta s

Seja α a amplitude, em **radianos**, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta OQ

Qual é o valor de α, arredondado às centésimas?

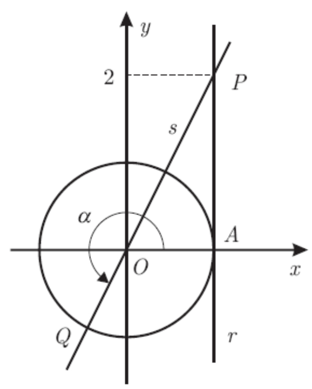


Figura 2

(A) $4{,}23$

(B) $4{,}25$

(C) $4{,}27$

(D) $4{,}29$ ***janeiro 2011***

20 Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 5

Os pontos A e B são os pontos de intersecção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy, respectivamente.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B

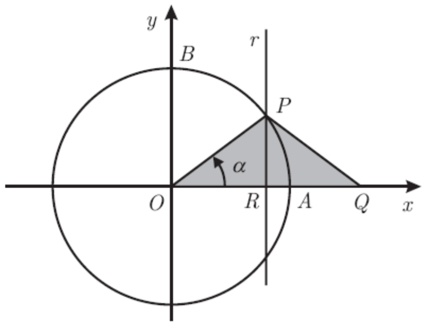


Figura 3

Para cada posição do ponto P, sabe-se que:

- o ponto Q é o ponto do eixo Ox tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$
- a recta r é a mediatriz do segmento $[OQ]$
- o ponto R é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = 25 \operatorname{sen} x \cos x$

Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

20.a) Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $f(\alpha)$

20.b) Determine o valor de α, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual se tem $f(\alpha) = 25 \cos^2 \alpha$

20.c) Seja θ um número real, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $f(\theta) = 5$

Determine o valor de $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2$

janeiro 2011

21 Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $\cos x = 0{,}9$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação **não** tem solução?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **(B)** $[0, \pi]$ **(C)** $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ **(D)** $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

janeiro 2011

22 Sejam α, β e θ três números reais.

Sabe-se que:

- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$
- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\alpha + \theta = 2\pi$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta$?

(A) $2 \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$

(B) $2 \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha$

(C) $-\cos \alpha$

(D) $\cos \alpha$

janeiro 2011

23 Determine o valor de $3 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ sabendo que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5}$

Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

maio 2011

24 Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$?

(A) $\pi - \theta$ **(B)** $\pi + \theta$ **(C)** $\frac{\pi}{2} - \theta$ **(D)** $\frac{\pi}{2} + \theta$

fevereiro 2012

25 Considere o triângulo $[ABC]$ representado na Figura 2.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2$
- $A\hat{C}B = 30^{\circ}$

Seja $\alpha = B\hat{A}C$

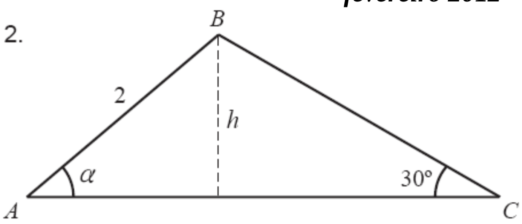


Figura 2

Qual das expressões seguintes representa $\overline{BC}$, em função de α ?

(A) $4 \operatorname{sen} \alpha$ **(B)** $6 \operatorname{sen} \alpha$ **(C)** $4 \cos \alpha$ **(D)** $6 \cos \alpha$

Fevereiro 2012

26 Na Figura 5, está representado, num referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto B tem coordenadas $(3, 0)$

Considere que um ponto P se move sobre a circunferência.

Para cada posição do ponto P, seja $d = \overline{PB}$ e seja $\alpha \in [0, 2\pi[$ a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$

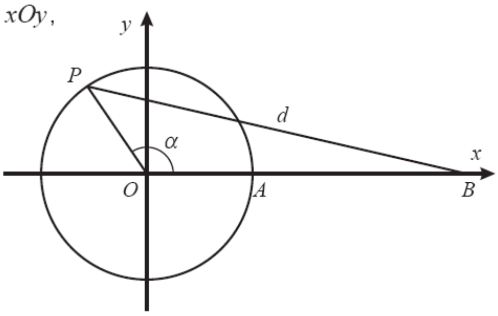


Figura 5

Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

26.a) Mostre que $d^2 = 10 - 6 \cos \alpha$

Sugestão: Exprima as coordenadas do ponto P em função de α e utilize a fórmula da distância entre dois pontos.

26.b) Resolva os dois itens seguintes tendo em conta que $d^2 = 10 - 6 \cos \alpha$

26.b.1) Determine os valores de $\alpha \in [0, 2\pi[$ para os quais $d^2 = 7$

26.b.2) Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $[0, \pi]$, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{35}$

Determine d, para esse valor de α

fevereiro 2012

27 Considere o intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$

Qual das equações seguintes **não** tem solução neste intervalo?

(A) $\cos x = -0{,}5$ **(B)** $\operatorname{sen} x = -0{,}5$

(C) $\cos x = -0{,}9$ **(D)** $\operatorname{sen} x = -0{,}9$

março 2013

28 Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico.

Os pontos A, B, C e D são os pontos de intersecção da circunferência com os eixos do referencial.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco BC, nunca coincidindo com B nem com C

Para cada posição do ponto P, seja Q o ponto do arco AB que tem ordenada igual à ordenada do ponto P e seja R o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto Q

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$

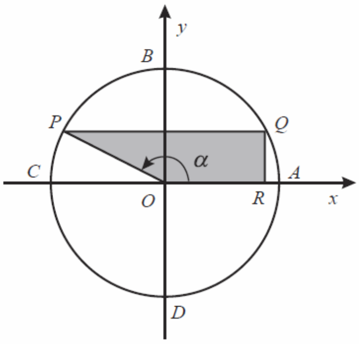


Figura 3

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

28.1) Mostre que a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por $-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

28.2) Para uma certa posição do ponto P, a reta OP intersecta a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$

Determine, para essa posição do ponto P, a área do trapézio $[OPQR]$

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

março 2013

Soluções: 1)B;2)B;3)D;4)D;5)C;6)B;7)B;8)B;9.a)-1;10)A;11)B;12)C;13.b) $\frac{\pi}{4}$;c) $\frac{19}{5}$; 14)A;15)B;16)D;17)C;18.b) $\frac{\pi}{3}$;c) $\frac{44}{15}$;19)B;20.b) $\frac{\pi}{4}$; $c)$ $\frac{7}{5}$; 21)C;22)D;23) $\frac{9}{4}$;24)B;25)A; 26.b.1) $\frac{\pi}{3} e \frac{5\pi}{3}$;b.2) $\sqrt{11}$;27)D;28.2) $\frac{252}{625}$