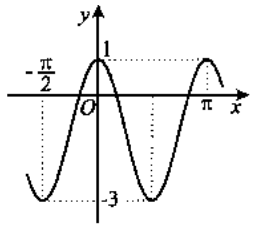
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha nº 04 - Trigonometria - 11º ano   2000 a 2014

1. Considere a função ***f***, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = x + \operatorname{sen} x$.

Determine os valores de *x*, pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, tais que $f(x) = x + \cos x$. ***(2003-2ªfase)***

2. Considere a expressão $f(x) = a + b sen^2 x$. Sempre que se atribui um valor real a ***a*** e um valor real a ***b***, obtemos uma função de domínio IR.

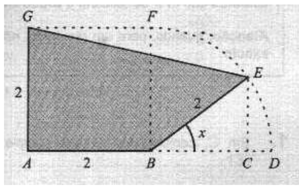


a) Nesta alínea, considere $a = 2$ e $b = -5$.

Sabe-se que $tg\theta = \frac{1}{2}$. **Sem recorrer à calculadora**, calcule $f(\theta)$.

b) Para um certo valor de ***a*** e um certo valor de ***b***, a função ***f*** tem o seu gráfico parcialmente representado na figura junta. Conforme essa figura sugere, tem-se que o contradomínio de ***f*** é $[-3,1]$, 0 e π são maximizantes, e $-\frac{\pi}{2}$ *e* $\frac{\pi}{2}$ são minimizantes. Determine ***a*** e ***b***. ***(2003-1ªfase 2ªCham)***

3. Na figura está representado a sombreado um polígono $[ABEG]$. Tem-se que:



- $[ABFG]$ é um quadrado de lado 2;
- FD é um arco de circunferência de centro B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento $[BD]$, de tal forma que se tem sempre $[EC] \perp [BD]$;
- *x* designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE ($x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

a) Mostre que a área do polígono $[ABEG]$ é dada, em função de *x*, por $A(x) = 2(1 + senx + \cos x)$.
(Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio $[ACEG]$)

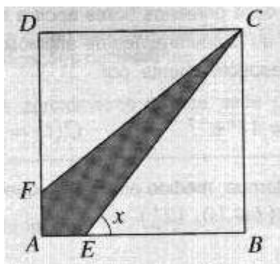
b) Determine $A(0)$ *e* $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

c) Recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:
Quais são os valores de x para os quais a área do polígono $[ABEG]$ *é* 4,3?
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas. ***(2003-1ªfase 1ªcham)***

4. Considere as funções ***f*** e ***g***, de domínio IR, definidas por $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{15}x^2$ $g(x) = 2sinx - \cos x$.

Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) \rangle g(x)$, no intervalo $]0, 2\pi[$.
Explique como procedeu. ***(2002-2ªfase)***

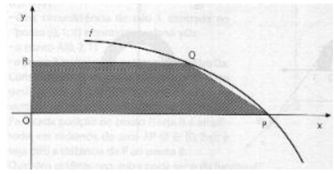
5. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 1. O ponto E desloca-se sobre o lado $[AB]$, e o ponto F desloca-se sobre o lado $[AD]$, de tal forma que se tem sempre $\overline{AE} = \overline{AF}$. Para cada posição do ponto E, seja ***x*** a amplitude do ângulo BEC $\left(x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as três alíneas seguintes:



Mostre que o **perímetro** do quadrilátero $[CEAF]$ é dado, em função de ***x***, por $f(x) = 2 - \frac{2}{tgx} + \frac{2}{senx}$.

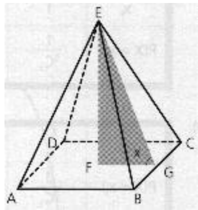
(2002-1ªfase-1ªcham)

6. Considere a função f, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$.



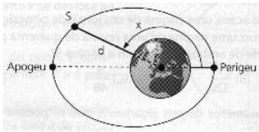
Sem recorrer à sua calculadora, resolva a questão seguinte.

Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, uma parte do gráfico da função f. Na mesma figura está também representado um trapézio [OPQR]. O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respetivamente. Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f. Sabendo que o ponto R tem ordenada $\frac{1}{3}$, determine a área do trapézio. ***(2001-2ª fase)***



7. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que: a base da pirâmide tem centro F e lado 2; G é o ponto médio da aresta [BC]; x designa a amplitude do ângulo FGE. Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por $A(x)=\dfrac{4\cos x+4}{\cos x}$ $\left(x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$. ***(2001-1ªfase-1ªcham)***

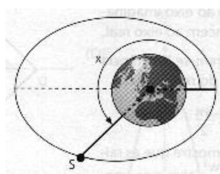
8. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala. Na elipse estão assinalados dois pontos: *o apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra e *o perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra. O ângulo x, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no perigeu, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus. A distância d, em km, **do satélite ao centro da Terra**, é dada por $d=\dfrac{7820}{1+0{,}07\cos x}$.



Considere que a Terra é uma esfera de raio 6378 km.

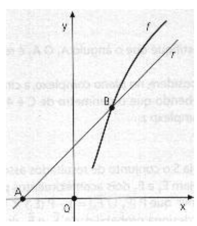
a) Determine a altitude do satélite (distância à superfície da Terra) quando este se encontra no apogeu. *Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.*

b) Num certo instante, o satélite está na posição indicada na segunda figura. A distância do satélite ao centro da Terra é, então, 8200 km. Determine o valor de x, em graus, *arredondado às unidades*. ***(2000-1ªfase2ª cham)***



9. Considere a função f, de domínio IR, definida por $\mathbf{f(x)=2x-\cos x}$.

Na figura está representada parte do gráfico da função f e parte de uma reta r, cuja inclinação é 45º, que contém o ponto A(-3, 0) e que interseta o gráfico da função f no ponto B. Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. *Apresente o resultado arredondado às unidades*. Nos cálculos intermédios conserve, no mínimo, uma casa decimal. ***(2000-2ªfase)***



10. No ano 2000, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por $f(n)=12{,}2+2{,}64\,sen\,\dfrac{\pi(n-81)}{183}$ $\quad n\in\{1,2,3,\ldots,366\}$ (argumento em radianos).

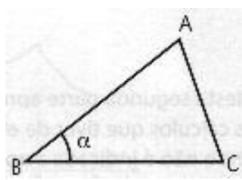
***Por exemplo**: no dia 3 de* fevereiro*, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do sol foi de f(34) ≃ 10,3 horas.*

a) No dia 24 de março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do sol ? Apresente o resultado em horas e minutos (*minutos arredondados às unidades*). Recorde que no ano 2000 o mês de fevereiro teve 29 dias.

b) Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do sol é superior a 14,7 horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu. ***(2000-1ªfase-1ªcham)***

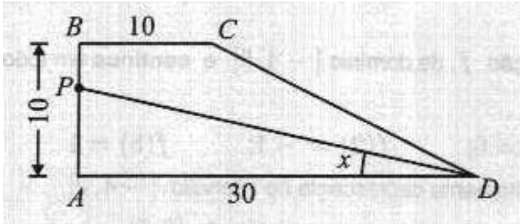
11.

a) Seja [ABC] um triângulo isósceles em que $\overline{BA}=\overline{BC}$. Seja α a amplitude do ângulo ABC. Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada por $\dfrac{\overline{BC}^2}{2}\times sen\,\alpha$ $\;(\alpha\in]0,\pi[)$



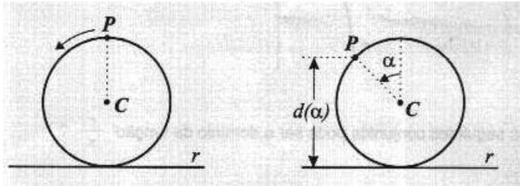
b) Considere agora um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio 1. Utilize o resultado da alínea anterior para mostrar que a área do polígono é dada por $A_n=\dfrac{n}{2}sen\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$. ***(2000-Prova modelo)***

12. Na figura está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$, cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento. Considere que um ponto P se desloca sobre o lado $[AB]$. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA. Pretende-se determinar o valor de ***x*** para o qual o segmento $[PD]$ divide o trapézio em duas figuras com a mesma área. Qual das equações seguintes traduz este problema?



$(A)\ \dfrac{30^2 sen\, x}{2}=100$ $(B)\ \dfrac{30^2 tg\, x}{2}=100$ $(C)\ \dfrac{30\times 10 sen\, x}{4}=150$ $(D)\ \dfrac{30\times 10 tg\, x}{4}=150$ ***(2003-2ªfase)***

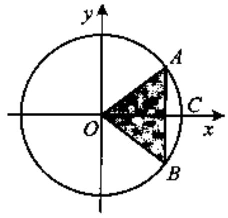
13. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma reta *r*. Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da reta *r*. Seja $d(\alpha)$ a distância de P a *r*, após uma rotação de amplitude α.



Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo α?

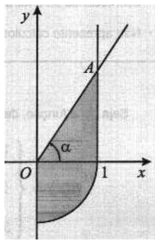
$(A)\ d(\alpha)=1+\cos\alpha$ $(B)\ d(\alpha)=2+sen\,\alpha$ $(C)\ d(\alpha)=1-\cos\alpha$ $(D)\ d(\alpha)=2-sen\,\alpha$ ***(2002-2ªfase)***

14. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$. Os pontos A e B pertencem à circunferência. O segmento $[AB]$ é perpendicular ao semieixo positivo Ox. O ponto C é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox. Seja α a amplitude do ângulo COA. $\left(\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ Qual das expressões dá a área do triângulo $[OAB]$, em função de α ?



$(A)\ sen\,\alpha\cdot\cos\alpha$ $(B)\ \dfrac{tg\alpha\cdot\cos\alpha}{2}$ $(C)\ tg\alpha\cdot sen\,\alpha$ $(D)\ \dfrac{tg\alpha\cdot sen\,\alpha}{2}$ ***(2002-1ªfase-2ªcham)***

15. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, um quarto de círculo , de centro na origem e raio 1; uma semirreta paralela ao eixo Oy, com origem no ponto (1,0); um ponto A pertencente a esta semirreta; um ângulo de amplitude α, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta AO. Qual das expressões seguintes dá a área da região a sombreado, em função de α?



$(A)\ \pi+\dfrac{tg\alpha}{2}$ $(B)\ \pi+\dfrac{2}{tg\alpha}$ $(C)\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{tg\alpha}{2}$ $(D)\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{tg\alpha}$ ***(2001-1ªfase-2ªcham)***

16. A figura 1 representa um depósito de forma cilíndrica, que contém um certo volume de um combustível.

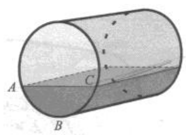


Figura 1

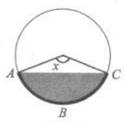


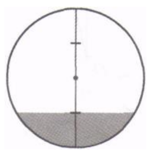
Figura 2

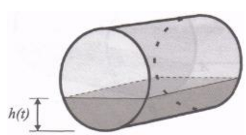
Admita que a função *V*, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $V(x) = 80\,(x - sen\, x)$, dá o volume, em metros cúbicos, de combustível existente no depósito, em função da amplitude *x*, em radianos, do arco ABC (que, como se sabe, é igual à amplitude do ângulo ao centro correspondente, assinalado na figura 2).

a) Qual é a capacidade total do depósito, em metros cúbicos? Apresente o resultado arredondado às unidades. Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

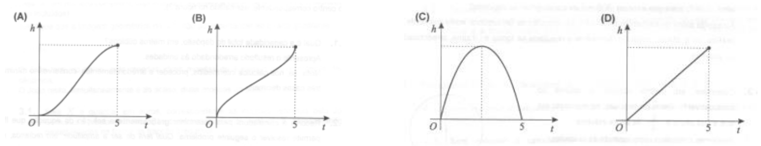
b) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: Qual terá de ser a amplitude, em radianos, do arco ABC, para que existam 300 metros cúbicos de combustível no depósito? Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o(s) gráfico(s) obtido(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

c) Determine, em metros cúbicos, o volume do combustível existente no depósito, no momento em que a sua altura é $\dfrac{1}{4}$ da altura máxima. Apresente o resultado arredondado às unidades. Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.



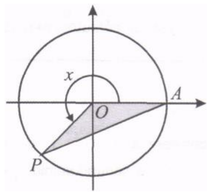


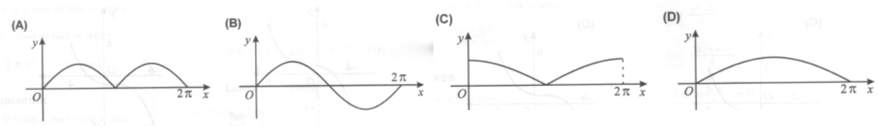
d) Admita agora que o depósito está vazio e que, num certo instante, se começa a introduzir combustível a uma taxa constante, até ficar cheio, o que acontece ao fim de cinco horas. Seja h(t) a altura do combustível no depósito, t horas após o instante em que começa a ser introduzido. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h ?
Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, indique as razões que o levam a rejeitar os restantes gráficos (indique três razões, uma por cada gráfico rejeitado)



(exame 2004)

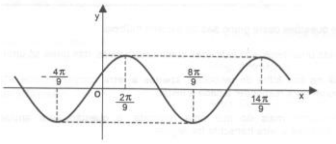
17. Na figura junta está representado o círculo trigonométrico. Considere que um ponto P parte de A(l,0) e se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é a semirreta OA e cujo lado extremidade é a semirreta OP ($x \in [0, 2\pi]$).
Seja g a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área da região sombreada (região limitada pelos segmentos de reta [OP], [PA] e [AO]). Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função g?





(exame 2005)

18. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.

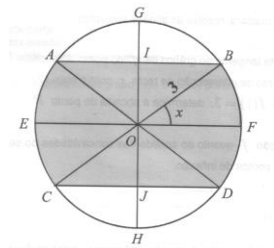


Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

$(A)\,\frac{\pi}{9}$ $\quad (B)\,\frac{2\pi}{9}$ $\quad (C)\,\frac{2\pi}{3}$ $\quad (D)\,\frac{4\pi}{3}$

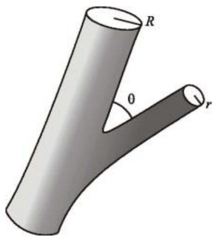
(exame 2004)

19. Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto O e raio 3. Os diâmetros [EF] e [GH] são perpendiculares.
Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.
Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que:
• as cordas [AB] e [CD] permanecem paralelas a [EF];
• [AD] e [BC] são sempre diâmetros da circunferência.
Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de interseção de [GH] com [AB] e [CD], respetivamente. Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.



a) Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por A(x) = 18(x + sen x × cos x). Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.
b) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: Qual é o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a metade da área do círculo? Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas. ***(exame 2005)***

20. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r. A secção da artéria principal tem área *A* e a da ramificação tem área *a*.

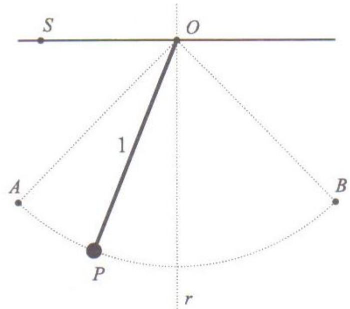


Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros). Sabe-se que $a = A\sqrt{\cos\theta}$. Admitindo que o modelo descrito se adequa com exatidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R = \sqrt[4]{2}r$. ***(2007-2ªfase)***

21. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto *O*.

O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à reta vertical *r*. A reta *r* passa pelo ponto *O* e é perpendicular à reta *OS*.

No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A. Admita que, *t* segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto *P* tal que a amplitude, em radianos, do ângulo *SOP* é dada (aproximadamente) por $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos(\sqrt{9{,}8}\ t)$.

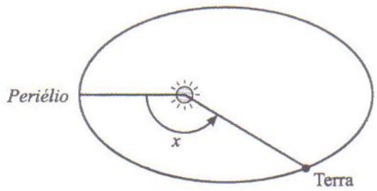


Nas duas alíneas seguintes, não utilize a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) Determine a distância do centro da esfera à reta *OS*, no instante inicial.

b) Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na reta *r*. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas. ***(2006-1ªf)***

22. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol. Na figura está assinalado um ângulo de amplitude *x* radianos $(x \in [0, 2\pi[)$. Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra. A distância *d*, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de *x*, por $d = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos x)$.



a) Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

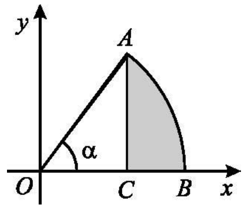
b) Sabe-se que *x* verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\sin x$, em que *t* é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo *x* e T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

b.1) Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$. Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

b.2) Sabe-se que a última passagem da Terra pelo periélio ocorreu a uma certa hora do dia 4 de janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s). ***(2006-1ªf)***

23. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. O ponto G pertence ao eixo Ox e o segmento de reta [AC] é perpendicular a este eixo.
α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB. Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?



$(A)\,\pi\times\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha$ $\quad(B)\,\pi\times\alpha+\sin\alpha+1-\cos\alpha$

$(C)\,1+\alpha-\sin\alpha+\cos\alpha$ $\quad(D)\,1+\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha$ ***(2006-2ªfase)***

24. Na figura 4 estão representadas duas retas paralelas, a reta AB (em que A e B são pontos fixos) e a reta *s*.
O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a reta *s*.
Para cada posição do ponto S, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja *a(x)* a área do triângulo [ABS].
Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função *a*.
Numa pequena composição, explique por que razão cada um dos outros 3 gráficos não pode representar a função *a*.

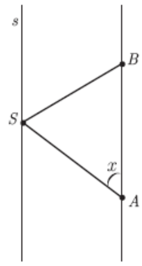


Fig. 4

Gráfico 1

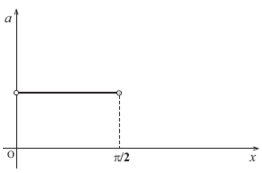


Gráfico 2

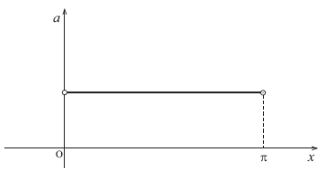


Gráfico 3

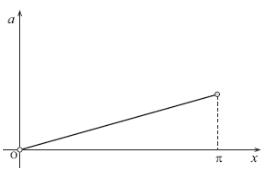
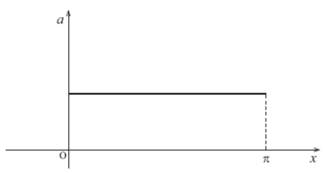
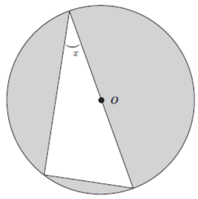


Gráfico 4



(2008)

25. Na figura está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1. Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência. Qual das expressões seguintes representa, em função de *x*, a área da parte sombreada?



$(A)\,\pi - sen(2x)$ $\quad(B)\,\dfrac{\pi}{2} - sen(2x)$ $\quad(C)\,\pi - 2sen(2x)$ $\quad(D)\,\dfrac{sen(2x)}{4}$ ***(2009)***

26. Seja *f* a função, de domínio $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = sen(2x)\cos x$

No domínio indicado, determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo [ABC], em que:

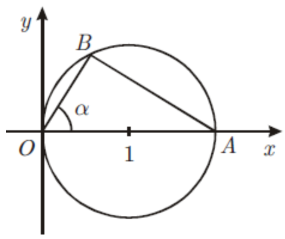
- A é o ponto do gráfico da função *f* cuja ordenada é máxima;
- B e C são os pontos de interseção do gráfico da função *f* com a reta de equação y = 0,3.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial. Desenhe o triângulo [ABC], assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

27. Na Figura estão representados, num referencial o.n. xOy , uma circunferência e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:

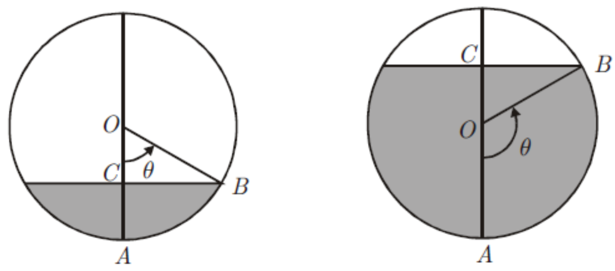
- a circunferência tem diâmetro [OA];
- o ponto A tem coordenadas (2, 0);
- o vértice O do triângulo [OAB] coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.



Para cada posição do ponto *B*, seja α a amplitude do ângulo *AOB*, com $\alpha \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que o perímetro do triângulo [*OAB*] é dado, em função de *α*, por $f(\alpha) = 2(1+\cos\alpha + sen\alpha)$.

28. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera. As Figuras representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas. Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.



Sabe-se que:

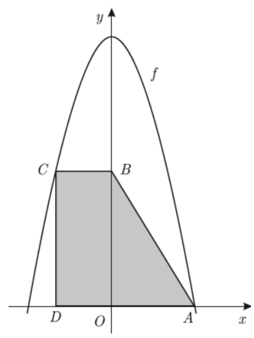
- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por h, de domínio $[0,\pi]$. Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $h(\theta)=3-3\cos(\theta)$, para qualquer $\theta\in\left]0,\pi\right[$.

b) Resolva a condição $h(\theta)=3,\ \theta\in\left]0,\pi\right[$. Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada. ***(2010)***

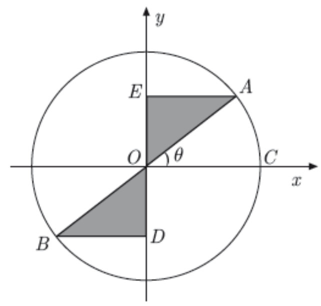
29. Na figura está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio IR, definida por $f(x)=4\cos(2x)$. Sabe-se que:



- os vértices A e D do trapézio [ABCD] pertencem ao eixo Ox;
- o vértice B do trapézio [ABCD] pertence ao eixo Oy;
- o vértice D do trapézio [ABCD] tem abcissa $-\dfrac{\pi}{6}$;
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de *f*;
- a reta CD é paralela ao eixo Oy.

Resolva o item seguinte recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
Determine o valor exato da área do trapézio [*ABCD*]. ***(2011)***

30. Na figura, está representado, num referencial o. n. xOy, o círculo trigonométrico.
Sabe-se que:

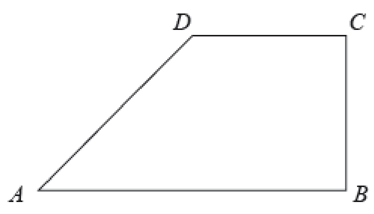


- C é o ponto de coordenadas (1, 0);
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy;
- [AB] é um diâmetro do círculo trigonométrico;
- as retas EA e BD são paralelas ao eixo Ox;
- θ é a amplitude do ângulo COA e $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Qual das expressões seguintes dá o perímetro da região sombreada na figura?

$(A)\ 2(\cos\theta+sen\theta)$ $(B)\ \cos\theta+sen\theta$ $(C)\ 2(1+\cos\theta+sen\theta)$ $(D)\ 1+\cos\theta+sen\theta$ ***(2011)***

31. Na figura está representado um trapézio retângulo [*ABCD*]. Sabe-se que:



- $\overline{BC}=1$ e $\overline{CD}=1$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo *ADC*;
- $\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

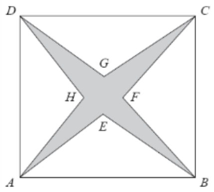
31.a) Mostre que o perímetro do trapézio [ABCD] é dado, em função de α, por $P(\alpha)=3+\dfrac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$

31.b) Para um certo número real θ, tem-se que $\tan\theta=-\sqrt{8}$, com $\dfrac{\pi}{2}\langle\theta\langle\pi$. Determine o valor exato de $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

(2012 adaptado)

32. Na figura está representado o quadrado [$ABCD$]. Sabe-se que:

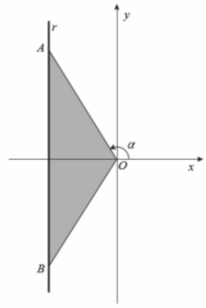
- $\overline{AB} = 4$ e $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB e $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$



Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por $a(x) = 16(1 - tg\, x)$. ***(2012)***

33. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OAB] e a reta r. Sabe-se que:

- a reta r é definida por $x = -3$
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}$ A
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

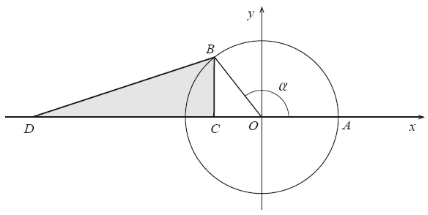


A função P, de domínio $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, é definida por $P(x) = -6\tan x - \frac{6}{\cos x}$

Mostre que o perímetro do triângulo [OAB] é dado, em função de α , por $P(\alpha)$ ***(2013-2ª)***

34. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1
Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto A tem coordenadas (1,0)
- os pontos B e C têm a mesma abcissa;
- o ponto C tem ordenada zero;
- o ponto D tem coordenadas (-3,0)
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

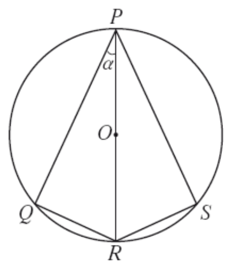


Qual das expressões seguintes representa, em função de α , a área do triângulo [BCD] ? ***(2014-1ª)***

$(A)\frac{1}{2}(-3 - sen\,\alpha)\cos\alpha$ $(B)\frac{1}{2}(-3 + sen\,\alpha)\cos\alpha$ $(C)\frac{1}{2}(3 + \cos\alpha)sen\,\alpha$ $(D)\frac{1}{2}(3 - \cos\alpha)sen\,\alpha$

35. Na figura, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S. Sabe-se que:

- os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
- [PR] é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR
- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- $A(\alpha)$ é a área do quadrilátero [PQRS], em função de α



Para um certo número real θ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $tg\theta = 2\sqrt{2}$. Determine o valor exato de $A(\theta)$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Comece por mostrar que $A(\alpha) = 16 sen\alpha \cos\alpha$ ***(2014-2ª)***

$Soluções: 1)\frac{\pi}{4} e \frac{5\pi}{4}; 2a)1; b)1 e -4; 3b)4 e 4; c)0,2 e 1,4; 4)0,4,5,6; 6)\frac{5\pi}{36}; 8a)2031; b)229; 9)8; 10a)18h50; b)38;$

$12)B; 13)A; 14)A; 15)C; 16a)503; b)3,4; c)98; d)B; 17)A; 18)D; 19b)0,42; 20)\frac{\pi}{3}; 21a)\frac{\sqrt{3}}{2}; b)0,5; 22a)152,1 e 147,1$

$b2)147,7; 23)D; 24)2; 25)A; 26)0,2; 28b)\frac{\pi}{2}; 29)\frac{7\pi}{12}; 30)C; 31b)\frac{3}{2}; 34)C; 35)\frac{32\sqrt{2}}{9}$

joseladeira@gmail.com

jose.santos@aemrt.pt