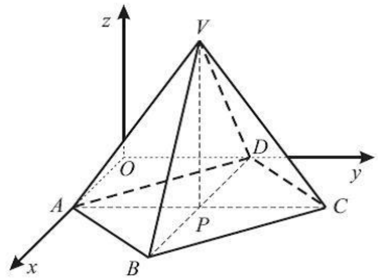
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha nº 04 - Geometria - 11º ano 2014 a 2023

1. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular regular [ABCDV], cuja base está contida no plano xOy e cujo vértice V tem cota positiva. O ponto P é o centro da base da pirâmide. Admita que:



- $\overline{AV} = 10$
- o vértice A pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual a 6
- o vértice V tem abcissa e ordenada iguais a 6

a) Mostre que o vértice V tem cota igual a 8

b) Seja M o ponto médio da aresta [BV]. Determine uma equação vetorial que defina a reta CM

c) Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e que é perpendicular à aresta [DV]

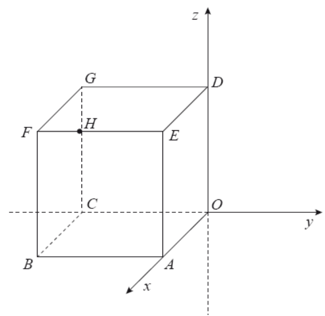
(2014-interm12º_adaptado)

2 Considere, num referencial o.n. *Oxyz*, o plano α, definido por 4*x*−*z*+1=0. Seja *r* uma reta perpendicular ao plano α
Qual das condições seguintes pode definir a reta *r* ?

$(A)\,(x,y,z)=(0,0,-1)+k(4,1,0), k\in IR$ $\qquad (B)\, x=4\wedge z=-1$

$(C)(x,y,z)=(3,0,0)+k(1,0,4), k\in IR$ $\qquad (D)\,(x,y,z)=(3,1,0)+k(4,0,-1), k\in IR$ ***(2014-1ª_adaptado)***

3. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o cubo [OABCDEFG], de aresta 3.



Sabe-se que:

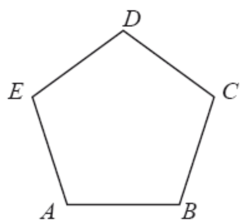
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
- o ponto H tem coordenadas (3, -2, 3)

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AHC. Determine o valor exato de $sen^2\alpha$, sem utilizar a calculadora. ***(2014-1ª)***

4. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (1, 0, 3), e o plano α, definido por 3x+2y−4=0. Seja β um plano perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A. Qual das condições seguintes pode definir o plano β ?

(A) 3x+2y−3=0 (B) 2x−3y−z +1=0 (C) 2x−3y+z = 0 (D) 3x +2y = 0 ***(2014-2ª)***

5. Na figura, está representado um pentágono regular [ABCDE].
Sabe-se que $\overline{AB}=1$



Mostre que $\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}=1-2sen^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

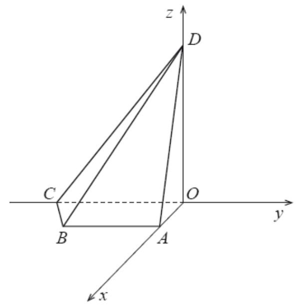
Nota: $\cos(2x)=\cos^2 x - sen^2 x$ ***(2014-2ª)***

6. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (2,0,3), e o plano α, definido por x−y−2z =3
Seja r a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto A. Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

$(A)\,(x,y,z)=(-2,0,-1)+k(1,0,1), k\in IR$ $\qquad (B)\,(x,y,z)=(5,-3,-3)+k(-1,1,2), k\in IR$ ***(2014 especial_adaptado)***

$(C)\,(x,y,z)=(1,-1,-2)+k(2,0,3), k\in IR$ $\qquad (D)\,(x,y,z)=(2,0,3)+k(1,-1,1), k\in IR$

7. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxyz, a pirâmide [ABCOD]

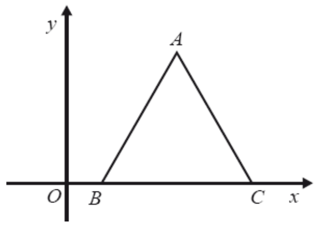


Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- os pontos A e B têm igual abcissa;
- o ponto B pertence ao plano xOy e tem ordenada -3
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
- a reta AD é definida por $(x, y, z) = (3,0,0) + k(3,0,-5), k \in IR$
- $\left\| \overrightarrow{CD} \right\|^2 = 41$

Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano que contém a face [BCD], recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. ***(2014especial_adaptado)***

8. Na figura, está representado, num referencial o.n. xOy , um triângulo equilátero [ABC]. Sabe-se que:



- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

$(A)\, y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$ $\quad (B)\, y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$ $\quad (C)\, y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ $\quad (D)\, y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ ***(2015-1º)***

9. Considere, num referencial o.n. Oxyz, os pontos A(0,0,2)e B(4,0,0)

a) Considere o plano α de equação x−2y+z +3= 0. Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α

b) Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta [AB] é um diâmetro.

c) Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

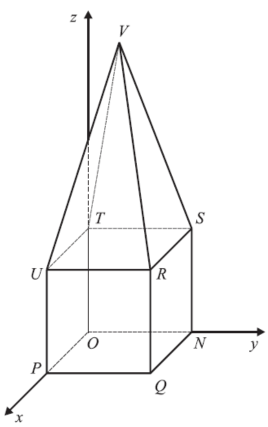
- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
- a sua ordenada é positiva;
- BÂP= $\frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P. ***(2015-1º)***

10. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação $x^2+(y-1)^2=2$. Esta circunferência intersecta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva. Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A. Qual é a equação reduzida da reta r ?

(A) y=x+ 1 (B) y=x− 1 (C) y=2x+2 (D) y=2x−2 ***(2015-2º)***

11. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o poliedro [NOPQRSTUV] que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:



- o vértice P pertence ao eixo Ox e o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz e o vértice R tem coordenadas (2,2,2)
- o plano PQV é definido pela equação 6x+z−12=0

a) Determine as coordenadas do ponto V

b) Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR

c) Seja A um ponto pertencente ao plano QRS. Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores OA e TQ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4,4]$ e $y \in [-2,7]$)
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas. ***(2015-2º)***

12. Os segmentos de reta [AB] e [BC] são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$?

(A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3 ***(2015-especial)***

13. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o plano β definido pela condição 2x−y+z−4=0

a) Considere o ponto P(-2,1,3*a*), sendo *a* um certo número real. Sabe-se que a reta OP é perpendicular ao plano β, sendo O a origem do referencial. Determine o valor de *a.*

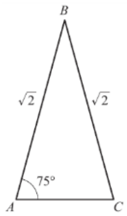
b) Considere o ponto A(1,2,3). Seja B o ponto de intersecção do plano β com o eixo Ox. Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz. Determine a amplitude do ângulo BAC. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

c) Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial, que é tangente ao plano β. Na resolução deste item, tenha em conta que o raio relativo ao ponto de tangência é perpendicular ao plano β. ***(2015-especial)***

14. Na figura, está representado um triângulo isósceles [ABC].

Sabe-se que $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{2}$ e $B\hat{A}C=75^{o}$

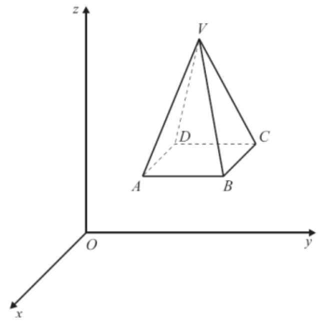
Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$?



$(A)\sqrt{2}$ $(B)2\sqrt{2}$ $(C)\sqrt{3}$ $(D)2\sqrt{3}$

(2016-1ª)

15. Na figura, está representada, num referencial o.n. *Oxyz* , uma pirâmide quadrangular regular [ABCDV]. Sabe-se que:



- a base [ABCD] da pirâmide é paralela ao plano *xOy*
- o ponto *A* tem coordenadas (-1,1,1)
- o ponto *C* tem coordenadas (-3,3,1)
- o plano *BCV* é definido pela equação 3y+z-10=0

a) Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro no ponto *A* e que é tangente ao plano *xOy*

b) Determine as coordenadas do ponto *V*

c) Seja α o plano perpendicular à reta *AC* e que passa no ponto P(1,-2,-1).
A intersecção dos planos α e *BCV* é uma reta. Escreva uma equação vetorial dessa reta. ***(2016-1ª)***

16. Considere, num referencial o.n. *xOy*, o quadrado definido pela condição $0\le x\le 4\wedge 1\le y\le 5$. Qual das condições seguintes define a circunferência inscrita neste quadrado?

$(A)(x-4)^2+(y-5)^2=16$ $(B)(x-4)^2+(y-5)^2=4$

$(C)(x-2)^2+(y-3)^2=4$ $(D)(x-2)^2+(y-3)^2=16$

(2016-2ª)

17. Considere, num referencial o.n. *Oxyz*, o plano α definido pela equação 3x+2y+4z-12=0

a) Seja *C* o ponto de coordenadas (2,1,4). Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto *C*

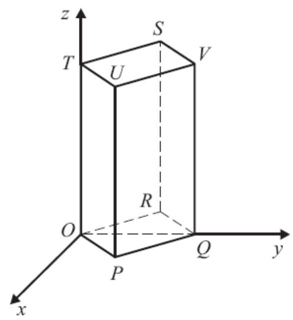
b) Seja *D* o ponto de coordenadas (4,2,2). Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta *OD* com o plano α

c) Sejam *A* e *B* os pontos pertencentes ao plano α, tais que *A* pertence ao semieixo positivo *Ox* e *B* pertence ao semieixo positivo *Oy.* Seja *P* um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo *Oz*. Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo *APB* é agudo. ***(2016-2ª)***

18. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r de inclinação α. Sabe-se que $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

(A) y= −5x (B) y= 4x (C) y= −2x (D) y= 3x ***(2017-1ª)***

19. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o prisma quadrangular regular [OPQRSTUV]



Sabe-se que:

- a face [OPQR] está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação z=3

19.1. Seja T´ o simétrico do ponto T, relativamente à origem do referencial. Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro [T T´]

19.2. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}$

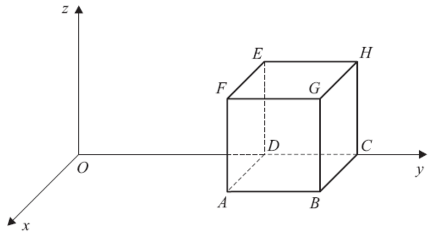
19.3. Uma equação do plano PQV é x+y=2. Determine a equação vetorial que define a reta TQ ***(2017-1ª)***

20. Considere, num referencial o.n. xOy, a região definida pela condição $(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1 \ \wedge \ x+y+2 \geq 0$. Qual é o perímetro dessa região?

$(A)\,\pi+1$ $\quad (B)\,\dfrac{\pi}{2}+1$ $\quad (C)\,\pi+2$ $\quad (D)\,\dfrac{\pi}{2}+2$ ***(2017-2ª)***

21. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o cubo [ABCDEFGH]. Sabe-se que:

- a face [ABCD] está contida no plano xOy
- a aresta [CD] está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas (0,4,0)
- o plano ACG é definido pela equação x+y−z-6=0



21.1. Verifique que o vértice A tem abcissa igual a 2

21.2. Seja r a reta definida pela condição (x,y,z)=(1,1,0)+k(1,-1,1) , $k \in IR$. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG

21.3. Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base [EFGH] Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2
- o volume da pirâmide é 4

Determine a amplitude do ângulo OGP. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais. ***(2017-2ª)***

22. Considere, num referencial o.n. *xOy*, dois pontos distintos, *R* e *S.* Seja *A* o conjunto dos pontos *P* desse plano que verificam a condição $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PS}=0$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O conjunto *A* é a mediatriz do segmento de reta [RS]

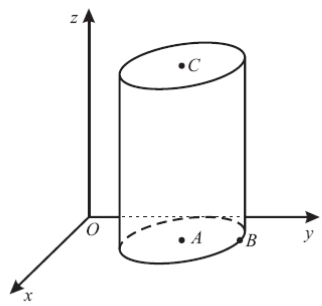
(B) O conjunto *A* é o segmento de reta [RS]

(C) O conjunto *A* é o triângulo [ROS]

(D) O conjunto *A* é a circunferência de diâmetro [RS] ***(2017-esp)***

23. Na Figura, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, um cilindro de revolução de altura 3. Sabe-se que:

- o ponto *A* tem coordenadas (1,2,0) e é o centro da base inferior do cilindro, a qual está contida no plano *xOy*
- o ponto *B* tem coordenadas (1,3,0) e pertence à circunferência que delimita a base inferior do cilindro;
- o ponto *C* é o centro da base superior do cilindro.



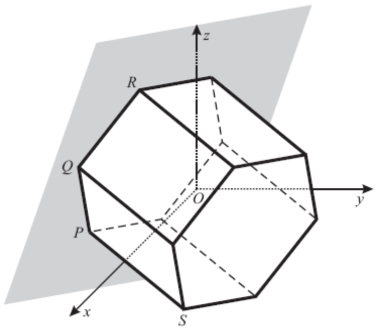
23.1. Determine a área da secção produzida no cilindro pelo plano de equação *x* = 1

23.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta *BC* com o plano *xOz*

23.3. Seja α o plano que passa no ponto *A* e que é perpendicular à reta *r* definida pela equação (x,y,z)=(0,0,1)+k(1,1,-1), $k \in IR$. Seja *P* o ponto desse plano de abcissa e ordenada iguais a 2. Determine a amplitude do ângulo *POC*. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais. ***(2017-esp)***

24. Na figura, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, um prisma hexagonal regular.
Sabe-se que:

- [PQ] e [QR] são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ}=4$



a) Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR}$

b) Sabe-se ainda que:

- o plano *PQR* tem equação 2*x*+3*y*−*z*−15 = 0
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta [PS], em que *S* é o ponto de coordenadas (14,5,0)

Determine a área lateral do prisma. Apresente o resultado arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais. ***(2018 1ª cad1)***

25. Considere, num referencial o.n. *Oxyz*, a superfície esférica de equação $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=10$

a) Seja *P* o ponto da superfície esférica de abcissa 1, ordenada 3 e cota negativa. Seja *r* a reta de equação vetorial $(x,y,z)=(-1,0,3)+k(4,1,-2), k\in IR$. Determine uma equação do plano que passa no ponto *P* e é perpendicular à reta *r.* Apresente essa equação na forma *ax*+*by*+*cz*+*d* = 0

b) Seja *C* o centro da superfície esférica e seja *A* o simétrico do ponto *C* relativamente ao plano *xOy.* Determine a amplitude do ângulo *AOC.* Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais. ***(2018 2ª cad1)***

26. Considere, num referencial o.n. *xOy*, a circunferência centrada na origem do referencial e que passa no ponto A(2,1). Seja *r* a reta tangente à circunferência no ponto *A.* Qual é a ordenada na origem da reta *r* ?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 ***(2018 2ª cad2)***

27. Considere, num referencial o.n. *Oxyz*, a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=3$ e o ponto *P* de coordenadas (1,1,1), pertencente a essa superfície esférica.

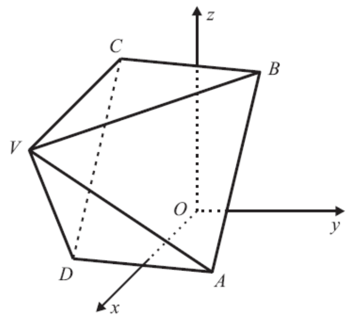
a) Seja $\vec{u}=-2\overrightarrow{OP}$ e seja $Q=P+\vec{u}$. Determine as coordenadas do ponto *Q* e refira, no contexto do problema, o significado de [PQ]

b) Seja *R* o ponto de intersecção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas. Determine a amplitude do ângulo *ROP*. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. ***(2018 esp cad1)***

28. Para um certo número real *a*, diferente de zero, são paralelas as retas *r* e *s*, definidas, num referencial o.n. *xOy*, pelas condições $r: ax+2y+1=0 \quad e \quad s:(x,y)=(1,1)+k(a,2a), k\in IR$. Qual é o valor de *a* ?

(A) −4 **(B)** 2 **(C)** −2 **(D)** 4 ***(2018 esp cad1)***

29. Na figura, está representada, num referencial o.n. *Oxyz*, uma pirâmide quadrangular regular [*ABCDV*]. Os vértices *A* e *C* têm coordenadas (2,1,0) e (0,−1,2), respetivamente. O vértice *V* tem coordenadas (3,−1,2).

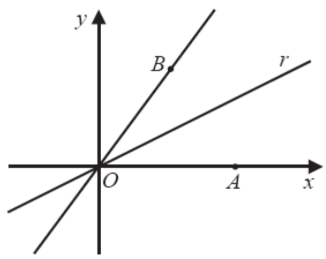


a) Determine a amplitude do ângulo *VAC.* Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

b) Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide. Apresente essa equação na forma *ax*+*by*+*cz*+*d*=0 ***(2019 1ª cad1)***

30. Na figura, estão representados, num referencial o.n. *xOy*, os pontos *A* e *B*, de abcissas positivas, e as retas *OB* e *r.* Sabe-se que:

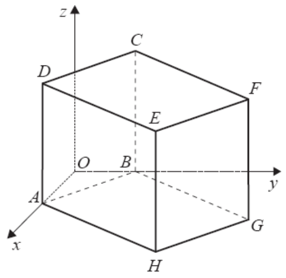
- o ponto *A* pertence ao eixo *Ox*
- a reta *OB* é definida pela equação $y=\dfrac{4}{3}x$
- a reta *r* contém a bissetriz do ângulo *AOB*



Determine a equação reduzida da reta *r* ***(2019 1ª cad2)***

31. Na figura, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, um paralelepípedo retângulo [*ABCDEFGH*]
Sabe-se que:

- o vértice *A* pertence ao eixo *Ox* e o vértice *B* pertence ao eixo *Oy*
- o vértice *C* tem coordenadas (0,3,6) e o vértice *G* tem coordenadas (6,11,0)
- o plano *ABC* é definido pela equação 3*x*+4*y*-12=0

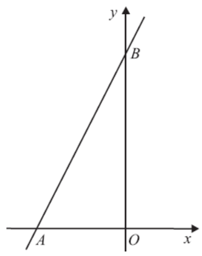


a) Determine o volume do paralelepípedo [*ABCDEFGH*]

b) Seja *P* o ponto de coordenadas (1,−4,3), e seja *r* a reta que passa pelo ponto *P* e é perpendicular ao plano *ABC.* Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta *r* com o plano *ABC* ***(2019 2ª cad1)***

32. Na figura, está representada, num referencial o.n. *xOy*, a reta *AB.* Sabe-se que:

- o ponto *A* pertence ao semieixo negativo *Ox* e o ponto *B* pertence ao semieixo positivo *Oy*
- a reta *AB* tem equação *y*=2*x*+4



Seja *M* o ponto médio do segmento de reta [*AB*]
Quais são as coordenadas do ponto *M*?

$(A)\left(-\frac{1}{2},2\right)$ $(B)(-1,2)$ $(C)\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ $(D)(-2,4)$ ***(2019 2ª cad2)***

33. Considere, num referencial o.n. Oxyz,

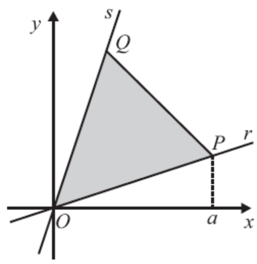
• o plano α , de equação $2x+3y-z-9=0$

• a reta r, de equação vetorial $(x,y,z)=(1,2,1)+k(0,1,5), k\in IR$

a) Seja A o ponto da reta r cuja ordenada é igual a 4. Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A. Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

b) Seja P o ponto de intersecção da reta r com o plano α . Determine as coordenadas do ponto P ***(2019 EE cad1)***

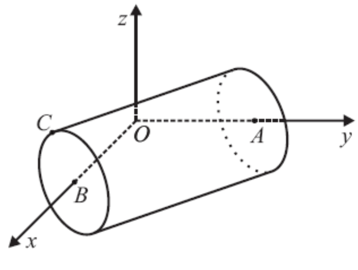
34. Seja m um número real pertencente ao intervalo [0,1], e seja *a* um número real positivo. Na Figura, estão representadas as retas r e s, que passam na origem do referencial e que têm declives *m* e $\frac{1}{m}$, respetivamente. Estão também representados os pontos P e Q, pertencentes ao primeiro quadrante. O ponto P pertence à reta r, e o ponto Q pertence à reta s. Sabe-se que o ponto P tem abcissa *a* e que $\overline{OP}=\overline{OQ}$.



Mostre que a área do triângulo [OPQ] é dada por $\frac{a^2}{2}\left(1-m^2\right)$ ***(2018 EE cad2)***

35. Na Figura, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, um cilindro reto. Sabe-se que:

- o ponto *A* pertence ao eixo *Oy* e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto *B* pertence ao eixo *Ox* e é o centro da outra base;
- o ponto *C* pertence à circunferência de centro *B* que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano *ABC* é definido pela equação $3x+4y+4z-12=0$



Resolva os itens **a)** e **b)** sem recorrer à calculadora.

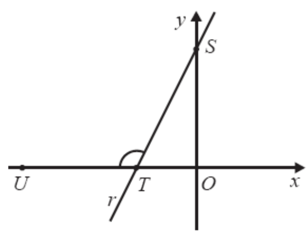
a) Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π

b) Seja *P* o ponto de coordenadas (3,5,6). Determine as coordenadas do ponto do plano *ABC* que se encontra mais próximo do ponto *P* ***(2020 1ª)***

36. Na Figura, estão representados, num referencial o.n. *xOy*, os pontos *S*, *T* e *U* e a reta *r* de equação $y=2x+4$. Sabe-se que:

• os pontos *S* e *T* são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta *r* com os eixos *Oy* e *Ox*

• o ponto *U* pertence ao eixo *Ox* e tem abcissa inferior à do ponto *T*

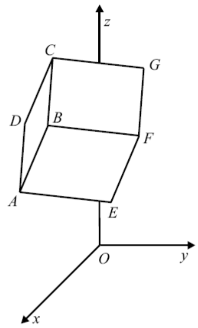


Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo *STU*?

(A) 4,25 **(B)** 2,68 **(C)** 2,03 **(D)** 1,82 ***(2020 1ª)***

37. Na Figura, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, o cubo [*ABCDEFGH*] (o ponto *H* não está representado na figura). Sabe-se que:

- o ponto *A* tem coordenadas (7,1,4)
- o ponto *G* tem coordenadas (5,3,6)
- a reta *AE* é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (7,1,4) + k(3,-6,2), k \in IR$



Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

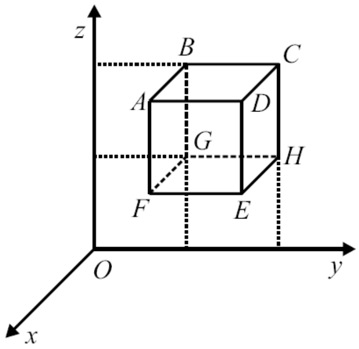
a) Determine uma equação do plano *EFG.* Apresente essa equação na forma *ax+by+cz+d=0*

b) Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

(2020 2ª)

38. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, um cubo [*ABCDEFGH*] em que cada aresta é paralela a um dos eixos coordenados. Sabe-se que:

- o vértice *B* tem coordenadas (0,2,4)
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas (2,2,−2)
- a aresta [*BG*] é paralela ao eixo *Oz*



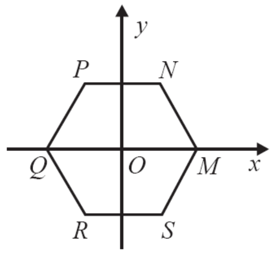
a) Determine a amplitude do ângulo *OBE.* Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Seja α o plano que passa por *G* e é perpendicular à reta *OE.* Sejam *P*, *Q* e *R* os pontos de α que pertencem aos eixos coordenados. Determine o volume da pirâmide [*OPQR*]

(2020 esp)

39. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. *xOy*, um hexágono regular [*MNPQRS*] centrado na origem. Sabe-se que o vértice *M* tem coordenadas (1,0) e que o vértice *N* pertence ao primeiro quadrante. Qual é a equação reduzida da reta *MN* ?

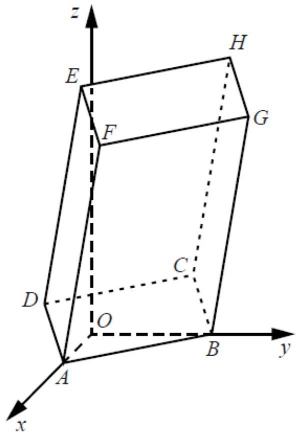
$(A)\; y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ $\quad (B)\; y = -\sqrt{3}x + \sqrt{6}$ $\quad (C)\; y = -x + 2$ $\quad (D)\; y = -x + 1$ ***(2020 esp)***



40. Na Figura, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, um paralelepípedo retângulo [*ABCDEFGH*]

Sabe-se que:

- o vértice *A* pertence ao eixo *Ox* e o vértice *B* pertence ao eixo *Oy;*
- as coordenadas dos vértices *E* e *G* são (7, 2,15) e (6,10,13), respetivamente;
- a reta *EF* é definida pela equação (x, y, z)=(1,-2,19)+k(-3,-2,2), k$\in$IR



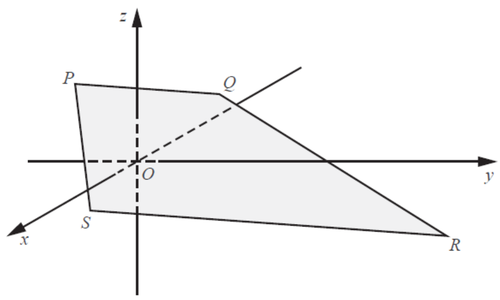
a) Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta *EF* e que passa no ponto *E*?

(A) (x, y, z)=(7,-3,3)+k(2,-3,0), k$\in$IR
(B) (x, y, z)=(7,2,15)+k(0,3,-3), k$\in$IR
(C) (x, y, z)=(7,-10,3)+k(0,3,3), k$\in$IR
(D) (x, y, z)=(7,2,15)+k(2,0,-3), k$\in$IR

b) Determine, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto *B* e que passa no ponto *D*

(2021 1ª)

41. Na Figura, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, um trapézio [PQRS], de bases [PQ] e [*RS*], em que o lado [*PS*] é perpendicular às bases. Tem-se *P*(1, −1, 2), *Q*(−2,1,1) e *R(*−5, 5, −3)



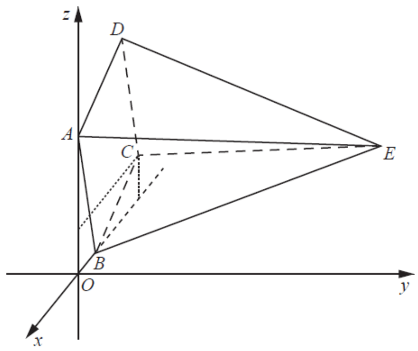
a) Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto *R* e que passa no ponto *Q*?

(A) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=59$
(B) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=41$
(C) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=41$
(D) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=59$

b) Determine uma equação do plano perpendicular à reta *RS* e que passa no ponto *P.* Apresente essa equação na forma *ax+by+cz+d=0*

(2021 2ª)

42. Na Figura, está representada, num referencial o.n. *Oxyz*, a pirâmide regular de base quadrada [*ABCD*] e vértice *E*
Sabe-se que:



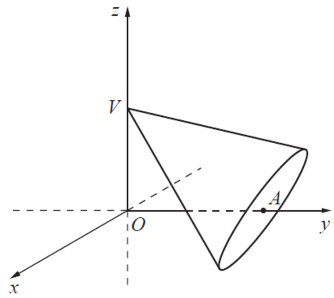
- a base da pirâmide está contida no plano *xOz*
- o vértice *A* pertence ao semieixo positivo *Oz* e o vértice *B* pertence ao semieixo negativo *Ox*
- o vértice *E* tem coordenadas (−2, 6, 2)
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas (−1, 6, 2)
- o volume da pirâmide é 20

a) Seja α o plano perpendicular à reta *BE* e que passa no ponto de coordenadas (1, 0,1). Qual das equações seguintes é uma equação do plano α ?

(A) −x+6y+2z=0 **(B)** x+6y+2z-3=0
(C) x-6y-2z+1=0 **(D)** 2x-y+4z-5=0

b) Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ ***(2021 esp)***

43. Na Figura, está representado, em referencial o.n. *Oxyz* , um cone reto de vértice *V* e base de centro no ponto *A* .
Sabe-se que:



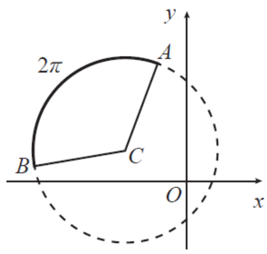
- o ponto *V* pertence ao eixo *Oz* e o ponto *A* pertence ao eixo *Oy*;
- a base do cone tem raio 3 e está contida no plano definido por 4*y*-3*z*=16

a) Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas (1, 2, −1)?

(A) 4*y*-3*z*=11 **(B)** 3*x*+4*y*+ *z*=10
(C) 3*y*+4*z*=8 **(D)** *x*+3*y*+4*z*=3

b) Sem recorrer à calculadora, determine o volume do cone. ***(2022 1ª)***

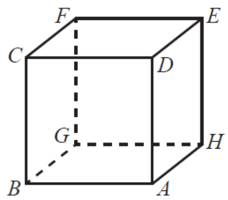
44. Na Figura, está representada, em referencial o.n. *Oxy* , a circunferência de equação $(x+2)^2+(y-1)^2=9$. Sabe-se que:



- O ponto *C* é o centro da circunferência
- *A* e *B* são dois pontos da circunferência
- O arco de circunferência *AB* tem comprimento 2 π

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ***(2022 1ª)***

45. Na Figura 1, está representado o cubo [*ABCDEFGH*]. Fixado um determinado referencial o.n. *Oxyz* , tem-se *A*(-2, 5, 0), *B*(1, -1, 2) e *C*(3, 2, 8).

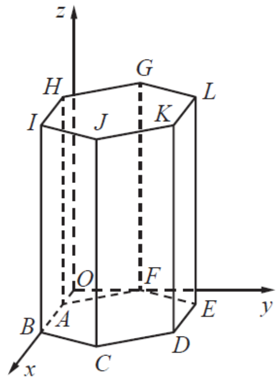


a) Qual é o valor de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HE}$?

(A) - 49 **(B)** 0 **(C)** 7 **(D)** 49

b) Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Sabe-se que o vértice *E* do cubo pertence à reta definida pela equação (x,y,z)=(0,0,3)+k(1,-1,-1) , k$\in$IR
Determine as coordenadas do vértice *E* ***(2022 2ª)***

46. Na Figura, está representado, em referencial o.n. *Oxyz* , o prisma hexagonal reto [*ABCDEFGHIJKL*], cujas bases são hexágonos regulares. Sabe-se que:



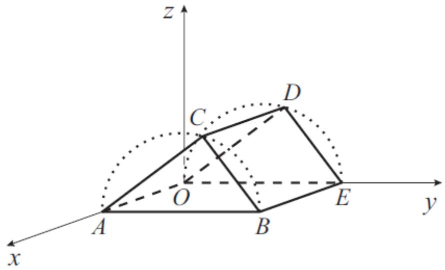
- os vértices *A* e *B* pertencem ao semieixo positivo *Ox* , e o vértice *F* pertence ao semieixo positivo *Oy*
- o plano *BCJ* é definido pela equação $3x-\sqrt{3}y-6=0$
- o centro do prisma, ponto equidistante de todos os seus vértices, é o ponto $M\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$

a) Qual das seguintes equações define o plano que contém a face [*GHIJKL*] ?

(A) *z* = 2 **(B)** *z* = 4 **(C)** $x=\frac{4}{3}$ **(D)** $x=\frac{8}{3}$

b) Determine, sem recorrer à calculadora, uma equação cartesiana do plano *LEF*. Apresente a equação na forma *ax+by+cz+d=0*, em que *a*, *b*, *c* e *d* são números reais. ***(2022 esp)***

47. Na Figura, está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, o prisma triangular reto [*OABCDE*] , de bases [*ABC*] e [*OED*]. Sabe-se que:



- as bases do prisma estão inscritas em semicircunferências, respetivamente, de diâmetros [*AB*] e [*OE*];
- os vértices *A* e *E* do prisma pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos *Ox* e *Oy*;
- $OE = 12{,}5$;
- a reta *AC* é definida pela equação vetorial $(x,y,z)=(10,0,0)+k(0,4,3)\ ,k\in IR$

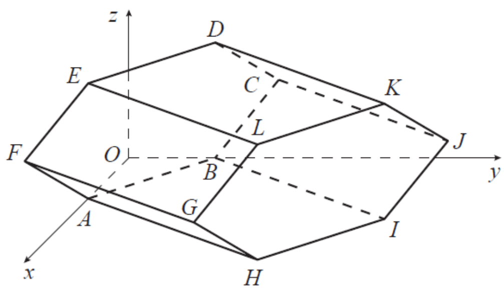
a) Qual das seguintes equações vetoriais define a reta *OD* ?

(A) $(x,y,z)=(0,6,8)+k\left(0,2,\frac{3}{2}\right),k\in IR$ **(B)** $(x,y,z)=(0,-4,-3)+k\left(0,2,\frac{3}{2}\right),k\in IR$

(C) $(x,y,z)=(0,-4,-3)+k(0,3,-4)\ ,k\in IR$ **(D)** $(x,y,z)=(0,6,8)+k(0,3,-4)\ ,k\in IR$

b) Sem recorrer à calculadora, determine as coordenadas do ponto *C*. ***(2023 1ª)***

48. Na Figura, está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, o prisma hexagonal reto [*ABCDEFGHIJKL*], de bases [*ABCDEF*] e [*GHIJKL*]. Sabe-se que:



- as coordenadas dos vértices *A* e *G* do prisma são, respetivamente, (4,0,0) e $\left(12,\frac{13}{2},2\right)$
- a reta *EL* é definida pela equação vetorial $(x,y,z)=(-2,-8,4)+k(3,4,0),k\in IR$

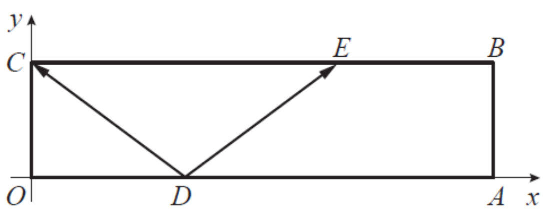
a) Qual das seguintes equações define a superfície esférica de diâmetro [*AG*] ?

$(A)\ (x-8)^2+\left(y-\frac{13}{4}\right)^2+(z-1)^2=\frac{441}{16}$ $(B)\ (x-8)^2+\left(y-\frac{13}{4}\right)^2+(z-1)^2=\frac{441}{4}$

$(C)\ (x-4)^2+y^2+z^2=\frac{441}{16}$ $(D)\ (x-4)^2+y^2+z^2=\frac{441}{4}$

b) Sem recorrer à calculadora, determine as coordenadas do vértice *F* do prisma. ***(2023 2ª)***

49. Na Figura, está representado, em referencial o.n. *Oxy*, o retângulo [*OABC*]. Sabe-se que:

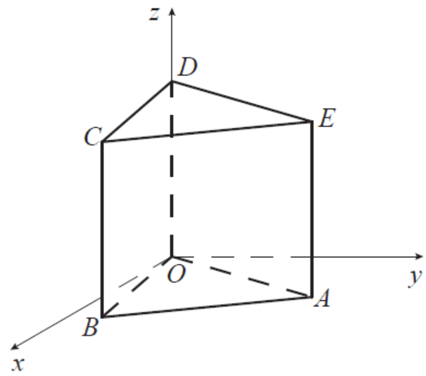


- o ponto *A* pertence ao semieixo positivo *Ox*
- o ponto *C* pertence ao semieixo positivo *Oy*
- o ponto *D* pertence ao segmento de reta [*OA*]
- o ponto *E* pertence ao segmento de reta [*CB*]
- $\overline{EB}=\overline{OD}=\frac{\overline{OA}}{3}$
- $\overline{OC}=\frac{\overline{OA}}{4}$
- $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE}=-7$

Determine $\overline{OA}$. ***(2023 2ª)***

50. Na Figura, está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, o prisma triangular reto [*OABCDE*], de bases [*OAB*] e [*CDE*]. Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto *A* são $\left(2\sqrt{3},6,0\right)$
- o ponto *B* pertence ao plano mediador do segmento de reta [*OA*]
- a reta *AB* é definida pela equação vetorial $\left(x,y,z\right)=\left(0,16,0\right)+k\left(\sqrt{3},-5,0\right),k\in IR$
- o ponto *D* pertence ao eixo *Oz* e tem cota 5



a) Qual das seguintes equações define o plano que passa no ponto *A* e é perpendicular ao eixo *Ox* ?

(A) $z = 0$ **(B)** $y = 6$ **(C)** $x = 2\sqrt{3}$ **(D)** $x + y + z = 0$

b) Sem recorrer à calculadora, determine o volume do prisma [*OABCDE*]. ***(2023 esp)***

Soluções : $(1b)(x,y,z)=(9,6,4)+k(3,-6,4),k\in IR(1c)3x+4z-18=0(2)D(3)\frac{198}{247}(4)B(6)B(7)(5,-15,12)(8)D$

$(9a)x-2y+z-2=0(9b)\left(x-2\right)^2+y^2+\left(z-1\right)^2=5(9c)\sqrt{60}(10)B(11a)(1,1,6)(11b)x+y+z-2=0(11c)1,52$

$(12)B(13a)-\frac{1}{3}(13b)55^{\circ}(13c)x^2+y^2+z^2=\frac{24}{9}(14)C(15a)\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-1\right)^2=1(15b)(-2,2,4)$

$(15c)(x,y,z)=(3,0,10)+k(1,1,-3),k\in IR(16)C(17a)(x,y,z)=(2,1,4)+k(3,2,4),k\in IR(b)(2,1,1)(c)\cos\measuredangle APB>0$

$(18)C(19.1)x^2+y^2+z^2=9(19.2)-9(19.3)(x,y,z)=(0,0,3)+k(0,2,-3),k\in IR(20)C(21.2)(-3,5,-4)(21.3)85^{\circ}$

$(22)D(23.1)6(23.2)(1,0,9)(23.3)37^{\circ}(24.a)-8(24b)179,6(25a)4x+y-2z-15=0(25b)48^{\circ}(26)B$

$(27a)Q(-1,-1,-1),\textit{diâmetro da sup esf}\,(27b)125^{\circ}(28)A(29a)55^{\circ}(29b)-2x+y-z+3=0(30)y=\frac{1}{2}x(31a)300$

$(31b)(4,0,3)(32)B(33a)2x+3y-z+3=0(33b)(1,1,-4)(35a)\sqrt{2}(35b)(0,1,2)(36)C(37a)3x-6y+2z-9=0$

$(37b)\left(x-6\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-5\right)^2=3(38a)75^{\circ}(38b)18(39)A(40a)C(40b)x^2+(y-6)^2+z^2=69(41a)C$

$(41b)3x-2y+z-7=0(42a)C(42b)(-1,0,-3)(43a)D(43b)15\pi(44)-\frac{9}{2}(45a)B(45b)(-6,6,9)(46a)B$

$(46b)3x-\sqrt{3}y+2=0(47a)B(47b)(10,8,6)(48a)A(48b)\left(6,-\frac{3}{2},2\right)(49)12(50a)C(50b)40\sqrt{3}$