

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha nº 02 – Sucessões / Progressões Matemática 11º Ano

Primeira Parte

- 1) Considere a sucessão de números reais $u_n : 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, \dots$.
- Defina u_n por recorrência.
 - Obtenha o termo de ordem 10.
- 2) Considere as sucessões definidas por $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$ $v_n : \begin{cases} v_1 = 10 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$ $w_n : \begin{cases} w_1 = 5 \\ w_n = 2w_{n-1} \end{cases}$
- Determine os 2º e 3º termos de cada uma das sucessões.
 - Verifique se $\frac{8}{3}$ é termo de u_n e em caso afirmativo indique a sua ordem.
 - Obtenha a ordem a partir da qual todos os termos de u_n são superiores a 2.
 - Estude u_n quanto à monotonia.
 - Mostre que u_n é limitada, indicando um minorante e um majorante do conjunto dos seus termos.
 - Das alíneas d) e e) o que pode concluir? Justifique.
 - Defina v_n e w_n através do seu termo geral.
- 3) Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1-n}{2}$.
- Mostre que u_n é uma progressão aritmética de razão $r = -\frac{1}{2}$.
 - Que pode concluir acerca da monotonia? Justifique.
 - Calcule a soma dos 13 primeiros termos.
- 4) Considere a sucessão de termo geral $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$.
- Mostre que u_n é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{4}$ e calcule o primeiro termo.
 - Que pode concluir acerca da monotonia e da convergência? Justifique.
 - Calcule a soma dos 13 primeiros termos e a soma de todos os termos de u_n .
- 5) Considere a sucessão de termo geral $a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{3-n}$.
- Prove que a sucessão é uma progressão geométrica e indique a sua razão e o 1º termo.
 - Calcule a soma dos primeiros dez primeiros termos da sucessão.
 - Pronuncie-se sobre a monotonia e a convergência da sucessão.
- 6) Considere as sucessões definidas por $u_n = \frac{8n+3}{4n}$ e $v_n : \begin{cases} v_1 = 9 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- Verifique se 5 é termo da sucessão u_n e em caso afirmativo indique a sua ordem.
 - Estude u_n quanto à monotonia. Será u_n uma progressão aritmética? Justifique a resposta.
 - Mostre que u_n é limitada.
 - Calcule o 3º termo de v_n e obtenha uma expressão para o termo geral de v_n .
Será v_n uma progressão aritmética? Em caso afirmativo indique a razão.
- 7) O gerente de um parque de estacionamento privado estabeleceu que cada carro estacionado no parque paga 50 cêntimos de taxa fixa e mais 1 euro por cada hora que permanece no parque.
- Defina a sucessão c_n que dá o valor, em euros, que o dono de um carro deverá pagar ao fim de n horas que esteja estacionado no parque.
 - Mostre que c_n define uma progressão aritmética crescente.

- c) Durante 8 dias um indivíduo estacionou o carro no parque do seguinte modo: 1 hora no 1º dia, 2 horas no 2º dia, 3 horas no 3º dia, e assim sucessivamente. Determine, utilizando os conhecimentos de progressões aritméticas, quanto terá pago o indivíduo ao fim de 8 dias.
- 8) Considere as sucessões $u_n = 2n + 7$ e $v_n = 5 \times 2^{4-2n}$.
- Calcule o primeiro e o quinto termo de cada uma.
 - Prove que u_n é uma progressão aritmética e que v_n é uma progressão geométrica.
 - Escreva u_n na forma $u_n = u_1 + (n-1)r$ e $v_n = v_1 \times r^{n-1}$.
 - Calcule a soma dos primeiros 10 termos de cada uma das sucessões.
 - Calcule a soma de todos os termos de v_n .
- 9) Um professor da disciplina X fez a seguinte estimativa para o tempo dispendido, em média, na sua atividade docente:
- preparar e dar aulas : 35 horas por semana;
 - corrigir trabalhos e testes : 12 minutos por cada aluno por semana.
- Se o número de alunos pudesse ser um número natural qualquer, considere a sucessão a_n , cujo termo geral permite determinar o tempo dedicado à atividade docente, por semana, pelo professor, sendo n o número de alunos.
- Calcule o 10º e o 20º termos da sucessão e diga o que representa cada um.
 - Determine o termo geral da sucessão a_n .
 - Se o professor tem 4 turmas de 25 alunos cada uma, quanto tempo gasta, em média, por semana, no seu trabalho docente?
- 10) O relógio de uma torre, além das badaladas indicando as horas, bate 1 badalada ao quarto de hora, 2 à meia hora e 3 aos três quartos de hora. Quantas badaladas bate ao fim de 1 dia ?
(Note que o relógio, por exemplo, às 15 horas bate apenas 3 badaladas)
- 11) Comente cada uma das afirmações, apresentando contraexemplos em caso de serem falsas.
- Toda a sucessão convergente é monótona.
 - Toda a sucessão limitada é convergente.
 - Toda a sucessão decrescente e de termos positivos converge para zero.
 - Se uma sucessão $a_n \rightarrow +\infty$, então $a_n \times b_n \rightarrow +\infty$, qualquer que seja a sucessão b_n .

12) Aquiles e a Tartaruga

Aquiles vai correr com uma Tartaruga : por questões de justiça, a Tartaruga parte 100 metros à frente de Aquiles. Em cada segundo Aquiles anda 10 metros e a Tartaruga apenas 1 metro. Será que Aquiles vai conseguir ultrapassar a Tartaruga? Ao fim de quanto tempo?

Segunda Parte

13) Sobre a sucessão $\frac{n^2 - 13}{4}$ pode afirmar-se que:

- (A) é limitada. (B) a ordem do termo igual a 3 é 5.
(C) o 3º termo é 5. (D) a ordem do termo igual a 5 é 3.

14) No início do ano 2000 uma cidade tinha 1 500000 habitantes e está a crescer à taxa anual de 20%.

A expressão que permite prever a população existente ao fim de n anos após o ano 2000 é :

- (A) $1,2^n \times 1,5 \times 10^6$ (B) $1,2^{n-1} \times 1,5 \times 10^6$ (C) $1,02^n \times 1,5 \times 10^6$ (D) $1,5 \times 10^6 \times 2000 \times 1,02^n$

15) Seja u_n uma progressão aritmética de razão r igual a -5 .

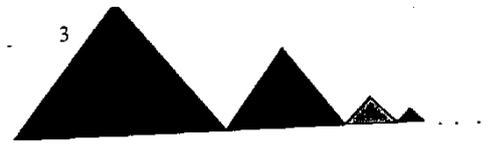
Qual das afirmações é verdadeira ?

- (A) $u_7 = u_3 - 20$ (B) $u_7 - u_3 = -4r$
(C) $u_{n+1} = u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N}$ (D) $u_{10} = u_2 + 40$

16) É progressão geométrica uma sucessão em que para todo o número natural :

- (A) $u_{n-1} - u_n = 2$ (B) $u_{n-1} = 2u_n$ (C) $u_{n-1} = n \cdot u_n$ (D) $u_{n-1} = \frac{2}{u_n}$

17) Seja (v_n) a sucessão cujo termo geral é dado pelo perímetro de cada um dos triângulos equiláteros que se obtém como mostra a figura. O lado do triângulo inicial é 3 e o lado de cada um dos seguintes, é a terça parte do anterior. Então o termo geral da sucessão (v_n) é :



- (A) 3^{n+3} (B) 4×3^n (C) 3^{3-n} (D) $\frac{9}{3^{-n+3}}$

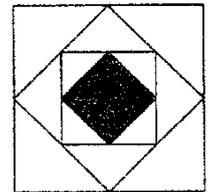
18) Acerca da sucessão definida por $u_n = \begin{cases} 5n-1 & \text{se } n < 20 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \geq 20 \end{cases}$ pode-se afirmar que :

- (A) É monótona e limitada. (B) É um infinitésimo.
(C) É um infinitamente grande positivo. (D) É não monótona e não limitada.

19) Para as suas férias em Itália o Ricardo levou 610 Euros. No primeiro dia gastou 20 Euros, no segundo 23, no dia seguinte 26, e assim sucessivamente. Quanto gastou no n -ésimo dia (dia de ordem n) ?

- (A) 20 (B) $3n + 17$ (C) $3n$ (D) $3n - 20$

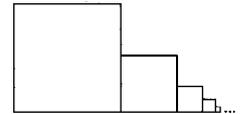
20) Na figura ao lado está representado um quadrado [ABCD] de lado 4 cm. Unindo os pontos médios dos lados desse quadrado construiu-se outro quadrado de menor perímetro. Imagine, agora, que o processo foi continuado indefinidamente. Seja (p_n) a sucessão dos perímetros dos sucessivos quadrados.



Então o termo geral da sucessão (p_n) é:

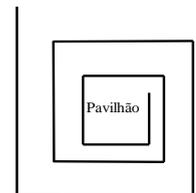
- (A) $p_n = \frac{16}{n}$ (B) $p_n = 16 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ (C) $p_n = 16^{n-1}$ (D) $16 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n$

21) Seja (u_n) a sucessão cujo termo geral dá a área de cada um dos quadrados que se obtém como mostra a figura. O lado do quadrado inicial é 3; o lado de cada quadrado é metade do lado do quadrado anterior. Então o termo geral da sucessão (u_n) é:



- (A) $9 \times 2^{n-1}$ (B) $\frac{9}{2^{n-2}}$ (C) $\frac{9}{2^{2n-2}}$ (D) $9 \times 2^{1-n}$

22) Dado as longas filas na EXPO98, um pavilhão optou por organizar a fila como o esquema ao lado indica. A medida de cada segmento é 75% da medida do segmento anterior, sendo 11 os segmentos. A maior das filas mede 60 metros. Qual a distância, em metros, percorrida por um visitante que está no fim da fila até entrar no pavilhão?



- (A) 240 (B) $\frac{60 + \frac{3}{4}}{2} \times 11$ (C) $240 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{11}\right)$ (D) $60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{11-1}$

23) Das afirmações seguintes, qual é falsa?

- (A) Toda a sucessão decrescente e convergente é limitada.
(B) Um infinitésimo é sempre uma sucessão limitada.
(C) Uma sucessão não monótona pode ser convergente.
(D) Um infinitamente grande positivo é uma sucessão crescente.

Sol: 1.a) $\begin{cases} u_1 = u_2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}$; b) 110; 2.a) $\frac{7}{4}e$; 2; 8e6; 10e20; b) ordem 13; c) 4; d) crescente; e) $\left[\frac{4}{3}, 3\right]$; f) conv; g) $v_n = 12 - 2n$; $w_n = 5 \times 2^{n-1}$;

3.b) dec; c) -39; 4.a) $u_1 = \frac{5}{2}$; b) dec e conv; c) 3, (3); $\frac{10}{3}$; 5.a) $r = -2$; $a_1 = 1$; b) -341; c) não mon, div (oscil); 6.a) não; b) dec; não; c) $\left[2, \frac{11}{4}\right]$;

d) $v_3 = \frac{29}{3}$; $v_n = \frac{26+n}{3}$; sim; $r = \frac{1}{3}$; 7.a) $c_n = 0,5 + n$; c) 40; 8.a) 9e17; 20e0, 078; c) $u_n = 9 + (n-1)2e v_n = 20 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; d) 180e26, (6); e) $\frac{80}{3}$;

9.a) 37e39; b) $a_n = 35 + 0,2n$; c) 55; 10) 300; 11.a) F; b) F; c) F; d) F; 12) 11, 1s; 13) B; 14) A; 15) A; 16) B; 17) C; 18) B; 19) B; 20) B; 21) C; 22) C; 23) D

