Atividade de diagnóstico

Pág. 148

1. $u_n = 2n-3$

1.1. $u_n = 115 \Leftrightarrow 2n-3 = 115 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n = 118 \Leftrightarrow n = 59$

A sequência tem 59 termos.

1.2. $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$ e $u_5 = 7$

1.3. $u_{21} = 2\times 21 - 3 = 42 - 3 = 39$

1.4. $u_n = 96 \Leftrightarrow 2n-3 = 96 \Leftrightarrow 2n = 99 \Leftrightarrow n = \frac{99}{2} \notin \mathbb{N}$

2.1. **a)** $3n+5$ **b)** $\frac{n^2}{n+1}$

2.2. $u_1 = 8$, $u_2 = 11$, $u_3 = 14$ e $u_4 = 17$

3.1. $u_1 = 2^{2-1} = 2$; $u_2 = 2^{2-2} = 2^0 = 1$

$u_3 = 2^{2-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $u_4 = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Logo, o termo geral pode ser $u_n = 2^{2-n}$.

3.2. **a)** $u_n = 2^{2-n}$; $u_{10} = 2^{2-10} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$

b) $u_{n+1} = 2^{2-(n+1)} = 2^{2-n-1} = 2^{1-n}$

Pág. 149

4.1. **a)** [–6 , –1] e em [2 , 6] **b)** [–1 , 4]

4.2.

x	–6		–1		2		4		6
$f(x)$	–3	↗	4	⟶	–2	→	–2	↗	0

4.3. f é crescente em [–6 , –1] e em [4 , 6] e é decrescente em [–1 , 2].

5.1. **a)** Máximo absoluto: 6

b) Mínimo absoluto: não existe

5.2. A função é limitada, porque $-5 < g(x) \le 6$, qualquer que seja $x \in D_g$.

Pág. 150

Atividade inicial 1

1. $D'_f =]-3\ ,\ 3]$

2.1. $]-\infty\ ,\ -3]$ **2.2.** $[3\ ,\ +\infty[$

3. –5 é minorante de f e 5 é majorante de f, logo $\forall x \in D_f , -5 \le f(x) \le 5$.

4.1. Máximo absoluto de f: 3

4.2. Mínimo absoluto de f: não existe

5. f é decrescente em [–3 , 0] e em]1 , 4[.

Pág. 152

1. $A = [-3\ ,\ 0[\cup \{2\ ,\ 5\}$

1.1. **a)** 5 e 6 , por exemplo **b)** –4 e –3 , por exemplo

c) $[5\ ,\ +\infty[$ **d)** $]-\infty\ ,\ -3]$

1.2. Mínimo de A : –3 ; máximo de A : 5

1.3. O conjunto A tem minorantes e majorantes.

Logo, A é limitado.

1.4. Por exemplo, $B = [-4\ ,\ +\infty[$.

2.

	Majorantes	Minorantes	Supremo	Ínfimo	Máximo	Mínimo
2.1.	[2, +∞[	]–∞, 1]	2	1	2	1
2.2.	[2, +∞[	]–∞, 1]	2	1	não tem	1
2.3.	[6, +∞[	]–∞, –5]	6	–5	6	não tem
2.4.	[6, +∞[	∅	6	não tem	6	não tem
2.5.	∅	]–∞, 1]	não tem	1	não tem	1
2.6.	∅	∅	não tem	não tem	não tem	não tem
2.7.	∅	]–∞, 3]	não tem	3	não tem	3

Pág. 153

3.1. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$ e $a_5 = 32$

3.2. $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 30$

3.3. $c_1 = -1$, $c_2 = -3$, $c_3 = -5$, $c_4 = -7$ e $c_5 = -9$

3.4. $d_1 = 1$, $d_2 = -\frac{1}{2}$, $d_3 = \frac{1}{3}$, $d_4 = -\frac{1}{4}$ e $d_5 = \frac{1}{5}$

3.5. $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = 5$

3.6. $f_1 = 0$, $f_2 = 2$, $f_3 = 0$, $f_4 = 2$ e $f_5 = 0$

4. $u_n = \frac{n^2-1}{n}$

4.1. **a)** $u_1 = 0$

b) $u_2 = \frac{3}{2}$

c) $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 1}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-1}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n+1}$

4.2. $u_n = 9{,}9 \Leftrightarrow \frac{n^2-1}{n} = 9{,}9 \Leftrightarrow n^2 - 9{,}9n - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{9{,}9 \pm \sqrt{9{,}9^2+4}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{9{,}9 \pm \sqrt{102{,}01}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{9{,}9 \pm 10{,}1}{2} \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 10$

$u_{10} = 9{,}9$

4.3. $u_n = 6 \Leftrightarrow \frac{n^2-1}{n} = 6 \Leftrightarrow n^2 - 6n - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{6 \pm \sqrt{36+4}}{2} \notin \mathbb{N}$

6 não é termo da sucessão.

Pág. 155

5.1. $u_n = 2n+1$

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) =$

$= 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$

(u_n) é crescente.

5.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-2}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} =$

$= \frac{n^2 - n - n^2 - n + 2n + 2}{n(n+1)} = \frac{2}{n^2+n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$

A sucessão (u_n) é crescente.

5.3. $u_n = 2^n$

$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2\times 2^n - 2^n = 2^n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$

A sucessão (u_n) é crescente.

6.1. $u_n = 1-3n$

$u_{n+1} - u_n = 1-3(n+1)-(1-3n) =$

$= 1-3n-3-1+3n = -3 < 0$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$

A sucessão (u_n) é decrescente.

6.2. $u_n = 1+\frac{n+1}{n} =$

$u_{n+1} - u_n = 1+\frac{n+2}{n+1} - 1 - \frac{n+1}{n} =$

$= \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$

A sucessão (u_n) é decrescente.

Pág. 156

7.1. **a)** $a_n = 6-\frac{1}{n}$

$a_{n+1} - a_n = 6-\frac{1}{n+1} - \left(6-\frac{1}{n}\right) =$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$a_{n+1} - a_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

A sucessão (a_n) é monótona crescente.

b) $b_n = 6+(-1)^n$

$b_1 = 5$, $b_2 = 7$, $b_3 = 5$

$b_2 > b_1$ e $b_3 < b_2$

A sucessão (b_n) é não monótona.

c) $c_n = \frac{n+3}{n+1}$

$c_{n+1} - c_n = \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{n+1} =$

$= \frac{n^2+4n+n+4-n^2-3n-2n-6}{(n+1)(n+2)} =$

$= \frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

A sucessão (c_n) é monótona decrescente.

d) $d_n = (6-n)^2$

$d_5 = 1$, $d_6 = 0$, $d_7 = 1$

$d_6 < d_5$ e $d_7 > d_6$

A sucessão (d_n) é não monótona.

7.2. $e_n = (-3)^n$

$e_1 = -3$, $e_2 = 9$, $e_3 = -27$

$e_2 > e_1 \wedge e_3 < e_2$.

Logo, a sucessão (e_n) é não monótona.

7.3. $f_n = (-1)^n + 2n$

$f_{n+1} - f_n = (-1)^{n+1} + 2(n+1) - (-1)^n - 2n =$

$= (-1)^n\times(-1) + 2n + 2 - (-1)^n - 2n =$

$= -(-1)^n - (-1)^n + 2 = -2(-1)^n + 2 =$

$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 4 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$f_{n+1} - f_n \geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

A sucessão (f_n) é monótona crescente em sentido lato.

7.4. $g_n = 2n-5$

$g_{n+1} - g_n = 2(n+1)-5-(2n-5) =$

$= 2n+2-5-2n+5 = 2 > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $g_{n+1} - g_n > 0$

A sucessão (g_n) é monótona crescente.

$h_{n+1} - h_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^n =$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^n =$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2}-1\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $h_{n+1} - h_n > 0$

(h_n) é monótona crescente.

Pág. 158

8.1. $a_n = -1+\frac{1}{n}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$

$-1 < -1+\frac{1}{n} \leq 0$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $-1 < a_n \leq 0$, logo a sucessão (a_n) é limitada.

8.2. $b_n = 3$

A sucessão (b_n) é constante, logo é limitada.

8.3. $c_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$|c_n| = \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Como $\forall n\in\mathbb{N}$, $|c_n| \leq 1$, (c_n) é limitada.

8.4. $d_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Se n é par:

$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$

$0 < d_n \leq \frac{1}{2}$

Se n é ímpar, $d_n = -1$.

Logo, $\forall n\in\mathbb{N}$, $-1 \leq d_n \leq \frac{1}{2}$.

A sucessão (d_n) é limitada.

8.5. $e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$e_{n+1} - e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n =$

$= \left(\frac{2}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ e_{n+1} - e_n < 0$

A sucessão (e_n) é monótona decrescente $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ , \ e_n \le e_1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ , e_n \le \frac{2}{3}$

Por outro lado, como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$, vem que:

$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ 0 < e_n \le \frac{2}{3}$

Logo, a sucessão (e_n) é limitada.

9. $u_n - n$

O conjunto dos termos de (u_n) é $\mathbb{Z}^-$, ou seja, é não limitado.

Logo, (u_n) é uma sucessão não limitada.

10. $u_n = (-1)^n \times 3$

$u_n = \begin{cases} -3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ -3 \le u_n \le 3$

(u_n) é limitada

Pág. 159

11. $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n > 0$

$-\frac{6}{u_n} \le -3 \Leftrightarrow \frac{6}{u_n} \ge 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3u_n \le 6$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n > 0$

$\Leftrightarrow u_n \le 2$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < u_n \le 2 \Rightarrow (u_n)$ é limitada.

12.1. $u_n = 5 - \frac{3}{n+2}$

$0 < \frac{3}{n+2} \le \frac{3}{1+2}$ $\quad \left(\frac{3}{n+2} \text{ é decrescente}\right)$

$0 < \frac{3}{n+2} \le 1$

$-1 \le -\frac{3}{n+2} < 0$

$4 \le 5 - \frac{3}{n+2} < 5$

$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ 4 \le u_n < 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_n| \le 5$

12.2. $u_n = \frac{2n+3}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}$ $\quad \left(\frac{1}{n+1} \text{ é decrescente}\right)$

$0 < \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2}$

$2 < 2 + \frac{1}{n+1} \le 2 + \frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ 2 < u_n \le \frac{5}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_n| \le \frac{5}{2}$

12.3. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$

$|u_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

Como $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ define uma sucessão decrescente:

$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \frac{1}{\sqrt{n+2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+2}} = \frac{1}{3}$

Tomando $L = \frac{1}{3}$, temos $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_n| \le L$.

Pág. 160

13. $u_n = -2 + \frac{1}{n}$

13.1. $u_p < -2 + 0{,}1 \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{p} < -2 + 0{,}1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow p > 10$

$p = 11$

13.2. $u_p < -2 + \varepsilon \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{p} < -2 + \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p} < \varepsilon \Leftrightarrow p\varepsilon > 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{\varepsilon}$

p é o menor inteiro maior que $\frac{1}{\varepsilon}$.

13.3. $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ , \ -2 + \frac{1}{n} > -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n > -2$

Logo, -2 é um minorante de (u_n) .

Em **13.2.** mostrou-se que, se $x > -2$, x não é minorante de (u_n) . Portanto, -2 é o maior dos minorantes de (u_n) .

$u_n = -2 \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{n} = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} = 0$

A equação é impossível, pelo que -2 não é termo de (u_n) e, portanto, não é mínimo de (u_n) . Logo, (u_n) não tem mínimo.

Pág. 161

14. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$8^n : 4^n = 2^n$

- $P(1)$ é uma proposição verdadeira, pois

  $8^1 : 4^1 = 2^1 \Leftrightarrow 2 = 2$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

  $H: \ 8^n : 4^n = 2^n$

  $T: \ 8^{n+1} : 4^{n+1} = 2^{n+1}$

$$\begin{array}{r|l} 2n+3 & n+1 \\ \hline -2n-2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$8^{n+1} : 4^{n+1} = (8^n \times 8) : (4^n \times 4) =$ $\quad \frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$

$= (8^n : 4^n) \times (8 : 4) =$

$= 2^n \times 2 =$ $\quad$ Por hipótese

$= 2^{n+1}$

Logo, pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal em $\mathbb{N}$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ 8^n : 4^n = 2^n$.

Pág. 162

15.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

- $P(1)$ é uma proposição verdadeira, pois

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)=1^2 \Leftrightarrow 2-1=1 \quad \text{(verdadeira)}$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H:\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

$T:\ \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=(n+1)^2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+\sum_{k=n+1}^{n+1}(2k-1)=\\&=n^2+2(n+1)-1=\\&=n^2+2n+1=\\&=(n+1)^2\end{aligned}$$

Assim, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja: $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

15.2. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$P(n)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}(2k)=n(n+1)$$

- $P(1)$ é uma proposição verdadeira, dado que

$$\sum_{k=1}^{1}(2k)=1(1+1)\Leftrightarrow 2\times1=2 \quad \text{(verdadeiro)}$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H:\ \sum_{k=1}^{n}(2k)=n(n+1)$

$T:\ \sum_{k=1}^{n+1}(2k)=(n+1)(n+2)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k)&=\sum_{k=1}^{n}(2k)+\sum_{k=n+1}^{n+1}(2k)=\\&=n(n+1)+2(n+1)=\\&=(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

Por hipótese

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}(2k)=n(n+1)$.

15.3. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$P(n)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- $P(1)$ é uma proposição verdadeira, pois:

$$\sum_{k=1}^{1}k^3=\frac{1^2\times2^2}{4}\Leftrightarrow 1^3=\frac{4}{4}\Leftrightarrow 1=1$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H:\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$T:\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^3&=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=n+1}^{n+1}k^3=\\&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\\&=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}=\\&=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Por hipótese

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal.

Assim, $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Pág. 163

16. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$,

64^n-1 é múltiplo de 9

- $P(1)$ é verdadeira, dado que

$64^1-1=63$ e $63=9\times7$. Logo, 64^1-1 é múltiplo de 9

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H:\ 64^n-1$ é múltiplo de 9

$T:\ 64^{n+1}-1$ é múltiplo de 9

$$\begin{aligned}64^{n+1}-1&=64^n\times64-1=\\&=64^n(63+1)-1=\\&=63\times64^n+64^n-1=\\&=9\times7\times64^n+\left(64^n-1\right)\end{aligned}$$

Como $9\times7\times64^n$ é múltiplo de 9 e, por hipótese, 64^n-1 é múltiplo de 9, então $64^{n+1}-1$ é múltiplo de 9 por ser a soma de dois múltiplos de 9.

Logo, $P(n)$ é hereditária e, como $P(1)$ é verdadeira, então, pelo principio de indução matemática, é universal, ou seja,

$\forall n\in\mathbb{N},\ 64^n-1$ é múltiplo de 9

17.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$

n^2+3n é um número par

- $P(1)$ é verdadeira porque

$1^2+3\times1=4$ pelo que é um número par

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H:\ n^2+n$ é um número par

$T:\ (n+1)^2+n+1$ é um número par

$$\begin{aligned}(n+1)^2+n+1&=\\&=n^2+2n+2+n+1=\\&=\left(n^2+n\right)+2n+2=\\&=\left(n^2+n\right)+2(n+1)\end{aligned}$$

Como, por hipótese, n^2+n é um número par e $\forall n\in\mathbb{N},\ 2(n+1)$ é um número par, então

$(n+1)^2 + 2(n+1)$ é um número par por ser a soma de dois números pares.

Portanto, $P(n)$ é hereditária e como $P(1)$ é verdadeira, pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n$ é um número par

17.2. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$,

$n < 3^n$

- $P(1)$ é verdadeira porque $1 < 3^1$
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H: n < 3^n$

$T: n+1 < 3^{n+1}$

$n < 3^n \Rightarrow 3n < 3 \times 3^n \Rightarrow n + 2n < 3^{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow n+1 < 3^{n+1}$, porque $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < 2n$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < 3^n$.

Pág. 164

18. Em $\mathbb{N}$, se n é múltiplo de 5, então $n+1$ não é múltiplo de 5. Como $5n$ é múltiplo de 5, então $\forall n \in \mathbb{N}$, $5n+1$ não é múltiplo de 5.

Se $5n+1$ é múltiplo de 5, $5(n+1)+1 = (5n+1)+5$ é múltiplo de 5 por ser a soma de múltiplos de 5.

Logo, a condição é hereditária.

19. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$$

- $P(0)$ é verdadeira pois:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) \Leftrightarrow (0+1)^2 \Leftrightarrow (2\times 0+1) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2 ; \quad T: \sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = (n+2)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + \sum_{k=n+1}^{n+1}(2k+1) =$$

Por hipótese

$$= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 =$$
$$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 =$$
$$= n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

Pág. 166

20. $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = \dfrac{1}{b_{n-1}}, \ n \geq 2 \end{cases}$

20.1. $b_1 = 5$, $b_2 = \frac{1}{5}$, $b_3 = 5$ e $b_4 = \frac{1}{5}$

20.2. Por exemplo,

$$b_n = \begin{cases} 5 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{1}{5} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

21. $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = 3 + b_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \end{cases}$

Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$b_n = 3n + 2$

- $P(1)$ é verdadeira pois

$b_1 = 3 \times 1 + 2 \Leftrightarrow 5 = 5$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H: b_n = 3n + 2$

$T: b_{n+1} = 3(n+1) + 2$

$b_{n+1} = 3 + b_n$ (da fórmula de recorrência)

$= 3 + 3n + 2 =$ (por hipótese)

$= 3n + 3 + 2 = 3(n+1) + 2$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3n + 2$.

Pág. 167

22.1. $a_n = \dfrac{3-2n}{5}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3-2(n+1)}{5} - \frac{3-2n}{5} = \frac{3-2n-2-3+2n}{5} = -\frac{2}{5}$$

Como $a_1 = \frac{3}{5}$, (a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -\frac{2}{5}$ definida por $\begin{cases} a_1 = \dfrac{3}{5} \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{2}{5}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

22.2. $v_n = \dfrac{n+1}{n}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{-1}{n(n+1)}$$

Como $v_{n+1} - v_n$ não é constante, (v_n) não é uma progressão aritmética.

22.3. Pela definição, (w_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

Pág. 168

23.1. $a_1 = 12$ e $r = -1$

$a_{100} = a_1 + (100-1)\times(-1) = 12 - 99 = -87$

23.2. $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{3}$

$a_{100} = a_1 + (100-1)\times\frac{1}{3} = -2 + \frac{99}{3} = 31$

23.3. $a_1 = 0$ e $r = 1$

$a_{100} = 0 + (100-1)\times 1 = 99$

Pág. 169

24.1. $b_1 = 3$ e $r = -3$

$b_n = 3 + (n-1)\times(-3) \Leftrightarrow b_n = -3n + 6$

24.2. $b_5 = -10$ e $b_{10} = -25$

Cálculo da razão:

$b_{10} = b_5 + (10-5)\times r \Leftrightarrow -25 = -10 + 5r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5r = -15 \Leftrightarrow r = -3$

$b_n = b_5 + (n-5)\times(-3) \Leftrightarrow b_n = -10 - 3n + 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n = -3n + 5$

24.3. $b_2 + b_5 = 0$ e $r = \frac{1}{2}$

$b_2 + b_5 = 0 \Leftrightarrow b_5 = -b_2$

$b_5 = b_2 + (5-2)\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow -b_2 = b_2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2b_2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow b_2 = -\frac{3}{4}$

$b_n = b_2 + (n-2)\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow b_n = -\frac{3}{4} + \frac{n}{2} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n = \frac{n}{2} - \frac{7}{4}$

24.4. $b_1 - b_2 = 3 \wedge b_4 + b_6 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_2 - b_1 - 3 \wedge b_4 + (b_4 + 2r) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = -3 \wedge 2b_4 - 6 = 2 \Leftrightarrow r = -3 \wedge b_4 = 4$

$b_n = b_4 + (n-4)\times(-3) \Leftrightarrow b_n = 4 - 3n + 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n = -3n + 16$

25.1. $u_n = \frac{2n+1}{3}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{3} - \frac{2n+1}{3} = \frac{2n+2+1-2n-1}{3} = \frac{2}{3}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{3}$.

25.2. $100 < \frac{2n+1}{3} < 120 \Leftrightarrow 300 < 2n+1 < 360 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 299 < 2n < 359 \Leftrightarrow 150 \le n \le 179$

179 – 150 + 1 = 30

Há 30 termos da sucessão entre 100 e 120.

Pág. 170

26.1. $a_n = \frac{\pi^n}{3}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\pi^{n+1}}{3}}{\frac{\pi^n}{3}} = \frac{3\times\pi^{n+1}}{3\times\pi^n} = \pi^{n+1-n} = \pi$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão π .

26.2. $b_n = \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^n}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}} = \left(\sqrt{3}\right)^{n-n+1} = \sqrt{3}$$

(b_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{3}$.

26.3. $c_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2-(n+1)}}{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-n-1-2+n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

(c_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

27. $a_1 = -5$ e $a_4 = -40$

$a_4 = a_3\times r = (a_2\times r)\times r = a_1\times r\times r\times r$

$a_4 = a_1\times r^3 \Leftrightarrow -40 = -5\times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$

Pág. 171

28.1. $u_1 = -4$ e $r = 2$

$u_n = u_1\times r^{n-1}$

$u_n = -4\times 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = -2^2\times 2^{n-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = -2^{n+1}$

28.2. $u_2 = \frac{1}{2}$ e $r = 2$

$u_n = u_2\times r^{n-2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}\times 2^{n-2} \Leftrightarrow u_n = 2^{-1}\times 2^{n-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = 2^{n-3}$

28.3. $u_7 + u_6 = -36$ e $r = 3 \Leftrightarrow 3u_6 + u_6 = -36$ e $r = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4u_6 = -36$ e $r = 3 \Leftrightarrow u_6 = -9$ e $r = 3$

$u_n = u_6\times r^{n-6} \Leftrightarrow u_n = -9\times 3^{n-6} \Leftrightarrow u_n = -3^2\times 3^{n-6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = -3^{n-4}$

Pág. 173

29.1. $u_n = 2n$

$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2}\times 20 = \frac{2+40}{2}\times 20 =$

$= 42\times 10 = 420$

29.2. $u_n = 2n - 1$

$S_{100} = \frac{u_1 + u_{100}}{2}\times 100 = \frac{1+199}{2}\times 100 =$

$= 100\times 100 = 10\ 000$

29.3. $u_n = \frac{5n-1}{2}$

$$S_{35} = \frac{u_1 + u_{35}}{2}\times 35 = \frac{\frac{5-1}{2} + \frac{5\times 35-1}{2}}{2}\times 35 =$$

$$= \frac{2+87}{2}\times 35 = \frac{89\times 35}{2} = \frac{3115}{2}$$

29.4. $a_n = 2 - 3n$

$$\sum_{n=1}^{40} a_n = \frac{a_1 + a_{40}}{2}\times 40 = \frac{-1 + 2\times 120}{2}\times 40 =$$

$= -119\times 20 = -2380$

29.5. $b_n = \frac{n-1}{2}$

$$\sum_{n=10}^{20} b_n = \frac{b_{10} + b_{20}}{2}\times 11 = \frac{\frac{9}{2} + \frac{19}{2}}{2}\times 11 =$$

$$= \frac{14}{2}\times 11 = 7\times 11 = 77$$

29.6. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$u_1 = 2$

$u_{20} = u_1 + (20-1)\times 1 = 2 + 19 = 21$

$u_{100} = u_1 + 99 \times 1 = 2 + 99 = 101$

$\sum_{n=20}^{100} u_n = \frac{u_{20} + u_{100}}{2} \times (100 - 20 + 1) =$

$= \frac{21 + 101}{2} \times 81 = 61 \times 81 = 4941$

Pág. 175

30.1. Se a razão entre as áreas de dois triângulos consecutivos, t_{n+1} e t_n é $\frac{1}{4}$, então a razão entre as medidas dos lados desses triângulos é $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Logo, a sucessão (p_n) dos perímetros é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ sendo:

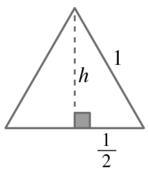
$p_1 = 3 \times 1 = 3$

$p_n = p_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow p_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow p_n = 3 \times 2^{1-n}$

30.2. $S_{10} = t_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{4}}$

Calculemos t_1:

$h^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4} \overset{h>0}{\Leftrightarrow} h = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$t_1 = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Logo, $S_{10} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{\frac{3}{4}} \approx 0,58$

30.3. $S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

31.1. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $r = \frac{1}{2}$

$S_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = 2 \times \frac{1023}{1024} = \frac{1023}{512}$

31.2. $a_n = 3^{-n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-(n+1)}}{3^{-n}} = 3^{-n-1+n} = \frac{1}{3} = r$

$\sum_{k=1}^{8} 3^{-n} = 3^{-1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^8}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{6560}{6561} = \frac{3280}{6561}$

31.3. $u_3 = 208$ e $u_5 = 3328$

$u_5 = u_3 \times r^2$

$3328 = 208 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 16 \Leftrightarrow r = -4 \vee r = 4$

Se $r = -4$:

$u_8 = u_5 \times r^3 = 3328 \times (-4)^3 = -212\ 992$

$S = u_8 \times \frac{1 \times (-4)^5}{1 - (-4)} = -212\ 992 \times \frac{1 + 4^5}{5} = -43\ 663\ 360$

Se $r = 4$:

$u_8 = u_5 \times r^3 = 3328 \times 4^3 = 212\ 992$

$S = u_8 \times \frac{1 - 4^5}{1 - 4} = 212\ 992 \times \frac{1 - 4^5}{-3} = 72\ 630\ 272$

Pág. 177

32.1. Minorantes: $]-\infty\ ,\ 0]$; majorantes: $\emptyset$; máximo: não existe

Mínimo: 0

32.2. $\frac{x+3}{2} \geq 1 \wedge \frac{3-x}{3} > 1 \Leftrightarrow x + 3 \geq 2 \wedge 3 - x > 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge -x > 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x < 0$

$B = [-1\ ,\ 0[$

Minorantes: $]-\infty\ ,\ -1]$; majorantes: $[0\ ,\ +\infty[$;

máximo: não tem; mínimo: –1

32.3. $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty\ ,\ -1] \cup [1\ ,\ +\infty[$

Minorantes: $\emptyset$; majorantes: $\emptyset$; máximo: não tem; mínimo: não tem

33. $u_n = (-1)^n \times \frac{n}{n+1}$

33.1. $u_1 = -\frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{3}$, $u_3 = -\frac{3}{4}$ e $u_4 = \frac{4}{5}$

$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{13}{60}$

33.2. **a)** $u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}$

b) $u_{2n} = (-1)^{2n} \frac{2n}{1+2n} = \left[(-1)^2\right]^n \times \frac{2n}{1+2n} =$

$= 1^n \times \frac{2n}{1+2n} = \frac{2n}{1+2n}$

33.3. $u_{59} = (-1)^{59} \times \frac{59}{60} = -\frac{59}{60}$

34.1. $a_n = 2n^2 + 1$

$a_{n+1} - a_n = 2(n+1)^2 + 1 - \left(2n^2 + 1\right) =$

$= 2n^2 + 4n + 2 + 1 - 2n^2 - 1 = 4n + 2 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n > 0$. Logo, (a_n) é crescente.

34.2. $b_n = \frac{n-1}{2n}$

$b_{n+1} - b_n = \frac{n}{2n+2} - \frac{n-1}{2n} = \frac{2n^2 - 2n^2 + 2n - 2n + 2}{2n(2n+2)} =$

$= \frac{1}{n(2n+2)} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n > 0$. Logo, (b_n) é crescente.

35. $a_n = \begin{cases} 2n & \text{se } n \le 5 \\ 10 & se\ \ n > 5 \end{cases}$

Se $n \le 4,\ a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2$.

Se $n = 5,\ a_{n+1} - a_n = a_6 - a_5 = 10 - 10 = 0$.

Se $n > 5,\ a_{n+1} - a_n = 0$.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n \ge 0$. Logo, (a_n) é monótona crescente em sentido lato.

36.1. $a_n = 1 - 2n$

$a_{n+1} - a_n = 1 - 2(n+1) - (1 - 2n) = 1 - 2n - 2 - 1 + 2n =$

$= -2 < 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n < 0$. Logo, (a_n) é monótona decrescente.

36.2. $b_n = \dfrac{2-n}{n+1}$

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{2-(n+1)}{n+1+1} - \dfrac{2-n}{n+1} = \dfrac{1-n}{n+2} - \dfrac{2-n}{n+1} =$

$= \dfrac{n - n^2 + 1 - n - 2n + n^2 - 4 + 2n}{(n+1)(n+2)} =$

$= \dfrac{-3}{(n+1)(n+2)} < 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n < 0$. Logo, (b_n) é monótona decrescente.

37.1. $a_n = 1 + (-1)^n$

$a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$

$a_2 > a_1$ e $a_3 < a_2$

Logo, (a_n) é não monótona.

37.2. $b_n = 4n + (-1)^n \times 2$

$b_{n+1} - b_n = 4(n+1) + (-1)^{n+1} \times 2 - \left(4n + (-1)^n \times 2\right) =$

$= 4n + 4 - (-1)^n \times 2 - 4n - (-1)^n \times 2 =$

$= 4 - 2 \times (-1)^n \times 2 = 4 - 4 \times (-1)^n =$

$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 8 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n \ge 0$.

Logo, (b_n) é crescente em sentido lato.

37.3. $c_n = 4 - (3-n)^2$

$c_{n+1} - c_n = 4 - \left(3 - (n+1)\right)^2 - \left(4 - (3-n)^2\right) =$

$= -2(2-n)^2 + (3-n)^2 =$

$= -4 + 4n - n^2 + 9 - 6n + n^2 =$

$= -2n + 5$

$5 - 2n > 0 \Leftrightarrow 2n < 5 \Leftrightarrow n = 1 \vee n = 2$

$5 - 2n < 0 \Leftrightarrow n \ge 3$

Logo, (c_n) é não monótona.

37.4. $d_n = (-1)^n - 2n$

$d_{n+1} - d_n = (-1)^{n+1} - 2(n+1) - \left[(-1)^n - 2n\right] =$

$= -(-1)^n - 2n - 2 - (-1)^n + 2n =$

$= -2 \times (-1)^n - 2 = \begin{cases} -4 & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} - d_n \le 0$.

Logo, (d_n) é decrescente em sentido lato.

38.1. $a_n = \dfrac{2}{n} + 3$

$0 < \dfrac{2}{n} \le 2$ $\left(\dfrac{2}{n}\ \text{é decrescente}\right)$

$3 < \dfrac{2}{n} + 3 \le 5$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 3 < a_n \le 5$.

Logo, (a_n) é limitada.

38.2. $b_n = -2$

(b_n) é constante. Logo, (b_n) é limitada.

38.3. $c_n = (-1)^n \times \dfrac{2}{n}$

$|c_n| = \dfrac{2}{n}$

$0 < \dfrac{2}{n} \le 2$ porque $\dfrac{2}{n}$ é decrescente

Logo, $\forall n \in \mathbb{N},\ |c_n| \le 2$ pelo que (c_n) é limitada.

38.4. $e_n = \dfrac{2n+5}{n} = 2 + \dfrac{5}{n}$

$0 < \dfrac{5}{n} \le 5$ $\left(\dfrac{5}{n}\ \text{é decrescente}\right)$

$2 < 2 + \dfrac{5}{n} \le 2 + 5$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 < e_n \le 7$ pelo que (e_n) é limitada.

38.5. $f_n = -2 - \dfrac{1}{n^2}$

$0 < \dfrac{1}{n^2} \le 1$ $\left(\dfrac{1}{n^2}\ \text{é decrescente}\right)$

$-1 \le -\dfrac{1}{n^2} < 0$

$-3 \le -2 - \dfrac{1}{n^2} < -2$

$\forall n \in \mathbb{N},\ -3 \le f_n < -2$. Logo, (f_n) é limitada.

38.6. $g_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$n \curvearrowright n^2 + 1$ define uma sucessão crescente. Logo,

$n \curvearrowright \sqrt{n^2+1}$ é crescente e g_n é decrescente

$0 < \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1+1}}$

$0 < g_n \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < g_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, (g_n) é limitada.

38.7. $h_n = -\dfrac{3n}{n+1} = -\left(3 - \dfrac{3}{n+1}\right)$

$$\begin{array}{r|l} 3n & n+1 \\ \hline -3n-3 & 3 \\ -3 & \end{array}$$

$h_n = -3 + \dfrac{3}{n+1}$

$0 < \dfrac{3}{n+1} \le \dfrac{3}{2}$ $\left(\dfrac{3}{n+1}\ \text{é decrescente}\right)$

$-3 < -3 + \dfrac{3}{n+1} \le -3 + \dfrac{3}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ -3 < h_n \le -\dfrac{3}{2}$

Logo, (h_n) é limitada.

38.8. Se n é par:

$0 < \frac{2}{n} \leq 1$ $\quad \left(\frac{2}{n} \text{ é decrescente}\right)$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N},\ -2 \leq i_n \leq 1$ pelo que (i_n) é limitada.

39.1. $a_n = 2n - 1$

O conjunto dos números ímpares não é majorado. Logo, a sucessão (a_n) não é limitada.

39.2. $b_n = -n^2$

O conjunto dos quadrados perfeitos naturais não é majorado. Logo, o conjunto de termos de (b_n) não é minorado pelo que (b_n) é não limitada.

39.3. $c_n = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n > n$. Como $\mathbb{N}$ não é majorado (c_n) não é limitada.

39.4. O conjunto dos números primos não é limitado. Logo, (d_n) não é limitada.

40. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$ e $a_5 = 4$

Se $n > 5$

$0 < \frac{3}{n} \leq \frac{3}{6}$ $\quad \left(\frac{3}{n} \text{ é decrescente}\right)$

$0 < a_n \leq \frac{1}{2}$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_n \leq 4$ pelo que (a_n) é limitada.

41. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \wedge \frac{5}{2u_n} \geq 1$

$u_n > 0 \wedge \frac{5}{2u_n} \geq 1 \Leftrightarrow u_n > 0 \wedge 5 \geq 2u_n \Leftrightarrow u_n > 0 \wedge u_n \leq \frac{5}{2}$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{5}{2}$ pelo que (u_n) é limitada.

42. $u_n = \frac{2-n}{n+2} = -1 + \frac{4}{n+2}$

$$\begin{array}{r|l} -n+2 & n+2 \\ \cline{2-2} n+2 & -1 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

$0 < \frac{4}{n+2} \leq \frac{4}{3}$ $\quad \left(\frac{4}{n+2} \text{ é decrescente}\right)$

$-1 < -1 + \frac{4}{n+2} \leq -1 + \frac{4}{3}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 < u_n \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq -1$

Pág. 178

43.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $P(1)$ é verdadeira:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} \Leftrightarrow 1^2 = \frac{6}{6} \quad \text{(verdadeira)}$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H:\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$T:\ \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^2 =$$

Por hipótese

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)[2n(n+2) + 3(n+2)]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

43.2. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$

- $P(1)$ é verdadeira, dado que

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} \quad \text{(verdadeira)}$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H:\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$

$$T:\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} + \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} =$$

Por hipótese

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2 + n + 1} =$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} =$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Portanto, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$

43.3. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$

$9^n - 2^n$ é múltiplo de 7

- $P(1)$ é verdadeiro dado que $9^1 - 2^1 = 7$ é um múltiplo de 7.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H:\ 9^n-2^n$ é múltiplo de 7; $T:\ 9^{n+1}-2^{n+1}$ é múltiplo de 7

$9^{n+1}-2^{n+1}=9\times 9^n-2\times 2^n=(7+2)\times 9^n-2\times 2^n=$

$=7\times 9^n+2\times 9^n-2\times 2^n=7\times 9^n+2\left(9^n-2^n\right)$

Logo, se por hipótese, 9^n-2^n é múltiplo de 7, então $9^{n+1}-2^{n+1}$ é múltiplo de 7 dado que o dobro de um múltiplo de 7 é um múltiplo de 7 e a soma de múltiplos de 7 é um múltiplo de 7. Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n\in\mathbb{N},\ 9^n-2^n$ é múltiplo de 7.

44. $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+1, \text{ para todo } n\in\mathbb{N}\end{cases}$

44.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$, $a_n<3$

- $P(1)$ é verdadeira porque $a_1=2$ logo, $a_1<3$
- $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

$H:\ a_n<3$

$T:\ a_{n+1}<3$

$a_n<3\Rightarrow \frac{2}{3}a_n<\frac{2}{3}\times 3\Rightarrow \frac{2}{3}a_n<2\Rightarrow \frac{2}{3}a_n+1<3\Rightarrow a_{n+1}<3$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n<3$.

44.2. $a_{n+1}-a_n=\frac{2}{3}a_n+1-a_n=1-\frac{a_n}{3}$

Pela alínea anterior, temos:

$a_n<3\Leftrightarrow -\frac{a_n}{3}>-1\Leftrightarrow 1-\frac{a_n}{3}>0$

Logo, $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}-a_n>0$ pelo que (a_n) é monótona crescente.

45. $b_n=\frac{2n+1}{3}$

$b_{n+1}-b_n=\frac{2(n+1)+1}{3}-\frac{2n+1}{3}=\frac{2n+2+1-2n-1}{3}=\frac{2}{3}$

Logo, (b_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{3}$.

46. $u_1=10$, $r=3$

$u_{100}=u_1+(100-1)\times 3=10+300-3=307$

47. $u_{10}=8$, $u_{20}=-2$

$u_{20}=u_{10}+(20-10)\times r\Leftrightarrow -2=8+10r\Leftrightarrow r=-1$

$u_n=u_{10}+(n-10)\times(-1)\Leftrightarrow u_n=8-n+10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n=-n+18$

48. $a_1=10$, $a_2=-5$

$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-5}{10}=-\frac{1}{2}$

$a_{30}=a_1\times r^{30-1}=10\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{29}=-10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{29}=$

$=-5\times 2\times 2^{-29}=-5\times 2^{-28}=-\frac{5}{2^{28}}$

49. $\frac{x}{6}=\frac{8,64}{x}\Leftrightarrow x^2=6\times 8,64\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=51,84\Leftrightarrow x=-7,2\vee x=7,2$

Resposta: **(A)**

50. (a_n) é uma progressão aritmética de razão $r=7$ sendo $a_1=2$.

$a_{10}=a_1+9\times r=2+9\times 7=65$

$s_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\times 10=\frac{2+65}{2}\times 10=67\times 5=335$

51. Seja x o termo intermédio e r a razão da progressão geométrica:

$\frac{x}{r}$, x, rx ← progressão geométrica

$\frac{x}{r}$, $x+8$, rx ← progressão aritmética

$\begin{cases}\frac{x}{r}+x+rx=52\\ x+8-\frac{x}{r}=rx-(x+8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{r}+rx=52-x\\ \frac{x}{r}+rx=16+2x\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{r}+rx=52-x\\ 52-x=16+2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{r}+rx=52-x\\ 3x=36\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{12}{r}+12r=52-12\\ x=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{12}{r}+12r-40=0\\ x=12\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}12r^2-40r+12=0\\ x=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=3\vee r=\frac{1}{3}\\ x=12\end{cases}$

Cálculos auxiliares

$r=\frac{40\pm\sqrt{40^2-4\times 12\times 12}}{24}\Leftrightarrow r=3\vee r=\frac{1}{3}$

Se $r=3$, $\frac{12}{r}=4$ e $12r=36$.

Se $r=\frac{1}{3}$, $\frac{12}{r}=36$ e $12r=4$.

Os números são 4, 12 e 36.

52.

$\begin{cases}\frac{x}{r}+x+rx=70\\ 5x-\frac{4x}{r}=4rx-5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{r}+rx=70-x\\ \frac{4x}{r}+4rx=10x\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{r}+rx=70-x\\ \frac{x}{r}+rx=\frac{10}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{r}+rx=70-x\\ 70-x=\frac{5}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{r}+rx=70-x\\ 7x=140\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{20}{r}+20r=70-20\\ x=20\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{20}{r}+20r-50=0\\ x=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}20r^2-50r+20=0\\ x=20\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\vee r=\frac{1}{2}\\ x=20\end{cases}$

Cálculos auxiliares

$2r^2-5r+2=0\Leftrightarrow r=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}\Leftrightarrow r=2\vee r=\frac{1}{2}$

Se $r=2$, $\frac{x}{r}=10$ e $rx=40$.

Se $r=\frac{1}{2}$, $\frac{x}{r}=40$ e $rx = 10$.

Os números são 10 , 20 e 40.

53. $\begin{cases} u_1=\frac{1}{5} \\ u_{n+1}=\frac{n+1}{3n}\times u_n\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

53.1. $u_2=\frac{1+1}{3}\times u_1=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

$u_3=\frac{2+1}{3\times 2}\times u_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{15}=\frac{1}{15}$

53.2. $v_n=\frac{u_n}{n}$

$v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{5}$

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{3n}\times u_n=\frac{u_n}{3n}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{u_n}{3n}}{\frac{u_n}{n}}=\frac{1}{3}$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

53.3. $v_n=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

$v_n=\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

54. $a_1=2$, $r=3$

$S_n=2186$

$a_1\times\frac{1-r^n}{1-r}=2186\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\times\frac{1-3^n}{1-3}=2186\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^n-1=2186\Leftrightarrow 3^n=2187$

$\Leftrightarrow 3^n=3^7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=7$

2187	3
729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

55. $u_2=52$ *e* $u_4=832$

$u_4=u_2\times r^{4-2}\Leftrightarrow 832=52\times r^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2=16\overset{r>0}{\Leftrightarrow} r=4$

$u_7=u_4\times r^3=832\times 4^3=53\ 248$

$S=u_7\times\frac{1-r^6}{1-r}=53\ 248\times\frac{1-4^6}{-3}=$

$=72\ 683\ 520$

56. $v_n=k^{u_n}$ e (u_n) é uma progressão aritmética de razão r.

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{k^{u_{n+1}}}{k^{u_n}}=k^{u_{n+1}-u_n}=k^r$

Logo, se (u_n) é uma progressão aritmética de razão r, (v_n) é uma progressão geométrica de razão k^r

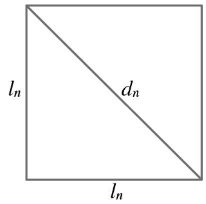
Pág. 179

57. Seja l_n o lado do quadrado q_n . Então, l_{n+1} é igual a d_n , diagonal do quadrado q_n .

$l_{n+1}=d_n=\sqrt{l_n^2+l_n^2}$

$l_{n+1}=\sqrt{2l_n^2}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ l_{n+1}=\sqrt{2}l_n$



57.1. $p_n=4l_n$ (perímetro = 4 × lado)

$p_{n+1}=4l_{n+1}=4\left(\sqrt{2}\,l_n\right)=\sqrt{2}\left(4l_n\right)$

$\forall n\in\mathbb{N},\ p_{n+1}=\sqrt{2}p_n$

Logo, (p_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$.

$a_n=(l_n)^2$ (área = (lado)^2)

$a_{n+1}=(l_{n+1})^2=\left(\sqrt{2}l_n\right)^2=2(l_n)^2=2a_n$

$\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=2a_n$

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

57.2. $l_1=2$

$p_n=p_1\times\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}=4\times 2\times\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}=8\times\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$

$a_n=a_1\times 2^{n-1}=2^2\times 2^{n-1}=2^{n+1}$

58. $\begin{cases}(x-r)+x+(x+r)=3\\(x-r)\times x\times(x+r)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\(1-r)(1+r)=-3\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\1-r^2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\r^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\r=-2\vee r=2\end{cases}$

Se $r=-2$ e $x=1$, $x-r=3$ e $x+r=-1$

Se $r=2$ e $x=1$, $x-r=-1$ e $x+r=3$

Os números são -1 , 1 e 3 **ou** 3 , 1 e -1.

59. $u_1+u_n=120$

$u_6+u_{n-5}=\ ?$

$u_6=u_1+5r$

$u_n=u_{n-5}+5r\Leftrightarrow u_{n-5}=u_n-5r$

$u_6+u_{n-5}=u_1+5r+u_n-5r=u_1+u_n=120$

60. 1 , $3\underset{10}{\frown}9\underset{10}{\frown}27$, ...

1 h = 6 × 10 min

$S_8=1\times\frac{1-3^8}{1-3}=3280$

3280 pessoas

61. $u_{n+1}-u_n=\frac{-1}{n(n+1)}$, para todo $n\in\mathbb{N}$

- $u_2-u_1=\frac{-1}{1\times 2}\Leftrightarrow u_2=u_1-\frac{1}{2}$
- $u_{n+1}-u_n$ não é constante.
- $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n<0$. Logo, (u_n) é estritamente decrescente. Sabemos que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

Portanto $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_n\le u_1$, ou seja, (u_n) é limitada.

Resposta: **(C)**

62. $\begin{cases}v_1=1024\\v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}\end{cases}$

62.1. Pela definição, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $-\frac{1}{2}$.

62.2. $v_1=1024$, $v_2=-\frac{1}{2}\times 1024=-512$, $v_3=-\frac{1}{2}\times 512=-256$

62.3. Não. Por exemplo, $v_2 < v_1$ e $v_3 > v_2$

62.4. $S_{10} = v_1 \cdot \frac{1-r^{10}}{1-r} = 1024 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}{1+\frac{1}{2}} =$

$= 1024 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = 1024 \times \frac{2}{3} \times \frac{1023}{1024} = 682$

62.5. $v_n = v_1 \times r^{n-1} = 1024 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Pág. 180

Avaliação 1

1. $u_n = \frac{2n+1}{2n}$

Resposta: **(D)**

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} - d_n \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (d_n)$ é monótona decrescente em sentido lato.

Resposta: **(C)**

3. $u_n = (-1)^{n+1}$

$u_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$, logo (u_n) é limitada

Resposta: **(C)**

4. $\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{3}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$u_2 = \frac{2 \times (-4) - 1}{3} = \frac{-9}{3} = -3$; $u_3 = \frac{2 \times (-3) - 1}{3} = \frac{-7}{3}$

Resposta: **(A)**

5. $u_n = 2 - 3n$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão –3.

Resposta: **(D)**

6. $c_1 = c_2 = 1$

$c_3 = 1 + 1 = 2$

$c_4 = 2 + 1 = 3$

$c_5 = 3 + 2 = 5$

Resposta: **(B)**

7. $\begin{cases} u_{10} = 5 \\ u_{n+1} = u_3 + 3, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão 3

$u_{100} = u_{10} + (100 - 10) \times 3 = 5 + 90 \times 3 = 275$

Resposta: **(B)**

Pág. 181

8. $a_n = \frac{4n+1}{n}$

8.1. $a_n = \frac{41}{10} \Leftrightarrow \frac{4n+1}{n} = \frac{41}{10} \Leftrightarrow 40n + 10 = 41n \Leftrightarrow n = 10$

$u_{10} = \frac{41}{10}$

$\frac{41}{10}$ é o 10.º termo da sucessão.

8.2. $a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)+1}{n+1} - \frac{4n+1}{n} = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n} =$

$= \frac{4n^2 + 5n - 4n^2 - n - 4n - 1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n < 0$. Logo (a_n) é monótona decrescente.

8.3. (a_n) não é uma progressão aritmética porque $a_{n+1} - a_n$ não é constante.

8.4. $a_n \le 5 \Leftrightarrow \frac{4n+1}{n} \le 5 \Leftrightarrow 4n + 1 \le 5n \Leftrightarrow n \ge 1$

Como $\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge 1$, podemos concluir que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le 5$

8.5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{4n+1}{n} > 0$. Logo

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \le 5$, pelo que (a_n) é limitada.

9. $b_n = \frac{3-n}{4}$

9.1. $b_{n+1} - b_n = \frac{3-(n+1)}{4} - \frac{3-n}{4} = \frac{3-n-1-3+n}{4} = -\frac{1}{4}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{4}$

(b_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -\frac{1}{4}$

9.2. $S_{21} = \frac{b_1 + b_{21}}{2} \times 21 = \frac{\frac{2}{4} - \frac{18}{4}}{2} \times 21 =$

$= \frac{-4}{2} \times 21 = -42$

9.3. $b_n < -10 \Leftrightarrow \frac{3-n}{4} < -10 \Leftrightarrow 3 - n < -40 \Leftrightarrow n > 43$

O primeiro termo b_n tal que $b_n < -10$ é $b_{44} = -\frac{41}{4}$.

10. $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$

$a_n = \frac{n}{n+1}$

- $P(1)$ é verdadeira, pois $a_1 = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (V)
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H:\ a_n = \frac{n}{n+1}$

$T:\ a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} =$ (pela fórmula de recorrência)

$= \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} =$ (por hipótese)

$= \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$

Portanto, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{n}{n+1}$.

11. $\sum_{n=1}^{100}(2n-1) = \frac{2\times1-1+2\times100-1}{2}\times100 = \frac{200}{2}\times100 = 10\ 000$

12. (a_n) é uma progressão aritmética

$S_{11} = 176$

$a_{11} = a_1 + 30$

$S_{11} = 176 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_{11}}{2}\times 11 = 176 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_1 + 30}{2} = \frac{176}{11} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 + 15 = 16 \Leftrightarrow a_1 = 1$

$a_{11} = a_1 + 10r \Leftrightarrow a_1 + 30 = a_1 + 10r \Leftrightarrow r = 3$

$a_n = 1 + (n-1)\times 3 \Leftrightarrow a_n = 3n - 2$

13. $a_2 = 1$, $r = 0,3$

$a_1 = a_2 - 0,3 = 1 - 0,3 = 0,7$

$a_{10} = a_2 + 8\times 0,3 = 1 + 2,4 = 3,4$

$S_{10} = \frac{0,7+3,4}{2}\times 10 = \frac{4,1}{2}\times 10 = 2,05\times 10 = 20,5$

O Luís percorreu 20,5 km.

14. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

14.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$:

$u_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

• $P(1)$ é verdadeira, pois

$u_1 = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} \Leftrightarrow 2 = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow 2 = 2\times 1 \quad (V)$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H:\ u_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$T:\ u_{n+1} = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

$u_{n+1} = \frac{u_n}{3} = \frac{1}{3}\times u_n =$ (da fórmula de recorrência)

$= \frac{1}{3}\times 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} =$ (por hipótese)

$= 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1+1} =$

$= 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, pelo principio de indução matemática, $P(n)$ é universal:

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

14.2. $u_{n+1} - u_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n} - 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} =$

$= 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n} - 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n} =$

$= (2 - 2\times 3)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n} =$

$= -4\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n} < 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n < 0$

Logo, (u_n) é monótona decrescente.

14.3. $S_7 = u_1\times\frac{1-r^7}{1-r} = 2\times\frac{2-\left(\frac{1}{3}\right)^7}{1-\frac{1}{3}} =$

$= 2\times\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^7}\right) = \frac{2186}{729}$

15. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(3n-10)(2n+3)}$

15.1. (u_n) não é uma progressão aritmética porque, $u_{n+1} - u_n$ não é constante.

15.2. $3n - 10 > 0 \Leftrightarrow n \geq 4$

$u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow n \geq 4$

$u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow n < 4$

Logo, (u_n) não é monótona.

15.3. $u_{n+1} > u_n$ para $n \geq 4$

$u_{n+1} < u_n$ para $n \leq 3$

Logo, $u_n \geq u_4,\ \forall n \in \mathbb{N}$ pelo que u_4 é um dos minorantes de (u_n) .

16. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 0 \wedge -\frac{2}{v_n} \leq -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 0 \wedge -2 \leq -3v_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 0 \wedge v_n \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < v_n \leq \frac{2}{3}$

Logo, (v_n) é limitada.

Atividade inicial 2

Pág. 182

1.1. $V_{0,2}(3)=]3-0,2\ ;\ 3+0,2[=]2,8\ ;\ 3,2[$

1.2. $V_{0,01}(3,5)=]3,5-0,01\ ;\ 3,5+0,01[=]3,49\ ;\ 3,51[$

2.1. $\frac{5-2}{2}=1,5$

$5-1,5=3,5$

$]-2\ ,\ 5[=V_{3,5}(1,5)$

2.2. $\left\{x\in\mathbb{R}:\ |x-0,2|<\frac{1}{10}\right\}=V_{\frac{1}{10}}(0,2)$

3. $u_n=\frac{2n+1}{n+1}$

$u_n-2=\frac{2n+1}{n+1}-2=\frac{2n+1-2n-2}{n+1}=\frac{-1}{n+1}$

$-\frac{1}{10}<u_n-2<\frac{1}{10}\Leftrightarrow-\frac{1}{n+1}>-\frac{1}{10}\wedge-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{10}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 10<n+1\Leftrightarrow n>9$

4. $u_n=3-\frac{1}{n}$

$u_n-3=3-\frac{1}{n}-3=-\frac{1}{n}$

$-\frac{1}{10}<u_n-3<\frac{1}{10}\Leftrightarrow-\frac{1}{n}>-\frac{1}{10}\wedge-\frac{1}{n}<\frac{1}{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\frac{1}{10}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n>10$

A partir do termo de ordem 11 (inclusive).

Pág. 184

1. $u_n=\frac{n+1}{n}$

1.1. $|u_n-1|<0,01\Leftrightarrow\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{100}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|\frac{n+1-n}{n}\right|<\frac{1}{100}\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n>100$

A partir do termo de ordem 101.

1.2. Seja δ um número positivo qualquer

$|u_n-1|<\delta\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\delta\Leftrightarrow n>\frac{1}{\delta}$ (da alínea anterior)

Sendo $p\in\mathbb{N}$ e $p\geq\frac{1}{\delta}$, tem-se

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq p\Rightarrow|u_n-1|<\delta$, ou seja,

$\lim u_n=1$.

2.1. Seja $u_n=\frac{3}{n}$ e δ um número positivo qualquer

$|u_n-0|<\delta\Leftrightarrow\frac{3}{n}<\delta\Leftrightarrow n>\frac{3}{\delta}$

Sendo $p\in\mathbb{N}$ e $p\geq\frac{3}{\delta}$, tem-se:

$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geq p\Rightarrow\left|\frac{3}{n}-0\right|<\delta$, ou seja,

$\lim\frac{3}{n}=0$.

2.2. Seja $u_n=\frac{3n}{2n+1}$ e δ um número positivo qualquer

$\left|u_n-\frac{3}{2}\right|<\delta\Leftrightarrow\left|\frac{3n}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\delta\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|\frac{6n-6n-3}{4n+2}\right|<\delta\Leftrightarrow\frac{3}{4n+2}<\delta\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3<4n\delta+2\delta\Leftrightarrow 4n\delta>3-2\delta\Leftrightarrow n>\frac{3-2\delta}{4\delta}$

Sendo p um número natural maior ou igual a $\frac{3-2\delta}{4\delta}$,

vem $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geq p\Rightarrow\left|\frac{3n}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\delta$.

Logo, $\lim\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

2.3. Seja δ um número positivo qualquer.

$\left|1-\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\delta\Leftrightarrow\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\delta\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\delta\Leftrightarrow n>\frac{1}{\delta}$

Sendo $p\in\mathbb{N}$ e $p\geq\frac{1}{\delta}$, então:

$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geq p\Rightarrow\left|1-\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\delta$

Logo, $\lim\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$.

Pág. 185

3.1. $\lim(-1)=-1$

3.2. $\lim\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

3.3. $\lim\sqrt{2}=\sqrt{2}$

3.4. $\lim(-\pi)+\lim\pi=-\pi+\pi=0$

3.5. $\lim\left(-\frac{1}{3}\right):\lim(-4)=-\frac{1}{3}:(-4)=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}$

Pág. 186

4. Sabe-se que $\lim v_n=b$ e (v_n) é decrescente.

Como (v_n) é convergente, então é limitada.

Atendendo a que (v_n) além de convergente para b é decrescente, então: $\forall n\in\mathbb{N},\ b<v_n<v_1$

Assim, b é um minorante e v_1 é um majorante do conjunto de termos de (v_n).

Pág. 187

5. $\begin{cases}u_1=0\\ u_{n+1}=\frac{7}{7-u_n},\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}\end{cases}$

5.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$P(n)\Leftrightarrow u_n<\frac{3}{2}$

• $P(1)$ é verdadeira, dado que $u_1=0$. Logo, $u_1<\frac{3}{2}$.

• $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Admitindo, por hipótese, que para dado $n \in \mathbb{N}$ se tem $u_n < \frac{3}{2}$, pretendemos provar que $u_{n+1} < \frac{3}{2}$.

$$u_n < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -u_n < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7 - u_n > 7 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 7 - u_n > \frac{11}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{7-u_n} < \frac{2}{11} \Leftrightarrow \frac{7}{7-u_n} < \frac{14}{11} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{3}{2} \text{ porque } \frac{14}{11} < \frac{3}{2}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{3}{2}$.

5.2. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$

- $P(1)$ é verdadeira dado que $u_2 = \frac{7}{7-u_1} = \frac{7}{7-0} = 1$

  e $u_1 = 0$ pelo que $u_2 > u_1$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

  Admitindo que para um dado $n \in \mathbb{N}$, se tem $u_{n+1} > u_n$, pretendemos provar que então $u_{n+2} > u_{n+1}$

$$u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -u_{n+1} < -u_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7 - u_{n+1} < 7 - u_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{7-u_{n+1}} > \frac{1}{7-u_n} \Leftrightarrow$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $7 - u_n > 0$ porque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{7-u_{n+1}} > \frac{7}{7-u_n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, podemos concluir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, ou seja, (u_n) é monótona crescente.

5.3. A sucessão (u_n) é monótona crescente e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{3}{2}$.

Logo, (u_n) é convergente porque toda a sucessão monótona crescente e majorada é convergente.

Pág. 188

6. $u_n = \frac{2n-3}{4}$

Seja L um número positivo qualquer.

$$u_n > L \Leftrightarrow \frac{2n-3}{4} > L \Leftrightarrow 2n - 3 > 4L \Leftrightarrow 2n > 4L + 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{4L+3}{2}$$

Portanto, sendo $p \in \mathbb{N}$ e $p > \frac{4L+3}{2}$, então:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow u_n > L$

Logo, $\lim u_n = +\infty$.

7. $a_n = n^2 - 1$

Seja L um número positivo qualquer.

$a_n > L \Leftrightarrow n^2 - 1 > L \Leftrightarrow n^2 > L + 1$

Como $n > 0$ e $L + 1 > 0$, vem $n > \sqrt{L+1}$.

Sendo p um número natural superior a $\sqrt{L+1}$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow u_n > L$

Portanto, $u_n \to +\infty$.

Pág. 189

8. $u_n = 1 - 8n$

Seja L um número positivo qualquer.

$$u_n < -L \Leftrightarrow 1 - 8n < -L \Leftrightarrow -8n < -L - 1 \Leftrightarrow n > \frac{L+1}{8}$$

Para $p \in \mathbb{N}$ e $p > \frac{L+1}{8}$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow u_n < -L$

Logo, $u_n \to -\infty$.

Pág. 190

9.1. $u_n = \frac{4n+1}{3n+3}$

Seja δ um número positivo qualquer.

$$\left|\frac{4n+1}{3n+3} - \frac{4}{3}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{12n+3-12n-12}{3(3n+3)}\right| < \delta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{-9}{9(n+1)}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \delta \Leftrightarrow n\delta + \delta > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n\delta > 1 - \delta \Leftrightarrow n > \frac{1-\delta}{\delta}$$

Portanto, para cada $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow \left|\frac{4n+1}{3n+3} - \frac{4}{3}\right| < \delta$ sendo $p \in \mathbb{N}$ e $p \geq \frac{1-\delta}{\delta}$. Logo, $\lim \frac{4n+1}{3n+3} = \frac{4}{3}$.

9.2. Seja $L \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{4n+1}{3} > L \Leftrightarrow 4n + 1 > 3L \Leftrightarrow 4n > 3L - 1 \Leftrightarrow n > \frac{3L-1}{4}$$

Logo, para cada $L \in \mathbb{R}^+$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ e $p \geq \frac{3L-1}{4}$.

Logo, $\lim \frac{4n+1}{3} = +\infty$.

9.3. Seja $L \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{-4n+1}{3} < -L \Leftrightarrow -4n + 1 < -3L \Leftrightarrow -4n < -1 - 3L \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{3L+1}{4}$$

Sendo p um número natural maior ou igual a $\frac{3L+1}{4}$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow \frac{-4n+1}{3} < -L$

Logo, $\lim \frac{-4n+1}{3} = -\infty$.

9.4. Como $\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right| = 0$, para qualquer $\delta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right| < \delta$.

Portanto, $\lim \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Pág. 191

10.1. $\lim \frac{2-4n}{4n+7} = -\frac{4}{4} = -1$

10.2. $\lim \frac{1+3n}{7n+5} = \frac{3}{7}$

10.3. $\lim \frac{1-6n}{9} = -\infty$

10.4. $\lim \frac{4n-1}{-n} = \frac{4}{-1} = -4$

10.5. $\lim \frac{2}{3-8n} = 0$

10.6. $\lim \frac{-6n}{13} = -\infty$

10.7. $\lim \frac{7n+1}{2} = +\infty$

10.8. $\lim(-2n+7) = -\infty$

10.9. $\lim(7-3n) = -\infty$

10.10. $\lim \frac{1}{n} = 0$

10.11. $\lim \frac{2}{3n+1} = 0$

10.12. $\lim \frac{-10}{1-3n} = 0$

Pág. 192

11. $u_n = \frac{1-3n}{n}$ e $a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{3} & \text{se } n \le 100 \\ \frac{n+1}{n} & \text{se } n > 100 \end{cases}$

11.1. $\lim a_n = \lim \frac{n+1}{n} = 1$

11.2. $\lim b_n = \lim u_{n+1} = \lim u_n = \lim \frac{1-3n}{n} = -3$

11.3. $\lim c_n = \lim u_{n+5} = \lim u_n = -3$

12. $a_n = \begin{cases} -3n & \text{se } n < 500 \\ \frac{1}{n+1} & \text{se } n \ge 500 \end{cases}$

12.1. $\lim a_n = \lim \frac{1}{n+1} = 0$

12.2. $\lim a_{n+1} = \lim a_n = 0$

Pág. 193

13. $a_n = (-1)^n \times \frac{3}{n}$

$a_n \to 0$ dado ser o produto de uma sucessão limitada, $\left((-1)^n\right)$, por uma sucessão que tende para 0, $\left(\frac{3}{n}\right)$.

14.1. $a_n = \frac{\cos(-n)}{2n+1} = \cos(-n) \times \frac{1}{2n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \le \cos(-n) \le 1$

$\lim \frac{1}{2n+1} = 0$

$a_n \to 0$, por ser o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0.

14.2. $b_n = \frac{1+2\sin n}{1-3n} = (1+2\sin n) \times \frac{1}{1-3n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \le \sin n < 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le 1+2\sin n \le 3$

$\lim \frac{1}{1-3n} = 0$

$b_n \to 0$, por ser o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0.

Pág. 194

15.1. $\lim a_n = \lim n^{10} = +\infty$

15.2. $\lim b_n = \lim n^{-4} = 0$

15.3. $\lim c_n = \lim n^{\frac{5}{7}} = +\infty$

15.4. $\lim d_n = \lim n^{-\frac{9}{5}} = 0$

15.5. $\lim e_n = \lim \sqrt{n} = \lim n^{\frac{1}{2}} = +\infty$

15.6. $\lim f_n = \lim \sqrt[3]{n^2} = \lim n^{\frac{2}{3}} = +\infty$

15.7. $\lim g_n = \lim\left(n \times \sqrt[5]{n^{-2}}\right) = \lim\left(n \times n^{-\frac{2}{5}}\right) =$

$= \lim n^{\frac{3}{5}} = +\infty$

Pág. 195

16.1. $\lim\left(3+\frac{1}{n}\right) = \lim 3 + \lim \frac{1}{n} = 3+0 = 3$

16.2. $\lim\left(\frac{2n+1}{n} + \frac{2-n}{n} + n^{-\frac{1}{2}}\right) =$

$= \lim \frac{2n+1}{n} + \lim \frac{2-n}{n} + \lim n^{-\frac{1}{2}} = 2-1+0 = 1$

16.3. $\lim\left(\frac{2-n}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim \frac{2-n}{n} + \lim 1 + \lim n^{-\frac{1}{2}} =$

$= -1+1+0 = 0$

16.4. $\lim\left(\frac{\sin(2n)}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) =$

$= \lim\left(\sin(2n) \times \frac{1}{n}\right) + \lim \frac{1}{n} + \lim n^{-3} =$

$= 0+0+0 = 0$ dado que

$\lim\left(\sin(2n) \times \frac{1}{n}\right) = 0$ porque $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \le \sin(2n) \le 1$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Pág. 196

17. $a_n = -3 + n^{-2}$

$\lim a_n = \lim(-3+n^{-2}) = \lim(-3) + \lim n^{-2} = -3+0 = -3$

$b_n = \frac{2-4n}{n+1}$

$\lim b_n = \frac{-4}{1} = -4$

$c_n = 2 + \frac{n+1}{n}$

$\lim c_n = \lim\left(2+\frac{n+1}{n}\right) = \lim 2 + \lim \frac{n+1}{n} = 2+1 = 3$

17.1. $\lim(a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = -3 \times (-4) = 12$

17.2. $\lim(b_n \times c_n) = \lim b_n \times \lim c_n = -4 \times 3 = -12$

17.3. $\lim(a_n \times c_n) = \lim a_n \times \lim c_n = -3 \times 3 = -9$

17.4. $\lim b_n + \lim(a_n - c_n) = -4 + \lim a_n - \lim c_n = -4-3-3 = -10$

Pág. 197

18. $a_n = 3 + n^{-\frac{1}{3}}$

$\lim a_n = \lim\left(3+n^{-\frac{1}{3}}\right) = \lim 3 + \lim n^{-\frac{1}{3}} = 3+0 = 3$

$b_n = 2 + \frac{1}{3n}$

$\lim b_n = \lim\left(2 + \frac{1}{3n}\right) = \lim 2 + \lim \frac{1}{3n} = 2 + 0 = 2$

$c_n = \frac{n+1}{2n} + \frac{n}{n+5}$

$\lim c_n = \lim\left(\frac{n+1}{2n} + \frac{n}{n+5}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

18.1. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{3}{2}$

18.2. $\lim \frac{a_n + 1}{c_n} = \frac{\lim a_n + \lim 1}{\lim c_n} = \frac{3+1}{\frac{3}{2}} = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

18.3. $\lim \frac{b_n + c_n}{a_n - b_n} = \frac{\lim b_n + \lim c_n}{\lim a_n - \lim b_n} = \frac{2 + \frac{3}{2}}{3 - 2} = \frac{7}{2}$

Pág. 198

19.1. $\lim\left(\frac{1}{n+1} - \frac{\sqrt{2}n+1}{n+\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\lim \frac{1}{n+1} - \lim \frac{\sqrt{2}n+1}{n+\sqrt{2}}\right)^4 =$

$= \left(0 - \sqrt{2}\right)^4 = 4$

19.2. $\lim\left(\frac{n}{2n+3} + 1 - n^{-2}\right)^{-2} = \left(\lim \frac{n}{2n+3} + 1 - \lim n^{-2}\right)^{-2} =$

$= \left(\frac{1}{2} + 1 - 0\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9}$

19.3. $\lim\left(\frac{n+1}{8n} - n^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\lim \frac{n+1}{8n} - \lim n^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} =$

$= \left(\frac{1}{8} - 0\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

19.4. $\lim \sqrt{\frac{n+1}{n} + 3} = \sqrt{\lim \frac{n+1}{n} + 3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

Pág. 200

20. $a_n = -2n + 1 \to -\infty$; $b_n = 1 + 3n^4 \to +\infty$; $c_n = \frac{3n+1}{n} \to 3$;

$d_n = \frac{-n-1}{2} \to -\frac{1}{2}$; $e_n = 1 + n \to +\infty$

20.1. $\lim(b_n + e_n) = +\infty + \infty = +\infty$

20.2. $\lim(e_n + c_n) = +\infty + 3 = +\infty$

20.3. $\lim(a_n + d_n) = -\infty + (-\infty) = -\infty$

20.4. $\lim(d_n + c_n) = -\infty + 3 = -\infty$

Pág. 201

21. $\lim a_n = \lim\left(n^2 + 2n + 1\right) = +\infty + \infty + 1 = +\infty$

$\lim b_n = \lim\left(1 - n^2\right) = 1 - \infty = -\infty$

$\lim c_n = \lim\left(5 - 2n - n^2\right) = 5 - \infty - \infty = -\infty$

$\lim d_n = \lim\left(1 - 3n - n^2\right) = 1 - \infty - \infty = -\infty$

21.1. $\lim(a_n + b_n) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\left(n^2 + 2n + 1 + 1 - n^2\right) =$

$= \lim(2n + 2) = +\infty$

21.2. $\lim(a_n + c_n) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\left(n^2 + 2n + 1 + 5 - 2n - n^2\right) =$

$= \lim 6 = 6$

21.3. $\lim(a_n + d_n) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\left(n^2 + 2n + 1 + 1 - 3n - n^2\right) =$

$= \lim(-n + 2) = -\infty$

Pág. 203

22. $a_n = \frac{2n+1}{n+1} - 4$; $b_n = n^2 - \frac{n+1}{2n}$ e $c_n = \frac{1}{n} - n^{\frac{1}{3}}$

22.1. a) $\lim a_n = \lim\left(\frac{2n+1}{n+1} - 4\right) = 2 - 4 = -2$

b) $\lim b_n = \lim\left(n^2 - \frac{n+1}{2n}\right) = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty$

c) $\lim c_n = \lim\left(\frac{1}{n} - n^{\frac{1}{3}}\right) = 0 - (+\infty) = -\infty$

22.2. a) $\lim(a_n \times b_n) = -2 \times (+\infty) = -\infty$

b) $\lim(c_n \times a_n) = -\infty \times (-2) = +\infty$

c) $\lim(b_n \times c_n) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$

d) $\lim\left[(a_n + b_n) \times c_n\right] = (-2 + \infty) \times (-\infty) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$

Pág. 204

23.1. $\lim a_n = \lim(n + 2) = +\infty$; $\lim b_n = \lim\left(2 + 3n^2\right) = +\infty$;

$\lim c_n = \lim\left(1 - n^2\right) = -\infty$ e $\lim d_n = \lim\left(-\frac{2}{n}\right) = 0$

23.2. $\lim(a_n \times d_n) \overset{(\infty\times 0)}{=} \lim\left[(n+2) \times \left(-\frac{2}{n}\right)\right] =$

$= \lim\left(-2 - \frac{4}{n}\right) = -2 - 0 = -2$

23.3. $\lim(b_n \times d_n) \overset{(\infty\times 0)}{=} \lim\left(\left(2 + 3n^2\right) \times \left(-\frac{2}{n}\right)\right) =$

$= \lim\left(-\frac{4}{n} - 6n\right) = 0 - \infty = -\infty$

23.4. $\lim(c_n \times d_n) = \lim\left[\left(1 - n^2\right) \times \left(-\frac{2}{n}\right)\right] =$

$= \lim\left(-\frac{2}{n} + 2n\right) = 0 + \infty = +\infty$

Pág. 206

24. $u_n = n^{\frac{2}{3}} + \frac{n}{n+1}$, $v_n = n^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{n+1}$

24.1. $\lim u_n = \lim\left(n^{\frac{2}{3}} + \frac{n}{n+1}\right) = +\infty + 1 = +\infty$

24.2. $\lim v_n = \lim\left(n^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{n+1}\right) = 0^+ + 0^+ = 0^+$

24.3. $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{+\infty} = 0$

24.4. $\lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Pág. 207

25. $u_n = n^{-\frac{3}{2}} + n^{-3}$; $v_n = \frac{3}{2n - n^{-3}}$

25.1. $\lim u_n = \lim\left(n^{-\frac{3}{2}} + n^{-3}\right) = 0^+ + 0^+ = 0^+$

25.2. $\lim v_n = \lim \dfrac{3}{2n - n^{-3}} = \dfrac{3}{+\infty - 0} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

25.3. $\lim \dfrac{u_n}{v_n} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim \dfrac{n^{-\frac{3}{2}} + n^{-3}}{\dfrac{3}{2n - n^{-3}}} = \lim\left[\left(n^{-\frac{3}{2}} + n^{-3}\right) \times \dfrac{2n - n^{-3}}{3}\right] =$

$= \lim \dfrac{2n^{-\frac{1}{2}} - n^{-\frac{9}{2}} + 2n^{-2} - n^{-6}}{3} = \dfrac{0 - 0 + 0 - 0}{3} = 0$

Pág. 209

26.1. $\lim\left(\dfrac{2-n}{3} - \dfrac{5}{n}\right)^3 = (-\infty - 0)^3 = -\infty$

26.2. $\lim\left(\dfrac{2}{n^{-1} + \dfrac{1}{n+1}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{2}{0^+ + 0^+}\right)^{\frac{2}{3}} = (+\infty)^{\frac{2}{3}} = +\infty$

26.3. $\lim \sqrt[3]{\dfrac{1+n^4}{5n^{-1}}} = \sqrt[3]{\dfrac{+\infty}{0^+}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

26.4. $\lim\left(\dfrac{3-2n}{1+n^{-2}}\right)^4 = (-\infty)^4 = +\infty$

Pág. 210

27.1. $\lim\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 3^{1-n} - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-n}\right] = 0 + \lim\left(3 \times \dfrac{1}{3^n}\right) - \lim 4^n =$

$= 3 \times \dfrac{1}{+\infty} - \infty = 3 \times 0 - \infty = -\infty$

27.2. $\lim \sqrt{2^{n+1} \times \dfrac{1+3^{-n}}{3+n^{-3}}} = \lim \sqrt{2 \times 2^n \times \dfrac{1+\dfrac{1}{3^n}}{3+\dfrac{1}{n^3}}} =$

$= \sqrt{+\infty \times \dfrac{1+0}{1+0}} = +\infty$

27.3. $\lim\left[\left(\dfrac{1}{9}\right)^n - \sqrt[3]{\dfrac{1-4n}{2^{-1}n+1}}\right] = 0 - \sqrt[3]{\dfrac{-4}{2^{-1}}} = -\sqrt[3]{-4 \times 2} =$

$= -\sqrt[3]{-8} = -(-2) = 2$

27.4. $\lim \dfrac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{4^{-n}} = \lim \dfrac{2^{-1} \times 2^n + 3 \times 3^n}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^n} = \dfrac{+\infty + \infty}{0^+} = +\infty$

Pág. 211

28. $\lim \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1$ dado que $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$ e 1.º termo $\dfrac{1}{2}$.

29. $\sqrt{n} = 4^{3-n}$

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{4^{3-(n+1)}}{4^{3-n}} = 4^{3-n-1-3+n} = \dfrac{1}{4}$

$v_1 = 4^{3-1} = 4^2 = 16$

$\lim s_n = \dfrac{v_1}{1-r} = \dfrac{16}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{16}{\dfrac{3}{4}} = 16 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{64}{3}$

30. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4} u_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(u_n) é uma progressão geométrica, sendo $u_1 = 3$ e $r = \dfrac{1}{4}$.

$\lim \sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{u_1}{1-r} = \dfrac{3}{1 - \dfrac{1}{4}} = 3 \times \dfrac{4}{3} = 4$

31. O comprimento c_n da linha é dado por:

$c_n = a_1 + a_2 + \ ... \ + a_n =$

$= \dfrac{2\pi \times 1}{2} + \dfrac{2\pi \times \dfrac{1}{2}}{2} + \dfrac{2\pi \times \dfrac{1}{4}}{2} \times \ ... \ \times \dfrac{2\pi \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{2} =$

$= \pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \ ... \ + \dfrac{\pi}{2^n}$

c_n é a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão $r = \dfrac{1}{2}$, sendo $c_1 = \pi$.

$\lim c_n = \dfrac{c_1}{1-r} = \dfrac{\pi}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2\pi$

32. Área do 1.º triângulo: $t_1 = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2$

Área do 2.º triângulo: $t_2 = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Área do 3.º triângulo: $t_3 = \dfrac{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{8}$

As medidas dos lados dos triângulos estão em progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$. Logo, as áreas, t_1 , t_2 , ... , t_n estão em progressão geométrica de razão $r = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, sendo $t_1 = 2$.

$\lim(t_1 + t_2 + \ ... \ + t_n) = \dfrac{t_1}{1-r} = \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{4}} = 2 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$

Pág. 213

33.1. $\lim(2 - 5n + 3n^5) = \lim(3n^5) = +\infty$

33.2. $\lim(2n^2 - 5n^3 + n) = \lim(-5n^3) = -\infty$

33.3. $\lim(3n^4 + 2n^3 + n^2 + 1)^{\frac{3}{2}} =$

$= \left[\lim(3n^4 + 2n^3 + n^2 + 1)\right]^{\frac{3}{2}} = \left[\lim(3n^4)\right]^{\frac{2}{3}} =$

$= (+\infty)^{\frac{2}{3}} = +\infty$

33.4. $\lim(2 - 3n^3 + n^{-2})^{-3} = \left[\lim(2 - 3n^3 + n^{-2})\right]^{-3} =$

$= \left[\lim(-3n^3) + \lim \dfrac{1}{n^2}\right]^{-3} = (-\infty + 0)^{-3} = 0$

33.5. $\lim \sqrt{5 + 2n + n^4} = \sqrt{\lim n^4} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

33.6. $\lim \sqrt[3]{1 - n^5} = \sqrt[3]{\lim(-n^5)} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$

33.7. $\lim\left(2+n^3+3^{n+1}-n^{-3}+3^{-n}\right)=$

$$=\lim n^3+\lim\left(3\times 3^n\right)-\lim\frac{1}{n^3}+\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=$$

$$=+\infty+(+\infty)-0+0=+\infty$$

33.8. $\lim\left(\dfrac{1}{n^3+n}+\sqrt[n]{2}\right)=0+1=1$

Pág. 214

34.1. $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$

$$=\lim\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

34.2. $\lim\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}\right)}{\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}}=$$

$$=\lim\frac{n^3+2-n^3+1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}}=$$

$$=\lim\frac{3}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}}=\frac{3}{+\infty}=0$$

34.3. $\lim\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)}{\sqrt{n^2+2}+n}=$

$$=\lim\frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}=\lim\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}=\frac{2}{+\infty}=0$$

34.4. $\lim\left(\sqrt{2}n-\sqrt{1+2n^2}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt{2}n-\sqrt{1+2n^2}\right)\left(\sqrt{2}n+\sqrt{1+2n^2}\right)}{\sqrt{2}n+\sqrt{1+2n^2}}=$$

$$=\lim\frac{2n^2-1-2n^2}{\sqrt{2}n+\sqrt{1+2n^2}}=\lim\frac{-1}{\sqrt{2}n+\sqrt{2+2n^2}}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

34.5. $\lim\left(\sqrt{n^{\frac{4}{3}}+2}-n^{\frac{2}{3}}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^{\frac{4}{3}}+2}-n^{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{n^{\frac{4}{3}}+2}+n^{\frac{2}{3}}\right)}{\sqrt{n^{\frac{4}{3}}+2}+n^{\frac{2}{3}}}=$

$$=\lim\frac{n^{\frac{4}{3}}+2-\left(n^{\frac{2}{3}}\right)^2}{\sqrt{n^{\frac{4}{3}}+2}+n^{\frac{2}{3}}}=\lim\frac{n^{\frac{4}{3}}+2-n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{n^{\frac{4}{3}}+2}+n^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\lim\frac{2}{\sqrt{n^{\frac{4}{3}}+2}+n^{\frac{2}{3}}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

Pág. 215

35.1. $\lim\dfrac{3-n-3n^4}{2n^4-n+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\dfrac{\cancel{n^4}\left(\dfrac{3}{n^4}-\dfrac{1}{n^3}-3\right)}{\cancel{n^4}\left(2-\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right)}=\dfrac{0-0-3}{2-0-0}=-\dfrac{3}{2}$

ou

$$\lim\frac{3-n-3n^4}{2n^4-n+1}=\lim\frac{-3n^4}{2n^4}=-\frac{3}{2}$$

35.2. $\lim\dfrac{2n^5-2n+1}{3n^3-n^2+3}=\lim\dfrac{n^5\left(2-\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}\right)}{n^3\left(3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^3}\right)}=$

$$=\lim\frac{n^2\left(2-\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}\right)}{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^3}}=\frac{+\infty\times 2}{3}=+\infty \quad \textbf{ou}$$

$$\lim\frac{2n^5-2n+1}{3n^3-n^2+3}=\lim\frac{2n^5}{3n^3}=\lim\frac{2n^2}{3}=+\infty$$

35.3. $\lim\dfrac{\sqrt{2}n^2+n+3}{n^4+n+5}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\dfrac{n^2\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^4\left(1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{5}{n^4}\right)}=$

$$=\lim\frac{\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{5}{n^4}\right)}=\frac{\sqrt{2}+0+0}{+\infty(1+0+0)}=0 \quad \textbf{ou}$$

$$\lim\frac{\sqrt{2}n^2+n+3}{n^4+n+5}=\lim\frac{\sqrt{2}n^2}{n^4}=\lim\frac{\sqrt{2}}{n^2}=\frac{\sqrt{2}}{+\infty}=0$$

35.4. $\lim\left(\dfrac{3-n^3}{n+1}\right)^3=\left[\lim\dfrac{n^3\left(\dfrac{3}{n^3}-1\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right]^3=\left[\lim\dfrac{n^2\left(\dfrac{2}{n^3}-1\right)}{1+\dfrac{1}{n}}\right]^3=$

$$=\left(\frac{+\infty(0-1)}{1+0}\right)^3=(-\infty)^3=-\infty \quad \textbf{ou}$$

$$\lim\left(\frac{3-n}{n+1}\right)^3=\left(\lim\frac{-n^3}{n}\right)^3=\left(\lim\left(-n^2\right)\right)^3=(-\infty)^3=-\infty$$

35.5. $\lim\sqrt{\dfrac{2n^3+n-1}{1+0{,}5n^3}}=\sqrt{\lim\dfrac{\cancel{n^3}\left(2+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(\dfrac{1}{n^3}+0{,}5\right)}}=$

$$=\sqrt{\frac{2+0-0}{0+0{,}5}}=\sqrt{4}=2 \quad \textbf{ou}$$

$$\lim\sqrt{\frac{2n^3+n-1}{1+0{,}5n^3}}=\sqrt{\lim\frac{2n^3}{0{,}5n^3}}=\sqrt{\frac{2}{0{,}5}}=\sqrt{4}=2$$

35.6. $\lim\sqrt[3]{\dfrac{1-n^3}{n^4}}=\sqrt[3]{\lim\left(\dfrac{1}{n^4}-\dfrac{1}{n}\right)}=\sqrt[3]{0-0}=0$

ou

$$\lim\sqrt[3]{\frac{1-n^3}{n^4}}=\sqrt[3]{\lim\frac{-n^3}{n^4}}=\sqrt[3]{\lim\left(-\frac{1}{n}\right)}=\sqrt[3]{0}=0$$

Pág. 216

36.1. $\lim\dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{5n}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\dfrac{n+\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}}{5n}=$ $\qquad \sqrt{n^2}=|n|=n$

$$=\lim\frac{n+n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{5n}=\lim\frac{n\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right)}{5n}=$$

$$=\lim\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{5}=\frac{1+\sqrt{1+0}}{5}=\frac{2}{5}$$

36.2. $\lim \frac{2n+\sqrt{n^2+n}}{n+\sqrt{n+1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{2n+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}} =$

$= \lim \frac{2n+n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n+n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{2+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{0+0}} = \frac{2+\sqrt{1}}{1+\sqrt{0}} = 3$

36.3. $\lim \frac{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}}{n+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{\sqrt{2n+1}}{n}}{1+\frac{1}{n}} =$

$= \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{0}+\sqrt{0+0}}{1+0} = 0$

36.4. $\lim \frac{1-n^2}{\sqrt{n}+n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\frac{1}{n}-n}{\frac{\sqrt{n}}{n}+1} = \lim \frac{\frac{1}{n}-n}{\sqrt{\frac{1}{n}}+1} = \frac{0-\infty}{0+1} = -\infty$

36.5. $\lim\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim \frac{\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+n}+2n} =$

$= \lim \frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \lim \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim \frac{n}{\sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n}\right)}+2n} = \lim \frac{n}{n\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2n} =$

$= \lim \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} = \frac{1}{\sqrt{4+0}+2} = \frac{1}{4}$

Pág. 217

36.6. $\lim\left[\sqrt{\frac{1}{n}}\times\left(n^2+1\right)\right] \overset{(0\times\infty)}{=} \lim \frac{n^2+1}{\sqrt{n}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\left(\frac{n^2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$

$= \lim \sqrt{\frac{n^4}{n}} + \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim \sqrt{n^3} + 0 = +\infty$

36.7. $\lim\left[\sqrt{\frac{1}{n}}\times\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt{2n}\right)\right] \overset{(0\times\infty)}{=} \lim \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}} =$

$= \lim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} + \lim \sqrt{\frac{2n}{n}} = \lim \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{2} =$

$= \lim n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} + \sqrt{2} = \lim n^{-\frac{1}{6}} + \sqrt{2} = 0+\sqrt{2} = \sqrt{2}$

36.8. $\lim \frac{2^{2n}+2}{4^n+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{4^n+2}{4^n+1} = \lim \frac{1+\frac{2}{4^n}}{1-\frac{1}{4^n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

36.9. $\lim \frac{3^n+5^{n-1}}{4^n+2^n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{3^n+5^n\times\frac{1}{5}}{4^n+2^n} =$

$= \lim \frac{\frac{3^n}{5^n}+\frac{1}{5}}{\frac{4^n}{5^n}+\frac{2^n}{5^n}} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{0+\frac{1}{5}}{0^++0^+} = +\infty$

36.10. $\lim \frac{2^{n+1}+2^{n-1}-3^{2n}}{4^n+9^{n+1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{2^n\times 2+2^n\times 2^{-1}-9^n}{4^n+9^n\times 9} =$

$= \lim \frac{\frac{2^n}{9^n}\times 2+\frac{2^n}{9^n}\times 2^{-1}-1}{\frac{4^n}{9^n}+9} = \lim \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n\times 2+\left(\frac{2}{9}\right)^n\times 2^{-1}-1}{\left(\frac{4}{9}\right)^n+9} =$

$= \frac{0\times 2+0\times 2^{-1}-1}{0+9} = -\frac{1}{9}$

36.11. $\lim\left(3^n-4^n\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\left[4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right)\right] = +\infty\times(0-1) = -\infty$

36.12. $\lim\left(5^{n+1}-2^n+3\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\left(5^n\times 5-2^n+3\right) =$

$= \lim\left[5^n\left(5-\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{3}{5^n}\right)\right] = +\infty\times(5-0+0) = +\infty$

36.13. $\lim \frac{2^n-\cos n}{2^{n-1}+\sin n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{2^n-\cos n}{2^n\times 2^{-1}-\sin n} = \lim \frac{1-\frac{\cos n}{2^n}}{2^{-1}-\frac{\sin n}{2^n}} =$

$= \frac{1-0}{2^{-1}-0} = 2$ dado que, como

$\forall n\in\mathbb{N}$, $-1\le\cos n\le 1 \wedge -1\le\sin n\le 1$ e $\frac{1}{2^n}\to 0$,

podemos concluir que $\frac{\cos n}{2^n}\to 0$ e $\frac{\sin n}{2^n}\to 0$.

(O produto de uma sucessão limitada por uma sucessão de limite nulo é uma sucessão que tende para 0.)

Pág. 218

37. $\begin{cases} v_1 = 10 \\ v_{n+1} = \sqrt{6v_n - 4}\ ,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

37.1. a) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}: v_{n+1} < v_n$

• $P(1)$ é verdadeira uma vez que:

$v_1 = 10$ e $v_2 = \sqrt{6\times 10-4} = \sqrt{56}$, ou seja, $v_2 < v_1$.

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos, por hipótese, que para dado $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} < v_n$. Pretendemos provar que $v_{n+2} < v_{n+1}$.

$v_{n+1} < v_n \Rightarrow 6v_{n+1} < 6v_n \Rightarrow$

$\Rightarrow 6v_{n+1} - 4 < 6v_n - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{6v_{n+1}-4} < \sqrt{6v_n-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{n+2} < v_{n+1}$

Sabemos da definição de (v_n) que $v_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Portanto, $P(n)$ é hereditária.

Fica, assim, provado que $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} < v_n$, ou seja, (v_n) é monótona decrescente.

b) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$, $v_n > 5$.

• $P(1)$ é verdadeira dado que $v_1 = 10$ e $10 > 5$.

• $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Admitamos, por hipótese, que para dado $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 5$. Pretendemos provar, então, que $v_{n+1} > 5$.

$$v_n > 5 \Rightarrow 6v_n > 6\times 5 \Rightarrow 6v_n - 4 > 30 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{6v_n - 4} > \sqrt{26} \Rightarrow v_{n+1} > 5$$

pela propriedade transitiva e dado que $\sqrt{26} > 5$.

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Ficou, assim, provado que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 5$.

37.2. (v_n) é monótona decrescente e minorada pois $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 5$. Logo, (v_n) é convergente.

37.3. Como (v_n) é convergente, $\lim v_n = \lim v_{n+1}$

$$\lim v_n = \lim v_{n+1} \Leftrightarrow \lim v_n = \lim \sqrt{6v_n - 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim v_n = \sqrt{6\lim v_n - 4}$$

Fazendo $L = \lim v_n$, temos:

$$L = \sqrt{6L-4} \Leftrightarrow L^2 = 6L - 4 \Leftrightarrow \qquad (L > 0 \text{ e } 6L-4>0)$$

$$\Leftrightarrow L^2 - 6L + 4 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} \Leftrightarrow L = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = 3 - \sqrt{5} \vee L = 3 + \sqrt{5}$$

Como $v_n > 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim v_n = 3 + \sqrt{5}$.

Pág. 219

38. $\begin{cases} v_1 = 20 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{5} + 8,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

38.1. Por indução matemática:

Seja $P(n)$ a condição: $v_n > 10$

• $P(1)$ é verdadeira porque $v_1 = 20$ e $20 > 10$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que para dado $n \in \mathbb{N},\ v_n > 10$. Então:

$$v_n > 10 \Leftrightarrow \frac{1}{5}v_n > \frac{1}{5}\times 10 \Leftrightarrow \frac{v_n}{5} + 8 > 2 + 8 \Leftrightarrow v_{n+1} > 10$$

Logo, $v_n > 10 \Rightarrow v_{n+1} > 10$ pelo que $P(n)$ é hereditário.

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 10$.

38.2. $u_n = v_n - 10$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1} - 10}{v_n - 10} = \frac{\frac{v_n}{5} + 8 - 10}{v_n - 10} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}v_n - 2}{v_n - 10} = \frac{\frac{1}{5}(v_n - 10)}{v_n - 10} = \frac{1}{5} \quad \text{pois, } v_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \dfrac{1}{5}$.

38.3. $u_1 = v_1 - 10 = 20 - 10 = 10$

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} = 10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Logo, $u_n = 10\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

$$u_n = v_n - 10 \Leftrightarrow v_n = u_n + 10$$

Logo, $v_n = 10\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + 10$.

38.4. $\lim \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{u_1}{1-r} = \frac{10}{1-\frac{1}{5}} = 10 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{2}$

Pág. 222

39. $u_n = \dfrac{1-3n}{4n+1}$

39.1. Seja δ um número positivo qualquer

$$\left|u_n - \left(-\frac{3}{4}\right)\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{1-3n}{4n+1} + \frac{3}{4}\right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{4 - 12n + 12n + 3}{16n+4}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{7}{16n+4}\right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{16n+4} < \delta \Leftrightarrow 7 < 16n\delta + 4\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16n\delta > 7 - 4\delta \Leftrightarrow n > \frac{7-4\delta}{16\delta}$$

Sendo $p \in \mathbb{N}$ e p maior ou igual que $\dfrac{7-4\delta}{168}$, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow \left|u_n - \left(-\dfrac{3}{4}\right)\right| < \delta$

Ou seja, $\lim u_n = -\dfrac{3}{4}$.

39.2. $u_n \in \left]-0{,}76\ ;\ -0{,}74\right[\Leftrightarrow u_n \in V_{\frac{1}{100}}\left(-0{,}75\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|u_n - \left(-\frac{3}{4}\right)\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \qquad \text{por } \mathbf{39.1.}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{7 - \frac{4}{100}}{16\times\frac{1}{100}} \Leftrightarrow n > \frac{87}{2} \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n > 43$$

Logo, há apenas 43 termos de (u_n) que não pertencem a $\left]-0{,}76\ ;\ -0{,}74\right[$.

40. $v_n = \dfrac{6}{1+2n}$

40.1. Seja δ um número positivo qualquer.

$$|v_n - 0| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{6}{1+2n}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{6}{1+2n} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta + 2n\delta > 6 \Leftrightarrow 2n\delta > 6 - \delta \Leftrightarrow n > \frac{6-\delta}{2\delta}$$

Logo, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, para $p \in \mathbb{N}$ e p maior ou igual a $\dfrac{6-\delta}{2\delta}$, temos $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow |v_n - 0| < \delta$.

Portanto, $\lim v_n = 0$.

40.2. Se $\delta = 0{,}05$.

$$p \in \mathbb{N} \wedge p \geq \frac{6 - 0{,}05}{2\times 0{,}05} \Leftrightarrow p \in \mathbb{N} \wedge p \geq 59{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \in \mathbb{N} \wedge p > 59$$

$$u_{60} = \frac{6}{1+120} = \frac{6}{121}$$

Como (v_n) é decrescente, o maior termo de (v_n) que pertence a $V_{0,05}(0)$ é $v_{60} = \dfrac{6}{121}$.

41. $u_n = \dfrac{1-n}{n+2}$

41.1. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$|u_n-(-1)|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{1-n}{n+2}+1\right|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{1-n+n+2}{n+2}\right|<\delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{3}{n+2}\right|<\delta \Leftrightarrow \frac{3}{n+2}<\delta \Leftrightarrow n\delta+2\delta>3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\delta>3-2\delta \Leftrightarrow n>\frac{3-2\delta}{\delta}$

Portanto, qualquer que seja $\delta\in\mathbb{R}^+$, para $p\in\mathbb{N}$ e p maior ou igual a $\frac{3-2\delta}{\delta}$, temos:

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq p\Rightarrow |u_n-(-1)|<\delta$, ou seja, $\lim u_n=-1$.

41.2. $]-1{,}005\,;\,-0{,}995[=V_{0{,}005}(-1)$

$\delta=0{,}005$

$p>\frac{3-2\times 0{,}005}{0{,}005}\wedge p\in\mathbb{N}\Leftrightarrow p>598\wedge p\in\mathbb{N}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p\geq 599\wedge p\in\mathbb{N}$

A partir da ordem $p = 599$.

41.3. Se (u_n) é convergente, então é limitada.

42. $\begin{cases}u_1=5\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+4},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

42.1. a) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}: u_n>0$

- $P(1)$ é verdadeira pois $u_1=5$ e $5>0$.
- $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, para dado $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$

$u_n>0\Rightarrow u_n+4>0\Leftrightarrow \sqrt{u_n+4}>0\Rightarrow u_{n+1}>0$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.

b) Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$, $u_{n+1}<u_n$.

- $P(1)$ é verdadeira, porque $u_1=5$ e $u_2=\sqrt{5+4}=3$.

Logo, $u_2<u_1$.

- $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Admitindo que, para dado $n\in\mathbb{N}$, se tem $u_{n+1}<u_n$, vamos provar que $u_{n+2}<u_{n+1}$.

$u_{n+1}<u_n\Rightarrow u_{n+1}+4<u_n+4\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{4_{n+1}+4}<\sqrt{u_n+4}\Rightarrow u_{n+2}<u_{n+1}$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}<u_n$, ou seja, (u_n) é monótona decrescente.

42.2. (u_n) é convergente dado que é monótona decrescente e minorada.

43. $a_n=3n-100$. Seja L um número real positivo qualquer.

$a_n>L\Leftrightarrow 3n-100>L\Leftrightarrow 3n>L+100\Leftrightarrow n>\frac{L+100}{3}$

Logo, para qualquer número positivo L existe uma ordem $p\in\mathbb{N}$, sendo p um número natural superior ou igual a $\frac{L+100}{3}$, tal que $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq p\Rightarrow u_n>L$.

Portanto, $u_n\to+\infty$.

44. $b_n=n^2-2n+1$

Seja L um número real positivo qualquer.

$b_n>L\Leftrightarrow n^2-2n+1>L\Leftrightarrow (n-1)^2>L\Leftrightarrow n-1>\sqrt{L}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n>1+\sqrt{L}$

Assim, para qualquer número real positivo L, existe uma ordem $p\in\mathbb{N}$, sendo p um número natural maior ou igual a $1+\sqrt{L}$, tal que $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq p\Rightarrow b_n>L$. Logo, $b_n\to+\infty$.

45.1. $u_n=500-4n$

Seja L um número positivo qualquer.

$u_n<-L\Leftrightarrow 500-4n<-L\Leftrightarrow 4n>500+L\Leftrightarrow n>\frac{500+L}{4}$

Sendo p um número natural superior ou igual a $\frac{500+L}{4}$,

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq p\Rightarrow u_n<-L$.

Logo, $u_n\to-\infty$.

45.2. $u_n=1-\sqrt{n}$. Seja $L\in\mathbb{R}^+$.

$u_n<-L\Leftrightarrow 1-\sqrt{n}<-L\Leftrightarrow\sqrt{n}>1+L\Leftrightarrow n>(1+L)^2$

Sendo p um número natural maior ou igual a $(1+L)^2$, vem $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq p\Rightarrow u_n<-L$. Logo, $u_n\to-\infty$.

46.1. $\lim\frac{2n-2}{1-3n}=-\frac{2}{3}$

46.2. $\lim\frac{4n}{2n-3}=\frac{4}{2}=2$

46.3. $\lim\frac{-1}{5n+2}=0$

46.4. $\lim\frac{1+4n}{n}=\frac{4}{1}=4$

46.5. $\lim\frac{-1+4n}{2}=+\infty$

46.6. $\lim\frac{3-5n}{1-\sqrt{2}}=+\infty$

47. $\begin{cases}u_1=\frac{1}{3}\\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

47.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}: u_n=\frac{2n-1}{2n+1}$

- $P(1)$ é verdadeira pois $u_1=\frac{1}{3}$ e $\frac{2\times1-1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$
- $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Admitamos, por hipótese, que, para dado $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{2n-1}{2n+1}$. Pretendemos provar que:

$u_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)+1}=\frac{2n+1}{2n+3}$

$u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-\frac{2n-1}{2n+1}}=$ (por hipótese)

$=\frac{1}{\frac{4n+2-2n+1}{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n+3}$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, fica provado que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{2n-1}{2n+1}$.

47.2. $\lim u_n=\lim\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{2}{2}=1$

48.1. $\lim a_n=\lim\frac{5n-1}{3n}=\frac{5}{3}$

48.2. $\lim b_n=\lim(1-3n)=-\infty$

48.3. $\lim c_n=\lim a_{n+1}=\lim a_n=\frac{5}{3}$

48.4. $\lim d_n=\lim b_{n+5}=\lim b_n=-\infty$

49. $u_n=\frac{2\times(-1)^{n+1}}{1-5n}$ e $v_n=\frac{1-2\sin n}{1+\sqrt{2n}}$

49.1. Seja $a_n = 2\times(-1)^{n+1}$ e $b_n = \frac{1}{1-5n}$.

(a_n) é limitada porque o conjunto dos termos de (a_n) é {–2 , 2}.

$\lim b_n = \lim \frac{1}{1-5n} = 0$

Logo, $u_n \to 0$ por ser o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0.

49.2. Seja $a_n = 1-2\sin n$ e $b_n = \frac{1}{1+\sqrt{2n}}$

$-1 \le \sin n \le 1$

$-2 \le -2\sin n \le 2$

$-1 \le 1-2\sin n \le 3$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \le a_n \le 3$, ou seja, (a_n) é limitada

$\lim b_n = \lim \frac{1}{1+\sqrt{2n}} = 0$.

Então, $v_n \to 0$ porque v_n é o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0.

49.3. u_n é convergente, logo é limitada.

$v_n \to 0$

$u_n \times v_n \to 0$ (produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0).

Pág. 223

50.1. $\lim a_n = \lim n^5 = +\infty$

50.2. $\lim b_n = \lim n^{-6} = 0$

50.3. $\lim c_n = \lim n^{-\frac{1}{2}} = 0$

50.4. $\lim d_n = \lim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} =$

$= \lim n^{\frac{2-3}{6}} = \lim n^{-\frac{1}{6}} = 0$

50.5. $\lim e_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{1-\frac{1}{2}} =$

$= \lim n^{\frac{1}{2}} = +\infty$

50.6. $\lim f_n = \lim \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = \lim n^{\frac{1}{3}-1} = \lim n^{-\frac{2}{3}} = 0$

51.1. $\lim\left(n^{-3}\times\cos(2n) + \frac{2n+1}{n}\right) =$

$= \lim\left(n^{-3}\times\cos(2n)\right) + \lim \frac{2n+1}{n} =$

$= 0 + \frac{2}{1} = 2$, dado que $n^{-3} \to 0$ e

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \le \cos(2n) \le 1$

51.2. $\lim\left(\frac{3n-1}{2n} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + 1\right) = \lim \frac{3n-1}{2n} + \lim n^{-\frac{1}{3}} + \lim 1 =$

$= \frac{3}{2} + 0 + 1 = \frac{5}{2}$

51.3. $\lim\left(\frac{2n+1}{\sqrt{2}n} + \frac{\sqrt{2}n+1}{n}\right) = \lim \frac{2n+1}{\sqrt{2}n} + \lim \frac{\sqrt{2}n+1}{n} =$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

51.4. $\lim\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1-2n}{2n+1}\right) = \lim n^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} + \lim \frac{1-2n}{2n+1} =$

$= \lim n^{-\frac{1}{4}} + \frac{-2}{2} = 0 - 1 = -1$

52.1. $\lim a_n = \lim\left[2\left(n^{-5}+2\right)\right] = 2\times(0+2) = 4$

$\lim b_n = \lim\left(\frac{\sqrt{8}n+1}{1-\sqrt{2}n} - \frac{n-1}{n}\right) = \lim \frac{\sqrt{8}n+1}{1-\sqrt{2}n} - \lim \frac{n-1}{n}$

$= \frac{\sqrt{8}}{-\sqrt{2}} - \frac{1}{1} = -\sqrt{4} - 1 = -3$

52.2. a) $\lim(a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = 4\times(-3) = -12$

b) $\lim(2a_n - b_n) = 2\lim a_n - \lim b_n = 2\times 4 + 3 = 11$

c) $\lim\left[(a_n - b_n)\times b_n\right] = (\lim a_n - \lim b_n)\times \lim b_n =$

$= (4+3)\times(-3) = -21$

53. $u_n = \left(n^{-1} - 2\right)\times\frac{1-3n}{1+n}$ e $v_n = 3\times\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{n} - 1\right)$

53.1. $\lim u_n = \lim\left[\left(n^{-1}-2\right)\times\frac{1-3n}{1+n}\right] =$

$= \lim\left(n^{-1}-2\right)\times\lim\frac{1-3n}{1+n} = (0-2)\times\frac{-3}{1} = 6$

$\lim v_n = \lim\left[3\times\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{n} - 1\right)\right] = 3\times\lim\left(n^{\frac{1}{4}-1} - 1\right) =$

$= 3\times\lim\left(n^{-\frac{3}{4}} - 1\right) = 3\times(0-1) = -3$

53.2. a) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{6}{-3} = -2$

b) $\lim \frac{u_n + 2v_n}{1+u_n} = \frac{\lim u_n + 2\lim v_n}{1 + \lim u_n} = \frac{6+2\times(-3)}{1+6} = 0$

c) $\lim\left(\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n}\times 2u_n\right) = \frac{\lim u_n - \lim v_n}{\lim u_n + \lim v_n}\times 2\lim u_n =$

$= \frac{6-(-3)}{6+(-3)}\times 2\times 6 = \frac{9\times 12}{3} = 36$

d) $\lim\left(\frac{2u_n+1}{4v_n}\times\frac{v_n+2}{u_n}\right) = \frac{2\lim u_n + 1}{4\lim v_n}\times\frac{\lim v_n + 2}{\lim u_n} =$

$= \frac{2\times 6+1}{4\times(-3)}\times\frac{-3+2}{6} = \frac{13}{-12}\times\frac{-1}{6} = \frac{13}{72}$

54.1. $\lim\left[2+(2n)^{-1}\right]^{-3} = \left[\lim 2 + \lim(2n)^{-1}\right]^{-3} =$

$= \left(2 + \lim 2^{-1}\times\lim n^{-1}\right)^{-3} = \left(2 + 2^{-1}\times 0\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

54.2. $\lim\left(\frac{2}{n} + \frac{1+4n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\lim\frac{2}{n} + \lim\frac{1+4n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(0 + \frac{4}{1}\right)^{\frac{3}{2}} =$

$= 4^{\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

54.3. $\lim\sqrt{3\left(2+\frac{n+1}{n}\right)} = \sqrt{3\times\left(2+\lim\frac{n+1}{n}\right)} =$

$= \sqrt{3(2+1)} = 3$

54.4. $\sqrt[3]{1-\left(\frac{3n-1}{n+1}\right)^2} = \sqrt[3]{1-\left(\lim\frac{3n-1}{n+1}\right)^2} =$

$= \sqrt[3]{1-3^2} = \sqrt[3]{1-9} = \sqrt[3]{-8} = -2$

55. $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$, $w_n \to 2$

55.1. $\lim(u_n - v_n) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

55.2. $\lim(w_n + u_n) = 2 + \infty = +\infty$

55.3. $\lim(v_n - w_n) = -\infty - 2 = -\infty$

55.4. $\lim(v_n - u_n) = -\infty - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$

56. $a_n = 1 + n^2$, $b_n = 2 - n^2$ e $c_n = n^2 + n - 2$

56.1. $\lim a_n = \lim(1 + n^2) = 1 + \infty = +\infty$

$\lim b_n = \lim(2 - n^2) = 2 - \infty = -\infty$

$\lim c_n = \lim(n^2 + n - 2) = +\infty + \infty - 2 = +\infty$

56.2. $\lim(a_n + b_n) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim(1 + n^2 + 2 - n^2) = \lim 3 = 2$

56.3. $\lim(b_n + c_n) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim(2 - n^2 + n^2 + n - 2) = \lim n = +\infty$

56.4. $\lim(a_n - c_n) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim(1 + n^2 - n^2 - n + 2) = \lim(-n + 3) = -\infty$

57.1. $\lim\left[\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)(n^2 + 1)\right] = 2 \times (+\infty) = +\infty$

57.2. $\lim\left[(n^{-2} - n^2)\left(1 + n^{\frac{1}{2}}\right)\right] = (0 - \infty)(1 + \infty) = -\infty$

57.3. $\lim\left[\left(\frac{1}{n+1} - 3\right)(3 - 2n)\right] = (0 - 3) \times (-\infty) = +\infty$

57.4. $\lim\left[\left(1 - \frac{n}{\sqrt{n}}\right)(1 - n) + n^{-2} \times n + 1\right] =$

$= \lim\left[\left(1 - \frac{n\sqrt{n}}{n}\right)(1 - n) + n^{-1} + 1\right] =$

$= \lim\left[(1 - \sqrt{n})(1 - n) + n^{-1} + 1\right] =$

$= (1 - \infty)(1 - \infty) + 0 + 1 = +\infty + 1 = +\infty$

58.1. $\lim a_n = \lim(n^{-2} + n^{-1}) = 0 + 0 = 0$

$\lim u_n = \lim(n + 1) = +\infty$; $\lim v_n = \lim(n^3 + n^2) = +\infty$

$\lim w_n = \lim[n(1 - n)] = +\infty \times (-\infty) = -\infty$

58.2. $\lim(a_n \times u_n) \overset{(0\times\infty)}{=} \lim\left[(n^{-2} + n^{-1})(n + 1)\right] =$

$= \lim(n^{-1} + n^{-2} + 1 + n^{-1}) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$

58.3. $\lim(a_n \times v_n) \overset{(0\times\infty)}{=} \lim\left[(n^{-2} + n^{-1})(n^3 + n^2)\right] =$

$= \lim(n + 1 + n^2 + n) = +\infty + 1 + \infty + \infty = +\infty$

58.4. $\lim(a_n \times w_n) \overset{(0\times\infty)}{=} \lim\left[(n^{-2} + n^{-1})(n - n^2)\right] =$

$= \lim(n^{-1} + 1 + 1 - n) = 0 + 2 - \infty = -\infty$

59.1. $\lim \frac{2}{n^2(1 + n^{-3})} = 2 \times \frac{1}{+\infty} = 2 \times 0 = 0$

59.2. $\lim \frac{3}{n^{-1} + n^{-2}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Pág. 224

60.1. $\lim \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{(x_n - 1)} =$

$= \lim(x_n + 1) = \lim x_n + 1 = 1 + 1 = 2$

60.2. $\lim \frac{x_n - 2}{x_n^2 - 4} = \lim \frac{x_n - 2}{(x_n - 2)(x_n + 2)} = \lim \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$

61.1. $\lim\left[(1 + \sqrt{n + 1})^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{1 - n}\right] =$

$= (1 + \infty)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{-\infty} = +\infty + \infty = +\infty$

61.2. $\lim\left[(1 - n)^5 \times \sqrt[4]{1 + n}\right] = -\infty \times (+\infty) = -\infty$

62. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

62.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^{1-n}$

- $P(1)$ é verdadeira, pois $u_1 = 1 + 2^{1-1} \Leftrightarrow 2 = 1 + 1$ (V)
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, dados $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = 1 + 2^{1-n}$. Pretendemos, então, provar que:

$u_{n+1} = 1 + 2^{1-(n+1)} = 1 + 2^{-n}$

$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2} =$ (pela fórmula de recorrência)

$= \frac{1 + 1 + 2^{1-n}}{2} =$ (por hipótese)

$= \frac{2 + 2^{1-n}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2^{1-n}}{2} = 1 + 2^{1-n-1} = 1 + 2^{-n}$

Logo, $P(n)$ é hereditária. Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^{1-n}$.

62.2. $\lim u_n = \lim(1 + 2^{1-n}) = \lim 1 + \lim(2 \times 2^{-n}) =$

$= 1 + 2 \times \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 2 \times 0 = 1$

63.1. $\lim \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[3]{1 + n - n^3}} = \frac{\lim \sqrt[n]{3}}{\sqrt[3]{\lim(-n)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-\infty}} = 0$

63.2. $\lim(n + n^2 + 2^n)^{\frac{2}{3}} = (+\infty + \infty)^{\frac{2}{3}} = +\infty$

64.1. $\lim\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} =$

$= \lim \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{+\infty} = 0$

64.2. $\lim\left(\sqrt{1 + 3n} - \sqrt{3}\sqrt{n}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim \frac{\left(\sqrt{1 + 3n} - \sqrt{3n}\right)\left(\sqrt{1 + 3n} + \sqrt{3n}\right)}{\sqrt{1 + 3n} + \sqrt{3n}} =$

$= \lim \frac{1 + \cancel{3n} - \cancel{3n}}{\sqrt{1 + 3n} + \sqrt{3n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

64.3. $\lim\left(3n + 1 - \sqrt{9n^2 + 6n}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim \frac{\left(3n + 1 - \sqrt{9n^2 + 6n}\right)\left(3n + 1 + \sqrt{9n^2 + 6n}\right)}{3n + 1 + \sqrt{9n^2 + 6n}} =$

$= \lim \frac{9n^2 + 6n - 1 - 9n^2 - 6n}{3n + 1 + \sqrt{9n^2 + 6n}} = \lim \frac{1}{3n + 1 + \sqrt{9n^2 + 6n}} =$

$= \frac{1}{+\infty} = 0$

65.1. $\lim \dfrac{\sqrt{n}\times\sqrt{n+1}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{2n-1}} = \lim \sqrt{\dfrac{n^2+n}{2n-1}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

65.2. $\lim \dfrac{n+1}{\sqrt{2}n-n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \dfrac{n+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)n} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$

66.1. $\lim \sqrt{\dfrac{2n+3}{4n-1}} = \sqrt{\lim \dfrac{2n}{4n}} = \sqrt{\dfrac{2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

66.2. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}-2n}{3n-2} = \lim \dfrac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-2n}{3n-2} =$

$= \lim \dfrac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2n}{3n-2} = \lim \dfrac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} =$

$= \lim \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2}{3-\frac{2}{n}} = \dfrac{\sqrt{1+0}-2}{3-0} = -\dfrac{1}{3}$

66.3. $\lim \dfrac{2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n+1}} = \lim \dfrac{2-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}} = \lim \dfrac{2-\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt{\frac{2n+1}{n}}} =$

$= \lim \dfrac{2-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} = \dfrac{2-\sqrt{1+0}}{\sqrt{2+0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

66.4. $\lim\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+2}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim \dfrac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+2}} =$

$= \lim \dfrac{2n+1-(n+2)}{\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}} =$

$= \lim \dfrac{n-1}{n\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} =$

$= \lim \dfrac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

66.5. $\lim\left(3n+1-\sqrt{9n^2+n}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim \dfrac{\left(3n+1-\sqrt{9n^2+n}\right)\left(3n+1+\sqrt{9n^2+n}\right)}{3n+1+\sqrt{9n^2+n}} =$

$= \lim \dfrac{(3n+1)^2-\left(9n^2+n\right)}{3n+1+\sqrt{n^2\left(9+\frac{1}{n}\right)}} = \dfrac{9n^2+6n+1-9n^2-1}{3n+1+n\sqrt{9+\frac{1}{n}}} =$

$= \lim \dfrac{5n+1}{3n+1+n\sqrt{9+\frac{1}{n}}} = \lim \dfrac{n\left(5+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}+\sqrt{9+\frac{1}{n}}\right)} =$

$= \dfrac{5+0}{3+0+\sqrt{9+0}} = \dfrac{5}{3+3} = \dfrac{5}{6}$

66.6. $\lim \dfrac{2^{n+1}}{2^{2n}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \dfrac{2^n\times 2}{4^n} = 2\times\lim\left(\dfrac{2}{4}\right)^n = 2\times 0 = 0$

66.7. $\lim \dfrac{5^{n-1}}{3^{n+1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \dfrac{5^n\times 5^{-1}}{3^n\times 3} = \dfrac{5^{-1}}{3}\times\lim\left(\dfrac{5}{3}\right)^n = \dfrac{5^{-1}}{3}\times(+\infty) = +\infty$

66.8. $\lim \dfrac{4^n+2^{n-1}-\pi^{n+1}}{2^{2n-2}+3^n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \dfrac{4^n+2^n\times 2^{-1}-\pi^n\times\pi}{2^{2n}\times 2^{-2}+3^n} =$

$= \lim \dfrac{4^n+2^n\times 2^{-1}-\pi^n\times\pi}{4^n\times 2^{-2}+3^n} = \lim \dfrac{1+\frac{2^n\times 2^{-1}}{4^n}-\frac{\pi^n\times\pi}{4^n}}{2^{-2}+\frac{3^n}{4^n}} =$

$= \lim \dfrac{1+\left(\frac{2}{4}\right)^n\times 2^{-1}-\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\times\pi}{2^{-2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \dfrac{1+0\times 2^{-1}-0\times\pi}{2^{-2}\times 0} = \dfrac{1}{2^{-2}} = 4$

66.9. $\lim\left(5^n-3^n\right) = \lim\left[5^n\left(1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right)\right] = +\infty\times(1-0) = +\infty$

66.10. $\lim\left(2^{n+1}-3\times 5^{n-1}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\left(2^n\times 2-3\times 5^n\times 5^{-1}\right) =$

$= \lim\left[5^n\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\times 2-\dfrac{3}{5}\right)\right] = +\infty\times\left(0-\dfrac{3}{5}\right) = -\infty$

66.11. $\lim \dfrac{2n^3-\cos n}{n^3+\cos n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \dfrac{2-\frac{\cos n}{n^3}}{1+\frac{\cos n}{n^3}} =$

$= \dfrac{2-0}{1+0} = 2$, dado que,

$\forall n\in\mathbb{N},\ -1\le\cos n\le 1$ e $\dfrac{1}{n^3}\to 0$

Logo, $\cos n\times\dfrac{1}{n^3}\to 0$, ou seja, $\dfrac{\cos n}{n^3}\to 0$.

66.12. $\lim\left(3^n-2^n\cos n\right) = \lim\left[3^n\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\times\cos n\right)\right] =$

$= +\infty(1-0) = +\infty$, dado que,

$\forall n\in\mathbb{N},\ -1\le\cos n\le 1$ e $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to 0$

Logo, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\times\cos n\to 0$.

67. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+2u_n},\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

67.1. a) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

- $P(1)$ é verdadeira, dado que $u_1 = 2$ e $u_2 = \sqrt{1+2\times 2} = \sqrt{5}$, logo, $u_2 > u_1$
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos, por hipótese, que para um dado $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. Pretendemos provar que $u_{n+2} > u_n$.

$u_{n+1} > u_n \Rightarrow 2u_{n+1} > 2u_n \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+2u_{n+1} > 1+2u_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{1+2u_{n+1}} > \sqrt{1+2u_n} \Rightarrow$ $\quad \left| \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N} \right.$

$\Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$

Logo, $P(n)$ é hereditária. Portanto, podemos concluir que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$, ou seja, (u_n) é monótona crescente.

b) Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $u_n < 3$

- $P(1)$ é verdadeira, pois como $u_1 = 2$, $u_1 < 3$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitindo, por hipótese, que $u_n < 3$ para determinado $n \in \mathbb{N}$. Pretendemos provar que $u_{n+1} < 3$.

$u_n < 3 \Rightarrow 2u_n < 6 \Rightarrow 1+2u_n < 7 \Rightarrow \sqrt{1+2u_n} < \sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{n+1} < 3$, dado que $\sqrt{7} < 3$ e a relação "menor que" é transitiva

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 3$.

67.2. Toda a sucessão crescente e majorada é convergente. Logo, (u_n) é convergente.

67.3. Como (u_n) é convergente, $\lim u_{n+1} = \lim u_n$.

$\lim u_{n+1} = \lim u_n \Leftrightarrow \lim \sqrt{1+2u_n} = \lim u_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+2\lim u_n} = \lim u_n$

Fazendo $L = \lim u_n$, vem:

$\sqrt{1+2L} = L \Leftrightarrow \quad (L > 0)$

$\Leftrightarrow 1+2L = L^2 \Leftrightarrow L^2 - 2L - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \Leftrightarrow L = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L = 1-\sqrt{2} \vee L = 1+\sqrt{2}$

Como, $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \le u_n < 3$, terá de ser $\lim u_n = 1+\sqrt{2}$.

68.1. Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, a sucessão $n \mapsto a^n$ é uma progressão geométrica de razão $r = a$ e 1.º termo igual a a.

$$\sum_{k=1}^{n} a^k = a \times \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a\left(1-a^n\right)}{1-a}$$

68.2. $$\lim \frac{\sum_{k=1}^{n} a^k}{a^n+b^n} = \lim \frac{\frac{a\left(1-a^n\right)}{1-a}}{a^n+b^n} =$$

$$= \frac{a}{1-a} \times \lim \frac{1-a^n}{a^n+b^n} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \quad (a > b > 1 \Rightarrow a^n \to +\infty \text{ e } b^n \to +\infty)$$

$$= \frac{a}{1-a} \times \lim \frac{\frac{1}{a^n}-1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} = \quad \text{como } a > b > 1,\ 0 < \frac{b}{a} < 1$$

$$= \frac{a}{1-a} \times \frac{0-1}{1+0} = \frac{a}{a-1}$$

Pág. 225

69. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 10 - 2n$

69.1. $10 - 2n > 0 \Leftrightarrow 2n < 10 \Leftrightarrow n < 5$

$10 - 2n = 0 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5$

$10 - 2n < 0 \Leftrightarrow n > 5$

Logo, (u_n) é não monótona.

69.2. Como $u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow n = 5$ temos que $u_6 = u_5$

69.3. $u_n = an + b - n^2$

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 10 - 2n \\ u_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(n+1) + b - (n+1)^2 - \left(an + b - n^2\right) = 10 - 2n \\ a + b - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{an} + a + \cancel{b} - n^2 - \cancel{2n} - 1 - \cancel{an} - b + \cancel{n^2} = 10 - \cancel{2n} \\ b = 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 10 \\ b = 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = -8 \end{cases}$$

70.1. $$\lim \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-3\right)}{\left(\sqrt{n}+2\right)^2} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{n - 3\sqrt{n}}{n + 2\sqrt{n} + 4} =$$

$$= \lim \frac{1 - \frac{3\sqrt{n}}{n}}{1 + \frac{2\sqrt{n}}{n} + \frac{4}{n}} = \quad \left| \frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{\frac{n}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \right.$$

$$= \lim \frac{1 - 3\sqrt{\frac{1}{n}}}{1 + 2\sqrt{\frac{1}{n}} + \frac{4}{n}} = \frac{1 - 3\times 0}{1 + 2\times 0 + 0} = 1$$

70.2. $$\lim \frac{4n \times |n-10|}{2-n^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{4n(n-10)}{2-n^2} = \quad \left| n > 10 \Rightarrow n - 10 > 0 \right.$$

$$= \lim \frac{4n^2 - 40n}{2-n^2} = \lim \frac{4n^2}{-n^2} = -4$$

70.3. $$\lim \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{n^4}{n^4} = 1$$

70.4. $$\lim \frac{a^n - b^n}{(ab)^n} = \lim \frac{a^n - b^n}{a^n b^n} =$$

$$= \lim \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{a^n} = \frac{0-1}{+\infty} = 0 \quad \left| 1 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{a}{b} < 1 \right.$$

71. $$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

71.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $u_n > 1$

- $P(1)$ é verdadeira porque $u_1 = 2 > 1$
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitindo, por hipótese, que $u_n > 1$ para um dado $n \in \mathbb{N}$, pretendemos provar que $u_{n+1} > 1$.

$u_n > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} < 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{u_n} > -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - \dfrac{1}{u_n} > 2 - 1 \Rightarrow u_{n+1} > 1$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, pelo princípio de indução matemática, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.

71.2. $u_2 = 2 - \dfrac{1}{1} = 2 - 1 = 1$

$u_2 < u_1$. Logo, se (u_n) é monótona, é decrescente.

Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $u_{n+1} < u_n$.

- $P(1)$ é verdadeira, pois $u_2 < u_1$
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitindo que para dado $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, vamos provar que então $u_{n+2} < u_{n+1}$.

$$u_{n+1} < u_n \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} > \frac{1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u_{n+1}} < -\frac{1}{u_n} \Rightarrow 2 - \frac{1}{u_{n+1}} < 2 - \frac{1}{u_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária e, pelo princípio de indução matemática, é universal, ou seja,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow (u_n)$ é monótona decrescente

71.3. A sucessão (u_n) é monótona decrescente e minorada.

Logo, (u_n) é convergente.

71.4. Como (u_n) é convergente, tem-se $\lim u_{n+1} = \lim u_n$.

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n \Leftrightarrow \lim\left(2 - \frac{1}{u_n}\right) = \lim u_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\lim u_n} = \lim u_n$$

Fazendo $L = \lim u_n$, vem:

$$2 - \frac{1}{L} = L \overset{L>0}{\Leftrightarrow} 2L - 1 - L^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \Leftrightarrow (L-1)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 1$$

Logo, $\lim u_n = 1$.

72. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

72.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $u_n = u_{n+3}$

Por indução matemática:

- $P(1)$ é verdadeira.

$$u_1 = 2\ ;\ u_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ ;\ u_3 = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1\ ;$$

$u_4 = 1 - \dfrac{1}{-1} = 2 = u_1$. Logo, $u_1 = u_{3+1}$.

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que para dado $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+3}$.

$$u_n = u_{n+3} \Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+3}} \Rightarrow -\frac{1}{u_n} = -\frac{1}{u_{n+3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{u_n} = 2 - \frac{1}{u_{n+3}} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n+4}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Ficou provado que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+3}$.

72.2. (u_n) é não monótona. Por exemplo: $u_3 < u_2$ e $u_4 > u_3$

72.3. Admitamos que (u_n) é convergente. Então, $\lim u_n = \lim u_{n+1}$ e o limite de (u_n) é solução desta equação.

$$\lim u_n = \lim u_{n+1} \Leftrightarrow \lim u_n = \lim\left(1 - \frac{1}{u_n}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim u_n = 1 - \frac{1}{\lim u_n} \Leftrightarrow \quad (\text{Fazendo } L = \lim u_n)$$

$$\Leftrightarrow L = 1 - \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = L - 1 \Leftrightarrow L^2 - L + 1 = 0$$

Esta equação é impossível, pois $\Delta = (-1)^2 - 4 < 0$.

Logo, (u_n) não é convergente pois não existe $\lim u_n$.

73. Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ e $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$, então $\lim \sqrt[n]{u_n} = a$.

73.1. Seja $u_n = 5^n + 2^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{5^{n+1} + 2^{n+1}}{5^n + 2^n} = \lim \frac{5^n \times 5 + 2^n \times 2}{5^n + 2^n} =$$

$$= \lim \frac{5 + \left(\frac{2}{5}\right)^n \times 2}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{5 + 0 \times 2}{1 + 0} = 5$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \wedge \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{u_n} = 5 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{5^n + 2^n} = 5$$

73.2. Seja $u_n = n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n+1}{n} = 1$$

Logo, $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$, ou seja, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

73.3. Seja $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1}+1}{n+1+1}}{\frac{2^n+1}{n+1}} = \lim \frac{(n+1)(2^{n+1}+1)}{(n+2)(2^n+1)} =$$

$$= \lim \frac{n+1}{n+2} \times \lim \frac{2^n \times 2 + 1}{2^n + 1} = 1 \times \lim \frac{2 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} =$$

$$= 1 \times \frac{2+0}{1+0} = 2$$

Logo, $\lim \sqrt[n]{\dfrac{2^n+1}{n+1}} = 2$.

73.4. $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{n}}$

Seja $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = \lim \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

Logo, $\lim \sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{n}} = 1$.

74. $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} - u_n = 4$

74.1. Se a sucessão (u_n) é constante, $u_{n+1} = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$3u_{n+1} - u_n = 4 \Leftrightarrow 3u_n - u_n = 4 \Leftrightarrow 2u_n = 4 \Leftrightarrow u_n = 2$$

Logo, a sucessão (u_n) é constante se $u_1 = 2$.

74.2. a) Se (v_n) é uma progressão geométrica, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ é constante.

$$v_n = u_n + k$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $3u_{n+1}-u_n=4 \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+k}{u_n+k}=\frac{\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}+k}{u_n+k}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}(u_n+4+3k)}{u_n+k}=\frac{1}{3}\times\frac{u_n+\boldsymbol{4+3k}}{u_n+\boldsymbol{k}}$$

A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica se $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n+4+3k=u_n+k$.

$4+3k=k \Leftrightarrow 2k=-4 \Leftrightarrow k=-2$

Temos, portanto, $k=-2$ e $r=\frac{1}{3}$.

b) $v_n=u_n-2$

$v_1=u_1-2=3-2=1$

$v_n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ e $u_n=v_n+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+2$

c) $\lim\sum_{p=1}^{n}v_p=\lim\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

$$\lim\sum_{p=1}^{n}u_p=\lim\sum_{p=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+2\right]=$$

$$=\lim\left[\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\sum_{p=1}^{n}2\right]=$$

$$=\lim\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\lim(2n)=\frac{3}{2}+\infty=\frac{3}{2}$$

75. $u_n=\frac{n^2}{5^n}$

75.1. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}}{\frac{n^2}{5^n}}=\frac{5^n(n+1)^2}{5^{n+1}\times n^2}=\frac{5^n\left(n^2+2n+1\right)}{5^n\times 5n^2}=$

$$=\frac{n^2+2n+1}{5n^2},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

75.2. $n^2+2n+1<5n^2,\ \forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow 4n^2-2n-1>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Proposição verdadeira porque $4>0$ e $\Delta=(-2)^2+16<0$.

Logo, $\frac{n^2+2n+1}{5n^2}<1,\ \forall n\in\mathbb{N}$, ou seja, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1 \Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$ pois $u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Como $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}<u_n$, (u_n) é monótona decrescente.

75.3. $\frac{n^2}{5^n}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Logo, (u_n) é convergente por ser uma sucessão monótona decrescente e minorada.

75.4. Como (u_n) é convergente temos que $\lim u_{n+1}=\lim u_n$.

Portanto, se $\lim u_n\neq 0$ vem: $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\lim u_{n+1}}{\lim u_n}=\frac{\lim u_n}{\lim u_n}=1$

Por outro lado: $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{n^2+2+1}{5n^2}=\lim\frac{n^2}{5n^2}=\frac{1}{5}$

75.5. Sabemos que $\lim u_n$ existe porque (u_n) é convergente.

Se admitirmos que $\lim u_n\neq 0$ somos conduzidos à contradição $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ e $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}$.

Logo, $\lim u_n=0$.

Pág. 226

Avaliação 2

1. $u_n=\frac{3n-1}{n+2}$

$\lim u_n=3$ e $\lim a_n=\lim b_n=\lim u_n=3$

$\lim(3a_n-b_n)=3\times3-3=6$

Resposta: **(A)**

2. $u_n\to a\in\mathbb{R}$ e $b_n\to+\infty$

$$\lim\frac{b_n-a_n}{b_n+a_n}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{1+\frac{a_n}{b_n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Resposta: **(B)**

3. $\begin{cases}u_1=a>1\\ u_{n+1}=\frac{1}{u_n},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

$u_1=a$, $u_2=\frac{1}{a}$, $u_3=a$, $u_4=\frac{1}{a}$, ...

(u_n) é limitada porque o conjunto dos termos de (u_n) é igual a $\left\{a\ ,\ \frac{1}{a}\right\}$, logo é limitado.

Resposta: **(B)**

4. $u_n=\frac{3^{2n}}{2\times a^n}=\frac{\left(3^2\right)^n}{2\times a^n}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{a}\right)^n$

Se $u_n\to0$ e $a\in\mathbb{R}^+$, temos:

$0<\frac{9}{a}<1$ e $a>0 \Leftrightarrow a>9 \Leftrightarrow a\in\left]9\ ,\ +\infty\right[$

Resposta: **(A)**

5. **I** é falsa.

Por exemplo, se $u_n=\begin{cases}n & \text{se } n<10\\ \frac{1}{n} & \text{se } n\geq10\end{cases}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ e $u_n\to0$. No entanto, (u_n) não é decrescente.

II é verdadeira.

Resposta: **(A)**

6. Os comprimentos dos arcos estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. O comprimento do primeiro arco é igual a $\frac{2\pi\times1}{4}=\frac{\pi}{2}$.

O comprimento da linha quando $n\to+\infty$ é

$$\lim\left[\frac{\pi}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]=\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

Resposta: **(D)**

7. $u_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$\lim u_n = 0$ dado que $\frac{1}{n} \to 0$ e $-1 \le \sin\frac{1}{n} \le 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = \sqrt{n} + 1$

$\lim v_n = \lim\left(\sqrt{n}+1\right) = +\infty$

$\lim\left(u_n \times v_n\right) = \lim\left[\frac{1}{n}\times\sin\left(\frac{1}{n}\right)\times\left(\sqrt{n}+1\right)\right] =$

$= \lim\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n}\times\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$ dado que

- $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \le \sin\left(\frac{1}{n}\right) \le 1$
- $\lim\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n}\right) = \lim\left(\frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{n}\right) =$

$= \lim\left(\sqrt{\frac{n}{n^2}} + \frac{1}{n}\right) = \lim\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\right) = 0$

e o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para zero tem limite nulo.

Resposta: **(C)**

Pág. 227

8. $u_n = \frac{1-n}{100+8n}$ e $v_n = \sqrt{4n^2+4n} - 2n + 3$

8.1. Seja δ um número positivo qualquer.

$\left|u_n - \left(-\frac{1}{8}\right)\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{1-n}{100+8n} + \frac{1}{8}\right| < \delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{8-8n+100+8n}{800+64n}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{108}{800+64n}\right| < \delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{108}{800+64n} < \delta \Leftrightarrow 108 < 800\delta + 64n\delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 64n\delta > 108 - 800\delta \Leftrightarrow n > \frac{108-800\delta}{64\delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > \frac{27-200\delta}{16\delta}$

Logo, qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ (neste caso, p é qualquer natural maior ou igual a $\frac{27-200\delta}{16\delta}$), tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge p \Rightarrow \left|u_n - \left(-\frac{1}{8}\right)\right| < \delta$

Portanto, $u_n \to -\frac{1}{8}$.

8.2. $A = \left]-0{,}135\ ;\ -0{,}115\right[$

a) $A = V_\delta(a)$

$a = \frac{-0{,}115 - 0{,}135}{2} = -0{,}125$

$\delta = -0{,}115 - (-0{,}125) = 0{,}01$

b) Para $\delta = 0{,}01$, $p \ge \frac{27 - 200\times 0{,}01}{16\times 0{,}01} \wedge p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \ge 157$ e $p \in \mathbb{N}$

Não pertencem a $V_{0{,}01}(-0{,}125)$, 156 termos.

8.3. a) $\lim v_n = \lim\left(\sqrt{4n^2+4n} - 2n + 3\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim\frac{\left(\sqrt{4n^2+4n} - (2n-3)\right)\left(\sqrt{4n^2+4n} + (2n+3)\right)}{\sqrt{4n^2+4n} + (2n+3)} =$

$= \lim\frac{4n^2+4n-\left(4n^2-12n+9\right)}{\sqrt{n^2\left(4+\frac{4}{n}\right)} + 2n + 3} =$

$= \lim\frac{16n-9}{n\sqrt{4+\frac{4}{n}} + 2n + 3} =$

$= \lim\frac{16-\frac{9}{n}}{\sqrt{4+\frac{4}{n}} + 2 + \frac{3}{n}} = \frac{16-0}{\sqrt{4+0}+2+0} = \frac{16}{4} = 4$

b) $\lim\left(\sqrt[3]{u_n}\times v_n + \sqrt[n]{3}\right) = \sqrt[3]{\lim u_n}\times\lim v_n + \lim\sqrt[n]{3} =$

$= \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\times 4 + 1 = -\frac{1}{2}\times 4 + 1 = -1$

9. $v_n = 100 - 4n$

9.1. Seja L um número positivo qualquer.

$V_n < -L \Leftrightarrow 100 - 4n < -L \Leftrightarrow 4n > 100 + L \Leftrightarrow n > \frac{100+L}{4}$

Logo, sendo p um número natural maior ou igual a $\frac{100+L}{4}$, vem $\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge p \Rightarrow u_n < -L$.

Portanto, $u_n \to -\infty$

9.2. $v_{n+1} - v_n = 100 - 4(n+1) - (100-4n) =$

$= 100 - 4n - 4 - 100 + 4n =$

$= -4,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (v_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -4$.

9.3. $S_n = \sum_{p=1}^{n} v_p = \frac{v_1+v_n}{2}\times n = \frac{96+100-4n}{2}\times n =$

$= \frac{196-4n}{2}\times n = (98-2n)\times n$

$S_n = 98n - 2n^2$

9.4. $\sum_{p=1}^{n} v_p = 0 \Leftrightarrow 98n - 2n^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n(49-n) = 0 \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 49$

9.5. $\lim\sum_{p=1}^{n} v_p = \lim\left(98n - 2n^2\right) = \lim\left(-2n^2\right) = -\infty$

10. $u_{n+1} - u_n = \frac{-3}{(2n-15)(2n+1)}$

10.1. $2n - 15 < 0 \Leftrightarrow 2n < 15 \Leftrightarrow n \le 7$

$2n - 15 > 0 \Leftrightarrow n \ge 8$

Logo, (u_n) não é monótona.

10.2. Se $n \le 7$, $u_{n+1} - u_n > 0$. $\quad \ldots u_5 < u_6 < u_7 < u_8 > u_9 > u_{10} \ldots$

Se $n \ge 8$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le u_8$ pelo que u_8 é majorante de (u_n).

10.3. $u_8 - u_7 = \frac{-3}{(14-15)(14+1)} = \frac{-3}{-1\times 15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$u_8 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow u_8 = \frac{5}{5} \Leftrightarrow u_8 = 1$

11. $\begin{cases} u_1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n}},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

11.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $u_n > 0$

• $P(1)$ é verdadeira dado que $u_1 = 1 > 0$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Se $u_n > 0$, então $\sqrt{1+u_n} > 0$ pelo que $\dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} > 0$.

Portanto, $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$, ou seja, $P(n)$ é hereditária.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

11.2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} \times \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u_n}}$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, temos que $\sqrt{1+u_n} > 1$.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+u_n}} < 1$. Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, então $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, ou seja, (u_n) é decrescente.

11.3. (u_n) é convergente porque toda a sucessão decrescente e minorada é convergente.

11.4. Como (u_n) é convergente sabemos que $\lim u_n = \lim u_{n+1}$.

$$\lim u_n = \lim u_{n+1} \Leftrightarrow \lim u_n = \lim \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} \Leftrightarrow \lim u_n = \frac{\lim u_n}{\sqrt{1+\lim u_n}}$$

Fazendo $\lim u_n = L$:

$$L = \frac{L}{\sqrt{1+L}} \Leftrightarrow \qquad \left(\sqrt{1+L} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow L\sqrt{1+L} - L = 0 \Leftrightarrow L\left(\sqrt{1+L} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow L = 0 \vee \sqrt{1+L} = 1 \Leftrightarrow L = 0 \vee 1 + L = 1 \Leftrightarrow L = 0$$

Logo, $\lim u_n = 0$

12. $$\lim \frac{x_n^4 - 1}{x_n - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim \frac{(x_n - 1)\left(x_n^3 + x_n^2 + x_n + 1\right)}{(x_n - 1)} =$$

	1	0	0	0	-1
1		1	1	1	1
	1	1	1	1	0

$$= \left(\lim x_n\right)^3 + \left(\lim x_n\right)^2 + \lim x_n + 1 = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$$

13. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(u_n+1)^2}{2},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

13.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

• $P(1)$ é verdadeira dado que $u_1 = 2$.

$u_2 = \dfrac{(2+1)^2}{2} = \dfrac{9}{2}$, pelo que $u_2 > u_1$.

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, para dado $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ -

Pretendemos provar que $u_{n+2} > u_{n+1}$.

$$u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_{n+1} + 1 > u_n + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(u_{n+1}+1\right)^2 > \left(u_n+1\right)^2 \Rightarrow \qquad (u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \frac{\left(u_{n+1}+1\right)^2}{2} > \frac{\left(u_n+1\right)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, então $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, ou seja, (u_n) é monótona crescente.

13.2. Admitamos que (u_n) é convergente, sendo $\lim(u_n) = L$

Então, $\lim u_n = \lim u_{n+1}$ e esta equação admite pelo menos L como solução.

$$\lim u_n = \lim u_{n+1} \Leftrightarrow \lim u_n = \lim \frac{(u_n+1)^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim u_n = \frac{\left(\lim u_n + 1\right)^2}{2} \Leftrightarrow L = \frac{(L+1)^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L^2 + 2L + 1 = 2L \Leftrightarrow L^2 + 1 = 0$$

Esta equação é impossível. Logo, não existe $\lim u_n$, ou seja, (u_n) é divergente.

13.3. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Como (u_n) é monótona e não convergente, então não é limitada.

14. $\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n - v_n^2,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

14.1. $v_{n+1} - v_n = -v_n^2 \le 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Para concluir que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n < 0$ temos de provar que $v_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Temos que $v_1 = \dfrac{1}{2} > 0$.

Se $v_{n+1} - v_n \le 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, então $v_n \le v_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, $v_n \le \dfrac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que $v_n \neq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = 0 \Leftrightarrow v_n - v_n^2 = 0 \Leftrightarrow v_n(1 - v_n) = 0 \Leftrightarrow v_n = 0 \vee v_n = 1$$

Como $v_n \neq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ temos que $v_n \neq 0 \Rightarrow v_{n+1} \neq 0$.

$v_1 \neq 0 \wedge v_n \neq 0 \Rightarrow v_{n+1} \neq 0$

Logo, pelo princípio de indução matemática $v_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-v_n^2 < 0$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n < 0$.

(v_n) é monótona decrescente.

14.2. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $v_n > 0$

• $P(1)$ é verdadeira porque $v_1 = \dfrac{1}{2} > 0$.

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, por hipótese, para dado $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

Pretendemos provar que $v_{n+1} > 0$.

$v_{n+1} > 0 \Leftrightarrow v_n - v_n^2 > 0 \Leftrightarrow v_n(1 - v_n) > 0$

$v_n > 0$, por hipótese.

Já vimos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \le \dfrac{1}{2}$.

Logo, $v_n < 1$ pelo que $1 - v_n > 0$

Portanto, $v_n(1 - v_n) > 0$, ou seja, $v_n > 0 \Rightarrow v_{n+1} > 0$.

Pelo princípio de indução matemática, podemos concluir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

14.3. (v_n) é decrescente e minorada. Logo, (v_n) é convergente.

14.4. Como (v_n) é convergente,

$$\lim v_{n+1} = \lim v_n \Leftrightarrow \lim\left(v_n - v_n^2\right) = \lim v_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim v_n - \left(\lim v_n\right)^2 = \lim v_n \Leftrightarrow \left(\lim v_n\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lim v_n = 0$$

Pág. 228

Avaliação global

1. $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e $b_n \to +\infty$

$$\lim \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} = \lim \frac{\frac{a_n b_n}{b_n}}{\frac{a_n + b_n}{b_n}} = \lim \frac{a_n}{\frac{a_n}{b_n} + 1} = \frac{a}{\frac{a}{+\infty} + 1} = \frac{a}{0+1} = a$$

Resposta: **(A)**

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 1$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

$u_n = n + b,\ b \in \mathbb{R}$

$\lim u_n = +\infty$

Resposta: **(C)**

3. $\lim u_n = 2$

Qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta(2)$

Portanto, em qualquer vizinhança de 2 existe uma infinidade de termos de (u_n). Assim, (u_n) tem uma infinidade de termos positivos.

Resposta: **(D)**

4. $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+2)(n+1)},\ \forall n \in \mathbb{N}$

- $u_5 - u_4 = \frac{-1}{6 \times 5} = -\frac{1}{30}$
- $u_{n+1} - u_n < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$
  Logo, (u_n) é decrescente pelo que $u_{10} < u_5$.
- $u_9 - u_8 = \frac{-1}{10 \times 9} = -\frac{1}{90}$. Logo, $u_9 + \frac{1}{90} = u_8$

Resposta: **(C)**

5. Seja (a_n) a sucessão das áreas dos quadrados $a_1 = 1$ e $a_n = a^2$.

$$a_{n+1} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + a^2\right) = \frac{1}{4} \times 2a^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ sendo $a_1 = 1$

$$\lim S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Resposta: **(A)**

Pág. 229

6. $v_n = \frac{n-1}{3n-10}$

6.1. $v_n = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{n-1}{3n-10} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow 8n - 8 = 9n - 30 \Leftrightarrow n = 22$

$v_{22} = \frac{3}{8}$

6.2. Seja δ um número positivo qualquer

$$\left|v_n - \frac{1}{3}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{n-1}{3n-10} - \frac{1}{3}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n-3-3n+10}{9n-30}\right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{7}{9n-30}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{7}{9n-30} < \delta \Leftrightarrow 7 < 9n\delta - 30\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9n\delta > 7 + 30\delta \Leftrightarrow n > \frac{7+30\delta}{9\delta}$$

Qualquer que seja $\delta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow \left|v_n - \frac{1}{3}\right| < \delta$.

p é qualquer número natural igual ou superior a $\frac{7+30\delta}{9\delta}$.

Logo, $v_n \to \frac{1}{3}$.

6.3. $v_n \in \left]0,29\ ;\ 0,41\right[\Leftrightarrow \frac{n-1}{3n-10} > 0,29 \wedge \frac{n-1}{3n-10} < 0,41 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n - 1 > 0,87n - 2,9 \wedge n - 1 < 1,23n - 4,1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n - 0,87n > 1 - 2,9 \wedge n - 1,23n < 1 - 4,1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,13n > -1,9 \wedge -0,23n < -3,1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n > \frac{3,1}{0,23} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n > 13$$

O menor valor de p é 14.

6.4. $v_2 = -\frac{1}{4}$, $v_3 = -2$, $v_4 = \frac{3}{2}$

$v_3 < -2$ e $v_4 > v_3$

(v_n) é não monótona.

Como (v_n) é convergente, logo é limitada.

Portanto, a proposição é falsa.

6.5. $\lim v_n = \frac{1}{3}$

$$\lim v_{n+2k} = \lim v_{n+3k} = \lim v_n = \frac{1}{3}$$

$$\lim\left(v_{n+2k} + 2v_{n+3k}\right) = \lim v_{n+2k} + 2\lim v_{n+3k} = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$$

7. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ 2a_{n+1} + 3 = 2a_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{3}{2},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

7.1. $a_{n+1} - a_n = -\frac{3}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -\frac{3}{2}$

7.2. $a_n = a_1 + (n-1) \times r = 2 + (n-1) \times \left(-\frac{3}{2}\right) =$

$$= 2 - \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}n$$

$$a_n = \frac{7-3n}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

7.3. $\sum_{k=1}^{25} a_k = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \times 25 = \frac{2-34}{2} \times 25 = -400$

7.4. Seja L um número positivo qualquer

$$a_n < -L \Leftrightarrow \frac{7-3n}{2} < -L \Leftrightarrow 7 - 3n < -2L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n > 7 + 2L \Leftrightarrow n > \frac{7+2L}{3}$$

Qualquer que seja $L > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow u_n < -L$

Tem-se p igual ou superior a $\frac{7+2L}{3}$.

Portanto, $a_n \to -\infty$

7.5. Se $L = 2000$:

$$p \geq \frac{7 + 2 \times 2000}{3} \wedge p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p \geq 1336 \text{ e } p \in \mathbb{N}$$

8. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{8} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

8.1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{8} \times u_n$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \dfrac{1}{8}$

8.2. $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

$$u_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{3}{4} \times 8 \times \left(2^{-3}\right)^n = 3 \times 2 \times 2^{-3n} = 3 \times 2^{1-3n}$$

$u_n = 3 \times 2^{1-3n}$

8.3. $$S_k = u_1 \times \frac{1-r^k}{1-r} = \frac{3}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k}{1-\frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{8}{7} \times \left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right] = \frac{6}{7} \times \left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right]$$

8.4. $$\lim S_n = \frac{u_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{7}$$

Pág. 230

9. $\begin{cases} w_1 = a \\ 5w_{n+1} - 2w_n = 6,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = a \\ w_{n+1} = \dfrac{2}{5} w_n + \dfrac{6}{5},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

9.1. Se (w_n) é constante, então $w_{n+1} = w_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e

$5w_{n+1} - 2w_n = 6\ , \forall n \in \mathbb{N}$.

Se $w_{n+1} = w_n\ , \forall n \in \mathbb{N}$:

$5w_n - 2w_n = 6\ , \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 3w_n = 6\ , \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w_n = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Portanto, $w_1 = 2$.

9.2. **a)** Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $w_{n+1} < w_n$

- $P(1)$ é verdadeira, pois $w_2 = \dfrac{2}{5} \times 5 + \dfrac{6}{5} = \dfrac{16}{5}$ pelo que $w_2 < w_1$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, para dado $n \in \mathbb{N}$, se tem $w_{n+1} < w_n$.

Pretendemos provar que $w_{n+2} < w_{n+1}$.

$$w_{n+1} < w_n \Rightarrow \frac{2}{5} w_{n+1} < \frac{2}{5} w_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} w_{n+1} + \frac{6}{5} < \frac{2}{5} w_n + \frac{6}{5} \Rightarrow w_{n+2} < w_{n+1}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, podemos concluir que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} < w_n$, ou seja, (w_n) é monótona decrescente.

b) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $w_n > 2$

- $P(1)$ é verdadeira porque $w_1 = 5 > 2$
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$w_n > 5 \Rightarrow \frac{2}{5} w_n > \frac{2}{5} \times 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \times w_n + \frac{6}{5} > 2 + \frac{6}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_{n+1} > 2 \quad \text{dado que} \quad 2 + \frac{6}{5} > 2$$

Portanto, $P(n)$ é hereditária.

Por indução matemática temos que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n > 2$.

9.3. Como (w_n) é decrescente e minorada, então é convergente.

Logo, $\lim w_{n+1} = \lim w_n$

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n \Leftrightarrow \lim\left(\frac{2}{5} w_n + \frac{6}{5}\right) = \lim w_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \lim w_n + \frac{6}{5} = \lim w_n \Leftrightarrow \frac{3}{5} \lim w_n = \frac{6}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim w_n = 2$$

9.4. $v_n = w_n - k$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{w_{n+1} - k}{w_n - k} = \frac{\frac{2}{5} w_n + \frac{6}{5} - k}{w_n - k} = \frac{\frac{2}{5}\left(w_n + 3 - \frac{5}{2}k\right)}{w_n - k}$$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \dfrac{2}{5}$ se

$$3 - \frac{5}{2}k = -k$$

$$3 - \frac{5}{2}k = -k \Leftrightarrow 6 - 5k = -2k \Leftrightarrow 3k = 6 \Leftrightarrow k = 2$$

9.5. $v_1 = w_1 - 2 = 5 - 2 = 3$

$$v_n = v_1 \times r^{n-1} = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \text{ e } w_n = v_n + 2 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + 2$$

10.1. $$\lim a_n = \lim\left(\sqrt{n^2 - 6n} - n\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{n^2 - 6n} - n\right)\left(\sqrt{n^2 - 6n} + n\right)}{\sqrt{n^2 - 6n} + n} =$$

$$= \lim \frac{n^2 - 6n - n^2}{\sqrt{n^2\left(1 - \frac{6}{n}\right)} + n} =$$

$$= \lim \frac{-6n}{n\sqrt{1 - \frac{6}{n}} + n} = \lim \frac{-6n}{n\left(\sqrt{1 - \frac{6}{n}} + 1\right)} =$$

$$= \lim \frac{-6}{\sqrt{1 - \frac{6}{n}} + 1} = \frac{-6}{\sqrt{1 - 0} + 1} = -\frac{6}{2} = -3$$

10.2. $$\lim b_n = \lim \frac{\sqrt{9n^2 - 1}}{n\sqrt{n^2 + 1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n^2\left(9 - \frac{1}{n^2}\right)}}{n\sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} = \lim \frac{n\sqrt{9 - \frac{1}{n^2}}}{n^2\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n^2}}}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{1 - 0}}{+\infty(1 + 0)} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

10.3. $\lim c_n = \lim\left(2\times\pi^{n+1} - 3^{n-1}\right) =$

$= \lim\left(2\times\pi^n\times\pi - 3^n\times 3^{-1}\right) =$

$= \lim\left[\pi^n\left(2\pi - \left(\frac{3}{\pi}\right)^n\times 3^{-1}\right)\right] =$

$= +\infty\times\left(2\pi - 0\times 3^{-1}\right) = +\infty$

10.4. $\lim d_n = \lim\frac{n+(-1)^n}{2n+\sin n} = \lim\frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{\sin n}{n}} =$

$= \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$

Cálculos auxiliares

$\forall n\in\mathbb{N},\ -1\le(-1)^n\le 1$ e $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\le\sin n\le 1$

$\lim\frac{1}{n} = 0$

Portanto $\frac{(-1)^n}{n}\to 0$ e $\frac{\sin n}{n}\to 0$ porque o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para zero é uma sucessão de limite nulo.

11. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 9$

11.1. $\overline{DB} = \frac{2}{3}\times 9 = 6$ e $\overline{BE} = \frac{1}{3}\times 9 = 3$

$D\hat{B}E = 60°$

$\overline{DE}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 - 2\times\overline{DB}\times\overline{BE}\times\cos D\hat{B}E$

$\overline{DE}^2 = 6^2 + 3^2 - 2\times 6\times 3\times\cos 60°$

$\overline{DE}^2 = 36 + 9 - 2\times 18\times\frac{1}{2}$

$\overline{DE}^2 = 27$

$\overline{DE} = \sqrt{27}$

$\overline{FE} = \overline{DF} = \overline{DE} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\overline{GH}^2 = \overline{GE}^2 + \overline{EH}^2 - 2\times\overline{GE}\times\overline{EH}\times\cos 60°$

$\overline{GH}^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{27}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\sqrt{27}\right)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{27}\times\frac{1}{3}\sqrt{27}$

$\overline{GH}^2 = \frac{4}{9}\times 27 + \frac{1}{9}\times 27 - \frac{2}{9}\times 27$

$\overline{GH}^2 = \frac{3}{9}\times 27$

$\overline{GH}^2 = 9$

$\overline{GH} = 3 = \overline{IH} = \overline{GI}$

11.2. a) Seguindo o mesmo processo, se u_n é a medida do lado de um dos triângulos, então

$u_{n+1}^2 = \left(\frac{2}{3}u_n\right)^2 + \left(\frac{1}{3}u_n\right)^2 - 2\times\frac{2}{3}u_n\times\frac{1}{3}\times u_n\times\cos 60°$

$u_{n+1}^2 = \frac{4}{9}u_n^2 + \frac{1}{9}u_n^2 - \frac{2}{9}u_n^2$

$u_{n+1}^2 = \frac{3}{9}u_n^2$, como $u_n > 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$, vem

$u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{9}}u_n$

$u_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Portanto, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $u_n = u_1\times r^{n-1} = 9\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1} = 3^2\times\left(3^{\frac{1}{2}}\times 3^{-1}\right)^{n-1} =$

$= 3^2\times\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-1} = 3^2\times 3^{\frac{1-n}{2}} = 3^{2+\frac{1-n}{2}} = 3^{\frac{4+1-n}{2}}$

$u_n = 3^{\frac{5-n}{2}}$

11.3. a) Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ então (b_n) é uma progressão geométrica de razão $r^2 = \frac{1}{3} = r'$

Cálculo de b_1 :

$h^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 9^2 \Leftrightarrow h^2 = 81 - \frac{81}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3\times 81}{47} \Rightarrow h = \frac{9}{2}\sqrt{3}$

$b_1 = \frac{9\times\frac{9}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{81}{4}\sqrt{3}$

$b_n = b_1\times(r')^{n-1} = \frac{81}{4}\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\times 3^4\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{1-n}$

Como a soma dos expoentes é:

$4 + \frac{1}{2} + 1 - n = \frac{10+1-2n}{2} = \frac{11-2n}{2}$

pelo que $b_n = \frac{1}{4}\times 3^{\frac{11-n}{2}}$.

b) $\lim\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{b_1}{1-r'} = \frac{\frac{81}{4}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}} =$

$= \frac{3}{2}\times\frac{81}{4}\sqrt{3} = \frac{243\sqrt{3}}{8}$