Atividade de diagnóstico

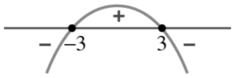
Pág. 6

1.1. $f(x)=9-x^2$

$f(x)=0 \Leftrightarrow 9-x^2=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3$

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-3\,,\,3\right[$

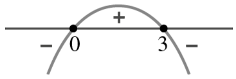
$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty\,,\,-3\right[\cup \left]3\,,\,+\infty\right[$



1.2. $g(x)=0 \Leftrightarrow 3x-x^2=0 \Leftrightarrow x(3-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$

$g(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]0\,,\,3\right[$

$g(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,\,0\right[\cup \left]3,+\infty\right[$



1.3. $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$

$g(x)>0 \Leftrightarrow x\in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

1.4. $i(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{-2} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

$i(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

2. $f(x)=\left|x^2-1\right|-x^2+x$

2.1. $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

$f(x)=\left|x^2-1\right|-x^2+x=$

$$=\begin{cases} x^2-1-x^2 & \text{se } x\le -1 \vee x\ge 1 \\ -x^2+1-x^2+x & \text{se } -1<x<1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x-1 & \text{se } x\le -1 \vee x\ge 1 \\ -2x^2+x+1 & \text{se } -1<x<1 \end{cases}$$

2.2. $f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x-1=0 \wedge (x\le -1 \vee x\ge 1)\right] \vee$

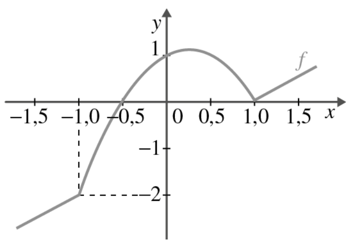
$\vee \left(-2x^2+x+1=0 \wedge -1<x<1\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee \left(x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4} \wedge -1<x<1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee \left[\left(x=1 \vee x=-\frac{1}{2}\right) \wedge -1<x<1\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=1$$

2.3.



3. $f(x)=\sqrt{x-1}$; $g(x)=2-x^2$

3.1. **a)** $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(2)=\sqrt{2-1}=1$

b) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=2-1^2=1$

3.2. $D_f=\left[1\,,\,+\infty\right[$; $D_g=\mathbb{R}$

a) $D_{f\circ g}=\{x:\ x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$

$x\in D_g \wedge g(x)\in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \wedge 2-x^2\ge 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-1\le 0 \Leftrightarrow x\in[-1\,,\,1]$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(2-x^2\right)=\sqrt{2-x^2-1}=$

$=\sqrt{1-x^2}$

$f\circ g:\ [-1\,,\,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

b) $D_{g\circ f}=\{x:\ x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}=$

$x\in D_f \wedge f(x)\in D_g \Leftrightarrow x\ge 1 \wedge \sqrt{x-1}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\ge 1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x-1}\right)=$

$=2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2=2-(x-1)=3-x$

$g\circ f:\ \left[1\,,\,+\infty\right[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3-x$

4. $f(x)=1-2\sin x$

4.1. $-1\le \sin(2x)\le 1$

$-2\le -2\sin(2x)\le 2$

$-1\le 1-2\sin(2x)\le 3$

$\forall x\in\mathbb{R},\ -1\le f(x)\le 3$ tomando todos os valores do intervalo.

$D_f'=[-1\,,\,3]$

4.2. f é limitada porque é simultaneamente majorada e minorada, pois:

$$-1\le f(x)\le 3,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

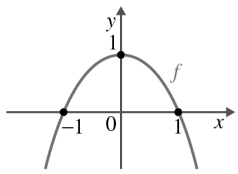
4.3. **a)** $\left[3\,,\,+\infty\right[$ **b)** $\left]-\infty\,,\,-1\right]$

Pág. 7

5.1. $f(x)=1-x^2$

$D_f'=\left]-\infty\,,\,1\right]$

Logo, 1 é o máximo absoluto de f e f não tem mínimo absoluto.



5.2. $g(x)=1-\sin x$

$D'_{\sin x}=[-1\,,\,1]$

$-1\le -\sin x\le 1$

$0\le 1-\sin x\le 2$

$D'_g=[0\,,\,2]$

Logo, 0 é o mínimo absoluto de g e 2 é o máximo absoluto.

6. Máximos relativos: 2 para $x=2$ e -1 para $x\in\left]4\,,\,6\right]$

Mínimos relativos: -1 para $x\in\left[4\,,\,6\right[$ e -3 para $x=8$

7.1. $A(x)=3x^3-5x^2-11x-3$

Divisores inteiros de -3: -3, -1, 1 e 3

$A(-1)=3(-1)^3-5(-1)^2-11\times(-1)-3=-3-5+11-3=0$

$3x^2-8x-3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6} \Leftrightarrow$$

	3	−5	−11	−3
−1		−3	8	3
	3	−8	−3	0

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=3$$

$$A(x)=3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)$$

7.2. $B(x)=x^3-1$

$B(1)=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

A equação é impossível

$B(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

7.3. $C(x)=x^4+x^3-5x^2+x-6$

Divisores inteiros de –6 :

–6 , –3 , –2 , –1 , 1 , 2 , 3 e 6

$C(2)=2^4+2^3-5\times2^2+2-6$

$=16+8-20-4=0$

$C(-3)=(-3)^4+(-3)^3-5\times(-3)^2-3-6=$

$=81-27-45-9=$

$=81-81=0$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} \\ -3 & & -3 & 0 & -3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^2+1\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$C(x)=(x-2)(x+3)(x^2+1)$

8. $A(x)=x^3-x^2-x+1$

$A(1)=1^3-1^2-1+1=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$A(x)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)=$

$=(x-1)^2(x+1)$

$B(x)=x^3-3x^2-x+3=$

$=x^2(x-3)-(x-3)=$

$=(x-3)(x^2-1)=$

$=(x-3)(x-1)(x+1)$

$f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2-x+3}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 1\ ,\ 3\}$

$f(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{x-1}{x-3},\ \forall x\in D_f$

Pág. 8

Atividade inicial 1

1.1. Por exemplo:

a) $\dfrac{1}{n}\to 0$ e $\dfrac{2}{n+1}\to 0$

b) $0{,}001+\dfrac{1}{n}\to 0{,}001$ e $0{,}001+\dfrac{1}{n+1}\to 0{,}001$

c) $2{,}99-\dfrac{1}{n}\to 2{,}99$ e $2{,}99-\dfrac{1}{n+1}\to 2{,}99$

d) $2-\dfrac{1}{n}\to 2$ e $2+\dfrac{1}{2n}\to 2$

1.2. $u_n=5$ e $v_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{se } n\leq 100\\ 5 & \text{se } n>100\end{cases}$

a) $\forall n\in\mathbb{N}\ \ a<\dfrac{1}{n}\leq 1$

$\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n\in A$ e $v_n\in A$

b) $\lim u_n=5$ e $\lim v_n=5$

1.3. Por exemplo, as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$a_n=\begin{cases}0 & \text{se } n\leq 100\\ 5 & \text{se } n\geq 100\end{cases}$ e $b_n=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1} & \text{se } n\leq 10\\ 5 & \text{se } n>10\end{cases}$

1.4. Não existe

2. $B=\{1\ ,\ 2\}$

2.1. $u_n=\begin{cases}2 & \text{se } n\leq 200\\ 1 & \text{se } n>200\end{cases}$

$\lim u_n=1$

2.2. Por exemplo, as sucessões (c_n) e (d_n) definidas por

$c_n=1$ e $d_n=\begin{cases}2 & \text{se } n\leq 1000\\ 1 & \text{se } n>1000\end{cases}$

Pág. 9

1.1. $A=]2\ ,\ +\infty[\ ;\ \bar{A}=[2\ ,\ +\infty[$

1.2. $B=[0\ ,\ 1[\cup]2\ ,\ 3]\ ;\ \bar{B}=[0\ ,\ 1]\cup[2\ ,\ 3]$

1.3. $C=\mathbb{R}^+\ ;\ \bar{C}=\mathbb{R}_0^+$

1.4. $D=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}\ ;\ \bar{D}=D=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$

1.5. $E=[0\ ,\ \pi[\cup\{-2\pi\ ,\ -\pi\}$

$\bar{E}=[0\ ,\ \pi]\cup\{-2\pi\ ,\ -\pi\}$

1.6. $F=\mathbb{N}\ ;\ \bar{F}=\mathbb{N}$

Pág. 10

2.1. $f(x)=(x-3)(1-2x)^2$

$D_f=\mathbb{R}$

2 é o ponto aderente de D_f

Seja x_n uma sucessão qualquer tal que:

$x_n\in D_f,\ \forall n\in\mathbb{N}$ e $x_n\to 2$

$\lim f(x_n)=\lim\left[(x_n-3)(1-2x_n)^2\right]=$

$=(\lim x_n-3)(1-2\times\lim x_n)^2=$

$=(2-3)(1-2\times 2)^2=-1\times 9=-9$

Logo, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-9$.

2.2. $g(x)=\sqrt{9-x^2}$

$D_g=[-3\ ,\ 3]$

$\sqrt{5}$ é o ponto aderente de D_g .

Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que:

$x_n\in D_g,\ \forall n\in\mathbb{N}$ e $x_n\to\sqrt{5}$

$\lim g(x_n)=\lim\sqrt{9-x_n^2}=\sqrt{9-(\lim x_n)^2}=$

$=\sqrt{9-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{9-5}=2$

Logo, $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} g(x)=2$.

Pág. 11

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x+1} & \text{se } x\neq -1\\ 2 & \text{se } x=-1\end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}$

-1 é ponto aderente a D_f.

Seja (x_n) uma sucessão tal que $x_n\to -1$ e, para todo o $n\in\mathbb{N}$, $x_n\neq -1$ e (y_n) uma sucessão tal que, a partir de certa ordem, $y_n=-1$:

$$\lim f(x_n)=\lim\frac{1-(x_n)^2}{x_n+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\frac{(1-x_n)(1+x_n)}{x_n+1}=$$

$$=\lim(1-x_n)=1-\lim x_n=1-(-1)=2$$

$\lim f(x_n)=\lim 2=2$

Logo, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$.

4. $g(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x=0\\ \dfrac{1}{|x|} & \text{se } x\neq 0\end{cases}$

$D_g=\mathbb{R}$

Sejam, por exemplo, as sucessões $u_n=\dfrac{1}{n}$ e $v_n=0$.

Como $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$ e $u_n\to 0$, temos:

$$\lim f(u_n)=\lim\frac{1}{|u_n|}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Dado que $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=0$, tem-se que $\lim f(v_n)=\lim 1=1$.

Como (u_n) e (v_n) são sucessões de elementos do domínio de f que tendem para 0 e $\lim f(u_n)\neq\lim(v_n)$, podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Pág. 15

5.1. $f(x)=x-x^3$, $D_f=\mathbb{R}$

Seja (x_n) uma sucessão de elementos de D_f tal que:

$\lim x_n=+\infty$

$$\lim f(x_n)=\lim\left[x_n-(x_n)^3\right]=\lim\left[x_n^3\left(\frac{1}{x_n^2}-1\right)\right]=$$

$$=\lim x_n^3\times\left(\frac{1}{(\lim x_n)^2}-1\right)=(+\infty)^3\left(\frac{1}{(+\infty)^2}-1\right)=$$

$$=+\infty(0-1)=-\infty$$

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

5.2. $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $D_g=\mathbb{R}$

Seja (x_n) uma sucessão de elementos de D_f, tal que:

$x_n\to-\infty$

$$\lim g(x_n)=\lim\frac{x_n}{x_n^2+1}=\lim\frac{x_n}{x_n\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)}=$$

$$=\lim\frac{1}{x_n+\dfrac{1}{x_n}}=\frac{1}{\lim x_n+\dfrac{1}{\lim x_n}}=\frac{1}{-\infty+0}=0$$

Logo, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.

Pág. 18

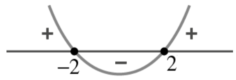
6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\ ,\ 2\}$

6.1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{(-\infty)^2-4}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{(+\infty)^2-4}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

6.2. a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$



Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ então não existe limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

7. $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}+2m & \text{se } x<0\\ -3 & \text{se } x=0\\ \dfrac{3n-2x}{x+4} & \text{se } x>0\end{cases}$

Se existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, então $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\sqrt[3]{x+1}+2m\right)=1+2m$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3n+2x}{x+4}=\dfrac{3n}{4}$

$1+2m=-3\wedge\dfrac{3n}{4}=-3\Leftrightarrow 2m=-4\wedge n=-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=-2\wedge n=-4$

Pág. 19

8. $f(x)=\dfrac{1+2\cos x}{x^2+1}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ -1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ -2\leq 2\cos x\leq 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ -1\leq 1+2\cos x\leq 3$

Portanto, sendo g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x)=1+2\cos x$, g é limitada.

Se $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$.

Portanto, se g é uma função limitada e $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)\times h(x)\right]=0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Pág. 20

9. $f(x)=\sqrt{x}-1$, $D_g=\mathbb{R}_0^+$

$g(x)=x^2+8x$

9.1. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+8x\right)=9$

$\lim\limits_{x\to 9} f(x)=\lim\limits_{x\to 9}\left(\sqrt{x}-1\right)=\sqrt{9}-1=2$

Então, $\lim\limits_{x\to 1}(f\circ g)(x)=2$.

9.2. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x}-1\right)=0$

$\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+8x\right)=0$

$\lim\limits_{x\to1}\left(g\circ f\right)(x)=0$

Pág. 21

10.1. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

10.2. $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

10.3. $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{1-x^2}{3x+x^2}=\frac{-8}{0^+}=-\infty$

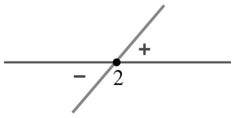
$3x+x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$

10.4. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-x^2}{3x+x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

10.5. $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{1+x}{|x|-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{1+x}{x-2}=$

Se $x\to2$, $|x|=x$.

$=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3}{0^-}=-\infty$



10.6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-1}{\left|x^2-4\right|}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

11.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-x^5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^5\right)=-(-\infty)=+\infty$

11.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^4-x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^4\right)=+\infty$

11.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3\right)=-\infty$

11.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^2+x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$

11.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3\right)=-(-\infty)=+\infty$

Pág. 22

12.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x^2+x}{2x^3+x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{2x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}x^2\right)=+\infty$

12.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x-x^2}{3+x+x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\left(-\frac{1}{+\infty}\right)=0$

12.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^3-x}{5x^3+x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{5x^3}=\frac{3}{5}$

12.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+x+3x^4}{x^5-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=\frac{3}{+\infty}=0$

12.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-x}{1-x-x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)=\frac{3}{-\infty}=0$

12.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2}x^2-x^2+x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)x^2+x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)x^2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=$

$=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$

12.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{2}\times\frac{3}{x^3-1}\right)\overset{(\infty\times0)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+3x-3}{2x^3-2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^3}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2x}=\frac{3}{+\infty}=0$

12.8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-1}{3}\times\frac{x}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x}{3x^3-3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\frac{2}{3}$

Pág. 23

13.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{2x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{1-0}}{2+0}=-\frac{1}{2}$

13.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\frac{3+0}{\sqrt{1+0}}=3$

13.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{9x^2+2}+\sqrt{1+x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}=$

$=\frac{2+0}{\sqrt{9+0}+\sqrt{0+0}}=\frac{2}{3}$

13.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+2}}{2x-3}\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{2x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}=\frac{\sqrt{0-0}-\sqrt{0+0}}{2-0}=0$

13.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-3-x}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}=\frac{-3}{+\infty}=0$

13.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$

13.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{3-2x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{3-2x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{3-2x}\right)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3-2x}}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x-(3-2x)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}\right)}}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-x\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}\right)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

13.8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x-1\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+x}+(x+1)\right]}{\sqrt{x^2+x}+x+1}=$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-\left(x^2+2x+1\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x+1}=$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-1-0}{\sqrt{1+0}+1+0}=-\frac{1}{2}$$

13.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}{2x-1}=$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1+0}+1}{2-0}=1$$

14. $f(x)=\sqrt{x^2+x}$

14.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=1+0=1$$

14.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

14.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=-\sqrt{1+0}=-1$$

14.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\sqrt{x^2+x}-x}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{-\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

Pág. 24

15.1. $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x-6}{4-x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\frac{-3\cancel{(2-x)}}{\cancel{(2-x)}(2+x)}=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$

15.2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-8x+6}{x^2+3x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-6)}{(x-1)(x+4)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-6}{x+4}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$$

	2	−8	6
1		2	−6
	2	−6	0

	1	3	−4
1		1	4
	1	4	0

15.3. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+8x+8}{x^3-x+6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)(2x+4)}{(x+2)\left(x^2-2x+3\right)}=$$

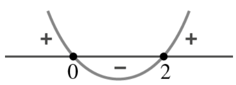
$$=\frac{-4+4}{4+4+3}=0$$

	2	8	8
−2		−4	−8
	2	4	0

	1	0	−1	6
−2		−2	4	−6
	1	−2	3	0

15.4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2+x}{x^3-2x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cancel{x}(3x+1)}{\cancel{x}\left(x^2-2x\right)}$

- $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{3x+1}{x^2-2x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+}=\frac{3x+1}{x^2-2x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$



Logo, não existe $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2+x}{x^3-2x^2}$.

15.5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(1-x^2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$

$$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+3-4}{(1-x)(1+x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(1+x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\frac{-1}{2\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\frac{1}{8}$$

15.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x-2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{4\times 0^+}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

15.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x+\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(x^2+x\right)\left(x-\sqrt{x}\right)}{\left(x+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(x^2+x\right)\left(x-\sqrt{x}\right)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}\,(x+1)\left(x-\sqrt{x}\right)}{\cancel{x}\,(x-1)}=$

$=\dfrac{(0+1)(0-0)}{0-1}=0$

15.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+3}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2x^2+x\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3}\right)}{\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2x^2+x\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3}\right)}{2x+3-(x+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}\,(2x+1)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3}\right)}{\cancel{x}}=$

$=1\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$

15.9. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{4}{4-x^2}-\dfrac{1}{x+2}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{4}{(2-x)(2+x)}-\dfrac{1}{x+2}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-(2-x)}{(2-x)(2+x)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{(2-x)(2+x)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{4}$

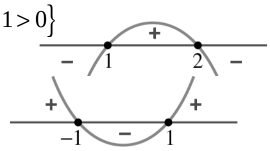
Pág. 25

16.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{-2+3x-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}:\ -2+3x-x^2\geq 0\wedge x^2-1>0\right\}$

$-x^2+3x-2=0\Leftrightarrow x=1\vee x=2$

$x^2-1=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=1$



$D=[1\ ,\ 2]\cap\left(]-\infty\ ,\ -1[\cup]1\ ,\ +\infty[\right)$

$D=]1\ ,\ 2]$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{-2+3x-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\dfrac{-2+3x-x^2}{x^2-1}}=$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-\cancel{(x-1)}\,(x-2)}{\cancel{(x-1)}\,(x+1)}}=\sqrt{\dfrac{-(1-2)}{(1+1)}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

16.2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}$

$|x-3|=\begin{cases}x-3 & \text{se } x\geq 3\\ -(x-3) & \text{se } x<3\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x\cancel{(x-3)}}{-\cancel{(x-3)}}=\dfrac{3}{-1}=-3$

- $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}=3$

Portanto, não existe $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}$.

16.3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left|x-x^2\right|}{2x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x+x^2}{2x+1}=$

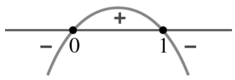
$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

$x-x^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(1-x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=1$



Se $x>1$:

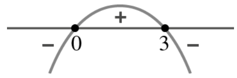
$\left|x-x^2\right|=-x+x^2$

16.4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+4x}{\left|x-3x^2\right|}=$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+4x}{3x^2-x}=$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2}{3x^2}=$

$=1$



Se $x\to -\infty,\ \left|x-3x^2\right|=3x^2-x$

16.5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\left|x^2-x\right|+2x^2}{1-3x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-x+2x^2}{1-3x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-x}{1-3x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2}{-3x^2}=-1$

Se $x\to -\infty,\ \left|x^2-x\right|=x^2-x$

16.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2-4}{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{|x-2|}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x-2}{|x-2|}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{\cancel{x-2}}{-\cancel{(x-2)}}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=-\dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x-2}{|x-2|}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|}$.

16.7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{\left|x^2-1\right|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{\left|(x+1)(x-1)\right|}=$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2\\ -1 & & -1 & 2\\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0}\end{array}$$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{|x+1|}\times\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{|x+1|}\times\left(\dfrac{-3}{2}\right)=$

- $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x+1}{|x+1|}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\cancel{x+1}}{-\cancel{(x+1)}}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+1}{|x+1|}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+1}{x+1}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$

  Logo, não existe $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{|x^2-1|}$.

16.8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\dfrac{x}{\left(x^3\right)^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\dfrac{x}{x^6}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\dfrac{1}{x^5}} = \sqrt{\dfrac{1}{0^+}} = +\infty$

16.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\dfrac{x}{\left(x^3\right)^3}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^9}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^8}} = \sqrt{\dfrac{1}{0^+}} = +\infty$

Pág. 26

17. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 1$

$f(1) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq f(1)$. Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Logo, f não é contínua no ponto $x = 1$.

Pág. 27

18.1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{2} & \text{se } x \leq -1 \\ 2x^2-1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(2x^2-1\right) = 2\times(-1)^2 = 1$

$f(-1) = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(-1) = 1$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$.

Dado que existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, f é contínua no ponto $x = -1$.

18.2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-x^2}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ -2 & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{2-5x}{x+2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-x^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-x\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = -2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2-5x}{x+2} = \dfrac{-8}{4} = -2$

$g(2) = -2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = g(2)$. Logo, existe $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ pelo que g é contínua no ponto $x = 2$.

18.3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x-1}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)} =$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{1}+1} = -\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$. Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ pelo que h não é contínua no ponto $x = 0$.

19.1. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^2+(1-k)x-1}{x^2-1} & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{kx+2}{4} & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{kx^2+(1-k)x-1}{x^2-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\cancel{(x-1)}(kx+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \dfrac{k+1}{2}$

	k	$1-k$	-1
1		k	1
	k	1	0

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{kx+2}{4} = \dfrac{k+2}{4}$

$g(1) = \dfrac{k+2}{4}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = g(1) \Leftrightarrow \dfrac{k+1}{2} = \dfrac{k+2}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k+2 = k+2 \Leftrightarrow k = 0$

g é contínua no ponto 1 se e só se $k = 0$.

19.2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-k}{\sqrt{x}-\sqrt{k}} & \Leftarrow x > k \\ k & \Leftarrow x \leq k \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = \lim\limits_{x\to k^+} \dfrac{x-k}{\sqrt{x}-\sqrt{k}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to k^+} \dfrac{(x-k)\left(\sqrt{x}+\sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{k}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to k^+} \dfrac{(x-k)\left(\sqrt{x}+\sqrt{k}\right)}{(x-k)} = \sqrt{k}+\sqrt{k} = 2\sqrt{k}$

$\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = \lim\limits_{x\to k^-} k = k$

$f(k) = k$

$\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = \lim\limits_{x\to k^+} f(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{k} = k \Rightarrow 4k = k^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-4k = 0 \Leftrightarrow k(k-4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 4$

Verificação:

$k = 0$: $2\sqrt{0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (V)

$k = 4$: $2\sqrt{4} = 4 \Leftrightarrow 2\times 2 = 4$ (V)

f é contínua no ponto $x = k$ se e só se $k \in \{0, 4\}$.

Pág. 29

20.1. $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{2x}{x+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$; $D_f = \mathbb{R}$

- Em $\left]-\infty\ ,\ 1\right]$, f é contínua por ser definida por um polinómio.
- Em $\left]1\ ,\ +\infty\right[$, f é contínua por ser definida por uma função racional.
- No ponto $x = 1$:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(2-x^2\right) = 1\ ;\ \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{2x}{x+1} = 1$$

$$f(1) = 2-1 = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$, existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

Logo, f é contínua no ponto $x = 1$.

Conclusão: A função f é contínua em $\mathbb{R}$.

20.2. $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-x}{x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

g é contínua em $\left]-\infty\ ,\ 0\right[$ e em $\left]0\ ,\ +\infty\right[$

(função constante em cada um dos intervalos)

$\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 1$

Como $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to0^+} g(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to0} g(x)$.

Logo, g não é contínua no ponto $x = 0$.

g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

20.3. $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{se } x < -2 \\ -4 & \text{se } x = -2 \\ \dfrac{2x+4}{\sqrt{x+3}-1} & \text{se } x > -2 \end{cases}\ ;\ D_h = \mathbb{R}$$

- Em $\left]-\infty\ ,\ -2\right[$, h é contínua por ser definida por uma função racional.
- Em $\left]-2\ ,\ +\infty\right[$, h é contínua por ser definida pelo quociente de funções contínuas:
  - uma função polinomial
  - uma soma de uma potência de expoente racional de uma função contínua (função polinomial) com uma função constante.
- No ponto $x = -2$:

$$\lim_{x\to-2^-} h(x) = \lim_{x\to-2^-}\frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to-2^-}\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = -4$$

- $$\lim_{x\to-2^+} h(x) = \lim_{x\to-2^+}\frac{2x+4}{\sqrt{x+3}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to-2^+}\frac{2(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-2^+}\frac{2(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{x+3-1} = \lim_{x\to-2^+}\frac{2(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{x+2} =$$

$$= 2\left(\sqrt{-2+3}+1\right) = 4$$

$\lim\limits_{x\to-2^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to-2^+} h(x)$. Logo, não existe $\lim\limits_{x\to-2} h(x)$ pelo que h não é contínua no ponto $x = -2$.

Portanto, h é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

21. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^2-(k+1)x+1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ kx-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- Qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$, f é contínua em $\left]-\infty\ ,\ 1\right[$ (função racional) e em $\left]1\ ,\ +\infty\right[$ (função polinomial).
- No ponto $x = 1$:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{kx^2-(k+1)x+1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(kx-1)}{\cancel{x-1}} = k-1$$

$$\begin{array}{c|ccc} & k & -(k+1) & 1 \\ 1 & & k & -1 \\ \hline & k & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(kx-1) = k-1$$

$$f(1) = k-1$$

Qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$.

Logo, $\forall k \in \mathbb{R}$, existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ pelo que f é contínua em $x = 1$.

Portanto, qualquer que seja o valor de k, f é contínua.

Pág. 30

22.1. Sejam (x_n) e (y_n) as sucessões

$$x_n = -2n\pi \to -\infty \text{ e } y_n = \pi - 2n\pi \to -\infty$$

$$\lim\cos(x_n) = \lim\cos(-2n\pi) = \lim\cos 0 = \lim 1 = 1$$

$$\lim\cos(y_n) = \lim\cos(\pi-2n\pi) = \lim\cos\pi = \lim(-1) = -1$$

Portanto, como existem duas sucessões (x_n) e (y_n) de valores do domínio de $\cos x$, a tender para $-\infty$, tais que as correspondentes sucessões $f(x_n)$ e $f(y_n)$ têm limites diferentes, podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$

22.2. Sejam (x_n) e (y_n) sucessões tais que

$$x_n = \frac{\pi}{4} + n\pi \to +\infty \text{ e } y_n = -\frac{\pi}{4} + n\pi \to +\infty$$

$$\lim\tan(x_n) = \lim\tan\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right) = \lim\tan\frac{\pi}{4} = \lim 1 = 1$$

$$\lim\tan(y_n) = \lim\tan\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right) = \lim\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Portanto, como existem sucessões (x_n) e (y_n) de valores do domínio da tangente, a tender para $+\infty$, tais que as correspondentes sucessões $f(x_n)$ e $f(y_n)$ têm limites diferentes, podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x\to+\infty}\tan x$.

Pág. 31

23.1. $f(x) = x \times \cos\dfrac{\pi}{x}$

A função $x \mapsto \dfrac{\pi}{x}$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

A função $x \mapsto \cos x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

A função $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por ser a composta de funções contínuas.
Logo, como toda a função polinomial é contínua, f é contínua por ser o produto de duas funções contínuas.

23.2. $g(x) = \cos(\sin x)$
As funções $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto \cos x$ são contínuas em $\mathbb{R}$. Logo, a função g é contínua por ser a composta de duas funções contínuas.

23.3. $h(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
A função tangente é contínua.
Toda a função polinomial é contínua. Logo, h é contínua por ser a composta de duas funções contínuas.

24.1. $\lim\limits_{x\to 3} \sin\left(\frac{\pi x}{x+9}\right)$
Seja $y(x) = \frac{\pi x}{x+9}$.

$$\lim_{x\to 3} y(x) = \lim_{x\to 3} \frac{\pi x}{x+9} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to 3} \sin\left(\frac{\pi x}{x+9}\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \sin y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

24.2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)$
Seja $y(x) = \cos x$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x) = \lim_{y\to 0} \sin y = \sin 0 = 0$$

Pág. 33

Atividades complementares

25.1. $\bar{A} = [0\ ,\ 3]$

25.2. $\bar{B} = [0\ ,\ 1] \cup \left\{\frac{3}{2}\ ,\ 3\right\}$

25.3. $\bar{C} = C$

25.4. $\bar{D} = \mathbb{R}$

26.1. Seja $f(x) = x(x - x^3)$.
$D_f = \mathbb{R}$
Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que $x_n \in D_f$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to \sqrt{2}$.

$$\lim f(x_n) = \lim\left[x_n\left(x_n - x_n^3\right)\right] = \left[\lim x_n\left(\lim x_n - (\lim x_n)^3\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - \left(\sqrt{2}\right)^3\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^4 = 2 - 4 = -2$$

Logo, $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x) = -2$

26.2. Seja $f(x) = \frac{x-1}{x}$.
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in D_f$ e $x_n \to \frac{1}{3}$.

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n - 1}{x_n} = \frac{\lim x_n - 1}{\lim x_n} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \times 3 = -2$$

Logo, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} f(x) = -2$

26.3. Seja $f(x) = \sqrt{3x + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{3x^2+1}{x}}$.
$D_f = \mathbb{R}^+$
Seja (x_n) uma sucessão tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in D_f$ e $x_n \to 1$.

$$\lim f(x_n) = \lim \sqrt{3x_n + \frac{1}{x_n}} = \sqrt{3\lim x_n + \frac{1}{\lim x_n}} =$$

$$= \sqrt{3\times 1 + \frac{1}{1}} = \sqrt{3+1} = 2$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

27. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x - x^2 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$, $D_f = \mathbb{R}$

27.1. Sejam (x_n) uma sucessão tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in D_f$ e $x_n \to 1$.
Se $x_n \to 1$ então, a partir de certa ordem temos $x_n \neq 0$ pelo que:

$$\lim f(x_n) = \lim\left(x_n - x_n^2\right) = \lim x_n - (\lim x_n)^2 = 1 - 1^2 = 0$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

27.2. Seja, por exemplo, as sucessões $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = 0$.

- Dado que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \neq 0$ e $x_n \to 0$, temos
  $\lim f(x_n) = \lim\left(x_n - x_n^2\right) = \lim x_n - (\lim x_n)^2 = 0 - 0^2 = 0$
- Como $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = 0$, temos $\lim f(y_n) = \lim 1 = 1$.

Portanto, (x_n) e (y_n) são sucessões de elementos de D_f que tendem para 0 e $\lim f(x_n) \neq \lim(y_n)$, podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

28. $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

28.1. Seja (x_n) uma sucessão de elementos de D_f, tal que $x_n \to -\infty$. Então:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2}{1 - x_n} = \lim \frac{x_n}{\frac{1}{x_n} - 1} =$$

$$= \frac{-\infty}{0-1} = +\infty \quad \text{pois} \quad \lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

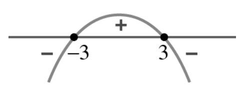
Logo, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

28.2. Seja (x_n) uma sucessão de elementos de D_f tal que $x_n \to 1$ e $x_n > 1$, a partir de determinada ordem.

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2}{1 - x_n} = \frac{(\lim x_n)^2}{1 - \lim x_n} = \frac{1}{1 - 1^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

29.1. $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$



29.2. $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

29.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{9-x^2}=\dfrac{3}{-\infty}=0$

29.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{9-x^2}=\dfrac{3}{-\infty}=0$

30. $f(x)=\begin{cases}(kx)^2-x & \text{se } x<1\\ 0 & \text{se } x=1\\ x^2-kx & \text{se } x>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left[(kx)^2-x\right]=k-1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2-kx\right)=1-k$

$f(1)=0$

Para que exista $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ é necessário e suficiente que

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow k-1=1-k=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k-1=0\wedge1-k=0\Leftrightarrow k=1$

31. $f(x)=\dfrac{\sin x+\sin(2x)}{\sqrt{x}+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)+\sin(2x)}{\sqrt{x}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sin x+\sin(2x)\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{x}+x}\right)=0$

Se $g(x)=\sin x+\sin(2x)$ e $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+x}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$, $-1\le\sin x\le1$ e $-1\le\sin(2x)\le1$

$\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ -2\le\sin x+\sin(2x)\le2$

Ou seja, g é uma função limitada.

Por outro lado: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}+x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

Como g é limitada e $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$, então

$\lim\limits_{x\to0}\left[g(x)\times h(x)\right]=0$.

32. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$g(x)=1+\dfrac{2}{x}$

32.1. $\lim\limits_{x\to4}g(x)=\lim\limits_{x\to4}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1+\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+1}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$

Logo, $\lim\limits_{x\to4}(f\circ g)(x)=\dfrac{3}{5}$.

32.2. $\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{4}{5}$

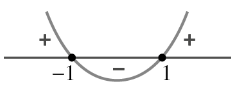
$\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1+\dfrac{2}{\frac{4}{5}}=1+2\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{7}{2}$

Logo, $\lim\limits_{x\to4}(g\circ f)(x)=\dfrac{7}{2}$.

33.1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x}{|x-3|}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

33.2. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$

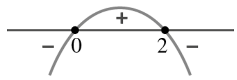
33.3. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+2}{2x^2-2}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$



33.4. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{2x^2-2}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

33.5. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-1}{2x-x^2}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

$2x-x^2=x(2-x)$



33.6. $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-1}{2x-x^2}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$

34.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{2}x-\sqrt{3}x^3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{3}x^3\right)=-(-\infty)=+\infty$

34.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5-x+1}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5}{2}=+\infty$

Pág. 34

35.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-6x^3}{3x^2+x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

35.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^3}{x+x^4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{+\infty}=0$

35.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-x^2-x^3}{\sqrt{2}x^3-x^3+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-x^2-x^3}{\left(\sqrt{2}-1\right)x^3+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3}{\left(\sqrt{2}-1\right)x^3}=$

$=\dfrac{-1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{-\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2-1}=-\sqrt{2}-1$

35.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{2}\times\dfrac{3}{x(x+1)^2}\right)\overset{(0\times\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-3}{2x\left(x^2+2x+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-3}{2x^3+4x^2+2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3}{2x^3}=\dfrac{3}{2}$

36.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+3x}{2x+3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}+3x}{2x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+3x}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+3\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}=2$

36.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\cancel{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}=-\sqrt{2}$

36.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-x}+3x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2-x}+3x\right)\left(\sqrt{9x^2-x}-3x\right)}{\sqrt{9x^2-x}-3x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{9x^2}-x-\cancel{9x^2}}{\sqrt{x^2\left(9-\frac{1}{x}\right)}-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{-x\sqrt{9-\frac{1}{x}}-3x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{-x}}{\cancel{-x}\left(\sqrt{9-\frac{1}{x}}+3\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{9-0}+3}=\dfrac{1}{6}$

36.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x+1|-\sqrt{1+4x^2}}{2x+1}\overset{(\infty-\infty)}{=}$

Se $x<-1,\ |x+1|=-(x+1)$.

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+4\right)}}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1-(-x)\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}}{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-1-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-1-0+\sqrt{0+4}}{2+0}=\frac{1}{2}$$

37.1. $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2+x-6}{2x^3-6x^2+8}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -6\\ 2 & & 2 & 6\\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0}\end{array}$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-2)(2x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{x+3}{2(x-2)(x+1)}=\frac{5}{0^-}=-\infty$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -6 & 0 & 8\\ 2 & & 4 & -4 & -8\\ \hline & 2 & -2 & -4 & \boxed{0}\\ 2 & & 4 & 4 & \\ \hline & 2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

37.2. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x-x^3}{x^4+x^3+x^2+x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(-x^2+x)}{\cancel{(x+1)}(x^3+x)}=$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & & 1 & -1 & 0\\ \hline & -1 & 1 & 0 & \boxed{0}\end{array}$$

$$=\frac{-(-1)^2-1}{(-1)^3-1}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & & -1 & 0 & -1 & 0\\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{0}\end{array}$$

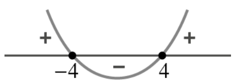
37.3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+x)}{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+x)}{x-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+x)}{-x\cancel{(x-1)}}=-2$$

37.4. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to4}\frac{x\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

37.5. $\lim\limits_{x\to-4^-}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{32}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-4^+}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{32}{0^-}=-\infty$



Não existe $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}$.

37.6. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)}{x+1-2x}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(1-x)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)}{\cancel{(1-x)}}=2\sqrt{2}$$

37.7. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x^2-2x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x(x-2)}\right)=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$

38.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|3-x|}{x-3}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6\\ 2 & & 2 & -6\\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0}\end{array}$$

$$|3-x|=\begin{cases}3-x & \text{se } x\le 3\\ -(3-x) & \text{se } x>3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|3-x|}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-x}{-(3-x)}=-1$$

38.2. Para $x\to+\infty$: $|1-x-2x^4|=-1+x+2x^4$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|1-x-2x^4|}{1-x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+x+2x^4}{1-x^4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{-x^4}=-2$$

38.3. Para $x\to-\infty$: $|1-x^2+x+x^3|=-1+x^2-x-x^3$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|1-x^2+x+x^3|}{1+x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+x^2-x-x^3}{1+x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{x^3}=-1$$

39. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}-k & \text{se } x\le 0\\ \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-1} & \text{se } x>0\end{cases}$

39.1. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\sqrt{1-x}-k\right)=1-k$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[(x-1)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right]=-1\times\left(\sqrt{1}+1\right)=-2$$

$f(0)=1-k$

Para que exista $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ é necessário suficiente que

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow 1-k=-2=1-k\Leftrightarrow k=3$$

39.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2\sqrt{x}}{x}-\frac{x\sqrt{x}}{x}}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}}=$$

$$=\frac{+\infty\times(1-0)}{0^+}=+\infty\ \text{ pois }\ \sqrt{1+\frac{1}{x}}>\sqrt{\frac{1}{x}},\ \forall x\in\mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-x}-k}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}-k}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-k}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)-\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x}=0$$

40.1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|6x-12|}{x^2-5x+6} & \text{se } x<2\\ 6 & \text{se } x=2\\ \dfrac{x^3-8}{x^2-2x} & \text{se } x>2\end{cases}$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{|6x-12|}{x^2-5x+6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to2^-}\frac{6|x-2|}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{-6\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{-6}{-1}=6$$

Se $x<2$: $|x-2|=-(x-2)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{x^2-2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{x\cancel{(x-2)}} = \frac{4+4+4}{2} = 6$$

$f(2) = 6$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Logo, f é contínua no ponto $x = 2$.

40.2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{se } x \neq \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \text{se } x = \sqrt{2} \end{cases}$

$$\lim_{x\to \sqrt{2}^-} g(x) = \lim_{x\to \sqrt{2}^+} g(x) = \lim_{x\to \sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to \sqrt{2}} \frac{\cancel{(x-\sqrt{2})}(x+\sqrt{2})}{\cancel{(x-\sqrt{2})}} = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} g(x) \neq g(\sqrt{2})$, Logo, não existe $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} g(x)$ pelo que g não é contínua no ponto $x = \sqrt{2}$.

40.3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{\sqrt{2x-4}} & \text{se } x > 2 \\ x-\sqrt{2x} & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{\sqrt{2x+4}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x-4}\sqrt{2x-4}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)\sqrt{2x-4}}{2\cancel{(x-2)}} = \frac{(4+4+4)\times\sqrt{0}}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(x-\sqrt{2x}\right) = 2-\sqrt{2\times 2} = 0$$

$h(2) = 2-\sqrt{4} = 0$

Dado que $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = h(2)$, existe $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$.

Logo, h é contínua no ponto $x = 2$.

40.4. $i(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x+2}-1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} i(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{x^6}{x}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0^-} x^5} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} i(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x+2}-1} = \frac{0}{\sqrt{2}-1} = 0$$

$i(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} i(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} i(x) = i(0)$. Logo existe $\lim\limits_{x\to 0} i(x)$ pelo que i é contínua no ponto $x = 0$.

41. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^2+(1-k)x-1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ kx+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{kx^2+(1-k)x-1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(kx+1)}{\cancel{(x-1)}} = k+1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (kx+1) = k+1$$

$f(1) = k+1$

$\forall k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = k+1$

Logo, qualquer que seja o valor de k, existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ pelo que f é contínua no ponto $x = 1$.

42. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 2+\dfrac{x\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

42.1. $D_f = \mathbb{R}$

Sabemos que toda a função polinomial é contínua e que uma potência de expoente racional de uma função contínua é uma função contínua.

- Em $]-\infty, 0[$:

  f é contínua por ser o quociente de das funções contínuas: uma é função polinomial e a outra é uma diferença de funções contínuas.
- Em $]0, +\infty[$:

  f é contínua por ser a soma de funções contínuas: uma função é constante e outra que é o quociente de duas funções contínuas (uma que é o produto de funções contínuas e outra que é a soma de funções contínuas).
- Em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-(1-x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\cancel{x}} = 1+\sqrt{1} = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2+\frac{x\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 2+\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}\sqrt{x}}{\left(x+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}} =$$

$$= 2+\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x\sqrt{x}+x} = 2+\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= 2+\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}+1} = 2+\frac{0}{0+1} = 2$$

$f(0) = 2$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ pelo que f é contínua no ponto $x = 0$.

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}$.

42.2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-(1-x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\cancel{x}} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{x\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x\sqrt{x}}{x}}{1+\frac{\sqrt{x}}{x}} = 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\frac{x}{x\sqrt{x}}} =$

$= 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 2 + \dfrac{+\infty}{1+0} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{x\sqrt{x}}{x\left(x+\sqrt{x}\right)}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} =$

$= 0 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{x}{\sqrt{x}}+1} =$ $\qquad \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

43. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

43.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{\pi x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$= \mathbb{R}\setminus\{x : x = 1+2k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

43.2. A função f é contínua por ser a composta de funções contínuas: a função tangente e uma função polinomial.

43.3. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = \tan 0 = 0$

b) Se $y = \dfrac{\pi x}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{\pi}{2}^-$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \tan\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \tan y = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} \tan\dfrac{\pi x}{2} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{2}{3}\right) = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

d) Se $y = \dfrac{\pi x}{2}$, $\lim\limits_{x\to 3^+} y = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{3\pi}{2}^+$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \tan\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{y\to\frac{3\pi}{2}^+} \tan y = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \tan\dfrac{\pi x}{2} = \tan\left(-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}\right) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

f) Se $y = \dfrac{\pi x}{2}$, $\lim\limits_{x\to 4} y = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\pi x}{2} = 2\pi$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \tan\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{y\to 2\pi} \tan y = \tan(2\pi) = \tan 0 = 0$

43.4. Sejam (x_n) e (y_n) as sucessões de elementos de D_f tais que:

$x_n = \dfrac{1}{2} + 2n \to +\infty$ e $y_n = -\dfrac{1}{2} + 2n \to +\infty$

$\lim f(x_n) = \lim \tan\left[\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{2}+2n\right)\right] = \lim \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right) =$

$= \lim 1 = 1$

$\lim f(y_n) = \lim \tan\left[\dfrac{\pi}{2}\left(-\dfrac{1}{2}+2n\right)\right] =$

$= \lim \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right) = \lim(-1) = -1$

Como (x_n) e (y_n) são sucessões de elementos do domínio de f que tendem para $+\infty$ e $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$, podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

44. $g(x) = \sin x \cos(2x)$

44.1. g é contínua por ser o produto de duas funções contínuas: a função seno e a composta da função cosseno com uma função polinomial.

44.2. a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\sin x\cos(2x)\right] = \sin 0 \times \cos 0 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\sin x\cos(2x)\right] = \sin\dfrac{\pi}{2}\times\cos\pi =$

$= 1\times(-1) = -1$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{3}} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{3}}\left[\sin(x)\cos(2x)\right] =$

$= \sin\dfrac{5\pi}{3}\times\cos\dfrac{10\pi}{3} =$

$= \sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(2\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right) =$

$= -\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\left[\sin x\cos(2x)\right] =$

$= \sin\dfrac{3\pi}{4}\times\cos\dfrac{3\pi}{2} =$

$= \sin\dfrac{3\pi}{4}\times 0 = 0$

e) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}} g(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\left[\sin x\times\cos(2x)\right] =$

$= \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\times\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= -\sin\dfrac{\pi}{6}\times\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}} g(2x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\left[\sin(2x)\cos(4x)\right] =$

$= \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 0 = 0$

45. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

45.1. • Para $x \neq 1$, f é contínua (função constante)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0 \neq f(1)$. Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ pelo que f não é contínua em $x = 1$.

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

• Para $x \neq 0$, g é contínua (função constante)

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1 \neq g(0)$. Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ pelo que g não é contínua no ponto $x = 0$.

g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

45.2. a) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(1) & \text{se } x \neq 0 \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{com} \quad (f\circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

b) $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(0) & \text{se } x \neq 1 \\ g(1) & \text{se } x = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$g\circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{com} \quad (g\circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

45.3. a) $\lim\limits_{x\to 0^-} (f\circ g)(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (f\circ g)(x) = 1 \neq (f\circ g)(0)$.

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0} (f\circ g)(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} (f\circ g)(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (g\circ f)(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} (g\circ f)(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (g\circ f)(x) = 0 \neq (g\circ f)(1)$.

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 1} (g\circ f)(x)$

45.4. Por exemplo:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{com} \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = 0 \neq h(1)$. Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ pelo que h não é contínua no ponto $x = 1$.

$f + h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f+h)(x) = \begin{cases} 0+0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1+(-1) & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$(f+h)(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Logo $f+h$ é contínua.

45.5. É falsa. Por exemplo as funções f e h são descontínuas no ponto $x = 1$ e $f+h$ é contínua nesse ponto.

46. $f(x) = a(x-1)(x-3)$

$f(0) = 6 \Leftrightarrow a\times(-1)\times(-3) = 6 \Leftrightarrow a = 2$

$f(x) = 2(x-1)(x-3)$

$g(x) = b(x-1)^2(x-3)$

$g(0) = -9 \Leftrightarrow b\times 1\times(-3) = -9 \Leftrightarrow b = 3$

$g(x) = 3(x-1)^2(x-3)$

46.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{6}{-9} = -\dfrac{2}{3}$

46.2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2(x-1)(x-3)}{3(x-1)^2(x-3)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{3(x-1)} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

46.3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{g(x)}{f(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3(x-1)^2(x-3)}{2(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3(x-1)}{2} = 3$

46.4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{f(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x-1)}{2} = 0$

46.5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{3(x-1)} = \dfrac{2}{-\infty} = 0$

46.6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(2x^2+3x^3\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(3x^3\right) = -\infty$

Pág. 36

Avaliação 1

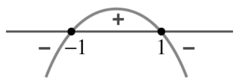
1. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(1)}{0^+} = -\infty$ porque $f(1) < 0$

Resposta: **(A)**

2. • $x_n = -1 - \dfrac{1}{n} \to -1^-$

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim f(x_n) = -\infty$



• $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 1^+$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim f(x_n) = -\infty$

• $x_n = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to -1^+$

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim f(x_n) = +\infty$

Resposta: **(C)**

3. Pela definição de limite de uma função num ponto, a afirmação (C) é verdadeira.

Resposta: **(C)**

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin x \leq 1$, ou seja, g é limitada.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x} + \dfrac{1}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}} + \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 + 0 = 0$

Como g é limitada e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x)\times g(x)\right] = 0$.

Resposta: **(A)**

5. Sejam $f(x) = mx + b$ e $g(x) = m'x + b'$.

Sabemos que $m \times m' = -1$ ou seja, $\dfrac{1}{m'} = -m$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{mx+b}{m'x+b'} = \dfrac{m}{m'} = m \times \dfrac{1}{m'} = m \times (-m) = -m^2$

$-m^2 < 0$, pois se $m \times m' = -1$, então $m \neq 0$.

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^-$

Resposta: **(D)**

6. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x}} + k & \text{se } x > 0 \\ kx + 1 - k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x}} + k \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} + k \right) = 0 + k = k$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (kx + 1 - k) = 1 - k$

$g(0) = 1 - k$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow 1 - k = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2}$

Resposta: **(A)**

7. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Se $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 4$ então $a < 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^2 + bx + c}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^2}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (ax) = a \times (-\infty) = +\infty$ porque $a < 0$

Resposta: **(B)**

Pág. 37

8. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 5} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$, $D_f = \mathbb{R}$

8.1. Sejam (x_n) uma sucessão tal que $x_n \to 1$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 1$ e (y_n) uma sucessão tal que, a partir de certa ordem, $y_n = 1$.

$\lim f(x_n) = \lim \sqrt{4x_n^2 + 5} =$

$= \sqrt{4(\lim x_n)^2 + 5} =$

$= \sqrt{4 \times 1^2 + 5} = 3$

$\lim f(y_n) = \lim 3 = 3$

Portanto, qualquer que seja a sucessão (u_n) de elementos de D_f tal que $u_n \to 1$ a correspondente sucessão $f(u_n) \to 3$

Logo, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

8.2. **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 5}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2\left(4 + \frac{5}{x^2}\right)}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{4 + \frac{5}{x^2}}}{\cancel{x}} = -\sqrt{4 + 0} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + 2x \right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5} + 2x \right) \overset{(\infty - \infty)}{=}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{4x^2 + 5} + 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 + 5} - 2x\right)}{\sqrt{4x^2 + 5} - 2x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 + 5 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 5} - 2x} = \dfrac{5}{+\infty} = 0$

9. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} + k & \text{se } x < 0 \\ -3 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{3 + k} + x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

9.1. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\sqrt{1 - x} + k \right) = 1 + k$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\sqrt{3 + k} + x \right) = \sqrt{3 + k}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \Leftrightarrow 1 + k = \sqrt{3 + k} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 + k)^2 = 3 + k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 2k + k^2 - 3 - k^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

Verificação

$1 + 1 = \sqrt{3 + 1} \Leftrightarrow 2 = 2$ (verdade)

Logo, $k = 1$.

9.2. Para $k = 1$:

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1 + 1 = \sqrt{3 + 1} = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \neq g(0)$. Logo, não existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$.

10. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

10.1. Sejam as sucessões (x_n) e (y_n) tais que

$x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$ e $y_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$

Tem-se que:

$\lim f(x_n) = \lim \sin \dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}} = \lim \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) =$

$= \lim \sin \dfrac{\pi}{2} = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$

$\lim f(y_n) = \lim \sin \dfrac{1}{\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}} = \lim \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) =$

$= \lim \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

Logo, como existem duas sucessões (x_n) e (y_n) de valores do domínio de $\sin x$, a tender para 0 tais que as correspondentes sucessões $f(x_n)$ e $f(y_n)$, tendem para limites diferentes, podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

10.2. A função f é limitada, dado que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$.

Se, por exemplo, $g(x) = x$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Logo, como f é limitada e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to 0} \left((f \times g)(x) \right) = 0$.

11.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2+x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+x\sqrt{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}}\right)} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{4+0}+\sqrt{0+0}} = \dfrac{2}{2} = 1$

11.2. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x^2+2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\left(\sqrt{2-x}-2\right)\left(\sqrt{2-x}+2\right)}{x(x+2)\left(\sqrt{2-x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2-x-4}{x(x+2)\left(\sqrt{2-x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-(x+2)}{x(x+2)\left(\sqrt{2-x}+2\right)} =$

$= \dfrac{-1}{-2\times\left(\sqrt{4}+2\right)} = \dfrac{-1}{-8} = \dfrac{1}{8}$

11.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-\left|x-x^3\right|}{x+x^3} \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-\left(x-x^3\right)}{x+x^3} =$

Quando $x\to-\infty,\ x-x^3>0$
Logo $\left|x-x^3\right| = x-x^3$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3-x}{x+x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+1} =$

$= \dfrac{4-0}{0+1} = 4$

11.4. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-2x-3}{|x|-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & -3 \\ -1 & & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x<0 \Rightarrow |x| = x$

$= \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x+1)(x-3)}{-x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{-\cancel{(x+1)}} = \dfrac{-4}{-1} = 4$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2} & \text{se } x>2 \\ x^2-2x+k & \text{se } x\le 2 \end{cases}$

12.1. • Para $x > 2$, f é contínua por ser o quociente de funções polinomiais, logo contínuas, e $x^3-2x^2 \neq 0,\ \forall x \in \left]2\ ,\ +\infty\right[$

• Para $x < 2$, f é contínua por ser uma função polinomial.

• Para $x = 2$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$= \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{x^2\cancel{(x-2)}} = \dfrac{3}{4}$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \left(x^2-2x+k\right) =$

$= 4-4+k = k$

$f(2) = 4-4+k = k$

Para que exista $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ e f seja contínua neste ponto, é necessário e suficiente que:

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{4}$

12.2. Se $k = 0$, para $x < 2$ temos $f(x) = x^2-2x$ e

$\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to0} \dfrac{(1+h)^2-2(1+h)+k-(-1+k)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to0} \dfrac{1+2h+h^2-2-2h+1+k-k}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to0} \dfrac{h^2}{h} = \lim\limits_{h\to0} h = 0$

13. $g(x) = a\left(x-x_0\right)^2,\ a>0$

$f(x) = bx^2\left(x-x_0\right)^2,\ b<0$

13.1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{a\left(x-x_0\right)^2}{bx^2\left(x-x_0\right)^2} = \dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{a}{b}\times(+\infty) = -\infty$ porque $\dfrac{a}{b} < 0$

13.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)+g(x)\right] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(bx^4\right) =$ $\quad bx^4$ é o termo de maior grau de $f(x) + g(x)$

$= b\times(+\infty)$

$= -\infty$, pois $b < 0$

Atividade inicial 2

Pág. 38

1.

Torneira A		Torneira B		Torneira C
$\frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{t}=\frac{5}{6}+\frac{1}{t}=\frac{5t+6}{6t}$$

Fração do depósito		Tempo
$\frac{5t+6}{6t}$	——	1
1	——	$h(t)$

$$h(t)=\frac{1\times 1}{\frac{5t+6}{6t}} \Leftrightarrow h(t)=\frac{6t}{5t+6},\ t>0$$

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{6t}{5t+6}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{6t}{5t}=\frac{6}{5}$

Se o tempo que a terceira torneira leva a encher um depósito tende para $+\infty$, significa que a quantidade de água que sai da torneira tende para zero. Assim, o tempo necessário para encher o depósito tende para $\frac{6}{5}$ que é o tempo, em horas, necessário para que as duas torneiras encham o depósito.

Pág. 40

1.1. $f(x)=\frac{1-x}{x+3}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ e f é contínua

$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{1-x}{x+3}=\frac{4}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{1-x}{x+3}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

A reta de equação $x = –3$ é uma assíntota ao gráfico de f.

1.2. $g(x)=\frac{x+1}{x^2-9}$

$D_g=\mathbb{R}\setminus\{-3\ ,\ 3\}$ e g é contínua

$\lim\limits_{x\to-3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{4}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

As retas de equações $x = –3$ e $x = 3$ são assíntotas ao gráfico de g.

1.3. $h(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$

$D_h=\mathbb{R}\setminus\{-2\ ,\ 2\}$ e h é contínua.

$\lim\limits_{x\to-2} h(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=-\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

A reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico de h.

1.4. $i(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$

$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$

$D_i=\mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 3\}$ e i é contínua.

$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{(x-3)}(x+1)}=\frac{1}{2}$

	1	–4	3
3		3	–3
	1	–1	$\boxed{0}$

$\lim\limits_{x\to-1^-} i(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} i(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

A reta de equação $x = –1$ é uma assíntota ao gráfico de i.

1.5. $j(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$

$D_j=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e j é contínua.

$\lim\limits_{x\to-2} j(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+2x}{x+2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}x=-2$

Não existem assíntotas verticais ao gráfico de j.

1.6. $k(x)=\begin{cases}2x & \text{se } x\geq 3\\ \frac{1}{3-x} & \text{se } x<3\end{cases}$

$D_k=\mathbb{R}$ e k é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

$\lim\limits_{x\to3^-} k(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1}{3-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

A reta de equação $x = 3$ é uma assíntota ao gráfico de k.

1.7. $l(x)=\frac{x-2}{2-|x|}$

$2-|x|=0 \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

$D_l=\mathbb{R}\setminus\{-2\ ,\ 2\}$ e l é contínua.

$$l(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{2-(-x)} & \text{se } x<0\wedge x\neq-2\\ \frac{x-2}{2-x} & \text{se } x>0\wedge x\neq 2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{x-2}{x+2} & \text{se } x<0\wedge x\neq-2\\ \frac{x-2}{2-x} & \text{se } x\geq 0\wedge x\neq 2\end{cases}=\begin{cases}\frac{x-2}{x+2} & \text{se } x<0\wedge x\neq-2\\ -1 & \text{se } x\geq 0\wedge x\neq 2\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-2^-} l(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x-2}{x+2}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-2^+} l(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{x-2}{x+2}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2} l(x)=-1$

A reta de equação $x = –2$ é assíntota ao gráfico de l.

1.8. $m(x)=\sqrt{2-x}$; $2-x\geq0 \Leftrightarrow x\leq2$

$D_m=\left]-\infty\ ,\ 2\right]$ e m é contínua.

Não há assíntotas verticais ao gráfico de m.

1.9. $n(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$

$D_n=\left]-\infty\ ,\ 2\right[$ e n é contínua.

$\lim\limits_{x\to2} n(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de n.

1.10. $o(x)=\frac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases}\frac{x-1}{x-1} & \text{se } x>1\\ \frac{-(x-1)}{x-1} & \text{se } x<1\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{se } x>1\\ -1 & \text{se } x<1\end{cases}$

$D_o=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e o é contínua.

$\lim\limits_{x\to1^-} o(x)=-1$ e $\lim\limits_{x\to1^+}=1$

Não há assíntotas verticais ao gráfico de o.

1.11. $p(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$D_p=\mathbb{R}$ e p é contínua.

Não há assíntotas verticais ao gráfico de p.

Pág. 42

2. $g(x)=\frac{x^2-3x-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[g(x)-(x-3)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3x-1}{x}-x+3\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3x-1-x^2+3x}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{\pm\infty}=0$

A reta de equação $y=x-3$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$ e em $+\infty$.

3. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x+1$

3.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{+\infty}=0$

Logo, a reta de equação $y=1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

3.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x+1-2x-1\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{+\infty}=0$

Logo, a reta de equação $y=2x+1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

4.1. $y=2x+3$ **4.2.** $y=x-1$

4.3. $y=3$ **4.4.** $y=x+\frac{1}{2}$

5. O gráfico de g é uma reta que passa em $A(0\ ,1)$ e $B(1\ ,0)$.

$g(x)=mx+1$

$m=\frac{1-0}{0-1}=-1$

$g(x)=-x+1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=0$

Resposta: **(B)**

Pág. 44

6.1. $f(x)=\frac{2x-1}{3x+2}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$; f é contínua.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}^-} f(x)=\lim_{x\to-\frac{2}{3}^-}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{-\frac{5}{3}}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}^+} f(x)=\lim_{x\to-\frac{2}{3}^+}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{-\frac{5}{3}}{0^+}=-\infty$$

A reta de equação $x=-\frac{2}{3}$ é uma assíntota ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{3x^2+2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{3x}=0$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\frac{2}{3}$$

A reta de equação $y=\frac{2}{3}$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.2. $g(x)=\frac{1}{3x+1}$

$D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ e g é contínua.

Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^-} g(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{3}^-}\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^+} g(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{3}^+}\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x=-\frac{1}{3}$ é uma assíntota ao gráfico de g.

Assíntotas não verticais: ($y=mx+b$)

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{\pm\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.3. $h(x)=\frac{3x+1}{(x-1)^2}$

$D_h=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e h é contínua.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\frac{3x+1}{(x-1)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x=1$ é uma assíntota ao gráfico de h.

Assíntotas não verticais: ($y=mx+b$)

$$h(x)=\frac{3x+1}{x^2-2x+1}$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+1}{x^3-2x^2+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x^2}=\frac{3}{\pm\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(h(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-0\right)=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}=$$
$$=\frac{3}{\pm\infty}=0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.4. $i(x)=\dfrac{3x^3-2x}{x^2+2}$

$D_i = \mathbb{R}$ e i é contínua.

Assíntotas verticais:

Não há porque i é contínua em $\mathbb{R}$.

Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{i(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-2x}{x^3+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3}{x^3}=3$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(i(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^3-2x}{x^2+2}-3x\right)=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-2x-3x^2-6x}{x^2+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-8x}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-8}{x}=\frac{-8}{\pm\infty}=0$$

A reta de equação $y = 3x$ é uma assíntota ao gráfico de i em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.5. $j(x)=\dfrac{3x-x^2}{x-2}$

$D_j = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ e j é contínua.

Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to2^-} j(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{3x-x^2}{x-2}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^+} j(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{3x-x^2}{x-2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de j.

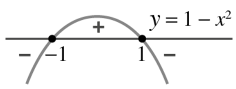
Assíntotas não verticais:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{j(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(j(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-x^2}{x-2}+x\right)=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-x^2+x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=1$$

A reta de equação $y = -x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de j em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.6. $l(x)=\dfrac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}$

$D_e = \mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 1\}$ e l é contínua.



Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to-1^-} l(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+} l(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} l(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} l(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas do gráfico de l.

Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{l(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x^2-2x}{x-x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3}{-x^3}=-2$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(l(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}+2x\right)=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x^2-2x+2x-2x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2}{1-x^2}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2}{-x^2}=1$$

A reta de equação $y = -2x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de l em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.7. $h(x)=\dfrac{x^5+1}{\left(x^2-2\right)^2}$

$D_h = \left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-2\neq0\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\right\}$

h é contínua

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}} h(x)=\lim_{x\to-\sqrt{2}}\frac{x^5+1}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{-\left(\sqrt{2}\right)^5+1}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to\sqrt{2}} h(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^5+1}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^5+1}{0^+}=+\infty$$

Assintotas não verticais: $(y = mx + b)$

$$h(x)=\frac{x^5+1}{x^4-4x^2+4}$$
$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^5+1}{x^5-4x^3+4x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^5}{x^5}=1$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(h(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^5+1}{x^4-4x^2+4}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^5+1-x^5-4x^3-4x}{x^4-4x^2+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3}{x^4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$ e em $+\infty$.

7. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}}$

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R}:\ x+1>0\right\}=\left]-1\ ,\ +\infty\right[$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{x+1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{x+1}}=\frac{1+0}{+\infty}=0$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}-0\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$$
$$=\frac{1+0}{\sqrt{0^++0^+}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Logo, apesar de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ser um número real o gráfico de f não admite assíntota em $+\infty$, dado que $b\notin\mathbb{R}$.

Pág. 45

8.1. $f(x)=\sqrt{x-2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x-2\geq 0\}=[2\ ,\ +\infty[$

f é contínua.

- Assíntotas verticais:

  Como f é contínua e a aderência de D_f é D_f, o gráfico de f não tem assíntotas verticais.

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + \text{b})$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}=+\infty$$

$b\notin\mathbb{R}$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

8.2. $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+x}{x}$

$D_g=\mathbb{R}^+$ e g é contínua.

- Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x\sqrt{x}}+1=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}+1=$$

$$=\frac{1}{0^+}+1=+\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico de g.

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=$$

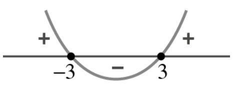
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2\sqrt{x}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}+0=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}+1=0+1=1$$

A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota do gráfico de g (em $+\infty$).

8.3. $h(x)=\sqrt{x^2-9}+3x$



$D_h=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-9\geq 0\}$

$=]-\infty\ ,\ -3]\cup[3\ ,\ +\infty[$

- Assíntotas verticais:

  O gráfico de h não tem assíntotas verticais porque h é contínua e todos os pontos aderentes a D_h pertencem a D_h.

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + \text{b})$

  Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-9x}+3x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{9}{x}\right)}}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{\cancel{x}}+3=-\sqrt{1-0}+3=2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+3x-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)}{\sqrt{x^2-9}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x}=\frac{-9}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9x}+3x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{9}{x}}}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}=\sqrt{1-0}+3=4$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+3x-4x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)}{\sqrt{x^2-9}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-9-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-9}+x}=\frac{-9}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y = 4x$ é uma assíntota ao gráfico de h em $+\infty$.

8.4. $i(x)=\sqrt{4x^2+3}$; $D_i=\mathbb{R}$

- Assíntotas verticais:

  O gráfico de i não tem assíntotas verticais dado que i é contínua em $\mathbb{R}$.

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

  Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{i(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}}=-\sqrt{4+0}=-2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(i(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+3}-2x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{4x^2}+3-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+3}-2x}=\frac{3}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y = -2x$ é uma assíntota do gráfico de i em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{i(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}}=\sqrt{4+0}=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(i(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+3}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+3-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+3}+2x}=\frac{3}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de i em $+\infty$.

8.5. $j(x)=\sqrt{x^2+1}-x+1$; $D_j=\mathbb{R}$

- A função j é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.
- Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{j(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x+1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}-1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$

$$=-\sqrt{1+0}-1+0=-2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(j(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+1+2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+1}-(x+1)\right)}{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-(x+1)^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2-2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x-1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1+0}=1$$

A reta de equação $y = -2x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de j em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{j(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x+1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=$$

$$=1-1+0=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(j(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+1\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right)\left(\sqrt{x^2+1}+(x-1)\right)}{\sqrt{x^2+1}+(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-(x-1)^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+2x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1-0}=1$$

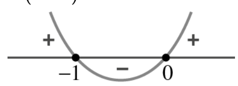
A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de j em $+\infty$.

8.6. $k(x)=x-\sqrt{x^2+x}$

$D_k=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+x\geq 0\right\}=\left]-\infty\ ,\ -1\right]\cup\left[0\ ,\ +\infty\right[$

Cálculo auxiliar

$x^2+x=0\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-1$



- O gráfico de k não admite assíntotas verticais porque k é contínua e todos os pontos aderentes a D_k pertencem a D_k.
- Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{k(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}\right)=$$

$$=1-\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=1-\left(-\sqrt{1+0}\right)=2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(k(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{x^2+x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+x}\right)}{-x+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)^2-\left(x^2+x\right)}{-x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{-x}}{\cancel{-x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}$$

A reta de equação $y=2x+\frac{1}{2}$ é uma assíntota ao gráfico de k em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x}}{x}=$$

$$=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=1-\sqrt{1+0}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(k(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{x+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+x\right)}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\frac{-1}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{1}{2}$$

A reta de equação $y=-\frac{1}{2}$ é uma assíntota ao gráfico de k em $+\infty$.

8.7. $l(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+8x}}{x-2}$

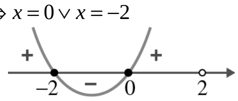
$D_l=\left\{x\in\mathbb{R}:\ 4x^2+8x\geq 0\wedge x\neq 2\right\}=$

$=\left]-\infty\ ,\ -2\right]\cup\left[0,2\right[\cup\left]2\ ,\ +\infty\right[$

Cálculo auxiliar

$4x^2+8x=0\Leftrightarrow 4x(x+2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=-2$



- Assíntotas verticais:

  l é contínua.

  $2\notin D_f$ e 2 é ponto aderente a D_f.

$$\lim_{x\to 2^-}l(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4x^2+8x}}{x-2}=\frac{\sqrt{32}}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}l(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{4x^2+8x}}{x-2}=\frac{\sqrt{32}}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x=2$ é uma assíntota ao gráfico de l.

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{l(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+8x}}{x(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{8}{x}\right)}}{x(x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{4+\frac{8}{x}}}{\cancel{x}(x+2)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{4+0}}{-\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(l(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+8x}}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{4+\frac{8}{x}}}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{4+0}}{1-0}=-2$$

A reta de equação $y=-2$ é uma assíntota ao gráfico de l em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{l(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+8x}}{x(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{4+\frac{8}{x}}}{\cancel{x}(x-2)}=\frac{\sqrt{4+0}}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(l(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+8x}}{x-2}=$$

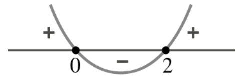
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{4+\frac{8}{x}}}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{\sqrt{4+0}}{1-0}=2$$

A reta de equação $y=2$ é uma assíntota ao gráfico de l em $+\infty$.

8.8. $m(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$

$D_m=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-2x\geq 0\wedge x\neq 1\right\}=\left]-\infty\ ,\ 0\right]\cup\left[2\ ,\ +\infty\right[$

$x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$



- O gráfico de m não tem assíntotas verticais dado que m é contínua e todos os pontos aderente a D_f pertencem a D_f.
- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{m(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x(x-1)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}}{x(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\cancel{x}(x-1)}=\frac{\sqrt{1-0}}{-\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(m(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{1-0}}{1-0}=-1$$

A reta de equação $y=-1$ é uma assíntota ao gráfico de m em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{m(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\cancel{x}(x-1)}=\frac{\sqrt{1-0}}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(m(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-0}}{1-0}=1$$

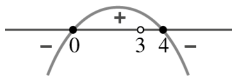
A reta de equação $y=1$ é uma assíntota ao gráfico de m em $+\infty$.

8.9. $n(x)=\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{x-3}$

$D_n=\{x\in\mathbb{R}:\ 4x-x^2\geq 0\wedge x-3\neq 0\}=[0\ ,\ 3[\cup]3\ ,\ 4]$

Cálculo auxiliar

$4-x^2=0\Leftrightarrow x(4-x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=4$



- Assíntotas verticais:

n é contínua e 3 é o único ponto aderente a D_n que não lhe pertence:

$$\lim_{x\to 3^-} n(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{4x-x^2}}{x-3}=\frac{\sqrt{3}}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} n(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{4x-x^2}}{x-3}=\frac{\sqrt{3}}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x = 3$ é uma assíntota ao gráfico de n .

- Assíntotas não verticais:

D_n é um conjunto limitado. Logo, o gráfico da função n não admite assíntotas não verticais.

8.10. $o(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2-x} & \text{se } x<2\\ \sqrt{x^2-4} & \text{se } x\geq 2\end{cases}$

$D_o=\mathbb{R}$

A função o é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$$\lim_{x\to 2^-} o(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{2-x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} o(x)=o(2)$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de o .

- Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{o(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x-x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(o(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2x-x^2}{2-x}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

A reta de equação $y = –x – 2$ é uma assíntota ao gráfico da função o em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{o(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{\cancel{x}}=$$

$$=\sqrt{1-0}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(o(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4}+x}=\frac{-4}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico da função o em $+\infty$.

Pág. 46

9.1. $f(x)=\dfrac{|2x-1|}{x+2}$

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x+1}{x+2} & \text{se } x<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2x-1}{x+2} & \text{se } x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e f é contínua.

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{|2x-1|}{x+2}=\frac{5}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{|2x-1|}{x+2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x = –2$ é uma assíntota ao gráfico de f .

- Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{x+2}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+2}=2$$

As retas de equações $y = –2$ e $y = 2$ são assíntotas ao gráfico de f (em $-\infty$ e em $+\infty$, respetivamente).

9.2. $g(x)=\dfrac{x^2+1}{|x|+1}=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{-x+1} & \text{se } x<0\\ \dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

$D_g=\mathbb{R}$

- Assíntotas verticais:

O gráfico de g não tem assíntotas verticais porque g é contínua em $\mathbb{R}$.

- Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{-x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{-x+1}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

A reta de equação $y = –x – 1$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

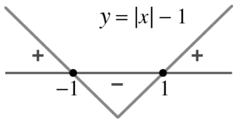
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

A reta de equação $y = x – 1$ é uma assíntota ao gráfico de g em $+\infty$.

9.3. $h(x)=\dfrac{x^2+1}{|x|-1}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}:\ |x|-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 1\}$



- Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to -1^-} h(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{|x|-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} h(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{|x|-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{|x|-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{|x|-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas ao gráfico de f.

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x(|x|-1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x(-x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{-x^2-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2+1}{-x-1} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{-x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{-x} = 1$$

A reta de equação $y = -x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x(|x|-1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

A reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de h em $+\infty$.

9.4. $i(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-5|}$

$D_i = \mathbb{R}\setminus\{5\}$ e i é contínua.

- Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to 5} i(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x^2-4}{|x-5|} = \frac{21}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 5$ é uma assíntota ao gráfico de i.

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x|x-5|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x(-x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{-x^2+5x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} (i(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2-4}{-x+5} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4-x^2+5x}{-x+5} = \lim_{x\to -\infty} \frac{5x}{-x} = -5$$

A reta de equação $y = -x - 5$ é uma assíntota ao gráfico de i em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x|x-5|} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x(x-5)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} (i(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-4}{x-5} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4-x^2+5x}{x-5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

A reta de equação $y = x + 5$ é uma assíntota ao gráfico de i em $+\infty$.

9.5. $j(x) = \dfrac{|x^3-x|}{x^2+1}$

$D_j = \mathbb{R}$

- O gráfico de j não tem assíntotas verticais porque j é contínua em $\mathbb{R}$.
- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x^3-x|}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3+x}{x^3+x} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} (j(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{-x^3+x}{x^2+1} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^3+x+x^3+x}{x^3+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

A reta de equação $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico de j em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x^3-x|}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-x}{x^3+x} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} (j(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3-x}{x^2+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-x-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico de j em $+\infty$.

Pág. 47

10. $\lim_{x\to +\infty} [f(x) + x] = 0$ e $g(x) = f(x) + \sqrt{x}$

Se $\lim_{x\to +\infty} (f(x) + x) = 0$, então a reta de equação $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Logo, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

$D_g = \mathbb{R}^+$

Seja $y = mx + b$ uma assíntota ao gráfico de g em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= -1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}} = -1 + 0 = -1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + \sqrt{x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + x\right) + \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = 0 + \infty = +\infty$$

Logo, como $b \notin \mathbb{R}$, não existe assíntota oblíqua ao gráfico de g em $+\infty$ pelo que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

11. Seja $r : y = mx + b$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}} = \frac{m}{m} = 1$$

12. f é par, ou seja, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1 , 0 , 1\}$.

- Se f é par:

  $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

  $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 0$

  Logo, as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de f.
- Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = +\infty$, então o gráfico de f não tem assíntota em $+\infty$. Como f é uma função par, também não tem assíntota em $-\infty$.

Portanto, as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas assíntotas ao gráfico de f.

Pág. 49

13.1. $f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

$$\begin{array}{r|l} x & x-1 \\ \hline -x+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Assíntota vertical: $x = 1$

Assíntota horizontal: $y = 1$

13.2. $g(x) = \frac{5-2x}{x-2} = -2 + \frac{1}{x-2}$

$$\begin{array}{r|l} -2x+5 & x-2 \\ \hline 2x-4 & -2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Assíntota vertical: $x = 2$

Assíntota horizonta: $y = -2$

13.3. $h(x) = \frac{2}{3-x} = 0 + \frac{-2}{x-3}$

Assíntota vertical: $x = 3$

Assíntota horizontal: $y = 0$

13.4. $i(x) = \frac{x-4}{3x-6} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3x-6} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{x-2}$

$$\begin{array}{r|l} x+4 & 3x-6 \\ \hline -x+2 & \frac{1}{3} \\ \hline -2 & \end{array}$$

Assíntota vertical: $x = 2$

Assíntota horizontal: $y = \frac{1}{3}$

Pág. 51

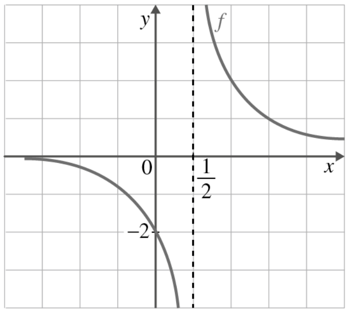
14.1. $f(x) = \frac{2}{2x-1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Assíntota vertical: $x = \frac{1}{2}$

Assíntota horizontal: $y = 0$

$D_f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f(0) = \frac{2}{-1} = -2$

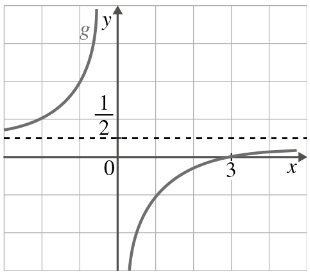
14.2. $g(x) = \frac{x-3}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Assíntota vertical: $x = 0$

Assíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$

$D_f' = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$



$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$

14.3. $h(x) = \frac{1-2x}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$

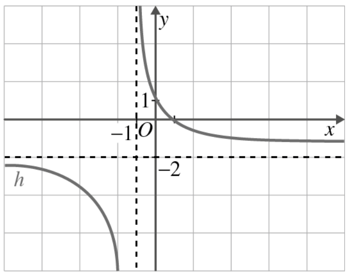
$$\begin{array}{r|l} -2x+1 & x+1 \\ \hline 2x+2 & -2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Assíntota vertical: $x = -1$

Assíntota horizontal: $y = -2$

$D_h' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$



$h(0) = 1$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

14.4. $i(x)=\dfrac{2x-7}{2x-4}=1-\dfrac{3}{2x-4}=1-\dfrac{\frac{3}{2}}{x-2}$

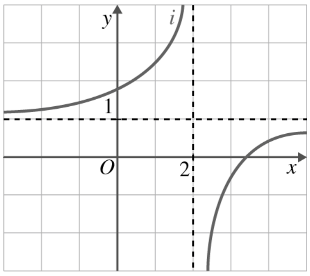
$$\begin{array}{r|l} 2x-7 & 2x+4 \\ \hline -2x+4 & 1 \\ \hline -3 & \end{array}$$

$D_i=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Assíntota vertical: $x = 2$

Assíntota horizontal: $y = 1$

$D_i'=\mathbb{R}\setminus\{1\}$



$i(0)=\frac{7}{4}$; $i(x)=0\Leftrightarrow 2x-7=0\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$

14.5. $j(x)=\dfrac{1-5x}{2x-2}=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{2x-2}=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{x-1}$

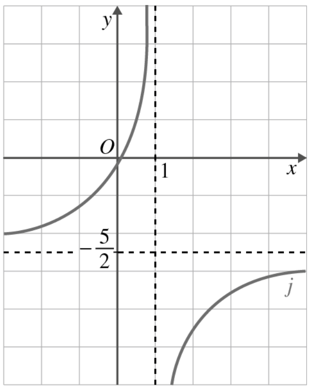
$$\begin{array}{r|l} -5x+1 & 2x-2 \\ \hline 5x-5 & -\frac{5}{2} \\ \hline -4 & \end{array}$$

$D_j=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Assíntota vertical: $x = 1$

Assíntota horizontal: $y=-\dfrac{5}{2}$

$D_j'=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$



$j(0)=-\frac{1}{2}$; $j(x)=0\Leftrightarrow 1-5x=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$

Pág. 52

15.1. $\dfrac{x}{x-3}=2\Leftrightarrow\dfrac{x}{x-3}-2=0\Leftrightarrow\dfrac{x-2x+6}{x-3}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{-x+6}{x-3}=0\Leftrightarrow -x+6=0\wedge x-3\neq 0\Leftrightarrow x=6$; $S = \{6\}$

15.2. $\dfrac{2x^2}{x+1}-x=\dfrac{x^2-1}{x}\Leftrightarrow\underset{(x)}{\dfrac{2x^2}{x+1}}-\underset{x(x+1)}{x}-\underset{(x+1)}{\dfrac{x^2-1}{x}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{2x^3-x^2(x+1)-(x^2-1)(x+1)}{x(x+1)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{2x^3-x^3-x^2-x^3-x^2+x+1}{x(x+1)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{-2x^2+x+1}{x(x+1)}=0\Leftrightarrow -2x^2+x+1=0\wedge x(x+1)\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4}\wedge(x\neq 0\wedge x\neq -1)\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\vee x=1$

$S=\left\{-\dfrac{1}{2}\ ,\ 1\right\}$

15.3. $\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{3}{x^2-2x}=\dfrac{5}{4x}\Leftrightarrow\underset{(4x)}{\dfrac{4}{x-2}}+\underset{(4)}{\dfrac{3}{x(x-2)}}-\underset{(x-2)}{\dfrac{5}{4x}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{16x+12-5(x-2)}{4x(x-2)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x+12-5x+10=0\wedge 4x(x-2)\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11x+22=0\wedge(x\neq 0\wedge x\neq 2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2$

$S = \{-2\}$

16.1. $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x-1}{x^2-2x}+\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{2x-1}{x(x-2)}+\underset{(x-2)}{\dfrac{1}{x}}=0\Leftrightarrow\dfrac{2x-1+x-2}{x(x-2)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{3x-3}{x(x-2)}=0\Leftrightarrow 3x-3=0\wedge x(x-2)\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=3\wedge x\neq 0\wedge x\neq 2\Leftrightarrow x=1$

$S = \{1\}$

16.2. $g(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2-2x}{9-x^2}\times\dfrac{x^2+3x}{x-1}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2-2x=0\vee x^2+3x=0)\wedge(9-x^2\neq 0\wedge x-1\neq 0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[x=1\vee x(x+3)=0]\wedge(x\neq -3\wedge x\neq 3\wedge x\neq 1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$

$S = \{0\}$

16.3. $h(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{x+6}{9-x^2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\underset{(x+3)}{\dfrac{x+3}{x-3}}+\underset{(x-3)}{\dfrac{1}{x+3}}+\underset{(1)}{\dfrac{x+6}{(x-3)(x+3)}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{(x+3)^2+x-3+x+6}{(x-3)(x+3)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2+6x+9+2x+3}{(x-3)(x+3)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+8x+12=0\wedge(x-3)(x+3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-8\pm\sqrt{64-48}}{2}\wedge x\neq 3\wedge x\neq -3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-6\vee x=-2$

$S = \{-6 , -2\}$

Pág. 53

17.1. $\dfrac{x-3}{2x-4}>0\Leftrightarrow x\in\ ]-\infty\ ,\ 2[\ \cup\ ]3\ ,\ +\infty[$

$S=\ ]-\infty\ ,\ 2[\ \cup\ ]3\ ,\ +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$x-3=0\Leftrightarrow x=3$

$2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x-3$	–	–	–	0	+
$2x-4$	–	0	+	+	+
$\dfrac{x-3}{2x-4}$	+	n.d.	–	0	+

17.2. $\frac{2-3x}{3-x} > 2 \Leftrightarrow \frac{2-3x}{3-x} - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2-3x-6+2x}{3-x} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-x-4}{3-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-3} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ -4\right[\cup \left]3\ ,\ +\infty\right[$

$S = \left]-\infty\ ,\ -4\right[\cup \left]3\ ,\ +\infty\right[$

Cálculo auxiliar:

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$x+4$	–	0	+	+	+
$x-3$	–	–	–	0	+
$\frac{x+4}{x-3}$	+	0	–	n.d.	+

17.3. $x + \frac{x}{x-4} \leq 10 \Leftrightarrow x + \frac{x}{x-4} - 10 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+x-10x+40}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-13x+40}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ 4\right[\cup [5\ ,\ 8]$

$S = \left]-\infty\ ,\ 4\right[\cup [5\ ,\ 8]$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 13x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169-160}}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 8$

	$-\infty$	4		5		8	$+\infty$
$x^2 - 13x + 40$	+	+	+	0	–	0	+
$x-4$	–	0	+	+	+	+	+
Q	–	n.d	+	0	–	0	+

17.4. $\frac{x^2+1}{x+3} + 3 < x \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+3} + \underset{(x+3)}{3-x} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1+(3-x)(3+x)}{x+3} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1+9-x^2}{x+3} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{10}{x+3} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < -3$

$S = \left]-\infty\ ,\ -3\right[$

17.5. $\frac{2x^2-3x-7}{2-x} \leq 1-x \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-7}{2-x} + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-7+(x-1)(2-x)}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-7+2x-x^2-2+x}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left[-3\ ,\ 2\right[\cup \left[3\ ,\ +\infty\right[$

$S = \left[-3\ ,\ 2\right[\cup \left[3\ ,\ +\infty\right[$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

x	$-\infty$	4		5		8	$+\infty$
$x^2 - 9$	+	0	–	–	–	0	+
$2-x$	+	+	+	0	–	–	–
Q	+	0	–	n.d.	+	0	–

17.6. $\frac{1}{x} + \frac{x^2}{x+1} \geq x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\underset{x+1}{x}} + \frac{x^2}{\underset{x}{x+1}} - \underset{x(x+1)}{(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+1+x^3-x(x+1)^2}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+1+x^3-x\left(x^2+2x+1\right)}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+1+x^3-2x^2-x}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+1}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-1\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left]0\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Cálculos auxiliares

- $-2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
N	–	–	–	0	+	+	+	0	–
D	+	0	–	–	–	0	+	+	+
Q	–	n.d.	+	0	–	n.d.	+	0	–

Pág. 54

18.1. $f(x) = \frac{3x-x^2}{x^2+x-2}$

$3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

x	$-\infty$	-2		0		1		3	$+\infty$
N	–	–	–	0	+	+	+	0	–
D	+	0	–	–	–	0	+	+	+
$f(x)$	–	n.d	+	0	–	n.d	+	0	–

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ -2\right[\cup \left]0\ ,\ 1\right[\cup \left]3\ ,\ +\infty\right[$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2\ ,\ 0\right[\cup \left]1\ ,\ 3\right[$

18.2. $g(x) = \frac{6}{6-3x} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{-2}{\underset{(x+2)}{x-2}} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} =$

$= \frac{-2x-4-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2x-8}{(x-2)(x+2)}$

- $-2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$
- $(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

x	$-\infty$	-4		-2		2	$+\infty$
N	+	0	–	–	–	–	–
D	+	+	+	0	–	0	+
$g(x)$	+	0	–	n.d.	+	n.d.	–

$g(x)=0 \Leftrightarrow x=-4$

$g(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-4\,,\,-2[\,\cup\,]2\,,\,+\infty[$

$g(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,\,-4[\,\cup\,]-2\,,\,2[$

18.3. $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+x}+\dfrac{2}{x}=\underset{(x)}{\dfrac{x}{x+1}}-\underset{(1)}{\dfrac{2}{x(x+1)}}+\underset{(x+1)}{\dfrac{2}{x}}=$

$=\dfrac{x^2-2+2x+2}{x(x+1)}=\dfrac{x^2+2x}{x(x+1)}=\dfrac{x(x+2)}{x(x+1)}=$

$=\dfrac{x+2}{x+1}$, se $x\neq 0$

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	+	+	+	+	+
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+
$h(x)$	+	0	$-$	n.d.	+	n.d.	+

$h(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$

$h(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-2\,,\,-1[$

$h(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,\,-2[\,\cup\,]-1\,,\,0[\,\cup\,]0\,,\,+\infty[$

18.4. $i(x)=\dfrac{2x-8}{9-3x}\times\dfrac{x^2-3x}{16-x^2}$

- $2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$
- $x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$
- $9-3x=0 \Leftrightarrow x=3$
- $16-x^2=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=4$

x	$-\infty$	-4		0		3		4	$+\infty$
$2x-8$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	+
x^2-3x	+	+	+	0	$-$	0	+	+	+
$9-3x$	+	+	+	+	+	0	$-$	$-$	$-$
$16-x^2$	$-$	0	+	+	+	+	+	0	$-$
$i(x)$	+	n.d.	$-$	0	+	n.d.	+	n.d.	+

$i(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$i(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-4\,,\,0[$

$i(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,\,-4[\,\cup\,]0\,,\,3[\,\cup\,]3\,,\,4[\,\cup\,]4\,,\,+\infty[$

18.5. $j(x)=\dfrac{x^3-7x^2+8}{x^2-x-2}+7=\dfrac{x^3-7x^2+8+7x^2-14}{x^2-x-2}=$

$=\dfrac{x^3-7x-6}{x^2-x-2}$

Divisores de –6: –6 , 6 , –3 , 3 , –2 , 2 , –1 , 1

$(-1)^3-7\times(-1)-6=0$

$x^3-7x-6=(x+1)(x^2-x-6)$

	1	0	–7	–6
–1		–1	1	6
	1	–1	–6	0

Numerador

- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
- $x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=3$

Denominador

- $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$

x	$-\infty$	-2		-1		2		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+	+	+
x^2-x-6x	+	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	+
x^2-x-2	+	+	+	0	$-$	0	+	+	+
$j(x)$	$-$	0	+	n.d.	+	n.d.	$-$	0	+

$j(x)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=3$

$j(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,\,-2[\,\cup\,]2\,,\,3[$

$j(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-2\,,\,-1[\,\cup\,]-1\,,\,2[\,\cup\,]3\,,\,+\infty[$

Pág. 55

19.1.

Tipo de farinha	Quantidade (kg)	Custo (€)
Milho	30	0,80 × 30
Trigo	x	0,60x
Total	30 + x	24 + 0,6x

Custo por kg = $\dfrac{\text{Custo total}}{\text{Quantidade em kg}}$

$C(x)=\dfrac{24+0{,}6x}{30+x}=\dfrac{5(24+0{,}6x)}{5(30+x)}$

$C(x)=\dfrac{120+3x}{150+5x}$

19.2. $C(x)\leq 0{,}68 \Leftrightarrow \dfrac{120+3x}{150+5x}-0{,}68\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{120+3x-0{,}68\times 150-0{,}68\times 5x}{150+5x}\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-3{,}4x+120-102}{150+5x}\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-0{,}4x+18}{150+5x}\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}4x+18\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}4x\geq 18 \Leftrightarrow$

Como 150 + 5x > 0, $\forall x\in\mathbb{R}_0^+$, o sinal da fração depende de –0,4x + 18

$\Leftrightarrow x\geq \dfrac{18}{0{,}4} \Leftrightarrow x\geq 45$

Devem ser usados 45 kg de farinha de trigo, no mínimo.

19.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} C(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{120+3x}{150+5x}=\dfrac{3}{5}=0{,}6$

Quando $x\to+\infty$, ou seja, quando a quantidade de farinha de trigo aumenta significativamente, o custo de cada quilograma de mistura tende a aproximar-se de 0,60 € que é o custo de cada quilograma de farinha de trigo.

Pág. 56

20. Seja x a velocidade do vento em km/h

Velocidade do avião sem vento: 300 km/h

Velocidade do avião a favor do vento: (300 + x) km/h

Velocidade do avião contra o vento: (300 – x) km/h

$v=\dfrac{d}{t} \Leftrightarrow t=\dfrac{d}{v}$

Tempo para percorrer 600 km a favor do vento: $\dfrac{600}{300+x}$

Tempo para percorrer 500 km contra o vento: $\dfrac{500}{300-x}$

$\dfrac{600}{300+x}=\dfrac{500}{300-x} \Leftrightarrow \dfrac{600}{300+x}-\dfrac{500}{300-x}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{600(300-x)-500(300+x)}{(300+x)(300-x)}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{100(1800-6x-1500-5x)}{(300+x)(300-x)}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100(300-11x)=0 \wedge (300+x)(300-x)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 300-11x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{300}{11} \Rightarrow x\approx 27{,}3$

A velocidade do vento é aproximadamente igual a 27,3 km/h.

Pág. 57

21. $V = 6$ dm³ e $h = 2$ dm

21.1. $A_{\text{total}} = 2\times xy + 2\times 2y + 2\times 2x = 2xy + 4y + 4x$

Sabemos que:

$V = 6$ e $V = 2xy$

Portanto:

$2xy = 6 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x}$

$A(x) = 2x\times\frac{3}{x} + 4\times\frac{3}{x} + 4x = 6 + \frac{12}{x} + 4x = \frac{6x+12+4x^2}{x}$

$A(x) = \frac{4x^2+6x+12}{x}$

21.2. $A(x) \leq 20 \Leftrightarrow \frac{4x^2+6x+12}{x} \leq 20 \Leftrightarrow$

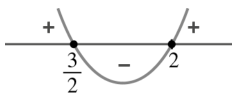
$\Leftrightarrow \frac{4x^2+6x+12}{x} - 20 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+6x+12-20x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4x^2-14x+12}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 4x^2-14x+12 \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}\ ,\ 2\right]$

Cálculo auxiliar:

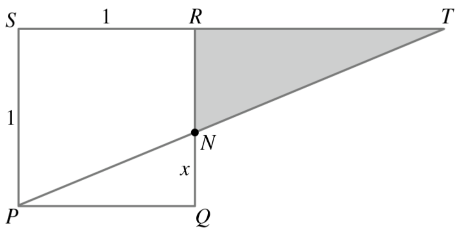
$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 2$



$\frac{3}{2} < x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < \frac{3}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < y < 2$

Sendo x e y as dimensões da base, em metros, terá de ser $1{,}5 < x < 2$ e $y = \frac{3}{x}$.

22.



22.1. $\overline{QN} = x$ e $\overline{NR} = 1 - x$

Os triângulos $[PTS]$ e $[NTR]$ são semelhantes (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum).

Logo, $\frac{\overline{TS}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{NR}}$.

$\frac{\overline{TR}+1}{\overline{TR}} = \frac{1}{1-x}$

$1 + \frac{1}{\overline{TR}} = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{TR}} = \frac{1}{1-x} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{TR}} = \frac{1-1+x}{1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{TR} = \frac{1-x}{x}$

$A_{[NTR]} = \frac{\overline{NR}\times\overline{TR}}{2}$

$A(x) = \frac{1}{2}\times(1-x)\times\frac{1-x}{x}$

$A(x) = \frac{(x-1)^2}{2x}$, dado que $(1-x)^2 = (x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Portanto, $A(x) = \frac{(x-1)^2}{2x}$, $x > 0$.

22.2. $A_{[PQN]} = \frac{x\times 1}{2} = \frac{x}{2}$.

$A(x) < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x} < \frac{x}{2} \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{2x} - \frac{x}{2} < 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1-x^2}{2x} < 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$

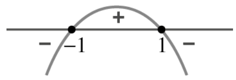
$\Leftrightarrow -2x+1 < 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow 2x > 1 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1$, x em decímetros

Pág. 59

Atividade complementares

23.1. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$



$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 1\}$ e f é contínua;

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x}{1-x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{1-x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas ao gráfico de f.

23.2. $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}+1}{x+1}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}:\ x - 1 \geq 0 \wedge x \neq -1\} = [1\ ,\ +\infty[$

g é contínua

Como g é uma função contínua e o seu domínio contém todos os seus pontos aderentes, o gráfico de g não tem assíntota verticais.

23.3. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} & \text{se } x \leq 0 \wedge x \neq -2 \\ \frac{x^2-x}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$D_h = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e h é contínua para $x \neq 0$,

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = h(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x^2-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(x-1)\sqrt{x}}{\cancel{x}} =$

$= (0-1)\times\sqrt{0} = 0$

Não existe $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, logo h não é contínua no ponto $x = 0$.

No entanto, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota ao gráfico de h .

$$\lim_{x\to -2} h(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x+1)}{\cancel{(x+2)}(x-2)} =$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & +3 & 2 \\ -2 & & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$= \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{1}{4}$$

Logo, a reta de equação $x = -2$ também não é assíntota do gráfico de h. O gráfico de h não tem assíntotas verticais.

23.4. $i(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}$

$D_i = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ e i é contínua

$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)} & \text{se } x-1<0 \\ \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} & \text{se } x-1>0 \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{se } x<1 \\ x-2 & \text{se } x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} i(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x+2) = 1 \text{ e } \lim_{x\to 1^+} i(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0$$

A reta de equação $x = 1$ não é assíntota ao gráfico de i pelo que este gráfico não tem assíntotas verticais.

23.5. $j(x) = \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x}$

$D_j = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e j é contínua.

$$\lim_{x\to 0} j(x) = \lim_{x\to 0} j(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+16}-4\right)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}{x\left(\sqrt{x+16}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+16-18}{x\left(\sqrt{x+16}+4\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+16}+4} = \frac{1}{8}$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota ao gráfico de j , pelo que este gráfico não tem assíntotas verticais.

23.6. $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$

$D_k = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x \geq 0 \wedge \sqrt{x}-1 \neq 0\right\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

k é contínua

$$\lim_{x\to 1^-} k(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} k(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota ao gráfico de k .

23.7. $l(x) = \dfrac{x}{2|x|-x} = \begin{cases} \dfrac{x}{2(-x)-x} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{x}{2x-x} & \text{se } x>0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{-3x} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$

$$l(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$D_l = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e l é contínua

$$\lim_{x\to 0^-} l(x) = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} l(x) = 1$$

O gráfico de l não tem assíntotas verticais.

23.8. Atendendo a **23.7.**, temos:

$$m(x) = \frac{1}{2|x|-x} = \begin{cases} \dfrac{1}{-3x} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$D_m = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e m é contínua.

$$\lim_{x\to 0^-} m(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{-3x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} m(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de m .

23.9. $n(x) = \dfrac{|x-1|}{1-x^2} = \begin{cases} \dfrac{-(x-1)}{(1-x)(1+x)} & \text{se } x-1<0 \wedge x \neq -1 \\ \dfrac{x-1}{(1-x)(1+x)} & \text{se } x-1>0 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)} & \text{se } x<1 \wedge x\neq -1 \\ \dfrac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)} & \text{se } x>1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x<1 \wedge x \neq -1 \\ \dfrac{-1}{x+1} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

$D_n = \mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 1\}$ e n é contínua.

$$\lim_{x\to -1^-} n(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} n(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} n(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \text{ e } \lim_{x\to 1^+} n(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

A reta de equação $x = -1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de n .

24. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+x^2}{x+1}$ e $D_f = \mathbb{R}_0^+$

$$\lim_{x\to +\infty} \left[f(x)-(x-1)\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\sqrt{x}+x^2}{x+1}-(x-1)\right] =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+x^2-(x-1)(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+x^2-\left(x^2-1\right)}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{x}-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=0$, a reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

25.1. $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e f é contínua.

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de f

- Assíntotas não verticais

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x-2}=1$$

A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

25.2. $g(x)=\dfrac{x^3+8}{(x+2)^2}$

$D_g=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e g é contínua

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to-2^-} g(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{x^3+8}{(x+2)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-2^-}\frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{(x+2)^2}=$$

	1	0	0	8
–2		–2	4	–8
	1	–2	4	0

$$=\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2-2x+4}{x+2}=\frac{12}{0^-}=-\infty$$

A reta de equação $x = –2$ é uma assíntota ao gráfico de g .

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+8}{x(x+2)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+8}{x^3+4x^2+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+8}{(x+2)^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+8-x^3-4x^2-4x}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2}{x^2}=-4$$

A reta de equação $y = x – 4$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$ e em $+\infty$.

25.3. $h(x)=\dfrac{x^3-x}{x^3+x}$

$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^3+x\neq0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x^3+x=0\Leftrightarrow x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$

h é contínua.

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3-x}{x^3+x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\left(x^2-1\right)}{\cancel{x}\left(x^2+1\right)}=\frac{-1}{1}=-1$$

O gráfico de h não tem assíntotas verticais.

- Assíntotas não verticais

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$, a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de h em $\pm\infty$

25.4. $i(x)=\dfrac{x^4-1}{(x-1)^3}$

$D_i=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e i é contínua

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to1} i(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{(x-1)^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^3}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^3}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}=\frac{2\times2}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota ao gráfico de i .

- Assíntotas não verticais $(y = mx + b)$

Para $x\neq1,\ i(x)=\dfrac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^3+x+x^2+1}{x^2-2x+1}=$

$$=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+1}$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{i(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3-2x^2+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(i(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x^2+x+1-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

A reta de equação $y = x + 3$ é uma assíntota ao gráfico de i em $\pm\infty$.

26. $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+x & \text{se } x\leq0\\ \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}+1 & \text{se } x>0\end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}$ e f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\sqrt[3]{x}+x\right)=0+0=0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+1\right)=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}+1=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}+1=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}+1=+\infty+1=+\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico da função f .

- Assíntotas não verticais $(y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}+1=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}+1=\sqrt[3]{0}+1=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x}+\cancel{x}-\cancel{x}\right)=-\infty$$

Não existe assíntota vertical ao gráfico de f em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{x^6}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}+0=0+0=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}+1=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}+1=0+1=1$$

A reta de equação $y=1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

27.1. $f(x)=\sqrt{x}-x+1$ e $D_f=\mathbb{R}_0^+$

- Como f é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.
- Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}-x+1}{x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}-1+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1+\frac{1}{x}\right)=0-1+0=-1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x+1+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+1\right)=+\infty$$

Como $b\notin\mathbb{R}$, o gráfico de f não tem assíntota não vertical.

27.2. $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+2x\geq 0\wedge x+1\neq 0\right\}$

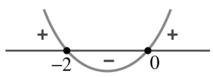
$=\left]-\infty\ ,\ -2\right]\cup\left[0\ ,\ +\infty\right[$

Cálculo auxiliar

$x^2+2x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2\vee x=0$



- g é contínua e D_g contém todos os pontos aderentes.

  Logo, o gráfico de g não tem assíntotas verticais.
- Assíntotas não verticais

  Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2+x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\cancel{x}(x+1)}=\frac{1+0}{-\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{1+0}}{1+0}=-1$$

A reta de equação $y=-1$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$.

De igual modo, em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{x^2+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\cancel{x}(x+1)}=\frac{\sqrt{1+0}}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1+0}}{1+0}=1$$

A reta de equação $y=1$ é uma assíntota ao gráfico de h em $+\infty$.

27.3. $h(x)=\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x}{2}$

$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-1\geq 0\right\}=\left]-\infty\ ,\ -1\right]\cup\left[1\ ,\ +\infty\right[$

- Como h é contínua e D_h contém todos os seus pontos aderentes, o gráfico de h não tem assíntotas verticais.
- Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

  Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}-\frac{1}{2}=-\sqrt{1-0}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=-\dfrac{3}{2}x$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}-\frac{1}{2}=\sqrt{1+0}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=\frac{1}{2}x$ é uma assíntota ao gráfico de h em $+\infty$.

28. $f(x)=\dfrac{2x|x|+2x^2-x}{x+1}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\times(-x)+2x^2-x}{x+1} & \text{se } x<0\wedge x\neq-1\\[2mm] \dfrac{2x\times x+2x^2-x}{x+1} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{x+1} & se\ x<0\ e\ x\neq-1\\[2mm] \dfrac{4x^2-x}{x+1} & se\ x\geq 0\end{cases}$$

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 0\}$

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x}{x+1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x}{x+1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{4x^2-x}{x+1}=0=f(0)$$

A reta de equação $x=-1$ é uma assíntota ao gráfico de f e f é contínua no ponto $x=0$.

- Assíntotas não verticais $\quad (y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

A reta de equação $y=-1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2}=4$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-x}{x+1}-4x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-x-4x^2-4x}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x}=-5$$

A reta de equação $y=4x-5$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

29. Dado que a reta de equação $y=2x$ é uma assíntota do gráfico de h, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=2 \quad\text{e}\quad \lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-2x\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+x}{h(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{h(x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{h(x)}{x}}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

Por outro lado:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{h(x)}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2x-xh(x)}{2h(x)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{xh(x)-2x^2-2x}{h(x)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(h(x)-2x-2\right)}{h(x)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{h(x)}\times\left(h(x)-2x-2\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{h(x)}\times\left[\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-2x\right)-2\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(0-2)=\frac{1}{2}$$

Portanto, a reta de equação $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, ou seja, $y=\frac{x+1}{2}$, é uma assíntota ao gráfico da função f.

30.1. $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-3}$

$$=-3+\frac{10}{x+3}$$

$$\begin{array}{r|l} -3x+1 & x+3 \\ \hline +3x+9 & -3 \\ 10 & \end{array}$$

Assíntota vertical: $x=3$

Assíntota horizontal: $y=-3$

30.2. $g(x)=\dfrac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{2x-2}=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2x-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2}x+\sqrt{2} & 2x-2 \\ \hline -\sqrt{2}x+\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sqrt{2} & \end{array}$$

Assíntota vertical: $x=1$

Assíntota horizontal: $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Pág. 60

31.1. $f(x)=\dfrac{6x-5}{3x-3}=2+\dfrac{1}{3x-3}=2+\dfrac{\frac{1}{3}}{x-1}$

$$\begin{array}{r|l} 6x-5 & 3x-3 \\ \hline -6x+6 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Assíntota vertical: $x=1$

Assíntota horizontal: $y=2$

$D'_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

31.2. $g(x)=\dfrac{7-4x}{2x-3}=-2+\dfrac{1}{2x-3}=-2+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}$

$$\begin{array}{r|l} -4x+7 & 2x-3 \\ \hline 4x-6 & -2 \\ 1 & \end{array}$$

$D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Assíntota vertical: $x=\dfrac{3}{2}$

Assíntota horizontal: $y = -2$

$D'_g = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

32.1. $f(x)=-1+\dfrac{k}{x-2}$

Como $f(-1)=0$: $-1+\dfrac{k}{-1-2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{k}{-3}=1 \Leftrightarrow k=-3$

Logo, $f(x)=-1+\dfrac{-3}{x-2}$ ou $f(x)=\dfrac{-x+2-3}{x-2}=\dfrac{-x-1}{x-2}$.

32.2. $d = 4$

$f(x)=\dfrac{-x-1}{x-2}=\dfrac{-2(-x-1)}{-2(x-2)}=\dfrac{2x+2}{-2x+4}$

Como $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Se $d=-4$ temos $a=2$, $b=2$ e $c=2$.

32.3. $f(0)=\dfrac{0-1}{0-2}=\dfrac{1}{2}$

$B\left(0\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$

33. $f(x)=\dfrac{5x+9}{3}$ e $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \dfrac{5x+9}{3}=\dfrac{3x-1}{x-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x+9}{3}-\dfrac{3x-1}{x-2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(5x-9)(x-2)-3(3x-1)}{3(x-2)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x^2-10x+9x-18-9x+3}{3(x-2)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x^2-10x-15}{3(x-2)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\left(x^2-2x-3\right)=0 \wedge 3(x-2)\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+10}}{2}\wedge x\neq 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$

$f(-1)=\dfrac{5\times(-1)+9}{3}=\dfrac{4}{3}$

$f(3)=\dfrac{5\times 3+9}{3}=8$

$\left(-1\ ,\ \dfrac{4}{3}\right)$ e $(3\ ,\ 8)$ são os pontos pedidos.

34. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ e $g(x)=\dfrac{5-x}{3}$

$f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+1}\geq\dfrac{5-x}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+1}-\dfrac{5-x}{3}\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{6x-3-(5-x)(x+1)}{3(x+1)}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{6x-3-5x-5+x^2+x}{3(x+1)}\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-8}{3(x+1)}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[-4\ ,\ -1[\,\cup\,[2\ ,\ +\infty[$

$S=[-4\ ,\ -1[\,\cup\,[2\ ,\ +\infty[$

Cálculos auxiliares

$x^2+2x-8=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-4 \vee x=2$

$3(x+1)=0\Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-4		-1		2	$+\infty$
x^2+2x-8	+	0	–	–	–	0	+
$3(x+1)$	–	–	–	0	+	+	+
Q	–	0	+	n.d.	–	0	+

35.1. $\dfrac{x-5}{x+7}\geq\dfrac{x-4}{20}\Leftrightarrow \dfrac{x-5}{x+7}-\dfrac{x-4}{20}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{20(x-5)-(x+7)(x-4)}{20(x+7)}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{20x-100-x^2+4x-7x+28}{20(x+7)}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+17x-72}{20(x+7)}\geq 0\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\ ,\ -7[\,\cup\,[8\ ,\ 9]$

$S=\,]-\infty\ ,\ -7[\,\cup\,[8\ ,\ 9]$

Cálculos auxiliares

$-x^2+17x-72=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-17\pm\sqrt{17^2-4\times 72}}{-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-17\pm 1}{-2}\Leftrightarrow x=8\vee x=9$

x	$-\infty$	-7		8		9	$+\infty$
$-x^2+17x-72$	–	–	–	0	+	0	–
$20(x+7)$	–	0	+	+	+	+	+
Q	+	n.d.	–	0	+	0	–

35.2. $\dfrac{2x+4}{x}\geq\dfrac{3x^2+30x+20}{x^2+5x}\Leftrightarrow \dfrac{2x+4}{\underset{(x+5)}{x}}-\dfrac{3x^2+30x+20}{x(x+5)}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+4x+10x+20-3x^2-30x-20}{x(x+5)}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2-16x}{x(x+5)}\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{x(x+16)}{x(x+5)}\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+16}{x+5}\leq 0\wedge x\neq 0\Leftrightarrow x\in[-16\ ,\ -5[$

$S = [-16\ ,\ -5[$

x	$-\infty$	-16		-5		0	$+\infty$
$x+16$	–	0	+	+	+	+	+
$x+5$	–	–	–	0	+	+	+
$\dfrac{x+16}{x+5}$	+	0	–	n.d.	+	n.d.	+

36. $f(x)=\dfrac{81x-x^5}{10-x^2}=\dfrac{x\left(81-x^4\right)}{10-x^2}=\dfrac{x\left(9-x^2\right)\left(9+x^2\right)}{10-x^2}$

- $x\left(9-x^2\right)\left(9+x^2\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-3\vee x=3$
- $10-x^2=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{10}\vee x=\sqrt{10}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{10}$		-3		0		3		$\sqrt{10}$	$+\infty$
N_1	–	–	–	–	–	0	+	+	+	+	+
N_2	–	–	–	0	+	+	+	0	–	–	–
D	–	0	+	+	+	+	+	+	+	0	–
$f(x)$	–	n.d.	+	0	–	0	+	0	–	n.d.	+

$N_1: x \;\; ; \;\; N_2: 9-x^2 \;\; ; \;\; D: 10-x^2$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=0 \vee x=3$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty\,,\,-\sqrt{10}\right[\cup \left]-3\,,\,0\right[\cup \left]3\,,\,\sqrt{10}\right[$

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\sqrt{10}\,,\,-3\right[\cup \left]0\,,\,3\right[\cup \left]\sqrt{10}\,,\,+\infty\right[$

37. $f(x)=\dfrac{8-x}{x-3}$

37.1. $A(x\,,\,f(x))$

Sabemos que $f(x)=k$ e $k>0$.

$f(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{8-x}{x-3}>0 \Leftrightarrow 3<x<8$

x	$-\infty$	3		8	$+\infty$
$8-x$	+	+	+	0	–
$x-3$	–	0	+	+	+
$f(x)$	–	n.d.	+	0	–

37.2. a) O triângulo [*OAB*] é retângulo em *B*.

$\overline{OB}=\overline{BA}$

$f(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{8-x}{x-3}=x \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{8-x}{x-3}-x=0 \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{8-x-x^2+3x}{x-3}=0 \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2+2x+8=0 \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+32}}{-2} \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=-2 \vee x=4) \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow x=4$

b) $A_{[OAB]}=\dfrac{\overline{OB}\times\overline{OA}}{2}=\dfrac{1}{2}\times f(x)\times x=\dfrac{(8-x)x}{2(x-3)}$

$A_{[OAB]}<2 \Leftrightarrow \dfrac{(8-x)x}{2(x-3)}<2 \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{8x-x^2}{2(x-3)}-2<0 \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{8x-x^2-4x+12}{2(x-3)}<0 \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+4x+12}{2(x-3)}<0 \wedge 3<x<8 \Leftrightarrow 6<x<8$

Cálculo auxiliar

$-x^2+4x+12=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+48}}{-2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=6$

$2(x-3)=0 \Leftrightarrow x=3$

x	3		6		8
$-x^2+4x+12$		+	0	–	
$2(x-3)$		+	+	+	
$A_{[OAB]}$		+	0	–	

Pág. 61

38.1.

	Água (litros)	Sal (gramas)
Água pura	9000	0
Água c/sal	$15t$	$20\times 15t$
Total	$9000+15t$	$20\times 15t$

$C(t)=\dfrac{20\times 15t}{9000+15t}=\dfrac{20t}{600+t}$ em g/l

38.2. $C(t)>8 \Leftrightarrow \dfrac{20t}{600+t}>8 \Leftrightarrow \dfrac{20t}{600+t}-8>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{20t-4800-8t}{600+t}>0 \Leftrightarrow \dfrac{12t-4800}{600+t}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12t-4800>0 \Leftrightarrow$ (dado que $\forall t>0,\ 600+t>0$)

$\Leftrightarrow 12t>4800 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t>400 \Leftrightarrow$ $\qquad 400 = 6\times 60+40$

$\Leftrightarrow t>$ 6 h 40 min $\qquad$ 400 min = 6 h 40 min

Decorreram 6 h 40 min.

38.3. $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{20t}{600+t}=\dfrac{20}{1}=20$

Com o decorrer do tempo, a concentração de sal na água do depósito tenderá a ser de 20 g por litros, ou seja, tenderá a aproximar-se da concentração de sal da água que está a ser introduzida no depósito.

39.1. Torneira *A* : 2 h

Torneira *B*: *t* h com $t=\dfrac{10\ 000}{C}$, $0\le C\le 50\ 000$

Torneira A :

Tempo	Fração da piscina
2 h	1
1 h	P_A

$P_A=\dfrac{1\times 1}{2}$. A torneira *A* enche $\dfrac{1}{2}$ tanque por hora.

Torneira B :

Tempo	Fração da piscina
t h	1
1 h	P_B

$P_B=\dfrac{1}{t}$. A torneira B enche $\dfrac{1}{t}$ do tanque por hora.

Torneira A + + Torneira B	Fração da piscina
1 h	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{t}$
$h(t)$	1

$h(t)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{t}}=\dfrac{1}{\dfrac{t+2}{2t}}=\dfrac{2t}{t+2}$

$h(t)=\dfrac{2t}{t+2},\ t>0$

Como $t=\dfrac{10\ 000}{C}$:

$h(C)=\dfrac{2\times\dfrac{10\ 000}{C}}{\dfrac{10\ 000}{C}+2}=\dfrac{\dfrac{20\ 000}{C}}{\dfrac{10\ 000+2C}{C}}=$

$=\dfrac{20\ 000}{10\ 000+2C}=$

$=\dfrac{10\ 000}{5000+C},\ C>0$

$h(C)=\dfrac{10\ 000}{5000+C}$

39.2. 30 min = 0,5 h

$h(C)=0{,}5 \Leftrightarrow \frac{10\ 000}{5000+C}=0{,}5 \Leftrightarrow \frac{10\ 000}{5000+C}-0{,}5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{10\ 000-2500-0{,}5C}{5000+C}=0 \Leftrightarrow$ $\quad C>0$

$\Leftrightarrow 7500-0{,}5C=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}5C=7500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C=15\ 000$

A segunda torneira deve ser regulada por 15 000 l/h.

40. $f(x)=\frac{4-x}{x-2}=-1+\frac{2}{x-2}$

$$\begin{array}{r|l} -x-4 & 3x-2 \\ \hline x-2 & -1 \\ 2 & \end{array}$$

$AB:\ y=-1$ e $BD:\ x=2$

$A(0\ ,\ -1)$; $B(2\ ,\ -1)$ e $D(2\ ,\ 0)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x-2}=0 \Leftrightarrow 4-x=0 \wedge x-2\neq 0 \Leftrightarrow x=4$

$C(4\ ,\ 0)$

$\overline{AB}=|2-0|=2$ e $\overline{CD}=|4-2|=2$

[$ABCD$] é um paralelogramo.

$A_{[ABCD]}=\overline{AB}\times\overline{OA}=2\times 1=2$

$A_{[ABCD]}=2$ u.a.

Pág. 62

41. $f(x)=\frac{4}{x+1}+2$ e $g(x)=x^3+3x^2-x-3$

41.1. $f(x)\leq 4 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1}+2\leq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4}{x+1}-2\leq 0 \Leftrightarrow \frac{4-2x-2}{x+1}\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2-2x}{x+1}\leq 0 \Leftrightarrow x\in\ ]-\infty\ ,\ -1[\ \cup [1\ ,\ +\infty[$

$S=\ ]-\infty\ ,\ -1[\ \cup [1\ ,\ +\infty[$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$2-2x$	+	+	+	0	–
$x+1$	–	0	+	+	+
$\frac{2-2x}{x+1}$	–	n.d.	+	0	–

41.2. $r:\ y=2$; $A(0\ ,\ 2)$

$s:\ x=-1$; $D(-1\ ,\ 0)$

$f(0)=4+2=6$; $B(0\ ,\ 6)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1}+2=0 \Leftrightarrow \frac{4+2x+2}{x+1}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+6=0 \wedge x+1\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-3$; $C(-3\ ,\ 0)$

$\text{Área}_{[OBC]}=\frac{\overline{OC}\times\overline{OB}}{2}=\frac{3\times 6}{2}=9$ u.a.

$\text{Área}_{[OAD]}=\frac{\overline{OA}\times\overline{OD}}{2}=\frac{2\times 1}{2}=1$ u.a.

$\text{Área}_{[ABCD]}=(9-1)$ u.a. = 8 u.a.

41.3. Se a função $\frac{f}{g}$ não tem zeros, então o zero de f também é zero de g. Logo, se –3 é zero de g usamos a regra de Ruffini para fatorizar $g(x)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ -3 & & -3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x+3)(x^2-1)$

$(f\times g)(x)=0 \Leftrightarrow (f(x)=0 \vee g(x)=0)\wedge x\in D_{f\times g} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=-3 \vee x^2-1=0)\wedge x\neq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=-3 \vee x=-1 \vee x=1)\wedge x\neq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$

$S=\{-3\ ,\ 1\}$

42.1. 30% da solução é ácido

$0{,}3\times 5=1{,}5$

$5-1{,}5=3{,}5$

A solução é obtida com 1,5 l de ácido e 3,5 l de água.

42.2. **a)** Seja x a quantidade de água a adicionar (em litros)

Solução existente:

ácido: $0{,}4\times 5=2$

água: 5 – 2 = 3

Nova solução:

$\frac{2}{x+5}=0{,}32=\frac{2}{x+5}-0{,}32=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2-0{,}32x-1{,}6}{x+5}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}4-0{,}32x=0 \wedge x+5\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}32x=0{,}4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1{,}25$

Devem ser adicionados 1,25 l de água.

b) 5 + 1,25 = 6,25

Vão ser obtidos 6,25 l de solução a 32%.

42.3. 20 litros a 30%

ácido: $0{,}3\times 20=6$ l

água: 20 – 6 = 14 l

x litros a 45%

ácido: 0,45x

água: x – 0,45x = 0,55x

a) $P(x)=\frac{6+0{,}45x}{20+x}=\frac{20(0{,}45x+6)}{20(x+20)}$

$P(x)=\frac{9x+120}{20x+400}$

b) $P(x)=0{,}35 \Leftrightarrow \frac{9x+120}{20x+400}=0{,}35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9x+120}{20x+400}-0{,}35=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9x+120-7x-140}{20x+400}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-20=0 \wedge 20x+400\neq 0 \Leftrightarrow x=10$

Devem ser acrescentados 10 l de solução a 35%.

c) $20+x=50 \Leftrightarrow x=30$

$P(30)=\frac{9\times 30+120}{20\times 30+400}=0{,}39$

A percentagem de ácido obtida é 39%.

42.4. $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x+120}{20x+400} = \dfrac{9}{20} = 0,45$

Quando a quantidade de solução a 45% se tornar significativamente grande, a concentração da poluição obtida tende a aproximar-se de 45%.

Pág. 63

43. $C(x) = \dfrac{1000x+3800}{x+10}$

43.1. $C(x) = 600 \Leftrightarrow \dfrac{1000x+3800}{x+10} = 600 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1000x+3800}{x+10} - 600 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1000x+3800-600x-6000}{x+10} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 400x - 2200 = 0 \wedge x+10 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2200}{400} \Leftrightarrow x = 5,5$

$5,5 \times 1000 = 5500$

A empresa CPU terá de investir 5500 €.

43.2. $C(0) = \dfrac{3800}{10} = 380$

$C(15) = \dfrac{1000\times 15+3800}{15+10} = 752$

$C(30) = \dfrac{1000\times 30+3800}{30+10} = 845$

Venderá 380 , 752 e 845 computadores, respetivamente.

43.3. Lucro se investir 0 € em publicidade:

$C(0)\times 150 = 380\times 150 = 57\ 000$ €

Lucro se investir 15 000 € em publicidade:

$C(15)\times 150 - 15\ 000 = 752\times 150 - 15\ 000 = 97\ 800$ €

Lucro se investir 30 000 € em publicidade:

$C(30)\times 150 - 30\ 000 = 845\times 150 - 30\ 000 = 96\ 750$ €

Compensa mais gastar 15 000 € em publicidade do que 30 000 €.

43.4. **a)** Se forem investidos x milhares de euros em publicidade, temos:

$C(x) \rightarrow$ número de computadores vendidos

$0,15\times C(x) \rightarrow$ lucro obtido se $x = 0$

$0,15\times C(x) - x \rightarrow$ lucro obtido após um investimento de x milhares de euros em publicidade

b) $L(x) = 0,15\times C(x) - x$

$L(x) > 99 \Leftrightarrow 0,15\times C(x) - x > 99 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,15\times \dfrac{1000x+3800}{x+10} - x > 99 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{150x+570}{x+1} - x - 99 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{150x+570-x^2-10x-99x-990}{x+10} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+41x-420}{x+10} = 0 \Leftrightarrow$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+ ,\ x+10>0$

$\Leftrightarrow -x^2+41x-420 > 0 \Leftrightarrow$

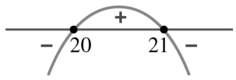
$\Leftrightarrow 20 < x < 21$

Devem ser investidos entre 20 mil e 21 mil euros.

Cálculo auxiliar:

$-x^2+41x-420 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-41\pm\sqrt{41^2-4\times 420}}{-2} \Leftrightarrow$

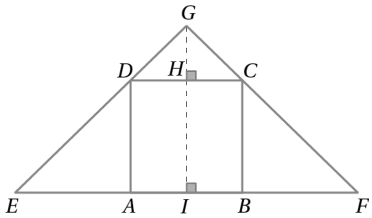
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-41\pm 1}{-2} \Leftrightarrow x = 20 \vee x = 21$



44.1. $\overline{IG} > \overline{IH}$ pelo que $x > 4$.

$D_f =]4\ ,\ +\infty[$

44.2. $A_{[EFG]} = \dfrac{\overline{EF}\times\overline{IG}}{2}$



Os triângulos [*IFG*] e [*BFC*] são semelhantes:

$\dfrac{\overline{IG}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{IF}}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{\overline{IF}}{\overline{IF}-2}$

Seja $\overline{IF} = y$.

$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{y-2} \Leftrightarrow xy - 2x = 4y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy - 4y = 2x \Leftrightarrow y(x-4) = 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{2x}{x-4}$

$\overline{IF} = \dfrac{2x}{x-4}$

$\overline{EF} = 2\overline{IF} = 2\times\dfrac{2x}{x-4}$

$\overline{IG} = x$

$A_{[EFG]} = \dfrac{\overline{EF}\times\overline{IG}}{2} = \dfrac{2\times\dfrac{2x}{x-4}\times x}{2} = \dfrac{2x^2}{x-4}$

Logo, $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-4}$.

44.3. $16 = \dfrac{f(x)}{2} \Leftrightarrow f(x) = 32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{x-4} = 32 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{x-4} - 32 = 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-32x+128}{x-4} = 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 = 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-8)^2 = 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow x = 8$

44.4. $f(x) < 36 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{x-4} < 36 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{x-4} - 36 < 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-36x+144}{x-4} < 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 72 < 0 \wedge x > 4$ (dado que $x - 4 > 0$)

$\Leftrightarrow x \in]6\ ,\ 12[$

Cálculo auxiliar

$x^2-18x+72=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{18^2-4\times72}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=6 \vee x=12$

44.5. $D_f=]4\ ,\ +\infty[$ e f é contínua.

$$\lim_{x\to4^+} f(x)=\lim_{x\to4^+}\frac{2x^2}{x-4}=\frac{32}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x = 4$ é uma assíntota ao gráfico de f.

Quando a altura do triângulo $\left(x=\overline{IG}\right)$ tende para $+\infty$, a medida da base, EF, tende para 4, pelo que a medida da área do triângulo $[EFG]$, ou seja, $f(x)$, tende para $+\infty$.

44.6. $m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x-4}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}+8x}{x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x}=8$$

A reta de equação $y = 2x + 8$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Pág. 64

Avaliação 2

1. $D_f=\mathbb{R}^+$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)=0+\infty=+\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f.

Resposta: **(A)**

2. $D_h=\mathbb{R}_0^+$ e h é contínua

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)-x+\sqrt{x}}{x}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{h(x)}{x}-1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}=1$$

$$\Leftrightarrow m-1+0=1 \Leftrightarrow m=2$$

Como h é contínua no ponto O, existe $\lim_{x\to0}h(x)$. Logo, como $O\in D_h$, $\lim_{x\to0}h(x)=h(0)$.

Resposta: **(C)**

3. $f(x)=a+\frac{1}{x+b}$

A reta de equação $y = a$ $(a < 0)$ é uma assíntota ao gráfico de f (fica excluída a opção **(A)**)

A reta de equação $x = -b$ $(-b > 0)$ é uma assíntota ao gráfico de f (fica excluída a opção **(C)**).

Como $+1 > 0$, f é decrescente em cada intervalo onde está definida (fica excluída a opção **(B)**).

Resposta: **(D)**

4. $g(x)=\frac{1}{kx-1},\ D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{k}\right\}$

$$h(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)+1=\frac{1}{k\frac{x}{2}-1}+1=\frac{1}{\frac{kx-2}{2}}+1=\frac{2}{k\left(x-\frac{2}{k}\right)}+1$$

A reta de equação $x=\frac{2}{k}$ é uma assíntota ao gráfico de h.

Logo, $\frac{2}{k}=8 \Leftrightarrow 8k=2 \Leftrightarrow k=\frac{2}{8}=k=\frac{1}{4}$.

Resposta: **(C)**

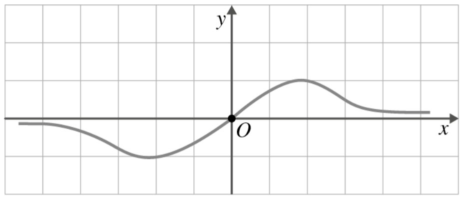
5. • $\forall x\in\mathbb{R}^-,\ g(x)<0$

• g é ímpar

• A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota do gráfico.

Logo, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0^-$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0^+$

Por exemplo:



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{x}{x\sqrt{x}}\right)}{g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{g(x)}=\frac{+\infty(1-0)}{0^+}=+\infty$$

Resposta: **(B)**

6. $f(x)=\frac{4}{x-2}+3\ ;\ g(x)=f(x+3)-4$

6.1. $g(x)=f(x+3)-4=\frac{4}{x+3-2}+3-4=\frac{4}{x+1}-1$

Assíntotas ao gráfico de g: $x = -1$ e $y = -1$

Resposta: **(B)**

6.2. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3}{-1}=-3$$

Resposta: **(A)**

Pág. 65

7. $g(x)=\frac{5x}{x+3},\ D_g=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$B\left(x\ ,\ g(x)\right),\ x>0$

7.1. $\overline{OA}=\overline{AB} \Leftrightarrow x=g(x)\wedge x>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{x+3}=x\wedge x>0 \Leftrightarrow \frac{5x}{x+3}-x=0\wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-x^2-3x}{x+3}=0\wedge x>0 \Leftrightarrow 2x-x^2=0\wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2-x)=0\wedge x>0 \Leftrightarrow (x=0\vee x=2)\wedge x>0 \Leftrightarrow x=2$$

$B(2\ ,\ 2)$

7.2. $P=2\overline{OA}+2\overline{AB}$

$$P(x)=2x+2g(x)=2x+2\times\frac{5x}{x+3}=\frac{2x^2+6x+10x}{x+3}$$

$$P(x)=\frac{2x^2+16x}{x+3}$$

7.3. $P(x)=21 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+16x}{x+3}=21 \text{ e } x>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+16x}{x+3}-21=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+16x-21x-63}{x+3}=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x-63=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+4\times2\times63}}{4} \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm23}{4} \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=7 \vee x=-\frac{9}{2}\right) \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=7$$

$$g(7)=\frac{5\times7}{7+3}=\frac{35}{10}=\frac{7}{2}$$

$$B\left(7\ ,\ \frac{7}{2}\right)$$

7.4. $P(x)\le 32 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+16x}{x+3}\le 32 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+16x}{x+3}-32\le 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+16x-32x-96}{x+3}\le 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \qquad \forall x\in\mathbb{R}_0^+\ ,\ x+3>0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-16x-96\le 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

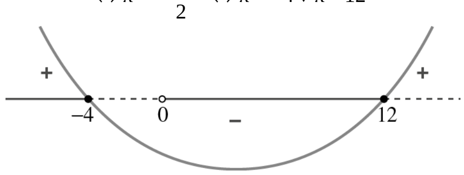
$$\Leftrightarrow x^2-8x-48\le 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]0\ ,\ 12\right]$$

Cálculo auxiliar

$$x^2-8x-48=0 \Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64+4\times48}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{8\pm16}{2} \Leftrightarrow x=-4 \vee x=12$$



8. Se a reta de equação $y = 2x - 3$ é uma assíntota ao gráfico de g em $+\infty$, então:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2 \text{ e } \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x\right)=-3$$

Portanto:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(g(x)\right)^2}{x}-2g(x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(g(x)\right)^2-2xg(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)\left(g(x)-2x\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x\right)=2\times(-3)=-6$$

Logo, a reta de equação $y = -6$ é uma assíntota ao gráfico de h.

9. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x+\sqrt{2}}{3-2x} & \text{se } x<1\\ k & \text{se } x=1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{2}} & \text{se } x>1\end{cases}$

9.1.

- Em $\left]-\infty\ ,\ 1\right[$ f é contínua por ser definida pelo quociente de funções contínuas (funções polinomiais) e $3-2x\neq 0,\ \forall x\in\left]-\infty\ ,\ 1\right[$.
- Em $\left]1\ ,\ +\infty\right[$ f é contínua por ser definida pelo quociente de duas funções contínuas:

  uma função polinomial e outra que é uma diferença de funções contínuas, pois uma potência de expoente racional de uma função contínua é uma função contínua. Sabe-se ainda que

  $\forall x\in\left]1\ ,\ +\infty\right[,\ 2x>0 \text{ e } \sqrt{2x}-\sqrt{2}\neq 0$.
- No ponto $x = 1$:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x+\sqrt{2}}{3-2x}=\frac{1-1+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{2}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)}{2\cancel{(x-1)}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$f(1)=k$$

Portanto, existe $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ se e só se:

$$\lim_{\substack{x\to1\\x\neq1}}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\sqrt{2}=k$$

Podemos portanto concluir que se $k=\sqrt{2}$ a função f é contínua.

9.2.

- f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e

  $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\sqrt{2}$.

  Logo, o gráfico de f não tem assíntotas verticais.
- Assíntotas não verticais

  Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+\sqrt{2}}{3x-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-2x^2}=-\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+\sqrt{2}}{3-2x}+\frac{1}{2}x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-2x+2\sqrt{2}+3x-2x^2}{2(3-2x)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2\sqrt{2}}{6-4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-4x}=-\frac{1}{4}$$

A reta de equação $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right)}=\frac{1-0}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{x}}=$$

$$\frac{\sqrt{2x}}{x}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

Como $b\notin\mathbb{R}$, não existe assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Portanto, a reta de equação $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ é a única assíntota ao gráfico de f.

10. Fração da piscina que cada uma das torneiras enche numa hora.

Torneira A: $\frac{1}{4}$

Torneira B: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Torneira C: $\frac{1}{t}$

10.1. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

Tempo (h)	Fração da piscina
1	$\frac{3}{4}$
t	1

$$t=\frac{1\times1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

$\frac{4}{3}$ h = 1 h + $\frac{1}{3}$ h = 1 h 20 min

10.2. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{t}=\frac{3}{4}+\frac{1}{t}=\frac{3t+4}{4t}$

Tempo (h)	Fração da piscina
1	$\frac{3t+4}{4t}$
$h(t)$	1

$$h(t)=\frac{1\times1}{\frac{3t+4}{4t}}=\frac{4t}{3t+4}$$

$$h(t)=\frac{4t}{3t+4}$$

10.3. 1 h = 12 min = 1 h + $\frac{12}{60}$ h = 1,2 h

$$h(t)=1,2\Leftrightarrow\frac{4t}{3t+4}=1,2\wedge t>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4t}{3t+4}-1,2=0\wedge t>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4t-3,6t-4,8}{3t+4}=0\wedge t>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,4t-4,8=0\wedge t>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{4,8}{0,4}\Leftrightarrow t=12$$

10.4. $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{4t}{3t+4}\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{4t}{3t}=\frac{4}{3}$

A reta de equação $y=\frac{4}{3}$ é uma assíntota ao gráfico de h em $+\infty$.

Quando $t\to+\infty$, ou seja, quando o caudal da torneira C tende para zero, o tempo necessário para encher a piscina tende para $\frac{4}{3}$ que é o tempo necessário para que torneiras A e B encheram a piscina.

Atividade inicial 3

Pág. 66

$C(x)=0{,}1x^2+20x+1000$

1. $C(100)=0{,}1\times100^2+20\times100+1000=4000$

O custo de produção de 100 peças é 4000 €.

2. $\dfrac{C(100)}{100}=\dfrac{4000}{100}=40$

Cada peça custou, em média, 40 €.

3. $C(150)=0{,}1\times150^2+20\times150+1000=6250$

O custo de produção de 150 peças é 6250 €.

4. $\dfrac{C(150)}{150}=\dfrac{6250}{150}\approx 41{,}67$ €

5. $C(150)-C(100)=6250-4000=2250$

O custo de produzir 50 peças quando já foram produzidas 100 é de 2250 €.

6. $\dfrac{C(150)-C(100)}{150-100}=\dfrac{2250}{50}=45$

O custo médio de cada uma das 50 peças produzidas depois de produzir 100 é de 45 €.

7. Custo médio de cada peça produzida acima de 100 quando foram produzidas 150 peças.

Pág. 67

1. $f(-2)=f(4)=5\,;\ f(2)=f(6)=2$

1.1. $f(6)-f(-2)=2-5=-3$

1.2. **a)** $\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\dfrac{2-5}{4}=-\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{5-2}{2}=\dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{f(6)-f(2)}{6-2}=\dfrac{2-2}{4}=0$

1.3. $\dfrac{f(8)-f(4)}{8-4}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{f(8)-5}{4}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(8)-5=-2\Leftrightarrow f(8)=-2+5\Leftrightarrow f(8)=3$

Pág. 68

2. $A(-4\ ,\ 3)\,;\ f(-4)=3$

$m_{AB}=\dfrac{3}{-4}=-\dfrac{3}{4}$ e $m_{CD}=\dfrac{4}{3}$

2.1. $\text{t.m.v.}_{(f\,,\,-4,\,b)}=m_{AB}=-\dfrac{3}{4}$

2.2. $\text{t.m.v.}_{(f\,,\,c,\,d)}=m_{CD}=\dfrac{4}{3}$

Pág. 69

3.1. $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-3x+1-x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-3x}{x}=-3$

3.2. $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+1-(-3+1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3(x-1)}{x-1}=-3$

3.3. $g'(0)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2x-0}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x+2)=2$

3.4. $g'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-(1+2)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 2 & -3\\
1 & & 1 & 3\\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0}
\end{array}$$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}(x+3)=4$

Pág. 70

4. $f(x)=\dfrac{2}{x}$

4.1. $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{2}{x}-2}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{2-2x}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2(x-1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2}{x}=-2$

4.2. $f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\frac{2}{x}-(-2)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\frac{2+2x}{x}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2(x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2}{x}=-2$

5. $g(x)=\sqrt{x+1}-1$

5.1. $g'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1-0}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{1}{2}$

5.2. $g'(3)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(3+h)-g(3)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{3+h+1}-1-(2-1)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\dfrac{1}{4}$

Pág. 71

6. $f(x)=-2x^2+8x-4,\ D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{x+1},\ D_g=[-1\ ,\ +\infty[$

6.1. $f(3)=-2\times3^2+8\times3-4=2$

$g(3)=\sqrt{3+1}=2$

Logo, o ponto $A(3\ ,\ 2)$ pertence ao gráfico de f e ao gráfico de g.

6.2. $y = mx + b$

$$m = f'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-2x^2+8x-4-2}{x-3} =$$

	-2	8	-6
3		-6	6
	-2	2	$\boxed{0}$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-2x^2+8x-6}{x-3}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(-2x+2)}{(x-3)} = -4$$

Ponto de tangência: $A(3 , 2)$

$r:\ y-2=-4(x-3) \Leftrightarrow y=-4x+12+2 \Leftrightarrow y=-4x+14$

6.3. $y = mx + b$

$$m = g'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

Ponto de tangência: $A(3 , 2)$

$t:\ y-2=\frac{1}{4}(x-3) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}+2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

6.4. $m_r \times m_s = -4\times\frac{1}{4} = -1$. Logo, as retas r e s são perpendiculares.

Pág. 72

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{se } x \ge 1 \\ x^2+2x & \text{se } x<1 \end{cases}$

Ponto de tangência: $A(1 , 3)$ pois $f(1) = 3$

Declive:

$$m = f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right) =$$

	1	2	-3
1		1	3
	1	3	$\boxed{0}$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}(x+3) = 4$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{3}{x}-3}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{3-3x}{x}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-3(x-1)}{x(x-1)} = -3$$

Não existe $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ dado que os limites laterais neste ponto são diferentes. Logo, não existe $f'(1)$ pelo que não existe tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

8. $f(x) = x^2 - x$; $g(x) = x^2 + x$

8.1. $m_r = f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x-0}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = 1$$

$$m_s = g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = 1$$

Como $m_r \times m_s = -1$, as retas r e s são perpendiculares.

8.2. Reta r:

Ponto de tangência: (0 , 0)

$m_r = -1$

$r:\ y-0=-1(x-0) \Leftrightarrow y=-x$

Reta s:

Ponto de tangência: (0 , 0)

$m_s = 1$

$s:\ y-0=1(x-0) \Leftrightarrow y=x$

Pág. 75

9. $P(t) = 12 + 4t - t^2$

9.1. $P(t)=0 \Leftrightarrow 12+4t-t^2=0 \Leftrightarrow -t^2+4t+12=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{-2} \Leftrightarrow t=\frac{-4\pm 8}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=-2 \vee t=6$$

Nos instantes $t = -2$ s e $t = 6$ s.

9.2. $\frac{P(2)-P(1)}{2-(-1)} = \frac{(12+8-4)-(12-4-1)}{3} = \frac{16-7}{3} = 3$

A velocidade média de P entre $t = -1$ s e $t = 2$ s é 3 cm/s.

9.3. $v(0) = P'(0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{P(t)-P(0)}{t-0} =$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(4-t)}{t} = 4$$

$v(0) = 4$ cm/s

Pág. 76

10. $g(x) = -3x + 1$

$$g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-3x+1-(-3a+1)}{x-a}\left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{-3x+3a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-3\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = -3$$

$\forall a \in \mathbb{R},\ g'(a) = -3$

11. $f(x) = x^2$

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}\left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{(x-a)}} = a+a = 2a$$

$\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = 2a$

Pág. 77

12. $f(x) = \frac{2}{1-x}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{2}{1-x}-\frac{2}{1-a}}{x-a}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{2(1-a)-2(1-x)}{(1-x)(1-a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2-2a-2+2x}{(1-x)(1-a)(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2x-2a}{(1-x)(1-a)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)}{(1-x)(1-a)(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2}{(1-x)(1-a)}=\frac{2}{(1-a)(1-a)}=\frac{2}{(1-a)^2}$$

$$f'(a)=\frac{2}{(1-a)^2},\ \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

13. $f(x)=2\sqrt{x-1}$; $D_f=[1\ ,\ +\infty[$

13.1. $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sqrt{x-1}-2\sqrt{a-1}}{x-a}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=2\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{a-1}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{a-1}\right)}=$$

$$=2\lim_{x\to a}\frac{(x-1)-(a-1)}{(x-a)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{a-1}\right)}=$$

$$=2\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{a-1}\right)}=$$

$$=2\times\frac{1}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a-1}}=\frac{2}{2\sqrt{a-1}}=\frac{1}{\sqrt{a-1}}$$

$$f'(a)=\frac{1}{\sqrt{a-1}},\ \forall a\in\ ]1\ ,\ +\infty[$$

13.2. Ponto de tangência:

$(5\ ,\ 4)$, pois $f(5)=2\sqrt{5-1}=2\times 2=4$

Declive:

$m=f'(5)=\frac{1}{\sqrt{5-1}}=\frac{1}{2}$, pois

$f(a)=\frac{1}{\sqrt{a-1}}$ para $a>1$.

Equação da reta tangente:

$$y-4=\frac{1}{2}(x-5)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}+4\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

Pág. 79

14. $f(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1 & \text{se } x\geq 1\\ -(x-1) & \text{se } x<1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[-(x-1)\right]=-(1-1)=0=f(1)$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$ existe $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ e, portanto, f é contínua no ponto $x=1$.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|-0}{x-1}$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=-1$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)}=1$$

Como $f'(-1)\neq f'(1^+)$, então não existe $f'(1)$ pelo que f não é diferenciável no ponto $x=1$.

15. $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $D_g=\mathbb{R}$

15.1. $g(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

g é contínua em $\mathbb{R}$ porque toda a função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$ e uma potência de expoente racional de uma função contínua é uma função contínua.

15.2. $$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^-}}=-\infty\ \text{ e }\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

Logo, não existe $g'(0)$ pelo que g não é diferenciável no ponto $x=0$.

Pág. 81

16.1. $f(x)=5x-7$; $f'(x)=(5x-7)'=5$

16.2. $g(x)=1-7x$; $g'(x)=(1-7x)'=-7$

16.3. $h(x)=-\frac{x}{2}+1$; $h'(x)=\left(-\frac{x}{2}+1\right)'=-\frac{1}{2}$

Pág. 82

17.1. $f(x)=x^2+x$

$f'(x)=\left(x^2+x\right)'=\left(x^2\right)'+x'=2x+1$

$D_{f'}=\mathbb{R}$

$f'(1)=2\times 1+1=3$

17.2. $g(x)=-2(1-2x)+\sqrt{x}$

$$g'(x)=\left[-2(1-2x)+\sqrt{x}\right]'=$$

$$=-2(1-2x)'+\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=-2\times(-2)+\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=4+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$D_{g'}=\mathbb{R}^+$

$g'(1)=4+\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{9}{2}$

17.3. $h(x)=x^3-x^2+x+1$

$$h'(x)=\left(x^3-x^2+x+1\right)'=$$

$$=\left(x^3\right)'-\left(x^2\right)'+(x+1)'=$$

$$=3x^2-2x+1$$

$D_{h'}=\mathbb{R}$

$h'(1)=3\times 1^2-2\times 1+1=2$

17.4. $j(x)=3\left(x-\frac{1}{3x}\right)$

$$j'(x)=\left[3\left(x-\frac{1}{3x}\right)\right]'=3\left(x-\frac{1}{3x}\right)'=3\left[x'-\left(\frac{1}{3x}\right)'\right]=$$

$$=3\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)'\right]=3\left[1-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=$$

$$=3-\frac{3}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3+\frac{1}{x^2}$$

ou

$$j'(x)=\left[3\left(x-\frac{1}{3x}\right)\right]'=\left(3x-\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=(3x)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=3-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3+\frac{1}{x^2}$$

$D_{j'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$j'(1)=3+\frac{1}{1^2}=4$

17.5. $p(x)=\frac{4}{x}+2\sqrt{x}$

$$p'(x)=\left(\frac{4}{x}+2\sqrt{x}\right)'=\left(\frac{4}{x}\right)'+\left(2\sqrt{x}\right)'=$$

$$=4\left(\frac{1}{x}\right)'+2\left(\sqrt{x}\right)'=4\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$D_{p'}=\mathbb{R}$

$p'(1)=-\frac{4}{1^2}+\frac{1}{\sqrt{1}}=-4+1=-3$

17.6. $q(x)=4x^3-\frac{3x^2}{2}$

$$q'(x)=\left(4x^3-\frac{3x^2}{2}\right)'=\left(4x^3\right)'-\left(\frac{3}{2}x^2\right)'=$$

$$=4\left(x^3\right)'-\frac{3}{2}\left(x^2\right)'=4\times3x^2-\frac{3}{2}\times2x=$$

$$=12x^2-3x$$

$D_{q'}=\mathbb{R}$

$q'(1)=12\times1^2-3\times1=12-3=9$

Pág. 83

18.1. $f'(x)=\left[x(2x+1)\right]'=x'(2x+1)+x(2x+1)'=$

$$=1(2x+1)+x\times2=2x+1+2x=4x+1$$

18.2. $g'(x)=\left(3x\sqrt{x}\right)'=(3x)'\sqrt{x}+3x\left(\sqrt{x}\right)'=$

$$=3\sqrt{x}+3x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=3\sqrt{x}+\frac{3x}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{3\sqrt{x}\times2\sqrt{x}+3x}{2\sqrt{x}}=\frac{6x+3x}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{9x}{2\sqrt{x}}=\frac{9}{2}\times\frac{x\sqrt{x}}{x}=\frac{9}{2}x$$

18.3. $h(x)=\left[\left(x^2+1\right)(+x-3)\right]'=$

$$=\left(x^2+1\right)'(x-3)+\left(x^2+1\right)(x-3)'=$$

$$=\left(\left(x^2\right)'+1'\right)(x-3)+\left(x^2+1\right)\times1=$$

$$=2x(x-3)+x^2+1=2x^2-6x+x^2+1=$$

$$=3x^2-6x+1$$

18.4. $j(x)=\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)(1-3x)\right]'=$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)'(1-3x)+\left(1+\frac{1}{x}\right)(1-3x)'=$$

$$=\left[1'+\left(\frac{1}{x}\right)'\right](1-3x)+\left(1+\frac{1}{x}\right)\times(-3)=$$

$$=\left(0-\frac{1}{x^2}\right)(1-3x)-3-\frac{3}{x}=$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3-\frac{3}{x}=-3-\frac{1}{x^2}$$

19. $g(x)=\left(x^3+1\right)\sqrt{x}$

19.1. $g'(x)=\left(x^3+1\right)'\sqrt{x}+\left(x^3+1\right)\left(\sqrt{x}\right)'=$

$$=\left(\left(x^3\right)'+1'\right)\sqrt{x}+\left(x^3+1\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\left(3x^2+0\right)\sqrt{x}+\frac{x^3+1}{2\sqrt{x}}=3x^2\sqrt{x}+\frac{x^3+1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{6x^2\sqrt{x}\sqrt{x}+x^3+1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x^2\times x+x^3+1}{2\sqrt{x}}=\frac{7x^3+1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\left(7x^3+1\right)\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{\left(7x^3+1\right)\sqrt{x}}{2x}$$

19.2. Ponto de tangência: $P(1\,,\,2)$ dado que $g(1)=\left(1^3+1\right)\sqrt{1}=2$

Declive: $m=g'(1)=\frac{\left(7\times1^3+1\right)\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{8}{2}=4$

Equação: $y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-4+2\Leftrightarrow y=4x-2$

Pág. 84

20.1. $f'(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$$=\frac{1\times(x+1)-x\times1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

20.2. $g'(x)=\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)'=\frac{(x+1)'\left(x^2+1\right)-(x+1)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$

$$=\frac{1\times\left(x^2+1\right)-(x+1)\left[\left(x^2\right)'+1'\right]}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2+1-(x+1)(2x+0)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-(x+1)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2+1-2x^2-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

20.3. $h'(x)=\left(x+\frac{2}{x^2}\right)'=x'+\left(\frac{2}{x^2}\right)'=$

$=1+\frac{2'\times x^2-2\times\left(x^2\right)'}{x^4}=1+\frac{0\times x^2-2\times 2x}{x^4}=1-\frac{4}{x^3}$

20.4. $j'(x)=\left(\frac{x}{x^2-1}\right)'=\frac{x'\left(x^2-1\right)-x\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=$

$=\frac{1\left(x^2-1\right)-x\left[\left(x^2\right)'-1'\right]}{\left(x^2-1\right)^2}=$

$=\frac{x^2-1-x(2x-0)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=$

$=\frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$

20.5. $p'(x)=\left(\frac{-2}{1+x^2}\right)'=\frac{(-2)'\left(1+x^2\right)-(-2)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=$

$=\frac{0\times\left(1+x^2\right)+2\left[1'+\left(x^2\right)'\right]}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{0+2(0+2x)}{\left(1+x^2\right)^2}=$

$=\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$

20.6. $q'(x)=\left[\left(2+x^2\right)\frac{2-x^2}{2-x}\right]'=$

$=\left(2+x^2\right)'\frac{2-x^2}{2-x}=\left(2+x^2\right)\left(\frac{2-x^2}{2-x}\right)'=$

$=(0+2x)\frac{2-x^2}{2-x}+\left(2+x^2\right)\times\frac{\left(2-x^2\right)'(2-x)-\left(2-x^2\right)(2-x)'}{(2-x)^2}=$

$=\frac{2x\left(2-x^2\right)}{2-x}+\left(2+x^2\right)\times\frac{(0-2x)(2-x)-\left(2-x^2\right)\times(-1)}{(2-x)^2}=$

$=\frac{2x\left(2-x^2\right)}{2-x}+\left(2+x^2\right)\times\frac{-4x+2x^2+2-x^2}{(2-x)^2}=$

$=\frac{4x-2x^3}{\underset{(2-x)}{2-x}}+\frac{\left(2+x^2\right)\left(x^2-4x+2\right)}{(2-x)^2}=$

$=\frac{\left(4x-2x^3\right)(2-x)+2x^2-8x+4+x^4-4x^3+2x^2}{(2-x)^2}=$

$=\frac{8x-4x^2-4x^3+2x^4+x^4-4x^3+4x^2-8x+4}{(x-2)^2}=$

$=\frac{3x^4-8x^3+4}{(x-2)^2}$

Pág. 85

21. $f'(x)=\left(x^2\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'\sqrt{x}+x^2\left(\sqrt{x}\right)'=$

$=2x\sqrt{x}+x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+x^2}{2\sqrt{x}}=$

$=\frac{4x\times x+x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{4x^2+x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{5f(x)}{2x}$

Pág. 86

22. $f(x)=\frac{1}{x},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(a)=2$ e $g'(a)=-8$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

22.1. $(f\circ g)'(a)=g'(a)\times f'(g(a))=-8\times f'(2)=$

$=-8\times\left(-\frac{1}{2^2}\right)=2$

22.2. $(fg)'(a)=0\Leftrightarrow f'(a)\times g(a)+f(a)\times g'(a)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{a^2}\times 2+\frac{1}{a}\times(-8)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{a^2}-\frac{8}{a}=0\Leftrightarrow\frac{-2-8a}{a^2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2-8a=0\wedge a^2\neq 0\Leftrightarrow a=-\frac{2}{8}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$

23. $f(x)=3x$ e $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{3}{1+x^2}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x)=\frac{1}{1+(3x)^2}=\frac{1}{1+9x^2}$

$f'(x)=(3x)'=3$

$g'(x)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{1'\left(1+x^2\right)-1\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=$

$=\frac{0-(0+2x)}{\left(1+x^2\right)^2}=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

23.1. $(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))=$

$=3\times g'(3x)=3\times\left(-\frac{2\times(3x)}{\left[1+(3x)^2\right]^2}\right)=-\frac{18x}{\left(1+9x^2\right)^2}$

ou

$(g\circ f)'(x)=\left(\frac{1}{1+9x^2}\right)'=\frac{1'\left(1+9x^2\right)^2-1\left(1+9x^2\right)'}{\left(1+9x^2\right)^2}=$

$=\frac{0-(0+9\times 2x)}{\left(1+9x^2\right)^2}=-\frac{18x}{\left(1+9x^2\right)^2}$

23.2. $(f\circ g)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))=$

$=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\times f'\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=$

$=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\times 3=-\frac{6x}{\left(1+x^2\right)^2}$

ou

$(f\circ g)'(x)=\left(\frac{3}{1+x^2}\right)'=\frac{3'\left(1+x^2\right)-3\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=$

$=\frac{0-3(0+2x)}{\left(1+x^2\right)^2}=-\frac{6x}{\left(1+x^2\right)^2}$

23.3. $(f \circ f)'(x) = f'(x) \times f'(f(x)) = 3 \times 3 = 9$

ou

$(f \circ f)'(x) = [f(f(x))]' = [f(3x)]' = (3 \times 3x)' = (9x)' = 9$

Pág. 87

24.1. $f'(x) = \left(2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x + 1\right)' =$

$= \left(2x^4\right)' - \left(4x^3\right)' + \left(5x^2\right)' + (-x+1)' =$

$= 2\left(x^4\right)' - 4\left(x^3\right)' + 5\left(x^2\right)' + (-1) =$

$= 2 \times 4x^3 - 4 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 1 =$

$= 8x^3 - 12x^2 + 10x - 1$

24.2. $g'(x) = \left(-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 3\right)' =$

$= \left(-\dfrac{x^3}{3}\right)' + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)' + (x+3)' =$

$= -\dfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + \dfrac{1}{2}\left(x^2\right)' + 1 =$

$= -\dfrac{1}{3} \times 3x^2 + \dfrac{1}{2} \times 2x + 1 = -x^2 + x + 1$

24.3. $h'(x) = \left(1 - 2x^5 - x^4\right)' = 1' - \left(2x^5\right)' - \left(x^4\right)' =$

$= 0 - 2\left(x^5\right)' - 4x^3 = -2 \times 5x^4 - 4x^3 =$

$= -10x^4 - 4x^3$

24.4. $j'(x) = \left(x^{-5} - 3x^{-3}\right)' = \left(x^{-5}\right)' - \left(3x^{-3}\right)' =$

$= -5x^{-5-1} - 3\left(x^{-3}\right)' = -5x^{-6} - 3 \times (-3)x^{-3-1} =$

$= -5x^{-6} + 9x^{-4}$

24.5. $p'(x) = \left(x^2 + x^{-2}\right)' = \left(x^2\right)' + \left(x^{-2}\right)' = 2x - 2x^{-3}$

Pág. 88

25.1. $f'(x) = \left(x + \sqrt[4]{x}\right)' = x' + \left(\sqrt[4]{x}\right)' = 1 + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

25.2. $g'(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \dfrac{1' \times \sqrt[3]{x} - 1 \times \left(\sqrt[3]{x}\right)'}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \dfrac{0 - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}} =$

$= -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 \times x}} = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

25.3. $h'(x) = \left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[5]{x}\right)' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' - 2\left(\sqrt[5]{x}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^4}}$

Pág. 90

26.1. $f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} + \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} =$

$= -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

26.2. $g'(x) = \left[(2x+1)^3\right]' = 3(2x+1)^2(2x+1)' =$

$= 3(2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2$

26.3. $h'(x) = \left[(3-2x)^3(1+2x)\right]' =$

$= \left[(3-2x)^3\right]'(1+2x) + (3-2x)^3(1+2x)' =$

$= 3(3-2x)^2(3-2x)'(1+2x) + (3-2x)^3 \times 2 =$

$= 3(3-2x)^2 \times (-2)(1+2x) + 2(3-2x)^3 =$

$= (3-2x)^2\left[-6(1+2x) + 2(3-2x)\right] =$

$= (2x-3)^2(-6 - 12x + 6 + 4x) =$

$= -16x(2x-3)^2$

26.4. $j'(x) = \left(\sqrt{2x+1}\right)' = \dfrac{(2x+1)'}{2\sqrt{(2x+1)^1}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

26.5. $p'(x) = \left(\sqrt[3]{2x+1}\right)' = \dfrac{(2x+1)'}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

26.6. $q'(x) = \left[\left(x^3 + x\right)^2\right]' = 2\left(x^3 + x\right)^1\left(x^3 + x\right)' =$

$= 2\left(x^3 + x\right)\left(3x^2 + 1\right)$

26.7. $r'(x) = \left[\dfrac{x}{(x-1)^2}\right]' = \dfrac{x'(x-1)^2 - x\left[(x-1)^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2} =$

$= \dfrac{(x-1)^2 - x \times 2(x-1) \times (x-1)'}{(x-1)^4} =$

$= \dfrac{(x-1)^2 - 2x(x-1) \times 1}{(x-1)^4} = \dfrac{(x-1)\left[(x-1) - 2x\right]}{(x-1)^4} =$

$= \dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$

26.8. $s'(x) = \left[\sqrt{x^2+1}\,(x+1)\right]' =$

$= \left(\sqrt{x^2+1}\right)'(x+1) + \sqrt{x^2+1}\,(x+1)' =$

$= \dfrac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}(x+1) + \sqrt{x^2+1} \times 1 =$

$= \dfrac{\cancel{2}x(x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1} =$

$= \dfrac{x^2 + x + \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}} =$

$= \dfrac{x^2 + x + x^2 + 1}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2+1}}$

26.9. $u'(x) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)' = \dfrac{x'\sqrt{x^2+2} - x\left(\sqrt{x^2+2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2} =$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+2} - x\dfrac{\left(x^2+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \dfrac{\sqrt{x^2+2} - x \times \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} =$

$$= \frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{x^2+2-x^2}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}} =$$

$$= \frac{2}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$$

Pág. 91

27. $x(t) = 0{,}1t^2 - 3t + 20$

27.1. $x(0) = 0{,}1\times 0^2 - 3\times 0 + 20 = 20$

$x(0) = 20$ m ; 20 m da origem no sentido positivo.

27.2. $x(5) = 0{,}1\times 5^2 - 3\times 5 + 20 = 7{,}5$

$$\frac{x(5)-x(0)}{5-0} = \frac{7{,}5-20}{5} = -\frac{12{,}5}{5} = -2{,}5$$

A velocidade média do ponto nos cinco primeiros segundos é igual a –2,5 m/s.

27.3. $v(t) = x'(t) = 0{,}2t - 3$

$v(5) = 0{,}2\times 5 - 3 = -2$

$v(5) = -2$ m/s

27.4. $x(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}1t^2 - 3t + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2\times 0{,}1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{3-1}{0{,}2} \vee t = \dfrac{3+1}{0{,}2} \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 20$

$v(10) = 0{,}2\times 10\times 3 = -1$

$v(20) = 0{,}2\times 20 - 3 = 1$

O ponto passa na origem nos instantes t = 10 s e t = 20 s com as velocidades de –1 m/s e 1 m/s, respetivamente.

Pág. 92

28. $f(x) = \sqrt{x+2}$, $D_f = [-2\ ,\ +\infty[$

$g(x) = ax^2 + b$, $D_g = \mathbb{R}$

28.1. $f'(x) = \left(\sqrt{x+2}\right)' = \dfrac{(x+2)}{2\sqrt{x+2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

Declive:

$$m = f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}+2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Ponto de tangência

$P\left(\dfrac{1}{4}\ ,\ \dfrac{3}{2}\right)$ dado que $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{4}+2} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

Equação da reta tangente:

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{12}$$

28.2. A bissetriz dos quadrantes pares ($y = -x$) tem declive –1. Uma reta perpendicular a esta tem declive igual a 1. Portanto, vamos determinar x tal que $f'(x) = 1$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 1 = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}} = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x+2} = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = 1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x+2) = 1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 8 = 1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$$

Verificação: $f'\left(-\dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{-\frac{7}{4}+2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{2\times\frac{1}{2}} = 1$

Declive: $m = 1$

Ponto de tangência:

$P\left(-\dfrac{7}{4}\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ dado que $f\left(-\dfrac{7}{4}\right) = \sqrt{-\dfrac{7}{4}+2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

Equação da reta tangente:

$$y - \frac{1}{2} = 1\left(x + \frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{9}{4}$$

28.3. r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

Ponto de tangência:

$P(2\ ,\ 2)$ dado que $f(2) = \sqrt{2+2} = 2$

Declive: $m = f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+2}} = \dfrac{1}{4}$

$$r:\ y - 2 = \frac{1}{4}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{2}{4} + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

Sabemos que r é tangente ao gráfico de g no mesmo ponto.

Portanto, temos $g(2) = 2$ e $g'(2) = \dfrac{1}{4}$.

$g(2) = a\times 2^2 + b = 4a + b$

$g'(x) = \left(ax^2 + b\right)' = 2ax$

$g'(2) = 2a\times 2 = 4a$

$$\begin{cases} g(2) = 2 \\ g'(2) = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 2 \\ 4a = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\times\frac{1}{16} + b = 2 \\ a = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{4} \\ a = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$a = \dfrac{1}{16}$, $b = \dfrac{7}{4}$ e $r:\ y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$

Pág. 93

29. Se f é uma função ímpar, então:

$\forall x \in D_f\ ,\ -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$

Como f é diferenciável vem $D_{f'} = D_f$ pelo que

$\forall x \in D_{f'}\ ,\ -x \in D_{f'}$

Por outro lado:

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[f(-x)\right]' = \left[-f(x)\right]' \Rightarrow$ Regra da derivada da função composta

$\Rightarrow (-x)' f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$

Portanto:

$\forall x \in D_{f'}\ ,\ -x \in D_{f'} \wedge f'(-x) = f'(x)$, ou seja, f' é uma função par.

Pág. 95

Atividades complementares

30. $h(t) = \sqrt[3]{\dfrac{60t}{\pi}}$

30.1. a) $\text{t.m.v.}_{(h,\ 0,\ 5)} = \dfrac{h(5)-h(0)}{5-0} = \dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{600\times 5}{\pi}} - 0}{5} \approx 0{,}91$

0,91 dm = 9,1 cm

$\text{t.m.v.}_{(h,\ 0,\ 5)} \approx 9{,}1$ cm/min

b) $\text{t.m.v.}_{(h,\ 20,\ 25)} = \dfrac{h(25)-h(20)}{25-20} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{60\times 25}{\pi}} - \sqrt[3]{\dfrac{60\times 20}{\pi}}}{5} \approx 0{,}11$

0,11 dm = 1,1 cm

$\text{t.m.v.}_{(h,\ 20,\ 25)} \approx 1{,}1$ cm/min

c) $\text{t.m.v.}_{(h,\ 45,\ 50)} = \dfrac{h(50)-h(45)}{50-45} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{60\times 50}{\pi}} - \sqrt[3]{\dfrac{60\times 45}{\pi}}}{5} \approx 0{,}07$

0,07 dm = 0,7 cm

$\text{t.m.v.}_{(h,\ 45,\ 50)} \approx 0{,}7$ cm/min

30.2. Nos primeiros 5 min após a abertura da torneira, a altura da água no depósito aumentou, em média, 9,1 cm/min. Entre os instantes correspondentes a 20 min e a 25 min após a abertura da torneira, a altura da água aumentou, em média, 1,1 cm/min e entre os instantes 45 min e 50 min essa altura aumentou, em média 0,7 cm/min. Atendendo à forma do depósito a taxa de variação da altura diminui com o tempo.

31. $A(-2\ ,\ 0)$, $B(0\ ,\ b)$, $C(2\ ,\ 2)$, $D(4\ ,\ b)$ e $E(a\ ,\ f(a))$

31.1. $\text{t.m.v.}_{(f,\ 4,\ a)}$ = declive de DE =

= declive de AC = $\dfrac{2-0}{2-(-2)} = \dfrac{1}{2}$

31.2. $\text{t.m.v.}_{(f,\ 0,\ 4)} = \dfrac{f(4)-f(0)}{4} = \dfrac{b-b}{4} = 0$

31.3. Reta r:

$m_r = m_{AC} = \dfrac{1}{2}$

Como $C(2\ ,\ 2) \in r$: $r: y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 1$

O ponto $D(4\ ,\ b)$ pertence a r . Então:

$b = \dfrac{1}{2}\times 4 + 1 \Leftrightarrow b = 3$

Portanto $B(0\ ,\ 3)$, $D(4\ ,\ 3)$

$\text{t.m.v.}_{(f,\ 0,\ 2)} = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{2-3}{2} = -\dfrac{1}{2}$

32.1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} =$ | $f(1) = 0$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3-0}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}} =$

	1	2	–3
1		1	3
	1	3	0

$= 1 - 3 = -2$

$f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+3-(-1)}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$

32.2. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

$f'(3) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} =$ | $f(3) = 3$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\dfrac{3}{x-2} - 3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\dfrac{3-3x+6}{x-2}}{x-3} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-3x}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = -3$

$f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} =$ | $f(-1) = -1$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\dfrac{3}{x-2} + 1}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\dfrac{3+x-2}{x-2}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}}{(x-2)\cancel{(x+1)}} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$

32.3. $h(x) = \sqrt{2x+1} + 1$

$h'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}+1-2}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1-1}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = \dfrac{2}{2} = 1$

$h'(4) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{h(x)-h(4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}+1-4}{x-4} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x+1-9}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} =$

$= \dfrac{2}{3+3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

32.4. $p(x)=x+\frac{1}{x}$

$$p'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{p(x)-p(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x+\frac{1}{x}-(-2)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\frac{x^2+2x+1}{x}}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x}=0$$

$$p'(2)=\lim_{x\to2}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2x^2-5x+2}{2x}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{x(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(2x-1)}{2x\cancel{(x-2)}}=\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -5 & 2 \\ 2 & & 4 & -2 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

33. $f(x)=x^3-9x$

33.1. $f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-9x-8}{x+1}=$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x-8)}{\cancel{(x+1)}}=$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -9 & -8 \\ -1 & & -1 & 1 & 8 \\ \hline & 1 & -1 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$=1+1-8=-6$

33.2. $m_r=f'(-1)=-6$

Ponto de tangência: $A(-1\ ,\ 8)$ porque $f(-1)=8$

$r:\ y-8=-6(x+1)\Leftrightarrow y=-6x-6+8\Leftrightarrow y=-6x+2$

33.3. $f(x)=-6x+2\Leftrightarrow x^3-9x=-6x+2\Leftrightarrow x^3-3x-2=0$

Sabemos que -1 é uma das soluções:

$x^3-3x-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+1)(x^2-x-2)=0\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Leftrightarrow x+1=0\vee x^2-x-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1\vee x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1\vee x=-1\vee x=2\Leftrightarrow x=-1\vee x=2$

$f(2)=2^3-9\times2=-10$

As coordenadas do ponto são: $(2\ ,\ -10)$

34. $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & \text{se } x<1\\ 6-4\sqrt{x} & \text{se } x\geq1\end{cases}$

34.1. $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to1^-}\frac{3-x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x^2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=-2$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to1^+}\frac{6-4\sqrt{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{4-4\sqrt{x}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{4(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1^+}\frac{4\cancel{(1-x)}}{-\cancel{(1-x)}(1+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{4}{-2}=-2$$

Logo, $f'(1)=-2$.

34.2. $m=f'(1)=-2$

Ponto de tangência: $(1\ ,\ 2)$ pois, $f(1)=2$

$y-2=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+2+2\Leftrightarrow y=-2x+4$

35. $p(t)=8t-t^2$

35.1. $p(0)=0$. O ponto está na origem.

35.2. a) $\text{t.m.v.}_{[p,\ 1,\ 3]}=\frac{p(3)-p(1)}{3-1}=\frac{15-7}{2}=4$

$\text{t.m.v.}_{[p,\ 1,\ 3]}=4$ m/s

b) $\text{t.m.v.}_{[p,\ 5,\ 7]}=\frac{p(7)-p(5)}{7-5}=\frac{7-15}{2}=-4$

$\text{t.m.v.}_{[p,\ 5,\ 7]}=-4$ m/s

35.3. $p'(2)=\lim_{t\to2}\frac{p(t)-p(2)}{t-2}=\lim_{t\to2}\frac{8t-t^2-12}{t-2}=$

$$=\lim_{t\to2}\frac{(t-2)(-t+6)}{(t-2)}=4$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 8 & -12 \\ 2 & & -2 & 12 \\ \hline & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$p(2)=12$

No instante $t=2$ s , a velocidade do ponto é 4 m/s e a distância à origem é igual a 12 m.

$$p'(6)=\lim_{t\to6}\frac{p(t)-p(6)}{t-6}=\lim_{t\to6}\frac{8t-t^2-12}{t-6}=$$

$$=\lim_{t\to6}\frac{\cancel{(t-6)}(-t+2)}{\cancel{(t-6)}}=-4$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 8 & -12 \\ 6 & & -6 & 12 \\ \hline & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$p(6)=12$

No instante $t=6$ s, a velocidade do ponto é -4 m/s e a distância à origem é igual a 12 m.

Pág. 96

36.1. $g(x)=1-\frac{1}{2x}$

$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{1}{2x}-\left(1-\frac{1}{2a}\right)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-1}{2x}+\frac{1}{2a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-a+x}{2ax}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{2ax(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{2ax}=\frac{1}{2a^2},\ \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

36.2. a) $m_r=g'(-1)=\frac{1}{2\times(-1)^2}=\frac{1}{2}$ (faz-se $a=-1$)

Ponto de tangência: $A\left(-1\ ,\ \frac{3}{2}\right)$; $g(-1)=1-\frac{1}{-2}=\frac{3}{2}$

$r:\ y-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+2$

b) $s:\ y=\frac{1}{2}x+2$

Ponto de tangência. É um ponto de abcissa a tal que:

$g'(a)=\frac{1}{2}$

$g'(a)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=-1\vee a=1$

Como a reta s é estritamente paralelas à reta r, temos $a=1$.

Logo, o ponto de tangência é $\left(1\ ,\ \frac{1}{2}\right)$, pois $g(1)=\frac{1}{2}$.

$s:\ y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$

37. $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{se } x<1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2-1\right)=1^2-1=0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=\sqrt{0}=0=f(1)$

Como, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$, existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

Logo, f é contínua no ponto x = 1.

$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$

$f'\left(1^-\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=2$

$f'\left(1^+\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}}=$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{(x-1)\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Como não existe $f'(1)$, f não é diferenciável no ponto x = 1.

38.1. $f'(x)=\left(5x^2-5x-3x^{-2}\right)'=10x^1-5-(-2)\times3x^{-3}=$

$=10x+\frac{6}{x^3}-5$

38.2. $g'(x)=\left(2x^{-2}-\frac{1}{x}\right)'=-2\times2x^{-3}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^2}=\frac{x-4}{x^3}$

38.3. $h'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)'==\left(\frac{1}{x}\right)'-\left(\frac{2}{x^2}\right)'+\left(\frac{1}{x^3}\right)'=$

$=-\frac{1}{x^2}-\frac{2'\times x^2-2\times\left(x^2\right)'}{x^4}+\frac{1'\times x^3-1\times\left(x^3\right)'}{x^6}=$

$=-\frac{1}{x^2}+\frac{0+2\times2x}{x^4}-\frac{0+3x^2}{x^6}=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^4}$

38.4. $i'(x)=\left[\left(2-x^2\right)(1-x)\right]'=$

$=\left(2-x^2\right)'(1-x)+\left(2-x^2\right)(1-x)'=$

$=-2x(1-x)+\left(2-x^2\right)\times(-1)=$

$=-2x+2x^2-2+x^2=3x^2-2x-2$

38.5. $j'(x)=\left(\frac{2x+3}{3x-5}\right)'=\frac{(2x+3)'(3x-5)-(2x+3)(3x-5)'}{(3x-5)^2}=$

$=\frac{2(3x-5)-(2x+3)\times3}{(3x-5)^2}=$

38.6. $k'(x)=\left(\frac{x^2-4x}{x-1}\right)'=\frac{\left(x^2-4x\right)'(x-1)-\left(x^2-4x\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=$

$=\frac{(2x-4)(x-1)-x^2+4x}{(x-1)^2}=$

$=\frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$

38.7. $l'(x)=\left[(1-2x)^3\right]'=3(1-2x)^2(1-2x)'=$

$=3(1-2x)^2\times(-2)=-6(1-2x)^2$

38.8. $m'(x)=\left(\frac{x^2-2}{(x-1)^2}\right)'=$

$=\frac{\left(x^2-2\right)'(x-1)^2-\left(x^2-2\right)\left[(x-1)^2\right]'}{(x-1)^4}=$

$=\frac{2x(x-1)^2-\left(x^2-2\right)\times2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4}=$

$=\frac{(x-1)\left[2x(x-1)-2\left(x^2-2\right)\right]}{(x-1)^4}=$

$=\frac{2x^2-2x-2x^2+4}{(x-1)^3}=\frac{-2x+4}{(x-1)^3}$

38.9. $n'(x)=\left[(3x+1)(3x-1)^3\right]'$

$=(3x+1)'(3x-1)^3+(3x+1)\left[(3x-1)^3\right]'=$

$=3(3x-1)^3+(3x+1)\times3(3x-1)^2\times(3x-1)'=$

$=3(3x-1)^3+3(3x+1)(3x-1)^2\times3=$

$=(3x-1)^2\left[3(3x-1)+9(3x+1)\right]=$

$=(3x-1)^2(9x-3+27x+9)=$

$=(3x-1)^2(36x+6)=6(3x-1)^2(6x+1)$

38.10. $o'(x)=\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'=$

$=\frac{\left(x^2+2x+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}=$

$=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

38.11. $p'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)'=\frac{x'\sqrt{x+1}-x\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=$

$=\frac{\sqrt{x+1}-x\times\frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{\frac{2(x+1)-x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=$

$=\frac{2x+2-x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$

38.12. $q'(x)=\left(2x\sqrt{4-x^2}\right)'=$

$=(2x)'\sqrt{4-x^2}+2x\left(\sqrt{4-x^2}\right)'=$

$=2\sqrt{4-x^2}+2x\times\frac{\left(4-x^2\right)'}{2\sqrt{4-x^2}}=$

$=2\sqrt{4-x^2}+\frac{\cancel{2}x\times(-2x)}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}=\frac{2\left(4-x^2\right)-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=$

$=\frac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

38.13. $r'(x)=\left(x\sqrt[3]{1-2x}\right)'=$

$$=x'\sqrt[3]{1-2x}+x\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)'=$$

$$=\sqrt[3]{1-2x}+x\times\frac{(1-2x)'}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}=$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{1-2x}\times\sqrt[3]{(1-2x)^2}-2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}=$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3}-2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}=\frac{3(1-2x)-2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}=$$

$$=\frac{3-8x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}=\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3}-2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}=$$

$$=\frac{3(1-2x)-2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}=\frac{3-8x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

38.14. $s'(x)=\left[x(1-3x)^{-\frac{2}{3}}\right]'=$

$$=x'(1-3x)^{-\frac{2}{3}}+x\left[(1-3x)^{-\frac{2}{3}}\right]'=$$

$$=(1-3x)^{-\frac{2}{3}}+x\left[-\frac{2}{3}(1-3x)^{-\frac{2}{3}-1}\times(1-3x)'\right]=$$

$$=(1-3x)^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x(1-3x)^{-\frac{5}{3}}\times(-3)=$$

$$=(1-3x)^{-\frac{5}{3}}\left[(1-3x)^1+2x\right]=$$

$$=\frac{1-3x+2x}{(1-3x)^{\frac{5}{3}}}=\frac{1-x}{\sqrt[3]{(1-3x)^5}}$$

39.1. $f(x)=x-2x^2$ e $f'(x)=1-4x$

Ponto de tangência: $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ pois, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$$m=f'\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{4}{2}=-1$$

$$y-0=-\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y=-x+\frac{1}{2}$$

39.2. $h(x)=\sqrt{x-1}-x$ e $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-1$

Ponto de tangência: (2 , –1) pois $h(2)=-1$

$$m=h'(2)=\frac{1}{2\sqrt{1}}-1=-\frac{1}{2}$$

$$y+1=-\frac{1}{2}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1-1\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x$$

40. $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$

$g(2)=2$ e $g'(2)=4$

$$f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)'=\frac{(2x+1)'(x-3)-(2x+1)(x-3)'}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{2(x-3)-(2x+1)x'}{(x-3)^2}=\frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{-7}{(x-3)^2}$$

40.1. $(f\circ g)'(2)=g'(2)\times f'(g(2))=4\times f'(2)=$

$$=4\times\frac{-7}{(2-3)^2}=4\times(-7)=-28$$

40.2. $(f\circ f)'(2)=f'(2)\times f'(f(2))=$

$$=\frac{-7}{(2-3)^2}\times f'(-5)=\quad\Big|\ f(2)=\frac{4+1}{2-3}=-5$$

$$=-7\times\frac{-7}{(-5-3)^2}=\frac{49}{64}$$

40.3. $(fg)'(2)=f'(2)\times g(2)+f(2)\times g'(2)=$

$$=-7\times2+(-5)\times4=-14-20=-34$$

40.4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2)g(2)-f(2)\times g'(2)}{[g(2)]^2}=$

$$=\frac{-7\times2-(-5)\times4}{2^2}=\frac{-14+20}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

41. $f(x)=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2x-4}$

41.1. $f'(x)=\frac{3}{2}-\frac{0-(2x-4)'}{(2x-4)^2}=\frac{3}{2}+\frac{2}{(2x-4)^2}$

Ponto de tangência:

$\left(4\ ,\ \frac{23}{4}\right)$: $f(4)=\frac{3}{2}\times4-\frac{1}{2\times4-4}=\frac{23}{4}$

$$m=f'(4)=\frac{3}{2}+\frac{2}{16}=\frac{13}{8}$$

$$y-\frac{23}{4}=\frac{13}{8}(x-4)\Leftrightarrow y=\frac{13}{8}x-\frac{13}{2}+\frac{23}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{13}{8}x-\frac{3}{4}$$

41.2. $m=2$

$$f'(x)=2\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{2}{(2x-4)^2}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{(2x-4)^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{(2x-4)^2}=\frac{2}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2x-4)^2=4\Leftrightarrow 2x-4=-2\vee 2x-4=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=2\vee 2x=6\Leftrightarrow x=1\vee x=3$$

No ponto de abcissa 1: (1 , 2) pois $f(1)=2$

$m=2$

$$y-2=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-2+2\Leftrightarrow y=2x$$

No ponto de abcissa 3 : (3 , 4) pois $f(3)=4$

$m=2$

$$y-4=2(x-3)\Leftrightarrow y=2x-2$$

42. $f(x)=\frac{x^2}{2}-x+3$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\times2x-1=x-1$$

42.1. No ponto de tangência, o declive (m) é igual a $f'(x)$: $m=f'(x)$

As retas de declive m que passam em (0 , 1) têm equações do tipo $y=mx+1$

O ponto de tangência é comum à reta e ao gráfico de f: $mx+1=f(x)$

Temos de determinar x tal que:

$m = f'(x) \wedge mx + 1 = f(x)$

$m = x - 1 \wedge mx + 1 = \frac{x^2}{2} - x + 3$

Desta conjunção resulta:

$(x-1)x + 1 = \frac{x^2}{2} - x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{x^2}{2} + x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

Logo, existem duas retas tangentes ao gráfico de f que passam no ponto (0 , 1).

42.2. No ponto de abcissa –2: (–2 , 7)

$m = f'(-2) = -2 - 1 = -3$

$r: \ y - 7 = -3(x+2) \Leftrightarrow y = -3x + 1$

No ponto de abcissa 2: (2 , 3)

$m = f'(2) = 1$, logo $y - 3 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x + 1$

Pág. 97

43. $f(x) = k + \sqrt{x-1}$

43.1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

A reta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa x tal que: $f(x) = x$ e $f'(x) = 1$.

$k + \sqrt{x-1} = x \wedge \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 1$

• Resolvendo a 2.ª equação, temos:

$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow 4(x-1) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

Verificação: $f'\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{5}{4}}} = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}} = 1$

• Substituindo x por $\frac{5}{4}$ na 1.ª equação:

$k + \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow k = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow k = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$

43.2. $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

A reta $y = mx$ é tangente ao gráfico de f.

$m = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \wedge mx = \sqrt{x-1}$

Resulta que:

$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times x = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x - 2(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow x - 2x + 2 = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 2$

Para $x = 2$, $m = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}$.

Logo, $y = \frac{1}{2}x$ é a equação pedida.

44. $p(t) = t^2 - 22t + 112$

44.1. $p(8) = 8^2 - 22\times 8 + 112 = 0$

O ponto P encontra-se na origem da reta.

44.2. $p'(t) = 2t - 22$

$p'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 22 = 0 \Leftrightarrow t = 11$

44.3. $\text{t.v.m.}_{(p,\ 0,\ 10)} = \frac{p(10) - p(0)}{10 - 0} = \frac{-8 - 112}{10} = -12$

$p'(t) = -12 \Leftrightarrow 2t - 22 = -12 \Leftrightarrow 2t = 10 \Leftrightarrow t = 5$

45. $4h + 8x = 1{,}2$

45.1. 1,2 m = 120 cm

$4h + 8x = 120 \Leftrightarrow h + 2x = 30 \Leftrightarrow h = 30 - 2x$

$V = x^2 \times h$

$V(x) = x^2(30 - 2x) \Leftrightarrow V(x) = 30x^2 - 2x^3$

Como $x > 0 \wedge h > 0$:

$x > 0 \wedge 30 - 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 2x < 30 \Leftrightarrow 0 < x < 15$

45.2. $\text{t.m.v.}_{(V,\ 4,\ 6)} = \frac{V(6) - V(4)}{6 - 4} = \frac{648 - 352}{2} = 148$

$\text{t.m.v.}_{(V,\ 4,\ 6)} = 148$ cm³/cm

45.3. A embalagem é um cubo se $h = x$.

$h = x \Leftrightarrow 30 - 2x = x \Leftrightarrow 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10$

$V'(x) = 60x - 6x^2$

$V'(10) = 600 - 600 = 0$ cm³/cm

46. $f(x) = ax^2 + bx + c$

46.1. $y = x$

$f'(0) = 1$ e $f(0) = 0$

$f'(x) = 2ax + b$

$2a\times 0 + b = 1$ e $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0$

$b = 1 \wedge c = 0$

46.2. De **46.1.** temos $f(x) = ax^2 + x$.

$f(1) = 0 \Leftrightarrow a\times 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Logo, $f(x) = -x^2 + x$.

47. Altura: $h(t) = \sqrt[3]{3t+1} - a$

47.1. $h(0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0+1} - a = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow a = 1$

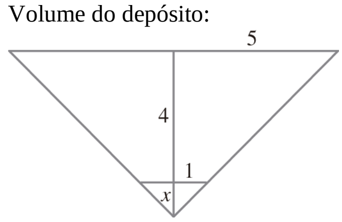
47.2. $h(t) = \sqrt[3]{3t+1} - 1$

$h(t) = 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3t+1} - 1 = 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3t+1} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3t + 1 = 5^3 \Leftrightarrow 3t = 125 - 1 \Leftrightarrow t = \frac{124}{3} \Leftrightarrow t = 41\frac{1}{3}$

$41\frac{1}{3}$ h = 41 h + $\frac{1}{3}$ h = 41 h 20 min

47.3. Volume do depósito:



Pela semelhança dos triângulos:

$\frac{4+x}{5} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow 4 + x = 5x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Altura da pirâmide: 4 + 1 = 5

$V_{\text{tronco}} = \frac{1}{3}\times 10^2 \times 5 - \frac{1}{3}\times 2^2 \times 1 = \frac{500}{3} - \frac{4}{3} = \frac{496}{3}$ em m³

Tempo (h)	**Volume de água (m³)**
$\frac{124}{3}$	$\frac{496}{3}$
1	x

$$x=\frac{1\times\frac{496}{3}}{\frac{124}{3}}=\frac{496\times 3}{124\times 3}=4$$

A torneira tem um caudal de 4 m^3/h .

47.4. $\text{t.m.v.}_{(h,\ 0,\ 5)}=\frac{h(5)-h(0)}{5-0}=\frac{\sqrt[3]{16}-1-0}{5}\approx 0,30$

$\text{t.m.v.}_{(h,\ 35,\ 40)}=\frac{h(40)-h(35)}{40-35}=\frac{\sqrt[3]{121}-1-\sqrt[3]{106}+1}{5}\approx 0,04$

$\text{t.m.v.}_{(h,\ 35,\ 40)}\approx 0,04$ m/h = 4 cm/h

Nas primeiras 5 h após a abertura da torneira a altura da água no depósito aumentou, em média, 30 cm/h. Entre os instantes correspondentes as 35 h e 40 h após a abertura da torneira a altura da água aumentou, em média, 4 cm/h. Atendendo à forma do depósito a taxa de variação da altura diminui com o tempo.

47.5. $h'(t)=\frac{(3t+1)'}{3\sqrt[3]{(3t+1)^2}}=\frac{3}{3\sqrt[3]{(3t+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3t+1)^2}}$

$h'(5)=\frac{1}{\sqrt[3]{16^2}}\approx 0,157$ m/h $\approx$ 16 cm/h

$h'(40)=\frac{1}{\sqrt[3]{40^2}}\approx 0,041$ m/h $\approx$ 4 cm/h

5 horas após a abertura da torneira a altura da água no depósito aumentava a uma taxa de 16 cm/h e 40 h após a abertura da torneira a altura da água aumentava a uma taxa de 4 cm/h.

Pág. 98

Avaliação 3

1. A reta de equação $y = -x$ é tangente ao gráfico de f em (0 , 0). Logo, $f(0) = 0$ e $f'(0)=-1$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h^2+2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h(h+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{h+2}=$$

$$=f'(0)\times\frac{1}{2}=-1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Resposta: **(C)**

2. $f(x)=\pi^2$; $f'(x)=0$ e $g(x)=2x\sqrt{x}$

$$g'(x)=2\sqrt{x}+2x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{2x+x}{\sqrt{x}}=\frac{3x}{\sqrt{x}}$$

$$(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=0+\frac{3\times 1}{\sqrt{1}}=3$$

Resposta: **(C)**

3. $r:\ y=mx+4$

$$A(2\ ,\ 3)\in r\ ,\ 3=m\times 2+4\Leftrightarrow 2m=-1\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$$

Assim, $r:\ y=-\frac{1}{2}x+4$.

$$f'(2)=m=-\frac{1}{2}\ \text{ e }\ f(2)=3$$

$g(x)=\sqrt{x+1}$, logo $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

$$(g\circ f)'(2)=f'(2)\times g'(f(2))=-\frac{1}{2}\times g'(3)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{4}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$$

Resposta: **(A)**

4. $h(x)=f(x^3)$

$h(x)=f(g(x))$ com $g(x)=x^3$ e $g'(x)=3x^2$

$h'(1)=g'(1)\times f'(g(1))=3\times 1^2\times f'(1^3)=3f'(1)$

Resposta: **(B)**

5. $g(x)=\frac{4x+2}{f(x)}$

Ponto de tangência: $(1\ ,\ 3)$; $g(1)=\frac{4\times 1+2}{f(1)}=\frac{6}{2}=3$

Declive:

$m=g'(1)$

$$g'(x)=\frac{(4x+2)'f(x)-(4x+2)f'(x)}{[f(x)]^2}=$$

$$=\frac{4f(x)-(4x+2)f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$g'(1)=\frac{4f(1)-6\times f'(1)}{[f(1)]^2}=\frac{4\times 2-6\times 2}{2^2}=\frac{8-12}{4}=-1$$

$m=g'(1)=-1$

Equação: $y-3=-(x-1)\Leftrightarrow y=-x+1+3\Leftrightarrow y=-x+4$

Resposta: **(B)**

6. $f(x)=2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

$$f'(x)=-\frac{2}{3}(x\sqrt{x})'=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}\times\frac{2x+x}{2\sqrt{x}}=-\frac{x}{\sqrt{x}}=-\frac{x\sqrt{x}}{x}=-\sqrt{x}$$

$$m_r=\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

$f'(a)=m_r$, logo $-\sqrt{a}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow a=3$.

Resposta: **(A)**

Pág. 99

7. $f(x)=\sqrt{2x-1}+1$

7.1. $\text{t.m.v.}_{(f,\ 5,\ 13)}=\frac{f(13)-f(5)}{13-5}=\frac{6-4}{8}=\frac{1}{4}$

7.2. $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}+1-2}{x-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1-1}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1$$

8.1. $f'(x)=\left(\frac{x^2-x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(x^2-x)'\sqrt{x}-(x^2-x)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=$

$$=\frac{(2x-1)\sqrt{x}-(x^2-x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{2(2x-1)x-(x^2-x)}{2\sqrt{x}}}{x}=$$

$$=\frac{4x^2-2x-x^2+x}{2x\sqrt{x}}=\frac{3x^2-x}{2x\sqrt{x}}=\frac{\cancel{x}(3x-1)}{2\cancel{x}\sqrt{x}}=\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

8.2. $g'(x)=\left[x(1-2x)^{-3}\right]'=x'(1-2x)^{-3}+x\left[(1-2x)^{-3}\right]'=$

$=(1-2x)^{-3}+x\times(-3)(1-2x)^{-4}(1-2x)'=$

$=(1-2x)^{-4}\left[(1-2x)+6x\right]=\dfrac{1-2x+6x}{(1-2x)^4}=\dfrac{4x+1}{(2x-1)^4}$

9. $f(x)=\dfrac{x^3}{6}$; $g(x)=\dfrac{x+a}{x}$, $D_f=D_g=\mathbb{R}^+$

9.1. $f'(x)=\dfrac{3x^2}{6}=\dfrac{x^2}{2}$ e $f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{6}=\dfrac{3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ponto de tangência: $\left(\sqrt{3}\ ,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$m=f'\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2}=\dfrac{3}{2}$

$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}\left(x-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}x-\sqrt{3}$

9.2. $g'(x)=\left(\dfrac{x+a}{x}\right)'=\left(1+\dfrac{a}{x}\right)'=-\dfrac{a}{x^2}$

$f'(x)\times g'(x)=-1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{2}\times\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\dfrac{a}{2}=-1\Leftrightarrow a=2$

9.3. $g(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x}=1-\dfrac{1}{2x}$

$g'(x)=\dfrac{1}{2x^2}$

$m_r=g'(k)=\dfrac{1}{2k^2}$

$m_s=f'(k)=\dfrac{k^2}{2}$

$\dfrac{1}{2k^2}=\dfrac{k^2}{2}\Leftrightarrow 2k^4=1\Leftrightarrow k^4=1\Leftrightarrow k=-1\vee k=1$

Como $D_f=D_g=\mathbb{R}^+$, temos $k=1$.

10. $p(t)=t^2-15t+50$

$p'(t)=2t-15$

10.1. $p'(0)=-15$ m/s

10.2. $p(t)=0\Leftrightarrow t^2-15t+50=0\Leftrightarrow t=\dfrac{15\pm\sqrt{15^2-200}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=5\vee t=10$

$p'(5)=(2\times5-15)$ m/s = –5 m/s

$p'(10)=(2\times10-15)$ m/s = 5 m/s

11. $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$r:\ y=-\dfrac{1}{2}x-3$

$g'(2)=-\dfrac{1}{2}$

$g(2)=-\dfrac{1}{2}\times2-3=-4$

$f(x)=g(x)+\dfrac{1}{x}$

$f(2)=g(2)+\dfrac{1}{2}=-4+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{7}{2}$

Ponto de tangência: $\left(2\ ,\ -\dfrac{7}{2}\right)$

$f'(x)=g'(x)-\dfrac{1}{x^2}$

$m=f'(2)=g'(2)-\dfrac{1}{2^2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{4}$

$y+\dfrac{7}{2}=-\dfrac{3}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{4}x-2$

12. $f(x)=x^2+5x+1$; $f'(x)=2x+5$

$g(0)=1$ e $g'(0)=\dfrac{1}{7}$

$h(x)=f(x+g(x))$

12.1. $(f\circ g)'(0)=g'(0)\times f'(g(0))=$

$=\dfrac{1}{7}\times f'(1)=\dfrac{1}{7}\times(2+5)=\dfrac{7}{7}=1$

12.2. $h'(x)=\left[f(x+g(x))\right]'=(x+g(x))'\,f'(x+g(x))=$

$=(1+g'(x))\,f'(x+g(x))$

$h'(0)=(1+g'(0))\,f'(0+g(0))=$

$=\left(1+\dfrac{1}{7}\right)\times f'(1)=\dfrac{8}{7}\times(2+5)=8$

13. $h(t)=\sqrt[3]{kt},\ 0\le t\le 6$

$h(t)$ em metros, t em horas.

13.1. $h'(6)=\dfrac{1}{3}$

$h'(t)=\left(\sqrt[3]{kt}\right)'=\dfrac{(kt)'}{3\sqrt[3]{(kt)^2}}=\dfrac{k}{3\sqrt[3]{(kt)^2}}$

$h'(6)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{k}{3\sqrt[3]{(6k)^2}}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{k}{\sqrt[3]{36k^2}}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt[3]{36k^2}=k\Leftrightarrow 36k^2=k^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^3-36k^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2(k-36)=0\overset{k\neq0}{\Leftrightarrow}k=36$

13.2. Altura do depósito = $h(6)=\sqrt[3]{36\times6}=\sqrt[3]{6^3}=6$ m

Seja a a medida do lado da base da pirâmide em metros

$V=72$ m^3

$\dfrac{1}{3}\times a^2\times6=72\Leftrightarrow a^2=36\overset{a>0}{\Leftrightarrow}a=6$

O lado da base da pirâmide mede 6 metros.

Atividade inicial 4

Pág. 100

1. $P = 100 \Leftrightarrow 2x + 2y = 100$

$\Leftrightarrow x + y = 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 50 - x$

2. $A = x \times y$

$A(x) = x(50 - x)$

3. $x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 50 - x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 50 \Leftrightarrow 0 < x < 50$

$D_A =]0\ ,\ 50[$

4. $A(x) = 50x - x^2 = -x^2 + 50x =$

$= -(x^2 - 50x) =$

$= -(x^2 - 50x + 25^2 - 25^2) =$

$= -(x^2 - 50x + 25^2) + 625 =$

$= -(x - 25)^2 + 625$ com $0 < x < 50$

Portanto, o gráfico de A é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo e vértice $V(25\ ,\ 625)$

5. A área é máxima para $x = 25$ e $y = 50 - 25 = 25$

Logo, o retângulo de área máxima é um quadrado de lado 25 cm.

6. $A'(x) = 50 - 2x$

$A'(25) = 50 - 50 = 0$

Pág. 102

1.1. $f(x) = x^5 + x,\ D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 5x^4 + 1$

$f'(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ então f não tem extremos.

1.2. $g(x) = x - \dfrac{1}{x},\ D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\ ,\ 0[\cup]0\ ,\ +\infty[$ é a reunião de dois intervalo abertos e $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Logo, g não tem extremos.

Pág. 104

2.1. $f(x) = 3 + 2x - x^2,\ D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2 - 2x,\ D_f = \mathbb{R}$

f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ pelo que é contínua em [0 , 4] e diferenciável em $]0\ ,\ 4[$. Então, pelo Teorema de Lagrange:

$\exists c \in]0\ ,\ 4[\ :\ f'(c) = \dfrac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$

$f'(c) = \dfrac{f(4) - f(0)}{4 - 0} \Leftrightarrow 2 - 2c = \dfrac{-5 - 3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - 2c = -2 \Leftrightarrow 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2$

2.2. $g(x) = x^3 + x + 2,\ D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 3x^2 + 1,\ D_{g'} = \mathbb{R}$

g é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, g é contínua em [0 , 3] e diferenciável em]0 , 3[. Então, pelo Teorema de Lagrange:

$\exists c \in]0\ ,\ 3[\ :\ g'(c) = \dfrac{g(3) - g(0)}{3 - 0}$

$g'(c) = \dfrac{g(3) - g(0)}{3 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 1 = \dfrac{32 - 2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3c^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow 3c^2 = 9 \Leftrightarrow c^2 = 3 \Leftrightarrow c = -\sqrt{3} \vee c = \sqrt{3}$

Como $c \in]0\ ,\ 3[$, temos $c = \sqrt{3}$

2.3. $h(x) = \sqrt{x - 2},\ D_h = [2\ ,\ +\infty[$

$h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x - 2}},\ D_{h'} =]2\ ,\ +\infty[$

h é contínua em $[2\ ,\ +\infty[$ e diferenciável em $]2\ ,\ +\infty[$.

Logo, h é contínua em [2 , 3] e diferenciável em]2 , 3[.

Então, pelo Teorema de Lagrange:

$\exists c \in]2\ ,\ 3[\ :\ h'(c) = \dfrac{h(3) - h(2)}{3 - 2}$

$h'(c) = \dfrac{h(3) - h(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{c - 2}} = \dfrac{1 - 0}{1} \Leftrightarrow$

$\underset{c>2}{\Leftrightarrow} 2\sqrt{c - 2} = 1 \Leftrightarrow 4(c - 2) = 1 \Leftrightarrow c - 2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = 2 + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow c = \dfrac{9}{4}$

2.4. $j(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1},\ D_j = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$j'(x) = \dfrac{(x - 1)'(x + 1) - (x - 1)(x + 1)'}{(x + 1)^2} = \dfrac{x + 1 - x + 1}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{2}{(x + 1)^2}\ ;\ D_{j'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

j é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Logo, j é contínua em [0 , 3] e diferenciável em]0 , 3[.

Então, pelo Teorema de Lagrange:

$\exists c \in]0\ ,\ 3[: j'(c) = \dfrac{j(3) - j(0)}{3 - 0}$

$j'(c) = \dfrac{j(3) - j(0)}{3 - 0} \Leftrightarrow \dfrac{2}{(c + 1)^2} = \dfrac{\frac{1}{2} + 1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{(c + 1)^2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2}{(c + 1)^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (c + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c + 1 = -2 \vee c + 1 = 2 \Leftrightarrow c = -3 \vee c = 1$

Como $c \in]0\ ,\ 3[$, temos $c = 1$.

3. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 0 \\ x^3 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

3.1. $f(0) = 1\ ;\ A(0\ ,\ 1)$

$f(1) = 0\ ;\ B(1\ ,\ 0)$

$m_{AB} = \dfrac{1 - 0}{0 - 1} = -1$

Para $x \in]0\ ,\ 1[,\ f'(x) = 3x^2$

$f'(c) = m_{AB} \Leftrightarrow 3c^2 = -1$ (equação impossível)

Logo, não existe $c \in]0\,,\,1[$ tal que $f'(c)$ seja igual ao declive da reta AB.

3.2. Não. f é diferenciável em $]0\,,\,1[$ mas não é contínua em $[0\,,\,1]$ atendendo a que como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3-1\right) = -1 \neq f(0)$ não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e, portanto, f não é contínua no ponto $x = 0$

Pág. 106

4.1. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 1,\ D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = x - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$

f é estritamente decrescente em $]-\infty\,,\,3]$ e é estritamente crescente em $[3\,,\,+\infty[$

4.2. $g(x) = 1 - 2x - 4x^2,\ D_g = \mathbb{R}$

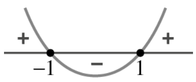
$g'(x) = -2 - 8x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 8x = -2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{4}$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$

g é estritamente crescente em $\left]-\infty\,,\,-\dfrac{1}{4}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[-\dfrac{1}{4}\,,\,+\infty\right[$

4.3. $h(x) = x^3 - 3x,\ D_h = \mathbb{R}$



$h'(x) = 3x^2 - 3$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
h'	$+$	0	$-$	0	$+$
h	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

h é estritamente crescente em $]-\infty\,,\,-1]$ e em $[1\,,\,+\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1\,,\,1]$.

4.4. $j(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

$j'(x) = x - x^2$

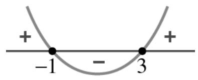
$j'(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
j	$-$	0	$+$	0	$-$
j'	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

j é estritamente decrescente em $]-\infty\,,\,0]$ e em $[1\,,\,+\infty[$ e estritamente crescente em $[0\,,\,1]$.

Pág. 107

5.1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x,\ D_f = \mathbb{R}$



$f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\dfrac{5}{3}$	$\searrow$.	-9	$\nearrow$
		Máx.		Mín.	

$f(-1) = \dfrac{5}{3}$ e $f(3) = -9$

f é estritamente crescente em $]-\infty\,,\,-1]$ e em $[3\,,\,+\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1\,,\,3]$.

f tem um máximo relativo igual a $\dfrac{5}{3}$ para $x = -1$ e um mínimo relativo igual a -9 para $x = 3$.

5.2. $g(x) = -x^2(2x+9) = -2x^3 - 9x^2$

$g'(x) = -6x^2 - 18x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x(x+3) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \vee x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$

x	$-\infty$	-3		0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	-27	$\nearrow$	0	$\searrow$
		Máx.		Mín.	

$g(-3) = -27$ e $g(0) = 0$

g é estritamente decrescente em $]-\infty\,,\,-3]$ e em $[0\,,\,+\infty[$ e estritamente crescente em $[-3\,,\,0]$.

g admite um mínimo relativo igual a -27 para $x = -3$ e um máximo relativo igual a 0 para $x = 0$.

5.3. $h(x) = x^4 - 10x^2 + 25,\ D_h = \mathbb{R}$

$h'(x) = 4x^3 - 20x$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - 5\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$4x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 5$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
h'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
h	$\searrow$	0	$\nearrow$	25	$\searrow$	0	$\nearrow$
		Mín.		Máx.		Mín.	

$h\left(-\sqrt{5}\right) = \left(-\sqrt{5}\right)^4 - 10\left(-\sqrt{5}\right)^2 + 25 = 25 - 50 + 25 =$

$= h(0) = 25$

h é estritamente decrescente em $\left]-\infty\ ,\ -\sqrt{5}\right]$ e em $\left[0\ ,\ \sqrt{5}\right]$ e estritamente crescente em $\left[-\sqrt{5}\ ,\ 0\right]$ e em $\left[\sqrt{5}\ ,\ +\infty\right[$

h admite um mínimo relativo igual a 0 para $x=-\sqrt{5}$ e $x=\sqrt{5}$ e um máximo relativo igual a 25 para $x = 0$.

5.4. $j(x)=2x^4-x,\ D_j=\mathbb{R}$

$j'(x)=8x^3-1$

$j'(x)=0 \Leftrightarrow 8x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3=\frac{1}{8} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
j'	$-$	0	$+$
j	↘	$-\frac{3}{8}$	↗
		Min.	

$j\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$

j é estritamente decrescente em $\left]-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$

j admite um mínimo relativo igual a $-\frac{3}{8}$ para $x=\frac{1}{2}$.

Pág. 108

6.1. $f(x)=3x^5-5x^3,\ D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=15x^4-15x^2,\ D_{f'}=\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 15x^4-15x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15x^2\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$15x^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f	↗	2	↘	0	↘	-2	↗
		Máx				Mín.	

$f(-1)=-3+5=2$

$f(0)=0$

$f(1)=3-5=-2$

f é estritamente crescente em $\left]-\infty\ ,\ -1\right]$ e em $\left[1\ ,\ +\infty\right[$ e estritamente decrescente em $[-1\ ,\ 1]$.

f admite um máximo relativo igual a 2 para $x = -1$ e um mínimo relativo igual a -2 para $x = 1$.

6.2. $g(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1$

$g'(x)=12x^3-24x^2+12x$

$D_{g'}=D_g=\mathbb{R}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3-24x^2+12x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x\left(x^2-2x+1\right)=0 \Leftrightarrow 12x(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$12x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
g'	$-$	0	$+$	0	$+$
g	↘	1	↗	2	↗
		Min.		.	

$g(0)=1\ ;\ g(1)=2$

g é estritamente decrescente em $\left]-\infty\ ,\ 0\right]$ e estritamente crescente em $\left[0\ ,\ +\infty\right[$.

g admite um mínimo relativo (e absoluto) igual a 1 para $x = 0$.

6.3. $h(x)=x^4+6x^2+9$

$h'(x)=4x^3+12x$

$D_{h'}=D_h=\mathbb{R}$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3+12x=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2+3\right)=0 \Leftrightarrow x=0$

O sinal de h' depende apenas do Sinal de $4x$.

x		0	
h'	$-$	0	$+$
h	↘	9	↗
		Mín.	

h é estritamente decrescente em $\left]-\infty\ ,\ 0\right]$ e estritamente crescente em $\left[0\ ,\ +\infty\right[$

h admite um mínimo relativo (e absoluto) igual a 9 para $x = 0$.

6.4. $j(x)=x^3-x^5$

$j'(x)=3x^2-5x^4$

$D_{j'}=D_j=\mathbb{R}$

$j'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-5x^4=0 \Leftrightarrow x^2\left(3-5x^2\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=0 \vee x^2=\frac{3}{5} \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{\sqrt{15}}{5} \vee x=\frac{\sqrt{15}}{5}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$		0		$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$+\infty$
x^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$3-5x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
j'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
j	↘		↗		↗		↘
		Min					

$j\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)=\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^3-\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^5=-\frac{15\sqrt{15}}{5^3}+\frac{15^2\sqrt{15}}{5^5}=$

$=-\frac{3\sqrt{15}}{5^2}+\frac{9\sqrt{15}}{5^3}=\frac{-15\sqrt{15}+9\sqrt{15}}{5^3}=-\frac{6\sqrt{15}}{125}$

$j\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)=\frac{3\sqrt{15}}{5^2}-\frac{9\sqrt{15}}{5^3}=\frac{6\sqrt{15}}{125}$

j é estritamente decrescente em $\left]-\infty\ ,\ -\frac{\sqrt{15}}{5}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{15}}{5}\ ,\ +\infty\right[$ e estritamente crescente em $\left[-\frac{\sqrt{15}}{5}\ ,\ \frac{\sqrt{15}}{5}\right]$.

j admite um mínimo relativo igual a $-\frac{6\sqrt{15}}{125}$ para $x=-\frac{\sqrt{15}}{5}$ e um máximo relativo igual a $\frac{6\sqrt{15}}{125}$ para $x=\frac{\sqrt{15}}{5}$

Pág. 109

7.1. $f(x)=\frac{x^2}{x+3},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$$f'(x)=\frac{\left(x^2\right)'(x+3)-x^2(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{2x(x+3)-x^2}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+6x-x^2}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}\ ;\ D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow x(x+3)=0\wedge x+3\neq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-6\vee x=0$$

x	$-\infty$	-6		-3		0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	↗	-12	↘		↘	0	↗
		Máx				Mín.	

$f(-6)=\frac{36}{-3}=-12\ ,\ f(0)=0$

f é estritamente crescente em $]-\infty\ ,\ -6]$ e em $[0\ ,\ +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-6\ ,\ -3[$ e em $]-3\ ,\ 0]$

f admite um máximo relativo igual a -12 para $x=-6$ e um mínimo relativo igual a 0 para $x=0$

7.2. $g(x)=\frac{4x^2-8x+4}{x+1},\ D_g=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$g'(x)=\frac{\left(4x^2-8x+4\right)'(x+1)-\left(4x^2-8x+4\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(8x-8)(x+1)-4x^2+8x-4}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{8x^2+8x-8x-8-4x^2+8x-4}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{4x^2+8x-12}{(x+1)^2},\ D_{g'}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow4x^2+8x-12=0\wedge x+1\neq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\wedge x\neq-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}\wedge x\neq-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm4}{2}\wedge x\neq-1\Leftrightarrow x=-3\vee x=-1$$

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
g	↗	-32	↘		↘	0	↗
		Máx				Mín	

$g(-3)=-32\ ;\ g(1)=0$

g é estritamente crescente em $]-\infty\ ,\ -3]$ e em $[1\ ,\ +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-3\ ,\ -1[$ e em $]-1\ ,\ 1]$

g admite um máximo relativo igual a -32 para $x=-3$ e uma mínimo relativo igual a 0 para $x=1$.

7.3. $h(x)=\frac{2}{1-x}-2x,\ D_h=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$h'(x)=\frac{2'(1-x)-2(1-x)'}{(1-x)^2}-2=\frac{-2}{(1-x)^2}-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-2-2\left(1-2x+x^2\right)}{(1-x)^2}=\frac{-2+2+4x-2x^2}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{4x-2x^2}{(1-x)^2},\ D_{h'}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow4x-2x^2=0\wedge x\neq1\Leftrightarrow2x(2-x)=0\wedge x\neq1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=2$$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
h	↘	2	↗		↗	-6	↘
		Min				Máx	

$h(0)=2\ ;\ h(2)=-2-4=-6$

h é estritamente decrescente em $]-\infty\ ,\ 0]$ e em $[2\ ,\ +\infty[$ e estritamente crescente em $[0\ ,\ 1[$ e em $]1\ ,\ 2]$.

h admite um mínimo relativo igual a 2 para $x=0$ e um máximo relativo igual a -6 para $x=2$.

7.4. $j(x)=\frac{4}{x-2}+9x,\ D_j=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$j'(x)=\frac{0-4(x-2)'}{(x-2)^2}+9=\frac{-4+9\left(x^2-4x+4\right)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{-4+9x^2-36x+36}{(x-2)^2}=\frac{9x^2-36x+32}{(x-2)^2}\ ;\ D_{j'}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$j'(x)=0\Leftrightarrow9x^2-36x+32=0\wedge x\neq2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{36\pm\sqrt{36^2-4\times9\times32}}{18}\wedge x\neq2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{36\pm12}{18}\wedge x\neq2\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}\vee x=\frac{8}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		2		$\frac{8}{3}$	$+\infty$
j'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
j	↗	6	↘		↘	30	↗
		Máx				Mín.	

$$j\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{\frac{4}{3}-2}+9\times\frac{4}{3}=\frac{4}{\frac{-2}{3}}+12=-6+12=0$$

$$j\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{\frac{8}{3}-2}+9\times\frac{8}{3}=6+24=30$$

j é estritamente crescente em $\left]-\infty\ ,\ \frac{4}{3}\right]$ e em $\left[\frac{8}{3}\ ,\ +\infty\right[$

e estritamente decrescente em $\left[\frac{4}{3}\ ,\ 2\right[$ e em $\left]2\ ,\ \frac{8}{3}\right]$

j tem um máximo relativo igual a 6 para $x=\frac{4}{3}$ e um mínimo relativo igual a 30 para $x=\frac{8}{3}$

7.5. $p(x)=\frac{x}{x^2+4}$, $D_p=\mathbb{R}$

$$p'(x)=\frac{x'\left(x^2+4\right)-x\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{x^2+4-x\times 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2+4-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\ ;\ D_{p'}=\mathbb{R}$$

$$p'(x)=0\Leftrightarrow 4-x^2=0\Leftrightarrow x=-2\vee x=2$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
p'	$-$	0	$+$	0	$-$
p	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘
		Min		Máx	

p é estritamente decrescente em $\left]-\infty\ ,\ -2\right]$ e em $\left[2\ ,\ +\infty\right[$ e estritamente crescente em $[-2, 2]$.

p admite um mínimo relativo igual a $-\frac{1}{4}$ para $x=-2$ e um máximo relativo igual a $\frac{1}{4}$ para $x=2$.

7.6. $q(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$, $D_q=\mathbb{R}$

$$q'(x)=\frac{\left(x^3\right)'\left(x^2+2\right)-x^3\left(x^2+2\right)'}{\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^2\left(x^2+2\right)-x^2\times 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{3x^4+6x^2-2x^4}{\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^4+6x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\ ;\ D_{q'}=\mathbb{R}$$

$$q'(x)=0\Leftrightarrow x^4+6x^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+6\right)=0\Leftrightarrow x=0$$

$q'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $q'(0)=0$

Logo, q é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ pelo que não tem extremos.

Pág. 110

8.1. $f(x)=\sqrt{x-3}\ ,\ x\in\left[3\ ,\ +\infty\right[$

$$f'(x)=\frac{(x-3)'}{2\sqrt{x-3}}=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

f é diferenciável em $\left]3\ ,\ +\infty\right[$

$\forall x\in\left]3\ ,\ +\infty\right[\ ,\ f'(x)>0$

x	3	$+\infty$
f'		$+$
f	0	↗
	Mín.	

f é estritamente crescente em $\left[3\ ,\ +\infty\right[$ e $f(3)=0$ e o mínimo absoluto de f.

8.2. $g(x)=\sqrt{2x-x^2}$, $x\in[0\ ,\ 2]$

$$g'(x)=\frac{\left(2x-x^2\right)'}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

g é diferenciável em $]0, 2[$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 1-x=0\wedge x\in\left]0\ ,\ 2\right[\Leftrightarrow x=1$$

x	0		1		2
$1-x$		$+$	0	$-$	
g'		$+$	0	$-$	
g	0	↗	1	↘	0
	Mín		Máx		Mín

g é estritamente crescente em $[0 , 1]$ e estritamente decrescente em $[1 , 2]$.

g tem mínimo absoluto igual a 0 para $x = 0$ e $x = 2$ e máximo absoluto igual a 1 para $x = 1$.

8.3. $h(x)=\sqrt{x^2+3x}\ ;\ D_h=\left]-\infty\ ,\ -3\right]\cup\left[0\ ,\ +\infty\right[$

$$h'(x)=\frac{\left(x^2+3x\right)'}{2\sqrt{x^2+3x}}=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}\ ;D_{h'}=D_h\setminus\{-3\ ,\ 0\}$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow 2x+3=0\wedge x\in D_h$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\wedge x\in D_h\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

O Sinal de h' depende de $2x+3$

x	$-\infty$	-3		0	$+\infty$
h'	$-$				$+$
h	↘	0		0	↗
		Mín		Máx	

h é estritamente decrescente em $\left]-\infty\ ,\ -3\right]$ e estritamente crescente em $\left[0\ ,\ +\infty\right[$

h tem mínimo absoluto igual a 0 para $x = -3$ e $x = 0$.

8.4. $j(x)=x\sqrt{1-x^2}\ ,\ D_j=[-1\ ,\ 1]$

$$j'(x)=x'\sqrt{1-x^2}+x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=$$

$$=\sqrt{1-x^2}+x\times\frac{\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ D_{j'}=\left]-1\ ,\ 1\right[$$

$$j'(x)=0\Leftrightarrow 1-2x^2=0\wedge x\in\left]-1\ ,\ 1\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\wedge x\in\left]-1\ ,\ 1\right[\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vee x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$1-2x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
j'		$-$	0	$+$	0	$-$	
j	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
	Máx		Mín		Máx		Mín

j é estritamente decrescente em $\left[-1\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1\right]$ e estritamente crescente em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

j tem um máximo relativo igual a 0 para $x=-1$ e um mínimo relativo igual a 0 para $x=1$, $j\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ é o mínimo absoluto e $j\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$ é o máximo absoluto de j.

8.5. $p(x)=\dfrac{x+2}{1-x}$, $D_p=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$p'(x)=\frac{1\times(1-x)-(x+2)\times(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x+2}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{2}{(1-x)^2}\ ;\ D_{p'}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$p'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

p' é estritamente crescente em $]-\infty\ ,\ 1[$ e em $]1\ ,\ +\infty[$

p não tem extremos.

8.6. $q(x)=\dfrac{3-x}{x+2}$, $D_q=[3\ ,\ +\infty[$

$$q'(x)=\frac{-1\times(x+2)-(3-x)\times 1}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{-x-2-3+x}{(x+2)^2}=\frac{-5}{(x+2)^2}\ ;\ D_{q'}=[3\ ,\ +\infty[$$

$q'(x)<0$, $\forall x\in[3\ ,\ +\infty[$

q é estritamente decrescente em $[3\ ,\ +\infty[$

$q(3)=0$ é o máximo absoluto de q.

Pág. 111

9. $h(t)=4,9+48,51t-4,9t^2$

9.1. $h(t)=0\Leftrightarrow 4,9+48,51t-4,9t^2=0\wedge t\geq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-48,51\pm\sqrt{(-48,51)^2-4\times 4,9\times 4,9}}{-2\times 4,9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t=-0,1\vee t=10)\wedge t\geq 0\Leftrightarrow t=10$$

$h(t)>0\Leftrightarrow 0\leq t\leq 10$

O corpo esteve no ar durante 10 segundos.

9.2. $h'(t)=48,51-2\times 4,9t=48,51-9,8t$

$$h'(t)=0\Leftrightarrow 48,51-9,8t=0\Leftrightarrow t=\frac{48,51}{9,8}\Leftrightarrow t=4,95$$

t	0		$4,95$		10
h'		$+$	0	$-$	
h	$4,9$	$\nearrow$		$\searrow$	0
			Máx		

$h(4,95)=4,9+48,51\times 4,95-4,9\times(4,95)^2\approx 124,96$

O corpo atingiu a altura máxima de $124,96$ m.

9.3. $$\text{t.m.v.}_{(h;\ 0;\ 4,95)}=\frac{h(4,95)-h(0)}{4,95-0}=\frac{1,24,96255-4,9}{4,95}=$$

$$=\frac{120,06255}{4,95}=24,255$$

$\text{t.m.v.}_{(h;\ 0;\ 4,95)}=24,255$ m/s

9.4. $h'(3,7)=48,51-9,8\times 3,7=12,25$

$h'(3,7)=12,25$ m/s

1 km = 1000 m

1 s —— 12,25 m

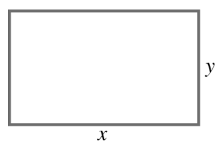
3600 s —— x m

$x=\dfrac{3600\times 12,25}{1}=44\ 100$ m = 44,1 km

$h'(3,7)=44,1$ km/h

Pág. 112

10.



$2x+2y=60\Leftrightarrow x+y=30\Leftrightarrow y=30-x$

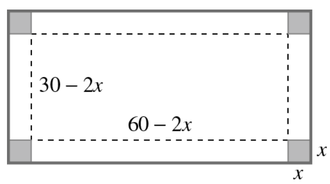
10.1. $A=xy$; $A(x)=x(30-x)\Leftrightarrow A(x)=30x-x^2$

10.2. $A'(x)=30-2x$; $A'(x)=0\Leftrightarrow 30-2x=0\Leftrightarrow x=15$

t	0		15		30
A'		$+$	0	$-$	
A		$\nearrow$		$\searrow$	
			Máx		

A área do retângulo é máxima para x = 15 cm

11.



11.1. $V(x)=(30-2x)(60-2x)x$

$V(x)=\left(4x^2-180x+1800\right)x$

$V(x)=4x^3-180x^2+1800x,\ 0<x<15$

11.2. $V'(x)=12x^2-360x+1800$

$V'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-360x+1800=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-30x+150=0\Leftrightarrow x=\frac{30\pm\sqrt{900-600}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{30\pm\sqrt{100\times 3}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{30\pm 10\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=15-5\sqrt{3}\vee x=15+5\sqrt{3}$$

Como $0<x<15$, temos $x=15-5\sqrt{3}$.

x'	0		$15-5\sqrt{3}$		15
V'		+	0	–	
V		↗		↘	
			Máx		

O volume é máximo para $x=15-5\sqrt{3}$ cm $\approx 6{,}34$ cm

Pág. 113

12. $6x+4y=300 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x+y=75 \Leftrightarrow y=75-\frac{3}{2}x$

12.1. $A=3x\times y$

$$A(x)=3x\left(75-\frac{3}{2}x\right)=3x\times\frac{150-3x}{2}=\frac{450x-9x^2}{2}$$

$$A(x)=225x-4{,}5x^2$$

12.2. $A'(x)=225-9x$

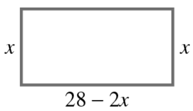
$$A'(x)=0 \Leftrightarrow 225-9x=0 \Leftrightarrow x=\frac{225}{9} \Leftrightarrow x=25$$

x	0	25	
A'	+	0	–
A	↗		↘
		Máx.	

Se $x=25$, $y=75-\frac{3}{2}\times 25=37{,}5$

A área é máxima para $x=25$ m e $y=37{,}5$ m.

13.



Área total da base = $(28-2x)x$

$A(x)=28x-2x^2$

A capacidade de caldeira é máxima se a área da base for máxima:

$A'(x)=28-4x$

$A'(x)=0 \Leftrightarrow 28-4x=0 \Leftrightarrow x=7$

x	0		7		14
A'		+	0	–	
A		↗		↘	
			Máx.		

A capacidade é máxima para $x=7$ cm.

Pág. 114

14. $A\left(-\frac{5}{2},0\right)$, $B(0,3)$

$$m_{AB}=\frac{3-0}{0+\frac{5}{2}}=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$$

$$AB: y=\frac{6}{5}x+3$$

$$A_{[OPQ]}=\frac{\overline{OQ}\times\overline{QP}}{2}=A(x)$$

Sendo x a abcissa de Q, $x<0$.

$$A(x)=\frac{-x\times\left(\frac{6}{5}x+3\right)}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}x^2+3x\right)$$

$$=-\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{2}x$$

$$A(x)=-\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{2}x, -\frac{5}{2}<x<0$$

$$A'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5}x-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{6}{5}x=-\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\times\frac{5}{6} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$$

x	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{4}$		0
A'		+	0	–	
A		↗		↘	
			Máx.		

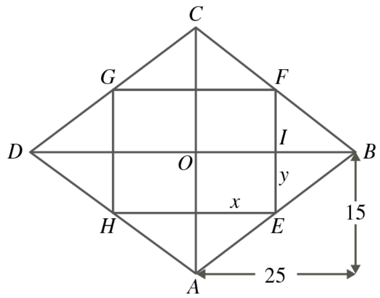
A área é máxima para $x=-\frac{5}{4}$.

Se $x=-\frac{5}{4}$, $y=\frac{6}{5}\times\left(-\frac{5}{4}\right)+3=\frac{3}{2}$.

Logo, $P\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$.

Pág. 115

15.



$A=4xy$

Pela semelhança dos triângulos [*ABO*] e [*EBI*] temos:

$$\frac{V}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BI}}{\overline{BO}}$$

$\overline{AO}=15$; $\overline{BO}=25$ e $\overline{BI}=25-x$

Então:

$$\frac{y}{15}=\frac{25-x}{25} \Leftrightarrow y=\frac{15}{25}(25-x)$$

$A=4xy$

$$A(x)=4x\times\frac{15}{25}(25-x)=$$

$$=\frac{12}{5}x(25-x)=$$

$$=60x-\frac{12}{5}x^2, 0<x<25$$

$$A'(x)=60-\frac{24}{5}x$$

$$A'(x)=0 \Leftrightarrow 60-\frac{24}{5}x=0 \Leftrightarrow 300=24x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{300}{24} \Leftrightarrow x=12{,}5$$

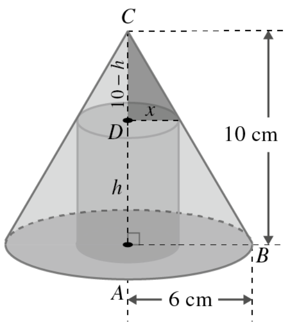
	0		12,5		25
A'		+	0	–	
A		↗		↘	
			Máx.		

Se $x = 12{,}5$, $y = \frac{15}{25}(25 - 12{,}5) = 7{,}5$

$2x = 25$ e $2y = 15$

A área é máxima se o canteiro tiver 25 m por 15 m.

16.1.



Pela semelhança dos triângulos [ABC] e [DEC] temos

$$\underset{(5)}{\frac{x}{6}} = \underset{(3)}{\frac{10-h}{10}} \Leftrightarrow 5x = 30x - 3h \Leftrightarrow 3h = 30 - 5x \Leftrightarrow h = 10 - \frac{5}{3}x$$

16.2. $V = A_{\text{base}} \times$ altura

$V(x) = \pi x^2 \times h(x)$

$V(x) = \pi x^2 \left(10 - \frac{5}{3}x\right), 0 < x < 6$

16.3. $V'(x) = \pi\left(10x^2 - \frac{5}{3}x^3\right)' =$

$= \pi\left(20x - 5x^2\right)$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\pi x(4 - x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Como $x > 0$, temos que $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x	0		4		6
V'		+	0	–	
V		↗		↘	
			Máx.		

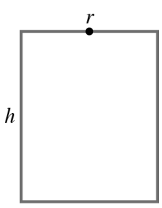
O cilindro de volume máximo tem 4 cm de altura.

16.4. $h(4) = 10 - \frac{5}{3} \times 4 = \frac{30}{3} - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$

$h = \frac{10}{3}$ cm

Pág. 116

17. $V = 48\pi$ cm^3



$\pi r^2 h = 48\pi \Leftrightarrow h = \frac{48}{r^2}$

$A_{\text{lateral}} = 2\pi r \times h = 2\pi r \times \frac{48}{r^2} = \frac{96\pi}{r}$

$A_{\text{base}} = \pi r^2$

Função custo:

$C(r) = \left(\pi r^2 + \frac{96\pi}{r}\right) \times 2 + 3 \times \pi r^2 = 2\pi r^2 + \frac{192\pi}{r} + 3\pi r^2$

$C'(r) = 10\pi r - \frac{192\pi}{r^2} = \frac{10\pi r^3 - 192\pi}{r^2}$

$C'(r) = 0 \Leftrightarrow 10\pi r^3 - 192\pi = 0 \wedge r > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^3 = \frac{192\pi}{10\pi} \wedge r > 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{19{,}2}$

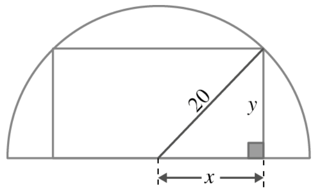
x	0		$\sqrt[3]{19{,}2}$	
C'		–	0	+
C		↘		↗
			Mín.	

Se $r = \sqrt[3]{19{,}2} \approx 2{,}7$ então $h = \frac{48}{r^2} \approx 6{,}7$.

O custo é mínimo para $r \approx 2{,}7$ cm e $h \approx 6{,}7$ cm.

Pág. 117

18.1.



$A = 2xy$

$x^2 + y^2 = 20^2 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{400 - x^2}$

$A = 2x\sqrt{400 - x^2}$, $y = \sqrt{100 - x^2}$

$A = 2x\sqrt{400 - x^2}, 0 < x < 20$

$A'(x) = (2x)'\sqrt{400 - x^2} + 2x\left(\sqrt{400 - x^2}\right)' =$

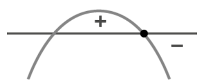
$= 2\sqrt{400 - x^2} + \cancel{2}x \times \frac{\left(400 - x^2\right)'}{\cancel{2}\sqrt{400 - x^2}} =$

$= 2\sqrt{400 - x^2} + x\frac{-2x}{\sqrt{400 - x^2}} =$

$= \frac{2\left(400 - x^2\right) - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \frac{800 - 4x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 800 - 4x^2 = 0 \wedge 0 < x < 20$

$\Leftrightarrow x^2 = 200 \wedge 0 < x < 20$



$\Leftrightarrow x = \sqrt{100 \times 2} \Leftrightarrow x = 10\sqrt{2}$

x	0		$10\sqrt{2}$		20
A'		+	0	–	
A		↗		↘	
			Máx.		

Se $x = 10\sqrt{2}$, $y = \sqrt{400 - \left(10\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{400 - 200} =$

$= \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

As dimensões do retângulo de área máxima são

$2x = 20\sqrt{2}$ m por $y = 10\sqrt{2}$ m.

18.2. $A\left(10\sqrt{2}\right) = 2 \times 10\sqrt{2} \times 10\sqrt{2} = 400$

$A\left(10\sqrt{2}\right) = 400 \text{ m}^2$

Pág. 119

19. $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}},\ x \in \mathbb{R}^+$

$f'(x) = 1 - \frac{0 - \left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = 1 - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$

$= 1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$

Como $f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ (intervalo aberto) então *f* não tem extremos.

20.1. $f(x) = x^3 - 2x,\ D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 2,\ D_{f'} = \mathbb{R}$

f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, *f* é contínua em $[0\,,2]$ e diferenciável em $]0\,,2[$. Assim, pelo teorema de Lagrange, $\exists c \in\,]0\,,2[: f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$

$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 - 2 = \frac{4 - 0}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3c^2 = 4 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

Como $c \in\,]0\,,2[$, temos $x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

20.2. $g(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$ em $[2\,,3]$

$g'(x) = \frac{1 \times (x - 1) - (x + 2) \times 1}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2}$

g é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Logo, *g* é contínua em $[2\,,3]$ e diferenciável em $]2\,,3[$.

Portanto, pelo Teorema de Lagrange:

$\exists c \in\,]2\,,3[: g'(c) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2}$

$g'(c) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow -\frac{3}{(c - 1)^2} = \frac{\frac{5}{2} - 4}{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{(c - 1)^2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (c - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow c - 1 = -\sqrt{2} \vee c - 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = 1 - \sqrt{2} \vee c = 1 + \sqrt{2}$

Como $c \in\,]2\,,3[$, temos $c = \sqrt{2} + 1$.

21.1. $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 - 3\right)^2$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{4} \times 2\left(x^2 - 3\right) \times 2x = x^3 - 3x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	–	–	–	0	+	+	+
$x^2 - 3$	+	0	–	–	–	0	+
f'	–	0	+	0	–	0	+
f	↘		↗		↘		↗

f é estritamente decrescente em $\left]-\infty\,, -\sqrt{3}\right]$ e em $\left[0\,, \sqrt{3}\right]$ e estritamente crescente em $\left[-\sqrt{3}\,, 0\right]$ e em $\left[\sqrt{3}\,, +\infty\right[$.

21.2. $g(x) = x^4 + 2x^2 + 1,\ D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 4x^3 + 4x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

O sinal de g' depende apenas de $4x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	–	0	+
g	↘		↗

g é estritamente decrescente em $]-\infty\,, 0]$ e estritamente crescente em $[0\,, +\infty[$.

22.1. $f(x) = 3x^5 + 5x^3$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 + 15x^2$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2\left(x^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Logo, *f* é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ pelo que não tem extremos.

22.2. $g(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2},\ D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = x^3 + 2x^2 + x$ $\quad D_{g'} = \mathbb{R}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 + 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

x	$-\infty$	1		0	$+\infty$
x	–	–	–	0	+
$(x+1)^2$	+	0	+	+	+
g'	–	0	–	0	+
g	↘		↘	0	↗

$g(0) = 0$

g é estritamente decrescente em $]-\infty\,,0]$ e estritamente crescente em $[0\,,+\infty[$.

g admite um mínimo relativo (e absoluto) igual a 0, para $x=0$.

22.3. $h(x)=x^4-2x^2+1,\ D_h=\mathbb{R}$

$h'(x)=4x^3-4x,\ D_{h'}=\mathbb{R}$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$4x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
h'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
h	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$
		Mín.		Máx.		Mín.	

h é estritamente decrescente em $]-\infty\,,-1]$ e $[0\,,1]$ e estritamente crescente em $[-1\,,0]$ e em $[1\,,+\infty[$.

h admite mínimo relativo (e absoluto) igual a 0 para $x=-1$ e $x=1$ e máximo relativo igual a 1 para $x=0$.

23.1. $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1=0 \wedge x\neq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2=1 \wedge x\neq 1$

$\Leftrightarrow (x-1=1 \vee x-1=-1) \wedge x\neq 1 \Leftrightarrow x=2 \vee x=0$

O sinal de f' depende do sinal de

$(x-1)^2-1=x^2-2x+1-1=x^2-2x$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	-1	$\searrow$		$\searrow$	3	$\nearrow$
		Máx.				Mín.	

f é estritamente crescente em $]-\infty\,,0]$ e em $[2\,,+\infty[$ e é estritamente decrescente em $[0\,,1[$ e em $]1\,,2[$ f tem um máximo relativo igual a –1 para $x=0$ e um mínimo relativo igual a 3 para $x=2$.

23.2. $g(x)=\dfrac{-4(3-x)'}{(3-x)^2}-1=\dfrac{-4x\times(-1)}{(3-x)^2}-1$

$=\dfrac{4-(3-x)^2}{(3-x)^2},\ D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 4-(3-x)^2=0 \wedge x\neq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3-x)^2=4 \wedge x\neq 3 \Leftrightarrow (3-x=2 \vee 3-x=-2) \wedge x\neq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=5$

O sinal de g' depende de $4-(3-x)^2=4-\left(9-6x+x^2\right)$

$=-x^2+6x-5$ cujos zeros são 1 e 5.

x	$-\infty$	1		3		5	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
g	$\searrow$	1	$\nearrow$		$\nearrow$	-7	$\searrow$
		Mín.				Máx.	

g é estritamente decrescente em $]-\infty\,,1]$ e em $[5\,,+\infty[$ e estritamente crescente em $[1\,,3[$ e em $]3\,,5]$.

g tem um mínimo relativo igual a 1 para $x=1$ e um máximo relativo igual a –7 para $x=5$.

23.3. $h(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x-1},\ D_h=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$h'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+4\right)\times 1}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \wedge x\neq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \wedge x\neq 1 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
h'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
h	$\nearrow$	-3	$\searrow$		$\searrow$	5	$\nearrow$
		Máx.				Mín.	

h é estritamente crescente em $]-\infty\,,-1]$ e em $[3\,,+\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1\,,1[$ e em $]1\,,3]$.

h tem um máximo relativo igual a –3 para $x=-1$ e um número relativo igual a 5 para $x=3$.

23.4. $i(x)=\dfrac{2x+9}{x+2},\ D_i=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$i'(x)=\dfrac{2(x+2)-(2x+9)\times 1}{(x+2)^2}=\dfrac{2x+4-2x-9}{(x+2)^2}=$

$=\dfrac{-5}{(x+2)^2};\ D_i'=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$i'(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

i é estritamente decrescente em $]-\infty\,,-2[$ e em $]-2\,,+\infty[$.

Logo, i não tem extremos.

24.1. $f(x)=\sqrt{x+5},\ D_f=[-5\,,+\infty[$ e f é contínua

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}},\ D_{f'}=]-5\,,+\infty[$

$f'(x)>0,\ \forall x\in\ ]-5\,,+\infty[$

f é estritamente crescente em $[5\,,+\infty[$

$f(-5)=0$ é o mínimo absoluto de f.

24.2. $g(x)=\sqrt{x^2-2x},\ D_g=]-\infty\,,0]\cup[2\,,+\infty[$

$g'(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$,

$D_{g'} =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

g é contínua

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \in D'_g \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \in D'_g \Leftrightarrow x \in \varnothing$

O sinal de g' depende do sinal de $x - 1$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
g'	$-$				$+$
g	↘	0		0	↗
		Mín..		Máx.	

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$

g tem mínimo absoluto igual a 0 para $x = 0$ e para $x = 2$.

24.3. $h(x) = \sqrt{5x - x^2}$, $D_h = [0, 5]$

$$h'(x) = \frac{(5x - x^2)'}{2\sqrt{5x - x^2}} = \frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}}$$

h é diferenciável em $]0, 5[$ e contínua em $[0, 5]$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - 2x = 0 \wedge x \in]0, 5[\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

x	0		$\frac{5}{2}$		5
h'		$+$	0	$-$	$+$
h	0	↗	$\frac{5}{2}$	↘	0
			Máx.		

$$h\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{25}{2} - \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

h é estritamente crescente em $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{5}{2}, 5\right]$.

h tem mínimo absoluto igual a 0 para $x = 0$ e $x = 5$ e máximo absoluto igual a $\frac{5}{2}$ para $x = \frac{5}{2}$.

24.4. $j(x) = \frac{x}{2}\sqrt{8 - 2x^2}$, $D_g = [-2, 2]$

$$j'(x) = \left(\frac{x}{2}\right)'\sqrt{8 - 2x^2} + \frac{x}{2}\left(\sqrt{8 - 2x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8 - 2x^2} + \frac{x}{2} \times \frac{(8 - 2x^2)'}{2\sqrt{8 - 2x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8 - 2x^2}}{2} + \frac{x}{2} \times \frac{-4x}{2\sqrt{8 - 2x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8 - 2x^2}}{2} - \frac{x^2}{\sqrt{8 - 2x^2}} =$$

$$= \frac{8 - 2x^2 - 2x^2}{2\sqrt{8 - 2x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{8 - 2x^2}}$$

j é diferenciável em $]-2, 2[$ e contínua em $[-2, 2]$.

$j'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x^2 = 0 \wedge x \in]-2, 2[$

$\Leftrightarrow x^2 = 2 \wedge x \in]-2, 2[$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

O sinal de j' depende do sinal de $4 - 2x^2$

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
j'		$-$	0	$+$	0	$-$	
j	0	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	0
	Máx.		Mín.		Máx.		Mín.

$$j(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{8 - 2 \times (-\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{8 - 4} = -\sqrt{2}$$

$j(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

j é estritamente decrescente em $\left[-2, -\sqrt{2}\right]$ e em $\left[\sqrt{2}, 2\right]$

e estritamente crescente em $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

j tem um máximo relativo igual a 0 para $x = -2$ e um mínimo relativo igual a 0 para $x = 2$; tem mínimo absoluto igual a $-\sqrt{2}$ para $x = -\sqrt{2}$ e máximo absoluto igual a $\sqrt{2}$ para $x = \sqrt{2}$.

24.5. $p(x) = \frac{3x - 2}{x + 3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$p'(x) = \frac{3(x+3) - (3x - 2) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{3x + 9 - 3x + 2}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{11}{(x+3)^2}, D_{p'} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$p'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

p é estritamente crescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, +\infty[$.

p não tem extremos.

24.6. $q(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$, em $[3, +\infty[$

$$q'(x) = \frac{2(x+1) - (2x - 4) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 4}{(x+1)^2} = \frac{6}{(x+1)^2}$$

q é diferenciável em $[3, +\infty[$.

$q'(x) > 0, \forall x \in [3, +\infty[$.

Logo, q é estritamente crescente em $[3, +\infty[$ e $q(3) = \frac{1}{2}$ é o mínimo absoluto de q.

25. $h(t) = -4{,}9t^2 + 53{,}9t + 3$

25.1. $h(0) = 3$

O projétil estava a 3 cm de altura quando foi lançado.

25.2. $h'(t) = -2\times{,}49t + 53{,}9 = -9{,}8t + 53{,}9$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9{,}8t + 53{,}9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-53{,}9}{-9{,}8} \Leftrightarrow t = 5{,}5$$

x	0	5,5	
h'	$+$	0	$-$
h	↗		↘
		Máx.	

$h(5,5) = -4,9\times5,5^2 + 53,9\times5,5 + 3 = 151,225$

A altura máxima atingida pelo projétil foi de 151,225 m.

25.3. $h(t) > 150 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 53,9t + 3 > 150$

$\Leftrightarrow -4,9t^2 + 53,9t - 147 > 0$

$\Leftrightarrow 5 < t < 6$

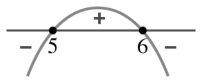
O projétil esteve acima de 150 m durante 1 s.

Cálculos auxiliares

$-4,9t^2 + 53,9t - 147 = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{-53,9\sqrt{53,9^2 - 4\times4,9\times147}}{-9,8}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{-53,9 \pm 4,9}{-9,8} \Leftrightarrow t = 5 \vee t = 6$



25.4. $\text{t.m.v.}_{(h\,,\,0\,,\,3)} = \dfrac{h(3)-h(0)}{3-0} = \dfrac{120,6-3}{3} = 39,2$ m/s

1 km = 1000 m

1 h = 3600 s

39,2 m ------ 1s

x ------ 3600 s

$x = 3600\times39,2 = 141\,120$

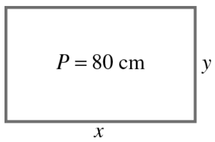
141120 m = 141,12 km

$\text{t.m.v.}_{(h\,,\,0\,,\,3)} = 141{,}12$ km/h

25.5. $h'(4\,,5) = -1{,}8\times4,5 + 53,9 = 9,8$

$h'(4\,,5) = 9,8$ m/s

26.



$2x + 2y = 80 \Leftrightarrow x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x$

$A = xy$

$A(x) = x(40-x) = 40x - x^2$

$x > 0 \wedge 40 - x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 40$

$A'(x) = 40 - 2x$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 40 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 20$

x	0		20		40
A'			0		
A'		↗		↘	
			Máx.		

$x = 20 \Rightarrow y = 40 - 20 = 20$

O retângulo de área máxima é o quadrado de lado 20 cm.

27.1. Área lateral $= 2x^2 + 3xy$ sendo y o comprimento

$54 = 2x^2 + 3xy \Leftrightarrow 3xy = 54 - 2x^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{54-2x^2}{3x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{18}{x} - \dfrac{2}{3}x$

$V = x^2y$

$V(x) = x^2\left(\dfrac{18}{x} - \dfrac{2}{3}x\right) = 18x - \dfrac{2}{3}x^3$

27.2. $V'(x) = 18 - 2x^2$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 18 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9$

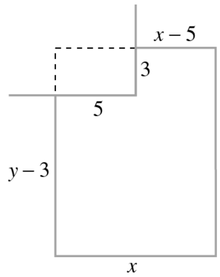
Como $x > 0$, temos $x = 3$.

x	0		3	
V'		+	0	–
V		↗		↘
			Máx.	

O volume é máximo para $x = 3$ m

Pág. 120

28.



28.1. $x + x - 5 + y + y - 3 = 100$

$\Leftrightarrow 2x + 2y = 100 + 8 \Leftrightarrow 2x + 2y = 108$

$\Leftrightarrow x + y = 54 \Leftrightarrow y = 54 - x$

$A = xy = 5\times3$

$A(x) = x(54-x) - 15 = 54x - x^2 - 15$

$A(x) = -x^2 + 54x - 15$

28.2. $x > 5 \wedge y > 3 \Leftrightarrow x > 5 \wedge 54 - x > 3$

$x > 5 \wedge x < 51$

$A'(x) = -2x + 54$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 54 = 0 \Leftrightarrow x = 27$

x	5		27		51
A'		+	0	–	
A		↗	714	↘	
			Máx.		

$A(27) = -27^2 + 54\times27 - 15 = 714$

A área é máxima para $x = 27$ m. A área máxima é 714 m^2.

29. $\overline{AB} = 2y$ (y é o raio dos semicírculos)

29.1. $2y\times x = 200 \Leftrightarrow y = \dfrac{200}{2x} \Leftrightarrow y = \dfrac{100}{x}$

$P = 2\pi y\times\dfrac{100}{x} + 2x$

$P(x) = \dfrac{200\pi}{x} + 2x$

29.2. $P'(x) = \left(\dfrac{200\pi}{x} + 2x\right)' = -\dfrac{200\pi}{x^2} + 2 = \dfrac{2x^2 - 200\pi}{x^2}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200\pi = 0 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 100\pi \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = 10\sqrt{\pi}$

x	0		$10\sqrt{\pi}$	
P'		–	0	+
P		↘	$40\sqrt{\pi}$	↗
			Mín.	

$$P(10\pi) = \frac{200\pi}{10\sqrt{\pi}} + 20\sqrt{\pi} = \frac{20\pi\sqrt{\pi}}{\pi} + 20\sqrt{\pi}$$
$$= 20\sqrt{\pi} + 20\sqrt{\pi} = 40\sqrt{\pi}$$

O perímetro mínimo da figura é $40\sqrt{\pi}$ m.

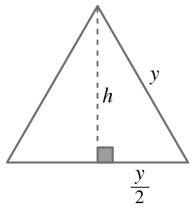
30.1. $4x + 3y = 20 \Leftrightarrow 3y = 20 - 4x \Leftrightarrow y = \frac{20-4x}{3}$

$x > 0 \wedge y > 0$

$x > 0 \wedge \frac{20-4x}{3} > 0$

$x > 0 \wedge x < 5$

Altura do triângulo



$h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = y^2$

$h^2 = y^2 - \frac{y^2}{4}$

$h^2 = \frac{3}{4}y^2$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}y$

$A =$ área do quadrado + área do triângulo

$$A = x^2 + \frac{y \times \frac{\sqrt{3}}{2} y}{2} = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$$

$$A(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{20-4x}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{(20-4x)^2}{9}$$

$$A(x) = x^2 + \frac{(20-4x)^2\sqrt{3}}{36}$$

30.2. $A'(x) = \left(x^2\right)' + \frac{\sqrt{3}}{36} \times \left[(20-4x)^2\right]' =$

$$= 2x + \frac{\sqrt{3}}{36} \times 2(20-4x)(20-4x)' =$$

$$= 2x + \frac{\sqrt{3}}{18}(20-4x) \times (-4) = 2x - \frac{2\sqrt{3}}{9}(20-4x) =$$

$$= 2x - \frac{40\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{9}x$$

$$= \left(2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)x - \frac{40\sqrt{3}}{9}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)x - \frac{40\sqrt{3}}{9} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{18+8\sqrt{3}}{9}x = \frac{40\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{9} \times \frac{9}{18+8\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{18+8\sqrt{3}}$$

Seja $x_0 = \frac{40\sqrt{3}}{18+8\sqrt{3}} \approx 2,175$.

x	0		x_0		5
A'		–	0	+	
A		↘	Mín.	↗	

A área é mínima para $x = x_0 \approx 2,175$ m

Quadrado: $4x \approx 4 \times 2,175$ m = 8,7 m

Triângulo: 20 m – 8,7 m = 11,3 m

31. $(x - 2\times1,6)(y - 2\times2) = 20 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-3,2)(y-4) = 20 \Leftrightarrow y - 4 = \frac{20}{x-3,2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 + \frac{20}{x-3,2},\ x > 3,2$$

$A = x\,y$

$$A(x) = x\left(4 + \frac{20}{x-3,2}\right) = 4x + \frac{20x}{x-3,2}$$

$$A'(x) = (4x)' + \left(\frac{20x}{x-3,2}\right)' =$$

$$= 4 + \frac{20(x-3,2) - 20x\times1}{(x-3,2)^2}$$

$$= 4 + \frac{20x - 64 - 20x}{(x-3,2)^2} =$$

$$= \frac{4(x-3,2)^2 - 64}{(x-3,2)^2}$$

$A'(x) \Leftrightarrow 4(x-3,2)^2 - 64 = 0 \wedge x > 3,2$

$\Leftrightarrow (x-3,2)^2 = 16 \wedge x > 3,2$

$\Leftrightarrow (x - 3,2 = 4 \vee x - 3,2 = -4) \wedge x > 3,2$

$\Leftrightarrow (x = 7,2 \vee x = -0,8) \wedge x > 3,2$

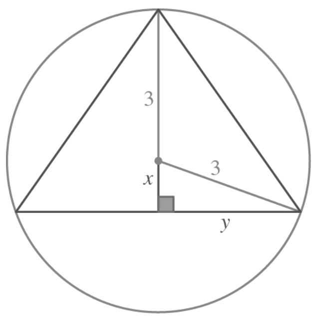
$\Leftrightarrow x = 7,2$

x	3,2		7,2	
A'		–	0	+
A		↘	Mín.	↗

Se $x = 7,2,\ y = 4 + \frac{20}{7,2-3,2} = 4 + \frac{20}{4} = 9$

O gasto de papel é mínimo para $x = 7,2$ cm e $y = 9$ cm.

32. $r = 3\text{ cm}$



$$V = \frac{1}{3}\pi y^2(x+3)$$

$x^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2$

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(9 - x^2\right)(x+3) = \frac{\pi}{3}\left(9x + 27 - x^3 - 3x^2\right)$$

$$V(x) = \frac{\pi}{3}\left(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27\right),\ 0 < x < 3$$

$$V'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\left(-3x^2-6x+9\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \wedge 0\le x<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}\wedge 0\le x<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm 4}{2}\wedge 0\le x<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

x	0		1		3
V'		+	0	–	
V		↗		↘	
			Máx.		

$$V(1)=\frac{\pi}{3}(9-1)(1+3)=\frac{32\pi}{3}$$

O volume máximo do cone é igual a $\frac{32\pi}{3}$ cm.

Pág. 121

33.1. $V=A_{\text{base}}\times \text{altura}$

$$V=\pi r^2\times h$$
$$1=\pi r^2\times h \Leftrightarrow h=\frac{1}{\pi r^2}$$

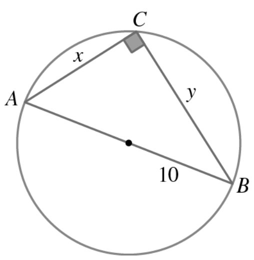
33.2. $S=A_{\text{base}}+A_{\text{lateral}}$

$$=\pi r^2+2\pi r\times h$$
$$S(r)=\pi r^2+2\pi r\times\frac{1}{\pi r^2}$$
$$S(r)=\pi r^2+\frac{2}{r^2}$$
$$S'(r)=0 \Leftrightarrow 2\pi r-\frac{2}{r^2}=0\wedge r>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\pi r^3-2}{r^2}=0\wedge r>0$$
$$\Leftrightarrow 2\pi r^3-2=0\wedge r>0$$
$$\Leftrightarrow r^3=\frac{2}{2\pi}\wedge r>0$$
$$r=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	
S'		–	0	+
S		↘		↗
			Mín.	

g é mínima para $r=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ dm

34.



$\overline{AB}=20$

Se um triângulo retângulo está inscrito numa circunferência, então a hipotenusa é um diâmetro.

Sejam x e y os catetos do triângulo:

$$x^2+y^2=20^2 \Leftrightarrow y^2=400-x^2 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y=\sqrt{400-x^2}$$
$$A=\frac{xy}{2}$$
$$A(x)=\frac{x\sqrt{400-x^2}}{2},\ 0<x<20$$
$$A'(x)=\frac{1}{2}\left(x'\sqrt{400-x^2}+x\left(\sqrt{400-x^2}\right)'\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{400-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{400-x^2-x^2}{\sqrt{400-x^2}}=\frac{200-x^2}{\sqrt{400-x^2}}$$
$$A'(x)=0 \Leftrightarrow 200-x^2=0\wedge 0<x<20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=200\wedge 0<x<20 \Leftrightarrow x=10\sqrt{2}$$

	0		$10\sqrt{2}$		20
A'		+	0	–	
A		↗		↘	
			Máx.		

Se $x=10\sqrt{2}$:

$$y=\sqrt{400-\left(10\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{400-200}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

O triângulo retângulo de área máxima é isósceles, cada um dos catetos mede $10\sqrt{2}$ cm e a hipotenusa mede 20 cm.

35. $V=\frac{1}{3}\pi r^2\times h$

$$r^2+h^2=6^2$$
$$r^2=36-h^2$$
$$V(h)=\frac{1}{3}\pi\left(36-h^2\right)h\ =\frac{1}{3}h\left(36h-h^3\right)$$
$$0<h<6$$
$$V'(h)=\frac{1}{3}\pi\left(36-3h^2\right)$$
$$V'(h)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi\left(36-3h^2\right)=0\wedge 0<h<6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 36-3h^2=0\wedge 0<h<6 \ \Leftrightarrow h^2=12\wedge 0<h<6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h=\sqrt{12} \Leftrightarrow h=2\sqrt{3}$$

x	0		$2\sqrt{3}$		6
V'		+	0	–	
V		↗		↘	
			Máx.		

O volume é máximo para $h=2\sqrt{3}$ cm.

$$V\left(2\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}\left[36-\left(2\sqrt{3}\right)^2\right]\times 2\sqrt{3}=$$
$$=\frac{\pi}{3}\times 24\times 2\sqrt{3}=16\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

36. Área do setor circular

$$A=\frac{\theta\times r^2}{2}$$

1 dm^2 = 100 cm^2

$100=\frac{\theta r^2}{2}\Leftrightarrow 200=\theta r^2\Leftrightarrow \theta=\frac{200}{r^2}$

Comprimento do arco de circunferência = θr

$P=2r+\theta r$

$P(r)=2r+\frac{200}{r^2}\times r$

$P(r)=2r+\frac{200}{r},\ r>0$

$P'(r)=2-\frac{200}{r^2}$

$P'(r)=0\Leftrightarrow 2-\frac{200}{r^2}=0\wedge r>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2r^2-200}{r^2}=0\wedge r>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2r^2-200=0\wedge r>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2=100\wedge r>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r=10$

r	0		10	
V'		$-$	0	$+$
P		$\searrow$		$\nearrow$
			Mín.	

Se $r=10$ cm, $\theta=\frac{200}{10^2}$ rad = 2 rad

O perímetro é mínimo para $r=10$ cm e $\theta=2$ rad.

37. $V=\pi r^2\times h$

$h+2\pi r=30\Leftrightarrow h=30-2\pi r$

$V(r)=\pi^2(30-2\pi r)=2\pi(15r^2-\pi^3)$

$V'(r)=2\pi(30r-3\pi r^2)=6\pi r(10-\pi r)$

$V'(r)=0\Leftrightarrow 6\pi r(10-\pi r)=0\wedge r>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(6\pi r=0\vee 10-\pi r=0)\wedge r>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r=\frac{10}{\pi}$

r	0		$\frac{10}{\pi}$	
V'		$+$	0	$-$
V		$\nearrow$		$\searrow$
			Máx.	

$V\left(\frac{10}{\pi}\right)=2\pi\left[15\left(\frac{10}{\pi}\right)^2-\pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^3\right]=$

$=2\pi\left(15\times\frac{100}{\pi^2}-\pi\times\frac{1000}{\pi^3}\right)$

$=2\pi\left(\frac{1500}{\pi^2}-\frac{1000}{\pi^2}\right)=2\pi\times\frac{500}{\pi^2}$

$=\frac{1000}{\pi}$

O volume máximo da embalagem é $\frac{1000}{\pi}$ cm^3 .

38. $f(x)=\frac{4}{x},\ D_f=\mathbb{R}^+$

38.1. $P(x\,,\,f(x))$ ou $P\left(x\,,\frac{4}{x}\right),\ x>0$

$\overrightarrow{OP}=P-O=\left(x\,,\frac{4}{x}\right)$

$\left\|\overrightarrow{OP}\right\|=\sqrt{x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}$

Logo, $d(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}$.

38.2. $d'(x)=\frac{\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)'}{2\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}}=\frac{2x+\frac{0-16\times(x^2)'}{x^4}}{2\sqrt{\frac{x^4+16}{x^2}}}$ $\qquad x>0$

$=\frac{2x+\frac{-16\times 2x}{x^4}}{\frac{2\sqrt{x^4+16}}{x}}=\frac{2x-\frac{32}{x^3}}{\frac{2\sqrt{x^4+16}}{x}}=$

$=\frac{\frac{2x^4-32}{x^3}}{\frac{2\sqrt{x^4+16}}{x}}=\frac{2(x^4-16)x}{2x^3\sqrt{x^4+16}}=\frac{x^4-16}{x^2\sqrt{x^4+16}}$

$d'(x)=0\Leftrightarrow x^4-16=0\wedge x>0\ \Leftrightarrow x=2$

O sinal de d' depende de $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)$

Logo, como $x^2+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, vem:

x	0		2	
d'		$-$	0	$+$
d		$\searrow$		$\nearrow$
			Mín.	

d é mínima para $x=2$

Para $x=2,\ \frac{4}{x}=2$. Logo, $P(2\,,2)$

Pág. 122

1. $f(x)=\frac{a}{x}$

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}$

$f'(2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{a}{2^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -a=\frac{4}{2}\Leftrightarrow a=-2$

Resposta: **(B)**

2. $f'(2)=m_t$

t passa nos pontos $(0\,,1)$ e $(2\,,0)$

$m_t=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

$f'(2)=-\frac{1}{2}$

Se $x=2$

- $-\frac{\sqrt{2x}}{2x}=-\frac{\sqrt{4}}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$
- $\frac{\sqrt{2x}}{2x}=\frac{\sqrt{4}}{4}=\frac{1}{2}$
- $\frac{\sqrt{2x}-2}{2x}=\frac{\sqrt{4}-2}{4}=0$
- $\frac{2-\sqrt{2x}}{2+x}=\frac{2-\sqrt{4}}{2+2}=0$

Apenas $-\frac{\sqrt{2x}}{2x}$ pode definir f'

Resposta: **(A)**

3. $f(2)=4$ e $f(4)=2$

f é contínua em $[2,4]$ e diferenciável em $]2,4[$ dado que f é diferenciável em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema de Lagrange:

$$\exists c\in\,]2,4[\,: f'(c)=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in\,]2,4[\,: f'(c)=\frac{2-4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in\,]2,4[\,: f'(c)=-1$$

Resposta: **(C)**

4.

x	$-\infty$	0		4	
f'	–	0	+	0	–
f	↘		↗		↘
		Mín.		Máx.	

f tem um máximo relativo para $x=4$

Resposta: **(B)**

5. $f'(x)<0, \forall x\in\,]0,2[$

f é estritamente decrescente em $[0,2]$. Logo $f(0)>f(2)$.

Resposta: **(B)**

Pág. 123

6.1. $f(x)=\frac{4x^2-8x+9}{x-2}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x)=\frac{(8x-8)(x-2)-(4x^2-8x+9)\times 1}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{8x^2-16x-8x+16-4x^2+8x-9}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{4x^2-16x+7}{(x-2)^2},\ D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-16x+7=0\wedge x\neq 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{16^2-16\times 7}}{8}\wedge x\neq 2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=\frac{7}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2		$\frac{7}{2}$	$+\infty$
f'	+	0	–		–	0	+
f	↗	–4	↘		↘	20	↗
		Máx				Mín.	

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-4 \text{ e } f\left(\frac{7}{2}\right)=20$$

f é estritamente crescente em $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{7}{2},+\infty\right[$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{1}{2},2\right[$ e em $\left]2,\frac{7}{2}\right]$.

f admite um máximo relativo igual a -4 para $x=\frac{1}{2}$ e um mínimo relativo igual a 20 para $x=\frac{7}{2}$.

6.2. Ponto de tangência:

$$A(5,\ 23)\ ;\ f(5)=\frac{4\times 25-8\times 5+9}{3}=23$$

Declive: $m=f'(5)=\frac{4\times 25-16\times 5+7}{9}=3$

$$y-23=3(x-5)\Leftrightarrow y=3x-15+23\Leftrightarrow y=3x+8$$

6.3. f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Logo, f é contínua em $[-2,1]$ e diferenciável em $]-2,1[$.
Assim, pelo Teorema de Lagrange:

$$\exists c\in\,]-2,1[\,: f'(c)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}$$

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4c^2-16c+7}{(c-2)^2}=\frac{-5-\left(-\frac{41}{4}\right)}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4c^2-16c+7}{(c-2)^2}=\frac{7}{4}\Leftrightarrow\frac{4c^2-16c+7}{(c-2)^2}-\frac{7}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{16c^2-64c+28-7(c^2-4c+4)}{(c-2)^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16c^2-64c+28-7c^2+28c-28=0\wedge c\neq 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9c^2-36c=0\wedge c\neq 2\Leftrightarrow 9c(c-4)=0\wedge c\neq 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c=0\vee c=4$$

Como $c\in\,]-2,1[$, temos $c=0$.

7. $f(0)=0$

$f'(x)=x+\sqrt{x}+1$

7.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0+\sqrt{0}+1=1$

7.2. $\forall x\in[0,+\infty[,\ f'(x)>0$. Logo, f é estritamente crescente em $[0,+\infty[$, pelo que $f(0)$ é o mínimo absoluto de f.

Como $f(0)=0$, temos que: $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)\geq 0$

8. $g(x)=x^2+ax+b\quad (a,\ b\in\mathbb{R})$

$g(1)=2$

$g'(x)=2x+a$

g é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Se $g(1)=2$ é um extremo relativo de g em $[0,5]$:

$$\begin{cases}g(1)=2\\ g'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+a+b=2\\ 2+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2+b=2\\ a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ a=-2\end{cases}$$

9. 16 litros = 16 dm^3

$V=\pi r^2\times h$

$$16=\pi r^2 h\Leftrightarrow h=\frac{16}{\pi r^2}$$

$$A=2A_{\text{base}}+A_{\text{lateral}}=2\pi r^2+2\pi r\times h$$

$$A(r)=2\pi r^2+2\pi r\times\frac{16}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{32}{r}$$

$$A'(r)=4\pi r-\frac{32}{r^2}=\frac{4\pi r^3-32}{r^2},\ r>0$$

$$A'(r)=0\Leftrightarrow 4\pi r^3-32=0\wedge r>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3=\frac{32}{4\pi}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}\Leftrightarrow r=\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$$

r	0		$\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$	
A'		–	0	+
A'		↘		↗
			Mín	

A área é mínima para $r=\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ e $h=\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}=2r$, dado que:

Se $r=\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$, $h=\frac{16}{\pi\times\left(\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2}=\frac{16}{\pi\times\frac{4}{\sqrt[3]{\pi^2}}}=\frac{16\sqrt[3]{\pi^2}}{4\pi}=$

$=4\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{\pi^3}}=4\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}=\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}=2r$

10. Seja $x\in\mathbb{R}^+$

Pretende-se mostrar que $x+\frac{1}{x}\geq 2,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$.

Seja $f(x)=x+\frac{1}{x}\wedge x\in\mathbb{R}^+$.

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\wedge x>0\Leftrightarrow x=1$

	0		1	$+\infty$
f'		–	0	+
f		↘	2	↗
			Mín.	

$f(1)=2$

f é estritamente decrescente em $]0\ ,\ 1]$ e estritamente crescente em $[1\ ,+\infty[$.

Logo, $f(1)=2$ é o mínio absoluto de f, pelo que,

$x+\frac{1}{x}\geq 2,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$

Portanto, a soma de um número positivo com o seu inverso é pelo menos 2.

11. $h(t)=-4{,}9t^2+196t+40$

11.1. $h'(t)=-9{,}8t+196$

$h'(0)=196$ m/s

1 km = 1000 m

1 h = 3600 s

1 s —— 196 m

3600 s —— x

$x=(3600\times 196)$ m = 705 600 m = 705,6 km

$h'(0)=705{,}6$ km/h

11.2. $h'(t)=0\Leftrightarrow -9{,}8t+196=0\Leftrightarrow t=\frac{196}{9{,}8}\Leftrightarrow t=20$

t	0		20	
h'		+	0	–
h	40	↗		↘
			Máx.	

$h(20)=-4{,}9\times 20^2+196\times 20+40=2000$

A altura máxima atingida pelo corpo foi 2000 m.

11.3. $h(t)=0\Leftrightarrow -4{,}9t^2+196t+40=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{-196\pm\sqrt{196^2+4\times 4{,}9\times 40}}{-9{,}8}\wedge t>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{-196\pm\sqrt{39\ 200}}{-9{,}8}\wedge t>0\Leftrightarrow$

$\Rightarrow t\approx 40{,}2$

O corpo esteve no ar durante 40,2 s.

11.4. h é contínua em $[0\ ,\ 20]$ e diferenciável em $]0\ ,\ 20[$, por ser uma função polinomial.

Então, pelo Teorema de Lagrange:

$\exists c\in\ ]0\ ,\ 20[: f'(c)=\frac{f(20)-f(0)}{20-0}$

Portanto, houve um instante em que a velocidade do corpo foi igual à velocidade média nos primeiros 20 segundos.

12. $f(x)=1-x^2$

$P(x\ ,\ f(x))$ ou $P(x\ ,\ 1-x^2)$

12.1. $\overrightarrow{OP}=P-O=(x\ ,\ 1-x^2)$

$\left\|\overrightarrow{OP}\right\|=\sqrt{x^2+(1-x^2)^2}=\sqrt{x^2+1-2x^2+x^4}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

Portanto, $d(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

12.2. $d'(x)=\frac{(x^4-x^2+1)'}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=$

$=\frac{4x^3-2x}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=\frac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$

$d'(x)=0\Leftrightarrow 2x^3-x=0\Leftrightarrow x(2x^2-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee 2x^2-1=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vee x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
x	–	–	–	0	+	+	+
$2x^2-1$	+	0	–	–	–	0	+
d'	–	0	+	0	–	0	+
d	↘		↗		↘		↗
		Mín.		Máx.		Mín.	

A distância é mínima para $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Os pontos do gráfico cuja distância à origem é mínima, tem coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$

Pág. 124

Avaliação global

1. A reta r passa nos pontos (0 , –2) e (4 , 0)

$m_r=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Como r é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m_r=\frac{1}{2}$

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\frac{1}{2}$.

(Opções **(A)** e **(D)**)

Por outro lado, $g(1)=\frac{f(1)}{1}=\frac{0}{1}=0$ (opção **(A)**)

Resposta: **(A)**

2. A reta de equação $y=-2x+4$ é uma assíntota ao gráfico de f:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+2x\right)=4$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)+2x^2}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[f(x)+2x\right]}{f(x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}\times\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+2x\right]=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}\times 4=\frac{1}{-2}\times 4=-2$$

Resposta: **(B)**

Pág. 125

3.

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
f'	+	0	+	0	–
f	↗		↗		↘

Máx.

f é estritamente crescente em $\left]-\infty, b\right] \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[0, b]$ porque $[0, b]\subset\left]-\infty, b\right]$

Resposta: **(B)**

4. $g(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{4x}$

A reta de equação $y=x$ tem declive 1.

$$g'(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{4}{2\sqrt{4x}}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4x}}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$$

Resposta: **(D)**

5.
- Se $x_n=1+\frac{1}{n}\to 1^+$: $\lim f(x_n)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$
- Se $x_n=1-\frac{1}{n}\to 1^-$: $\lim f(x_n)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$
- Se $x_n=\frac{1}{n}+n\to+\infty$: $\lim f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ✓
- Se $x_n=\frac{1}{n}-n\to-\infty$: $\lim f(x_n)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

Resposta: **(C)**

6. $h(t)=-4{,}9t^2+102t$

$h'(t)=-9{,}8t+102$

$h'(10)=(-9{,}8\times10+102)$ m/s = 4 m/s

Resposta: **(A)**

Pág. 126

7. $$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-5x+6}{2x-6} & \text{se } x<3\\ k & \text{se } x=3\\ \frac{\sqrt{3x}-3}{x-3} & \text{se } x>3\end{cases}$$

7.1. f é contínua em $x=3$ se e somente se existir $\lim\limits_{x\to3} f(x)$.

Para tal é necessário que $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=f(3)$.

- $$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-5x+6}{2x-6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to3^-}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{2\cancel{(x-3)}}=$$

	1	–5	6
3		3	–6
	1	–2	$\boxed{0}$

$$=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to3^+}\frac{\left(\sqrt{3x}-3\right)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{3x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{3x-9}{(x-3)\left(\sqrt{3x}+3\right)}=\lim_{x\to3^+}\frac{3(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{3x}+3\right)}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{9}+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

- $f(3)=k$

f é contínua em $x=3$ se e só se $k=\frac{1}{2}$

7.2. Seja $y=mx+b$ a assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x}-3}{x(x-3)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x}-3}{x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{\sqrt{3x}}{x^2}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=$$

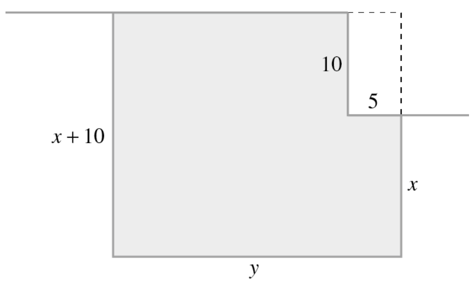
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{3x}{x^4}}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{3}{x^3}}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{0-0}{1-0}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-0x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{\sqrt{3x}}{x}-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{3}{x}}-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{0-0}{1-0}=0$$

A reta de equação $y=0$ assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

8.



8.1. $x+10+y+x=110 \Leftrightarrow y=100-2x$

$A(x+10)\times y-5\times 10$

$A(x)=(x+10)(100-2x)-50=$

$=100x-2x^2+1000-20x-50$

$A(x)=-2x^2+80x+950$

$x>0 \wedge y>0 \Leftrightarrow x>0 \wedge 100-2x \geq 5 \Leftrightarrow x>0 \wedge x \leq 47,5$

8.2. $A'(x)=-4x+80$

$A'(x)=0 \Leftrightarrow -4x+80=0 \Leftrightarrow x=20$

x	0		20		47,5
A'		+	0	–	
A		↗		↘	
			Máx.		

$A(20)=-2\times 20^2+80\times 20+950=1750$

A área máxima é igual a 1750 m^2 para x = 20 m

8.3. $A(x)=1300 \Leftrightarrow -2x^2+80x+950=1300 \wedge 0<x<47,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2+80x-350=0 \wedge 0<x<47,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-80\pm\sqrt{80^2-8\times 350}}{-4} \wedge 0<x<47,5 \Leftrightarrow$

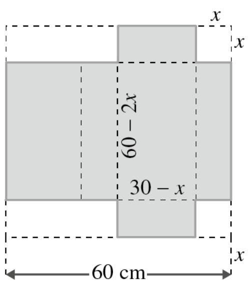
$\Leftrightarrow x=35 \vee x=5$

$x=35$ m , $y=(100-70)$ m = 30 m e $x+10=45$ m ou

$x=5$ m , $y=(100-10)$ m = 90 m e $x+10=15$ m

Pág. 127

9.



9.1. $V(x)=(30-x)(60-2x)x=(1800-60x-60x+2x^2)x=$

$=1800x-120x^2+2x^3$

$V(x)=2x^3-120x^2+1800x$

9.2. $V'(x)=6x^2-240x+1800$ (:8)

$V'(x)=0 \Leftrightarrow 6(x^2-40x+300)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{40\pm\sqrt{1600-1200}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=30 \vee x=10$

Como $0<x<30$, temos x = 10

x	0		10		30
V'		+	0	–	
V		↗		↘	
			Máx.		

O volume da caixa á máximo para x = 10 cm

10. $ABC: x+y+2z-8=0$

10.1. $V\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, h\right)$

Determinemos h sabendo que V pertence ao plano ABC:

$\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}+2h-8=0 \Leftrightarrow a+2h-8=0 \Leftrightarrow 2h=8-a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h=4-\dfrac{a}{2}$

$V_{\text{pirâmide}}=\dfrac{1}{3}A_{\text{base}}\times\text{altura}$

$V(a)=\dfrac{1}{3}a^2\times\left(4-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{3}\times\dfrac{8-a}{2}$

$V(a)=\dfrac{8a^2-a^3}{6}$

10.2. $V'(a)=\dfrac{1}{6}(16a-3a^2)=\dfrac{a}{6}(16-3a)$

$V'(a)=0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{6}(16-3a)=0 \wedge a\in\,]0, 8[\Leftrightarrow a=\dfrac{16}{3}$

x	0		$\frac{16}{3}$		8
V'		+	0	–	
V		↗		↘	
			Máx.		

Para $a=\dfrac{16}{3}$, $h=4-\dfrac{8}{3}=\dfrac{4}{3}$

V é estritamente crescente em $\left]0, \dfrac{16}{3}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\dfrac{16}{3}, 8\right[$.

O volume da pirâmide é máximo para $a=\dfrac{16}{3}$ e $h=\dfrac{4}{3}$.