AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA
Ficha de Trabalho de Geometria nº 3 – Matemática - 11º Ano
Exercícios dos Testes Intermédios 2006 – 2014

1 Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 160 hectares.

Pretende semear pelo menos 50 hectares de trigo e pelo menos 30 hectares de milho.

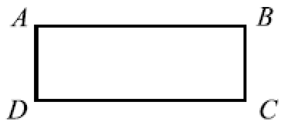
Sabe-se que
- o custo de produção de um hectare de trigo é $1\,500$ euros,
- o custo de produção de um hectare de milho é $1\,000$ euros,

e que
- cada hectare de trigo dá um lucro de 600 euros,
- cada hectare de milho dá um lucro de 500 euros.

Sabendo ainda que o agricultor não pode investir mais do que $200\,000$ euros nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear de modo que tenha um lucro máximo?

maio 2006

2 Na figura está representado um rectângulo $[ABCD]$.



Mostre que o produto escalar $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ é igual a $\overline{AB}^{\,2}$

maio 2006

3 Num referencial o. n. $Oxyz$, sejam α e β os planos definidos pelas equações:

$\alpha : x+y-z=1$ e $\beta : 2x+2y-2z=1$

A intersecção dos planos α e β é

(A) o conjunto vazio **(B)** um ponto

(C) uma recta **(D)** um plano

Janeiro 2008

4 Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=1-x^2$

Seja t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$

Qual é a inclinação da recta t ?

(A) $30°$ **(B)** $45°$ **(C)** $135°$ **(D)** $150°$

maio 2007

5 Considere o seguinte problema:

Uma frutaria confecciona dois tipos de bebidas com sumo de laranja e sumo de manga.

Bebida X : com um litro de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Bebida Y : com dois litros de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Para confeccionar estas bebidas, a frutaria dispõe diariamente de 12 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga. Cada litro de bebida X dá um lucro de 4 euros e cada litro de bebida Y dá um lucro de 5 euros. Supondo que a frutaria vende diariamente toda a produção destas bebidas, quantos litros de bebida X e quantos litros de bebida Y deve confeccionar por dia, para maximizar o lucro?

Sendo x o número de litros de bebida X e sendo y o número de litros de bebida Y, qual das opções seguintes traduz correctamente este problema?

(A) Maximizar $4x + 5y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3} \leq 12 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} \leq 10 \end{cases}$$

(B) Maximizar $12x + 10y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3} \leq 5 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} \leq 4 \end{cases}$$

(C) Maximizar $4x + 5y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

(D) Maximizar $12x + 10y$ sujeito a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

Janeiro 2008

6 Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por
$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k\,(0, 0, 1),\ k \in \mathbb{R}$

Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta r ?

(A) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k\,(0, 1, 0),\ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (0, 0, 1) + k\,(1, 2, 3),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $x = 2 \ \wedge \ y = 1$

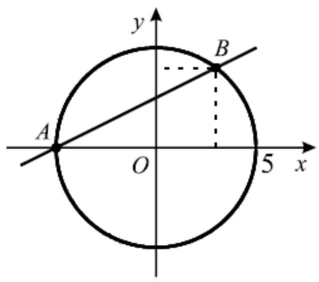
(D) $x = 2 \ \wedge \ z = 1$

maio 2008

7 Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, uma recta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5

Os pontos A e B pertencem à circunferência.

O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.



a) Admitindo que o declive da recta AB é igual a $\frac{1}{2}$, resolva as três alíneas seguintes:

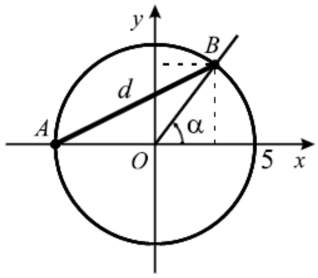
a.1) Mostre que uma equação da recta AB é $x - 2y + 5 = 0$

a.2) Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3, 4)$

a.3) Seja C o ponto de coordenadas $(-3, 16)$
Verifique que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B

b) Admita agora que o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}B$



Seja d o comprimento do segmento $[AB]$

b.1) Mostre que $d^2 = 50 + 50 \cos \alpha$

b.2) Para uma certa posição do ponto B, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{24}$
Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d

janeiro 2008

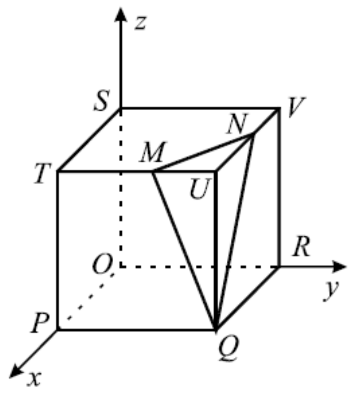
8 Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cubo $[OPQRSTUV]$ de aresta 5

O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial.

Os vértices P, R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente.

O triângulo escaleno $[MNQ]$ é a secção produzida no cubo pelo plano α de equação

$$10\,x + 15\,y + 6\,z = 125$$



a) Escreva uma condição que defina a recta que passa por U e é perpendicular ao plano α

b) Seja β a amplitude, em **graus**, do ângulo MQN. Determine β

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Sugestão: comece por determinar as coordenadas dos pontos M e N

janeiro 2008

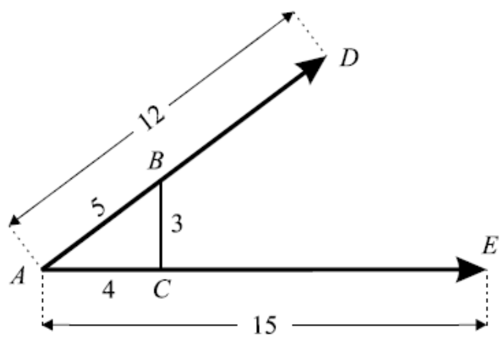
9 Na figura estão representados dois vectores, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$, de normas 12 e 15, respectivamente.

No segmento de recta $[AD]$ está assinalado um ponto B.

No segmento de recta $[AE]$ está assinalado um ponto C.

O triângulo $[ABC]$ é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento.

Indique o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$

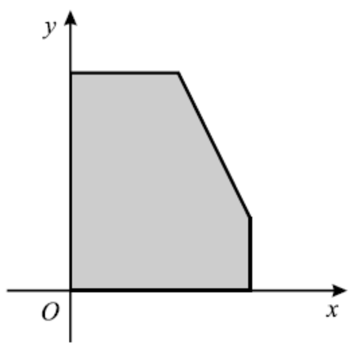


(A) 108 **(B)** 128 **(C)** 134 **(D)** 144

maio 2007

10 Na figura junta está representada a região admissível de um problema de Programação Linear. Esta região corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 6 \\ 2x + y \leq 12 \end{cases}$$



Qual é o valor máximo que a função objectivo, definida por $z = x + y$, pode alcançar nesta região?

(A) 7 **(B)** 9 **(C)** 11 **(D)** 13

maio 2007

11 Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $P\,(0,4,3)$

a) Seja α o plano que contém o ponto P e é perpendicular à recta de equação vectorial $(x,y,z)=(0,1,-3)+k\,(1,0,2),\ k\in\mathbb{R}$

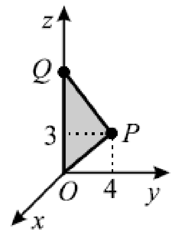
Determine a área da secção produzida pelo plano α na esfera definida pela condição $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\leq 3$.

Sugere-se que:

- *Determine uma equação do plano α.*
- *Mostre que o centro da esfera pertence ao plano α.*
- *Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.*

b) Admita que um ponto Q se desloca ao longo do semieixo positivo Oz, nunca coincidindo com a origem O do referencial.

Seja f a função que faz corresponder, à cota z do ponto Q, o perímetro do triângulo $[OPQ]$.



b.1) Mostre que $f(z)=z+5+\sqrt{z^2-6z+25}$

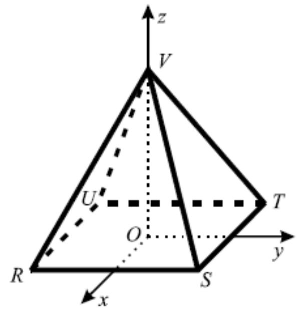
b.2) **Sem recorrer à calculadora**, determine a cota do ponto Q de modo que o perímetro do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 16.

Maio 2007

12 Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide regular.

Sabe-se que:

- a base $[RSTU]$ é um quadrado de área 4 com centro na origem do referencial;
- a aresta $[RS]$ é paralela ao eixo Oy;
- o vértice V tem coordenadas $(0,0,2)$.

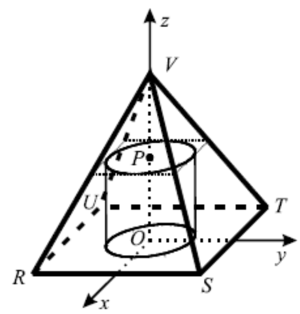


a) Mostre que a recta definida pela condição $x=0\ \wedge\ y=2\,z$ é perpendicular ao plano STV e escreva uma equação deste plano.

b) Considere agora um ponto P que se desloca ao longo do segmento $[OV]$, nunca coincidindo com o ponto O, nem com o ponto V.

Para cada posição do ponto P considere o cilindro tal que:

- a base inferior do cilindro tem centro na origem do referencial e está contida no plano xOy;
- a base superior do cilindro tem centro no ponto P e está inscrita no quadrado que é a secção produzida na pirâmide pelo plano paralelo ao plano xOy que passa no ponto P.



Seja z a cota do ponto P e seja f a função que dá o volume do cilindro, em função de z.

b.1) Justifique que o domínio da função f é o intervalo $]\,0,2\,[$ e que

$$f(z)=\pi\left(\frac{z^3}{4}-z^2+z\right)$$

b.2) Considere o seguinte problema:
Entre que valores deve variar a cota do ponto P de tal modo que o volume do cilindro seja superior à quinta parte do volume da pirâmide?
Traduza o problema por meio de uma inequação e, utilizando a sua calculadora, resolva-a **graficamente**.
Apresente os valores pedidos arredondados às milésimas.
Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

maio 2006

13 Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

A intersecção desta superfície com o plano xOy é

(A) o conjunto vazio **(B)** um ponto

(C) uma circunferência **(D)** um círculo

Janeiro 2009

14 Considere, num referencial o. n. xOy, a recta r de equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$

Seja s a recta perpendicular a r que passa no ponto de coordenadas $(1, 4)$

Qual é a equação reduzida da recta s ?

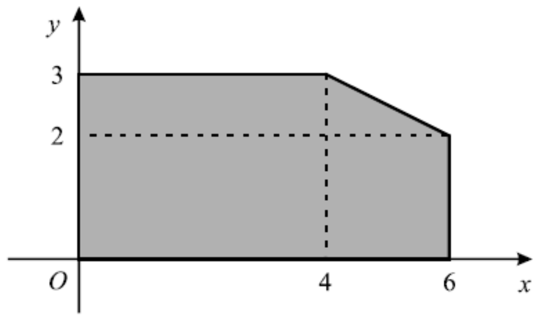
(A) $y = 2x + 2$ **(B)** $y = -2x + 6$

(C) $y = -2x + \frac{5}{3}$ **(D)** $y = 2x + \frac{3}{5}$

Janeiro 2009

15 Num certo problema de Programação Linear, pretende-se maximizar a função objectivo, a qual é definida por $L = 3x + y$

Na figura está representada a região admissível.



Qual é a solução desse problema?

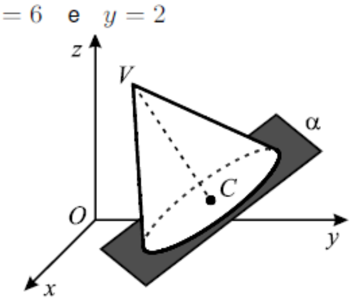
(A) $x = 6$ e $y = 3$ **(B)** $x = 4$ e $y = 2$

(C) $x = 4$ e $y = 3$ **(D)** $x = 6$ e $y = 2$

janeiro 2009

16 Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cone de revolução. Sabe-se que:

- a base do cone está contida no plano α de equação $x + 2y - 2z = 11$
- o vértice V do cone tem coordenadas $(1, 2, 6)$
- o ponto C é o centro da base do cone



a) Determine uma equação do plano γ que contém o vértice do cone e que é paralelo ao plano α

b) Seja β o plano definido pela equação $2x - y + z = 3$
Averigúe se os planos α e β são perpendiculares.

c) Seja W o ponto simétrico do ponto V, em relação ao plano xOy. Indique as coordenadas do ponto W e escreva uma condição que defina o segmento de recta $[VW]$.

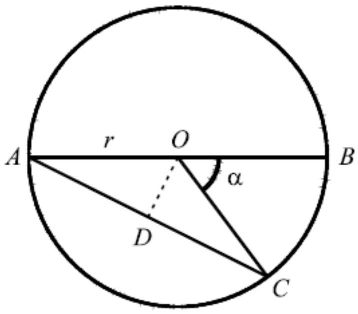
d) Sabendo que o raio da base do cone é igual a 3, determine o volume do cone.
Sugestão: comece por escrever uma condição que defina a recta que contém o vértice do cone e que é perpendicular ao plano α e utilize-a para determinar as coordenadas do ponto C.

Janeiro 2009

17 Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio r.

Sabe-se que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência
- O ponto C pertence à circunferência
- α é a amplitude do ângulo COB
- $[OD]$ é perpendicular a $[AC]$



Prove que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\,r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Sugestão

Percorra as seguintes etapas:

- *Justifique que o triângulo* $[OAC]$ *é isósceles*
- *Justifique que* $\overline{AC} = 2\,\overline{AD}$
- *Justifique que a amplitude do ângulo* CAB *é* $\frac{\alpha}{2}$
- *Escreva* $\overline{AD}$, *em função de* $\frac{\alpha}{2}$ *e de* r
- *Conclua que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\,r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Janeiro 2009

18 Seja $[AB]$ o diâmetro de uma esfera de centro C e raio 5.

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}$?

(A) -25 **(B)** $-5\sqrt{2}$ **(C)** $5\sqrt{2}$ **(D)** 25 ***Maio 2009***

19 Considere, num referencial o.n. xOy, as rectas r e s, definidas, respectivamente, por:

$$r: \ (x,y) = (1,3) + k(2,0)\,,\ k \in \mathbb{R} \qquad\qquad s: \ y = \frac{3}{4}\,x + 1$$

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo destas duas rectas (valor arredondado às unidades)?

(A) $37°$ **(B)** $39°$ **(C)** $41°$ **(D)** $43°$ ***Janeiro 2010***

20 Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r e o plano α, definidos, respectivamente, por:

$$r: \ x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \qquad\qquad \alpha: \ 3x - z = 0$$

Qual é a intersecção da recta r com o plano α?

(A) É o ponto $(0,2,3)$ **(B)** É o ponto $(0,0,0)$

(C) É o conjunto vazio. **(D)** É a recta r ***janeiro 2010***

21 Seja $[AB]$ um diâmetro de uma esfera de centro C e raio 4

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}$?

(A) 16 **(B)** -16 **(C)** $4\sqrt{2}$ **(D)** $-4\sqrt{2}$ ***maio 2010***

22 Considere o seguinte problema de Programação Linear:

Um agricultor tem um terreno com 100 hectares, onde pretende semear centeio e tomate.

Devido a problemas de regadio, não pode semear mais do que 30 hectares de tomate.

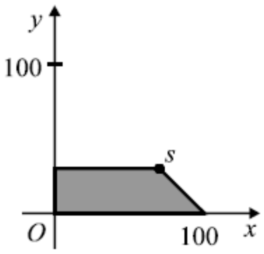
Cada hectare de centeio dá um lucro de 800 euros e cada hectare de tomate dá um lucro de 1000 euros.

Quantos hectares de centeio e quantos hectares de tomate deve o agricultor semear, de modo a obter o maior lucro possível?

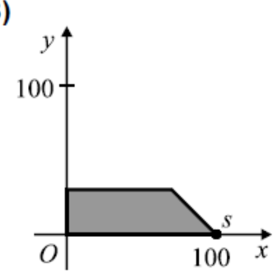
Seja x o número de hectares de centeio e seja y o número de hectares de tomate.

Em qual das figuras seguintes está representada a região admissível deste problema e nela assinalado o vértice S correspondente à solução?

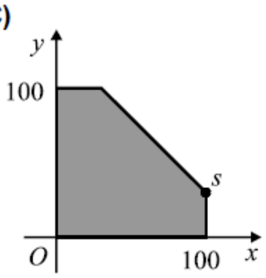
(A)



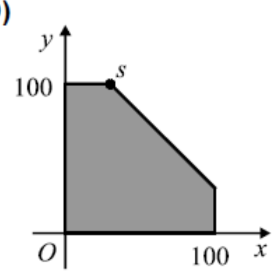
(B)



(C)



(D)



janeiro 2010

23 Na figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de equação

$$(x-4)^2+(y-1)^2=25$$

O ponto C é o centro da circunferência.

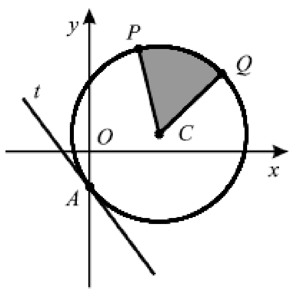


Figura 2

a) O ponto A, de coordenadas $(0,\,-2)$, pertence à circunferência.

A recta t é tangente à circunferência no ponto A

Determine a equação reduzida da recta t

b) P e Q são dois pontos da circunferência. A área da região sombreada é $\dfrac{25\,\pi}{6}$

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CP}\,.\,\overrightarrow{CQ}$

janeiro 2010

24 Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica E, de equação

$$x^2+y^2+(z-2)^2=4$$

Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, o ponto P, de coordenadas $(\operatorname{tg}\alpha\,,\,\operatorname{sen}\alpha\,,\,2+\cos\alpha)$, pertence à superfície esférica E

Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto P

maio 2010

25 Na figura 3, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$ cuja base está contida no plano xOy

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox
- o ponto B tem coordenadas $(5,3,0)$
- o ponto V pertence ao plano de equação $z=6$
- $6x+18y-5z=24$ é uma equação do plano ADV
- $18x-6y+5z=72$ é uma equação do plano ABV

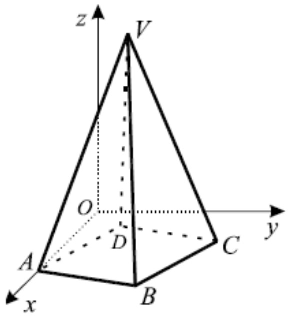


Figura 3

a) Determine o volume da pirâmide.

b) Determine as coordenadas do ponto V, **sem recorrer à calculadora**.

c) Seja S o ponto de coordenadas $(-1,-15,5)$

Seja r a recta que contém o ponto S e é perpendicular ao plano ADV

Averigúe se a recta r contém o ponto B

janeiro 2010

26 Na figura 4, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, parte de um plano ABC

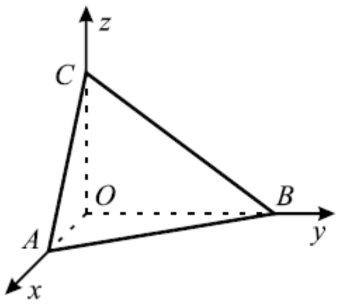


Figura 4

Cada um dos pontos A, B e C pertence a um eixo coordenado.

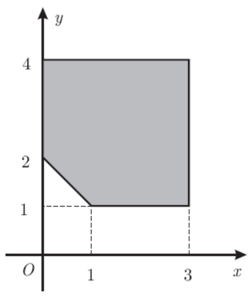
O plano ABC é definido pela equação $6x+3y+4z=12$

Seja r a recta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano ABC

Determine uma equação vectorial da recta r

maio 2010

27 Num certo problema de programação linear pretende-se **minimizar** a função objectivo, a qual é definida por $L=2x+y$



Na Figura 1, está representada a região admissível.

Numa das opções seguintes está a solução desse problema.

Em qual delas?

(A) $x=1$ e $y=1$

(B) $x=0$ e $y=2$

(C) $x=3$ e $y=1$

(D) $x=0$ e $y=1$

Janeiro 2011

28 De um triângulo isósceles $[ABC]$ sabe-se que:

- os lados iguais são $[AB]$ e $[AC]$, tendo cada um deles 8 unidades de comprimento;
- cada um dos dois ângulos iguais tem $30°$ de amplitude.

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}$?

(A) $-32\sqrt{3}$

(B) -32

(C) 64

(D) $64\sqrt{3}$

janeiro 2011

29 Na Figura 5, está representado o quadrado $[ABCD]$

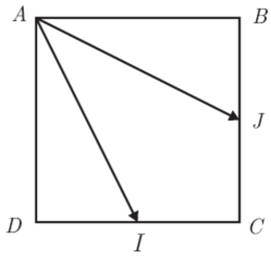


Figura 5

Sabe-se que:

- o ponto I é o ponto médio do lado $[DC]$
- o ponto J é o ponto médio do lado $[BC]$

Prove que $\overrightarrow{AI} \,.\, \overrightarrow{AJ} = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2$

Sugestão: comece por exprimir cada um dos vectores $\overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{AJ}$ como soma de dois vectores.

janeiro 2011

30 Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQURST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

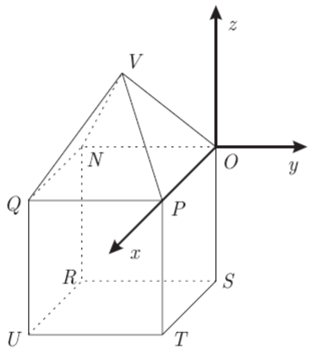


Figura 4

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox
- o ponto U tem coordenadas $(4, -4, -4)$
- o plano QTV é definido pela equação $5x + 2y + 2z = 12$

a) Para cada um dos seguintes conjuntos de pontos, escreva uma **condição cartesiana** que o defina.

a.1) Plano paralelo ao plano QTV e que passa na origem do referencial.

a.2) Plano perpendicular à recta QN e que passa no ponto V

a.3) Recta perpendicular ao plano QTV e que passa no ponto U

a.4) Superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T

b) Considere um ponto A, com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto U

Sabe-se que $\overrightarrow{OA} \,.\, \overrightarrow{OT} = 8$

Determine a cota do ponto A

c) Determine o volume do poliedro $[VNOPQURST]$

janeiro 2011

31 Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 5

Os pontos A e B são os pontos de intersecção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy, respectivamente.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B

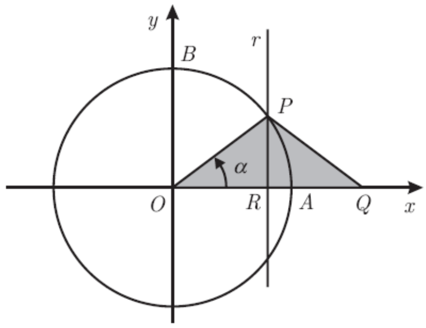


Figura 3

Para cada posição do ponto P, sabe-se que:

- o ponto Q é o ponto do eixo Ox tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$
- a recta r é a mediatriz do segmento $[OQ]$
- o ponto R é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Considere agora o caso em que a abcissa do ponto P é 3

Determine a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P

janeiro 2011

32 Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por

$(x,\ y,\ z) = (3,\ 4,\ 5) + k(1,\ 0,\ 0),\ \ k \in \mathbb{R}$

Qual das condições seguintes define uma recta **paralela** à recta r?

(A) $y = 5 \wedge z = 6$

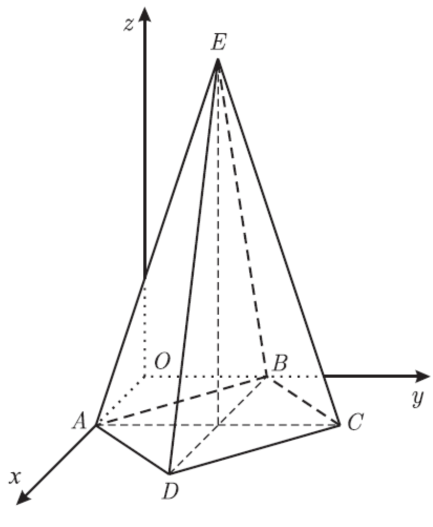
(B) $x = 3 \wedge y = 4$

(C) $(x, y, z) = (1, 0, 0) + k(3, 4, 5),\ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(0, 1, 0),\ k \in \mathbb{R}$

maio 2011

33 Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$ cuja base está contida no plano xOy



Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(1, 0, 0)$
- o vértice B tem coordenadas $(0, 1, 0)$
- o plano DCE é perpendicular à recta definida pela condição $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = z$

Determine o volume da pirâmide.

Nota – Pode ser-lhe útil determinar uma equação do plano DCE

maio 2011

34 Num referencial o.n. xOy, considere a circunferência definida por $x^2 + y^2 = 5$

A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(1, 2)$

Qual é o declive da reta r ?

(A) -2 **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 2 *fev 2012*

35 Seja a um número real.

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta s e o plano β definidos, respetivamente, por $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(1, 1, -1),\ k \in \mathbb{R}$ e $3x + 3y + az = 1$

Sabe-se que a reta s é paralela ao plano β

Qual é o valor de a ?

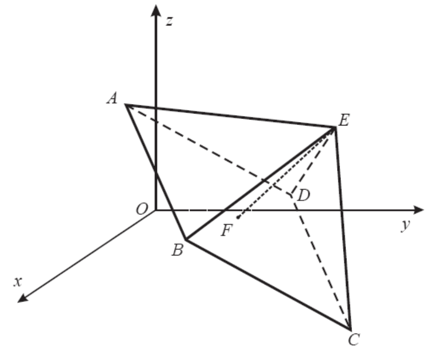
(A) -3 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 6 *fev 2012*

36 . Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$

Seja F o centro da base da pirâmide.

Sabe-se que:

- o ponto F tem coordenadas $(-2, 1, -1)$
- o vetor $\overrightarrow{FE}$ tem coordenadas $(-1, 2, 2)$
- a reta EA é definida pela condição $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + k(1, -5, 1),\ k \in \mathbb{R}$



a) Escreva uma condição cartesiana que defina a reta EA

Nota – Não necessita de apresentar cálculos.

Mostre que o plano ABC pode ser definido pela equação $x - 2y - 2z + 2 = 0$

c) Sabe-se que a condição $\begin{cases} x - y = -6 \\ y - z = 2 \end{cases}$ define a reta ED

fev 2012

Determine, **sem recorrer à calculadora**, as coordenadas do ponto D

37

No referencial o.n. xOy da Figura 6, estão representados o quadrado $[OABC]$ e o retângulo $[OPQR]$

Os pontos A e P pertencem ao semieixo positivo Ox e os pontos C e R pertencem ao semieixo positivo Oy

O ponto Q pertence ao interior do quadrado $[OABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{OA} = a$
- $\overline{OP} = b$
- $\overline{RC} = b$

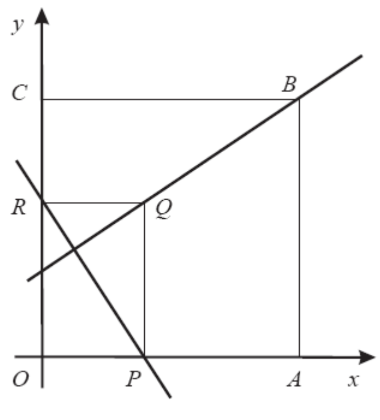
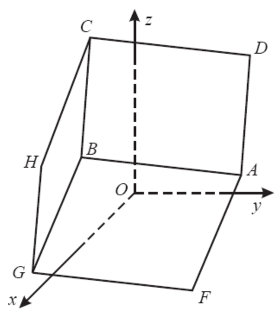


Figura 6

Prove que as retas QB e RP são perpendiculares.

38. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxyz , o cubo [ABCDEFGH] (o ponto E não está representado na figura). Sabe-se que:

- o ponto F tem coordenadas (1, 3,- 4)
- o vetor $\overrightarrow{FA}$ tem coordenadas (2,3,6)



a) Escreva uma condição cartesiana que defina cada um dos seguintes conjuntos de pontos.

a1) Plano FGH

a2) Reta AF

a3) Superfície esférica de centro no ponto F à qual pertence o ponto G.

b) Sabe-se ainda que a equação 6x + 2y − 3z + 25 = 0 define o plano HCD. Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto E (vértice do cubo, não representado na figura) *março 2013*

39. Num referencial o.n. Oxyz, considere um ponto P que tem ordenada igual a - 4 e cota igual a 1. Considere também o vetor $\vec{u}$ de coordenadas (2, 3, 6). Sabe-se que os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares. Qual é a abcissa do ponto P ?

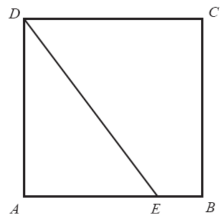
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 ***março 2013***

40. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a reta definida por $\begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$

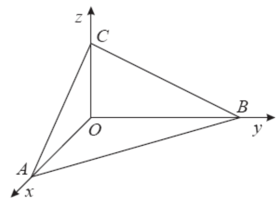
Qual das equações seguintes define um plano perpendicular a esta reta?

(A) x + y − z = 5 **(B)** x + y + 2z = 5 **(C)** x − y = 5 **(D)** x + y = 5 ***março 2013***

41. Na figura, está representado um quadrado [ABCD] de lado igual a 4. Admita que o ponto E pertence ao segmento [AB] e que o triângulo [ADE] tem área igual a 6. Determine o valor exato de $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{DC}$, sem recorrer à calculadora. ***março 2013***



42. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. Oxyz, parte do plano ABC, de equação x+y+2z =12. Tal como a figura sugere, A, B e C são os pontos de intersecção deste plano com os eixos coordenados.

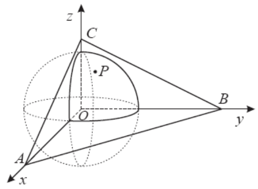


a) Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto D(1, 2, 3) e é paralelo ao plano ABC

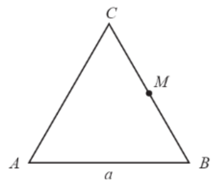
b) Seja M o ponto médio do segmento de reta [AC]. Determine uma condição cartesiana da reta MB

c) O plano ABC é tangente, num ponto P, a uma esfera centrada na origem do referencial, tal como se ilustra na figura ao lado. Determine o valor exato do volume dessa esfera.

Nota: Tenha em conta que a reta OP é perpendicular ao plano ABC



43. Na figura ao lado, está representado um triângulo equilátero [ABC]. Seja *a* o comprimento de cada um dos lados do triângulo. Seja *M* o ponto médio do lado [BC]



Mostre que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \frac{3a^2}{4}$

Soluções: 1)80 de cada;3)A;4)C;5)A;6)C;7.b.2) $\sqrt{60}$;8.a)(x,y,z)=(5,5,5)+k(10,15,6),k∈IR; 8.b)37º;9)D;10)B;11.a)3π ;11.b.2)6;12.a)2y+z-2=0;12.b.2) $]0,213;1,268[$;13)B;14)A;15)D; 16.a)x+2y-2z+7=0;b)Não;c)x=1 $\wedge$ y=2 $\wedge$ -6 $\leq$ z $\leq$ 6 ;d)18 π ;18)A;19)A;20)D;21)B;22)A; 23.a) $y = -\frac{4}{3}x - 2$;b) $\frac{25}{2}$;24) $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$;25.a)20;b)(3,2,6);c)Sim;26)(x,y,z)=(2,0,0)+k(6,3,4), $k \in IR$

27)B; 28)B; 30.a.1) $5x + 2y + 2z = 0$; a.2) $x = 2$; a.3) $\frac{x-4}{5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+4}{2}$; $a.4)\ (x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 16$

b)2;c)80;31) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$;32)A;33)2;34)B;35)D; 36.*a*) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-1}{1}$ c)(-6,0,-2);

38.a.1)2*x* + 3*y* + 6*z* + 13 =0;38.a.2) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{6}$;38.a.3) $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 49$;

38.b) (-5,1,-1);39)C;40)D;41)-12;42.a)x+y+2z-9=0;b) $\frac{x-6}{-6} = \frac{y}{12} = \frac{z-3}{-3}$;c) $64\sqrt{6}\pi$