

Teste de avaliação 1

Págs. 3 e 4

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0 \wedge -2\pi < x \leq 2\pi\} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow A = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 + \tan\left(\frac{\pi+x}{2}\right) = 0 \wedge -2\pi < x \leq 2\pi\right\} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow A = \left\{x \in \mathbb{R} : \tan\left(\frac{\pi+x}{2}\right) = -1 \wedge -2\pi < x \leq 2\pi\right\} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{\pi+x}{2} = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge -2\pi < x \leq 2\pi\right\} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge -2\pi < x \leq 2\pi\right\} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge -2\pi < x \leq 2\pi\right\} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge -2\pi < x \leq 2\pi\right\} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow A = \left\{-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}
 \end{aligned}$$

Resposta: (C)

$$\begin{aligned}
 2. \quad 2\cos^2 \theta - 1 &= \frac{7}{25} \Leftrightarrow 2\cos^2 \theta = \frac{7}{25} + 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 \theta = \frac{32}{25} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos^2 \theta &= \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{4}{5} \vee \cos \theta = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

No entanto, $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, pelo que $\cos \theta < 0$, portanto,

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}.$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{3}{5} \vee \sin \theta = \frac{3}{5}$$

Como $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\sin \theta < 0$, pelo que $\sin \theta = -\frac{3}{5}$.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Logo, } \tan \theta - \sin \theta = \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{27}{20}.$$

Resposta: (B)

3. Por exemplo:

Comprimento do arco da circunferência	Amplitude do ângulo (rad)
$2\pi \times 2$	2π
x	$0,75$
$x = \frac{2\pi \times 2 \times 0,75}{2\pi} \Leftrightarrow x = 1,5$	

Assim, a medida do comprimento do arco da circunferência AB é igual a 1,5.

Resposta: (D)

4. Seja $\overline{DB} = x$, então $\overline{AD} = 24 - x$. Considere-se, ainda, h a medida de comprimento de $[CD]$.

Usando a definição de tangente de um ângulo agudo, de $[ACD]$ e $[CBD]$ vem, respetivamente:

$$\tan 36^\circ = \frac{h}{24-x} \quad \text{e} \quad \tan 52^\circ = \frac{h}{x}$$

Assim, resulta que:

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \tan 36^\circ = \frac{h}{24-x} \\ \tan 52^\circ = \frac{h}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = (24-x) \tan 36^\circ \\ h = x \tan 52^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} h = (24-x) \tan 36^\circ \\ (24-x) \tan 36^\circ = x \tan 52^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} h = (24-x) \tan 36^\circ \\ 24 \tan 36^\circ - x \tan 36^\circ = x \tan 52^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} h = (24-x) \tan 36^\circ \\ 24 \tan 36^\circ = x(\tan 52^\circ + \tan 36^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} h = (24-x) \tan 36^\circ \\ x = \frac{24 \tan 36^\circ}{\tan 52^\circ + \tan 36^\circ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = (24-x) \tan 36^\circ \\ x = \frac{24 \tan 36^\circ}{\tan 52^\circ + \tan 36^\circ} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} h \approx 11,1231 \\ x \approx 8,6903 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } A_{[ABC]} = \frac{24 \times 11,1231}{2} \approx 133,48.$$

Nota: Também podia obter $b = \overline{AC}$ pela lei dos senos e, de seguida, calcular h .

Resposta: (A)

$$5. \quad 4\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{4}$$

Esta equação tem duas soluções distintas no intervalo $[0, 2\pi]$.

Como $100\pi = 50 \times 2\pi$, então a equação tem $50 \times 2 = 100$ soluções distintas que pertencem ao intervalo $[0, 100\pi]$.

Resposta: (C)

6.1. O triângulo $[ORP]$ é retângulo em R já que a reta RP é tangente à circunferência no ponto R e $[OR]$ é um raio dessa circunferência.

Do mesmo modo se conclui que o triângulo $[OSP]$ é retângulo em S .

Além disso, estes dois triângulos são iguais pois têm a hipotenusa comum e dois catetos iguais ($[OR]$ e $[OS]$ são raios da circunferência).

Consequentemente, os ângulos ROP e SOP são iguais, tendo cada um deles amplitude $\frac{\alpha}{2}$.

Portanto:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{RP}}{1} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \overline{RP}$$

Assim, a área do triângulo $[ORP]$ é:

$$\frac{\overline{RP} \times \overline{OR}}{2} = \frac{\overline{RP} \times 1}{2} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$$

Logo, a área do quadrilátero $[ORP]$ que é o dobro da área do triângulo $[ORP]$ é dada, em função de α , por:

$$f(\alpha) = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

6.2. $\overline{RP} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e como $\overline{RP} = \overline{SP}$, então $\overline{SP} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Por outro lado, a amplitude do arco de circunferência SOR é igual a α , pelo que a amplitude do arco de circunferência do RCS é $2\pi - \alpha$.

Assim:

Comprimento do arco da circunferência	Amplitude do ângulo (rad)
$2\pi \times 1$	2π
$\times$	$2\pi - \alpha$
$x = \frac{2\pi \times 1 \times (2\pi - \alpha)}{2\pi}$	

$$\Leftrightarrow x = 2\pi - \alpha$$

Logo, o arco de circunferência RCS tem $2\pi - \alpha$ unidades de comprimento.

A distância percorrida pelo ponto W é igual a

$$\overline{RP} + 2\pi - \alpha + \overline{SP} = 2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\pi - \alpha, \text{ com } \alpha \in]0, \pi[.$$

7. $\cos^4(3\alpha) - \sin^4(3\alpha) =$

$$= [\cos^2(3\alpha) + \sin^2(3\alpha)] \times [\cos^2(3\alpha) - \sin^2(3\alpha)] =$$

$$= 1 \times [\cos^2(3\alpha) - (1 - \cos^2(3\alpha))] =$$

$$= \cos^2(3\alpha) - 1 + \cos^2(3\alpha) =$$

$$= 2\cos^2(3\alpha) - 1$$

8.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = -1 \vee \sin(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é uma expressão geral dos zeros de f .

8.2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin^2(x) - 1 = 2\sin(x) + 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2(x) - 2\sin(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = 3 \vee \sin(x) = -1$$

A equação $\sin(x) = 3$ é impossível, pois:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Portanto:

$$\sin(x) = 3 \vee \sin(x) = -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são as abcissas pedidas.

9. Seja $x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, então:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

Seja $y = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, então:

$$-\frac{1}{2} \cos y \wedge y \in [0, \pi] \Leftrightarrow y = \frac{2\pi}{3}$$

Logo, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\pi$.

Teste de avaliação 2

Págs. 5 e 6

1. $5y + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y - 2 + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$

Logo, $y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ é a equação reduzida da reta r .

O declive da reta r é igual à tangente trigonométrica da inclinação desta reta r , pelo que:

$$-\frac{2}{5} = \tan \alpha \wedge \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

sendo α a inclinação da reta r .

Então, $\alpha = \pi - \arctan\left(\frac{2}{5}\right)$, ou seja, $\alpha \approx 2,8$.

Portanto, a reta r tem uma inclinação de 2,8 rad, aproximadamente.

Resposta: (C)

2. O triângulo equilátero $[ABC]$ tem perímetro $6\sqrt{2}$ pelo que cada um dos lados mede $6\sqrt{2} : 3$, ou seja, $2\sqrt{2}$ unidades.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{BM}) = \overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BM} =$$

$$= \|\overline{AB}\|^2 - \overline{BA} \cdot \overline{BM} =$$

$$= (2\sqrt{2})^2 - \|\overline{BA}\| \times \|\overline{BM}\| \times \cos(\widehat{BA, BM}) =$$

$$= 8 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos 60^\circ = 8 - 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 6$$

Resposta: (B)

3. $\vec{u} \cdot \vec{a} = (-3\sqrt{2}, 9) \cdot (3, \sqrt{2}) = -9\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = (-3\sqrt{2}, 9) \cdot \left(1, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -3\sqrt{2} + \frac{9\sqrt{2}}{3} = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{c} = (-3\sqrt{2}, 9) \cdot \left(\sqrt{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -3\sqrt{12} + \frac{18\sqrt{3}}{3} =$$

$$= -3 \times 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = -6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{d} = (-3\sqrt{2}, 9) \cdot (-9, 3\sqrt{2}) = 27\sqrt{2} + 27\sqrt{2} = 54\sqrt{2}$$

Dois vetores são perpendiculares quando o produto escalar é igual a zero.

Portanto $\vec{u}$ e $\vec{d}$ não são perpendiculares.

Resposta: (D)

4. Sejam $\vec{r}$ e $\vec{n}$ um vetor diretor da reta r e um vetor normal ao plano α , respetivamente.

$$\vec{r}(4, -2, 1) \text{ e } \vec{n}(2, -1, 2k)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow (4, -2, 1) \cdot (2, -1, 2k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 + 2 + 2k = 0 \Leftrightarrow 2k = -10 \Leftrightarrow k = -5$$

Resposta: (A)

5. Seja A o centro da circunferência, interseção do plano α com a superfície esférica, C o centro da superfície esférica e P um ponto da superfície esférica.

Começamos por determinar a distância a que o ponto A deverá estar do ponto C para que a circunferência tenha raio $\sqrt{3}$.

Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{CP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 2^2 = (\sqrt{3})^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 3 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{AC} = -1 \vee \overline{AC} = 1$$

Como $\overline{AC} > 0$, vem $\overline{AC} = 1$.

Tomando planos paralelos aos planos coordenados distanciados do centro da superfície esférica uma unidade, temos que $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 1$, $z = 1$ ou $z = 3$ são possíveis equações para o plano α .

Resposta: (B)

- 6.1. $A(1, 2)$:

$$(1-2)^2 + (2+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (-1)^2 + 3^2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 9 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \text{ (verdade)}$$

O ponto A pertence à circunferência.

$B(-1, 0)$:

$$(-1-2)^2 + (0+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (-3)^2 + 1^2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 + 1 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10 \text{ (verdade)}$$

O ponto B pertence à circunferência.

- 6.2. a) Seja $P(x, y)$ um ponto genérico da reta t e $\bar{w}(2, -1)$

o centro da circunferência.

Então, $\overline{AP} \cdot \overline{AW} = 0$.

$$\overline{AP} = P - A = (x, y) - (1, 2) = (x-1, y-2)$$

$$\overline{AW} = W - A = (2, -1) - (1, 2) = (1, -3)$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{AW} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-2) \cdot (1, -3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1-3(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3(y-2) = x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y-2 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

Portanto, $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ é a equação reduzida da reta t .

- b) Seja $P(x, y)$ um ponto genérico da circunferência de diâmetro $[AB]$.

Então, $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0$

$$\overline{AP} = P - A = (x, y) - (1, 2) = (x-1, y-2)$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-2) \cdot (x+1, y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) + (y-2)y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 + 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2$$

Logo, $x^2 + (y-1)^2 = 2$ é a equação pedida.

- 6.3. $\overline{AC} = C - A = (-3, 5) - (1, 2) = (-4, 3)$

Família dos vetores, não nulos, perpendiculares ao vetor $\overline{AC}$: $(3k, 4k)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Todavia, pretende-se determinar os que têm norma 2, assim:

$$\|(3k, 4k)\| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2 + 16k^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25k^2} = 2 \Leftrightarrow 5|k| = 2 \Leftrightarrow |k| = \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{2}{5} \vee k = \frac{2}{5}$$

Para $k = -\frac{2}{5}$, $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ e para $k = \frac{2}{5}$, $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Logo, $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ e $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ são as coordenadas dos vetores

perpendiculares aos vetores $\overline{AC}$ de norma 2.

- 6.4. Seja $P(x, y)$ um ponto geométrico da reta s .

Então, $\overline{BP} \perp \overline{AC}$, ou seja, $\overline{BP} \cdot \overline{AC} = 0$.

Assim:

$$\overline{AC} = (-4, 3)$$

$$\overline{BP} = P - B = (x, y) - (-1, 0) = (x+1, y)$$

$$\overline{BP} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y) \cdot (-4, 3) = 0 \Leftrightarrow -4(x+1) + 3y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y = 4(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

Logo, $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ é a equação reduzida da reta s .

- 7.1. Os vetores $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são paralelos ao plano ABC .

$$\overline{AB} = B - A = (1, 1, 1) - (2, -1, 1) = (-1, 2, 0)$$

$$\overline{AC} = C - A = (-2, 0, 3) - (2, -1, 1) = (-4, 1, 2)$$

Seja $\bar{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano ABC .

$$\begin{cases} \bar{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \bar{n} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-4, 1, 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 0 \\ -4a + b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ -4(2b) + b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ -8b + b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2c = 7b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{7}{2}b \end{cases}$$

Logo, $\bar{n}\left(2b, b, \frac{7}{2}b\right)$, com $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ define a

família dos vetores, não nulos, normais ao plano ABC .

Por exemplo, para $b = 2$, obtém-se $\bar{n}(4, 2, 7)$ que é

um vetor normal ao plano ABC .

Assim, ABC é o plano que passa no ponto $A(2, -1, 1)$

e que admite $\bar{n}(4, 2, 7)$ como vetor normal.

$$\blacksquare 4(x-2) + 2(y+1) + 7(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 8 + 2y + 2 + 7z - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y + 7z - 13 = 0$$

Portanto, uma equação cartesiana do plano ABC é $4x + 2y + 7z - 13 = 0$.

- 7.2. $\overline{AB}(-1, 2, 0)$ é um vetor diretor da reta AB .

Logo, a reta AB tem a direção do vetor $\overline{AB}$ e passa pelo ponto $A(2, -1, 1)$.

Portanto: $AB: \begin{cases} x = 2 - k \\ y = -1 + 2k, k \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$

7.3. $\vec{s}(1, -3k, 2)$ é um vetor diretor da reta s .

$\vec{n}(4, 2, 7)$ é um vetor normal ao plano ABC .

s é paralela a ABC se e só se:

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (1, -3k, 2) \cdot (4, 2, 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 6k + 14 = 0 \Leftrightarrow 6k = 18 \Leftrightarrow k = 3$$

8.1. $\alpha: 2x - 2y + z - 1 = 0$

$$C(3, -1, 2)$$

$\vec{r}(2, -2, 1)$ é um vetor perpendicular a α . Logo, é um vetor diretor da reta r .

$$r: (x, y, z) = (3, -1, 2) + k(2, -2, 1), k \in \mathbb{R}$$

8.2. O ponto de tangência é o ponto de interseção de r com α .

Todo o ponto de r é da forma $(3 + 2k; -1 - 2k, 2 + k), k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas deste ponto na equação de α ,

obtemos:

$$2(3 + 2k) - 2(-1 - 2k) + 2 + k - 1 = 0 \Leftrightarrow 9k + 9 = 0 \Leftrightarrow k = -1$$

Se $k = -1$, $3 + 2k = 1$, $-1 - 2k = 1$ e $2 + k = 1$

Logo, a reta r interseca α no ponto $A(1, 1, 1)$.

O raio r da superfície esférica é:

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

A equação pedida é $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

9. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee$$

$$\vee x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee$$

$$\vee x - \frac{x}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{3x}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{15} + \frac{8k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{2\pi}{9} + \frac{8k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Teste de avaliação 3

Págs. 7 e 8

1. $a_2 = 3 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_2 = \frac{5}{2}$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow a_3 = \frac{4}{3} \text{ e } a_4 = 3 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_4 = \frac{11}{4}$$

$$b_2 = 3 - \frac{1}{b_1} \Leftrightarrow b_2 = 3 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow b_2 = \frac{8}{3}$$

$$b_3 = 3 - \frac{1}{b_2} \Leftrightarrow b_3 = 3 - \frac{1}{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow b_3 = 3 - \frac{3}{8} \Leftrightarrow b_3 = \frac{21}{8}$$

$$b_4 = 3 - \frac{1}{b_3} \Leftrightarrow b_4 = 3 - \frac{1}{\frac{21}{8}} \Leftrightarrow b_4 = 3 - \frac{8}{21} \Leftrightarrow b_4 = \frac{55}{21}$$

Assim:

$$a_3 - b_2 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}, \text{ logo } a_3 - b_2 < 0.$$

$$b_3 - a_2 = \frac{21}{8} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}, \text{ logo } b_3 - a_2 > 0.$$

$$\frac{b_4}{a_4} = \frac{\frac{55}{21}}{\frac{11}{4}} = \frac{20}{21}, \text{ logo } \frac{b_4}{a_4} < 1.$$

$$\frac{a_4}{b_3} = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{21}{8}} = \frac{22}{21}, \text{ logo } \frac{a_4}{b_3} > 1.$$

Resposta: (D)

2. Seja $u_n = 2n$.

O menor e o maior número par que se pretende somar são o 110 e o 450, respetivamente.

Assim, $u_{55} = 110$ e $u_{225} = 450$.

Seja S a soma pedida:

$$S = S_{225} - S_{54} = \frac{2+450}{2} \times 225 - \frac{2+108}{2} \times 54 =$$

$$= 50\,850 - 2970 = 47\,880$$

Logo, a soma de todos os números pares compreendidos entre 109 e 451 é 47 880.

Resposta: (C)

3. $u_4 = u_1 \times r^3$, onde r é a razão de progressão geométrica (u_n) .

$$\frac{16}{27} = 2 \times r^3 \Leftrightarrow \frac{16}{54} = r^3 \Leftrightarrow \frac{8}{27} = r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$$

Como $u_1 = 2$ e $r = \frac{2}{3}$, o termo geral é:

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2 \times \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \Leftrightarrow u_n = \frac{2^{1+n-1}}{3^{n-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2^n}{3^{n-1}} \Leftrightarrow u_n = 2^n \times 3^{1-n}$$

Logo, $u_n = 2^n \times 3^{1-n}$.

Resposta: (A)

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{n - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(n - \frac{4}{n}\right)}{n \left(1 - \frac{4}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{4}{n}}{1 - \frac{4}{n}} = \frac{+\infty - 0}{1 - 0} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(n - \frac{4}{n}\right)}{n \left(\frac{1}{n} - 1\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{4}{n}}{\frac{1}{n} - 1} = \frac{+\infty - 0}{0 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{2n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)}{n^2 \left(2n + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{2n + \frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{+\infty+0} = 0$$

Resposta: (D)

5. f é uma função par $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$$

- f é uma função ímpar $\Leftrightarrow \forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$
- $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ e
 $f(-x) = \cos(-x) + \sin(-x) = \cos x - \sin x$
 Logo, para algum $x \in D_f$, $f(-x) \neq f(x)$ e
 $f(-x) \neq -f(x)$, pelo que f não é par nem é ímpar.
- $g(x) = \cos(x) + \tan^2(x)$
 $\forall x \in D_g, -x \in D_g$ e
 $g(-x) = \cos(-x) + \tan^2(-x) = \cos x + [\tan(-x)]^2 =$
 $= \cos x + (-\tan x)^2 = \cos x + \tan^2 x = g(x)$

Logo, g é uma função par.

- $h(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1$
 $\forall x \in D_h, -x \in D_h$ e
 $h(-x) = \sin\left(-\frac{x}{2}\right) - 1 = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1$
 Logo, para algum $x \in D_h$, $h(-x) \neq h(x)$ e
 $h(-x) = -h(x)$, pelo que, h não é par nem ímpar.
- $j(x) = \sin(x) + \tan(x)$
 $\forall x \in D_j, -x \in D_j$ e
 $j(-x) = \sin(-x) + \tan(-x) = -\sin(x) - \tan(x)$
 $= (-\sin(x) + \tan(x)) = j(x)$

Logo, j é uma função ímpar.

Resposta: (B)

6.1. Seja n um número natural qualquer.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1-3(n+1)}{(n+1)+4} - \frac{1-3n}{n+4} = \frac{-3n-2}{n+5} - \frac{1-3n}{n+4} \\ &= \frac{(-3n-2)(n+4) - (1-3n)(n+5)}{(n+5)(n+4)} = \\ &= \frac{-3n^2 - 12n - 2n - 8 - n - 5 + 3n^2 + 15n}{(n+5)(n+4)} = \\ &= \frac{-13}{(n+5)(n+4)} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-13}{(n+5)(n+4)} < 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$$

Portanto, (u_n) é uma sucessão estritamente decrescente.

$$\begin{aligned} 6.2. \quad u_n &= \frac{1-3n}{n+4} = 3 - \frac{13}{n+4} \\ 0 &< \frac{13}{n+4} \leq \frac{13}{1+4} \Leftrightarrow \frac{3n-1}{-3n-12} \leq \frac{n+4}{3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{13}{5} \leq -\frac{13}{n+4} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 - \frac{13}{5} \leq 3 - \frac{13}{n+4} < 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq u_n < 3 \end{aligned}$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 3$

$$6.3. \quad v_n = \begin{cases} \frac{-1}{1+n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{1+n^2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$v_1 = -\frac{1}{2}, v_2 = \frac{1}{5} \text{ e } v_3 = -\frac{1}{10}$$

Portanto, $v_1 < v_2$ e $v_2 > v_3$, pelo que (v_n) não é monótona.

Por outro lado, para n ímpar $-\frac{1}{2} \leq v_n < 0$ e, para n par,

$$0 < v_n \leq \frac{1}{5}. \text{ Assim, } \forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{2} \leq v_n \leq \frac{1}{5}, \text{ pelo que a}$$

sucessão (v_n) é minorada e majorada e, portanto, é limitada.

$$\text{Conjunto dos majorantes: } \left[\frac{1}{5}, +\infty \right[$$

$$\text{Conjunto dos minorantes: } \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$$

7. Seja (u_n) uma progressão geométrica e sejam $x-1$, $x+3$ e $3x+1$ os três primeiros termos.

Se $x-1$, $x+3$ e $3x+1$ são termos consecutivos, então as

razões $\frac{3x+1}{x+3}$ e $\frac{x+3}{x-1}$ são iguais à razão de progressão

geométrica (u_n) . Igualando as duas razões, obtemos:

$$\frac{3x+1}{x+3} = \frac{x+3}{x-1} \Leftrightarrow (3x+1)(x-1) = (x+3)^2 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = x^2 + 6x + 9 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (-5)}}{2} \wedge x \neq 3 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{4+6}{2} \vee x = \frac{4-6}{2} \right) \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 5 \vee x = -1) \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 5 \vee x = -1) \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

Se $x = -1$, temos $u_1 = -2$, $u_2 = 1$ e $u_3 = -2$, pelo que a sucessão (u_n) não é, neste caso, estritamente crescente.

Se $x = 5$, temos $u_1 = 4$, $u_2 = 8$ e $u_3 = 16$.

Portanto, são estes os três primeiros termos consecutivos da sucessão (u_n) .

Uma expressão do termo geral da progressão geométrica (u_n) pode ser dada por $u_n = 4 \times 2^{n-1}$, ou seja, $u_n = 2^{n+1}$.

$$\begin{aligned} 8.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{4n^2+1}+5n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}+5n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+5\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+5} = \frac{1+0}{\sqrt{4+0}+5} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 3^n}{3^{n+1} - 2^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \times 4 - 3^n}{3^n \times 3 - (2^2)^n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \times 4 - 3^n}{3^n \times 3 - 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^n \times 4}{3^n} - \frac{3^n}{3^n}}{\frac{3^n \times 3}{3^n} - \frac{4^n}{3^n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3 - 1} = \frac{4 - 0}{0 - 1} = -4
 \end{aligned}$$

$$8.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} : \frac{3}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{n+2}{3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 8.4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+2} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{3n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3n+2})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2-n}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{2}{n} \right)}{\sqrt{n} \left[\sqrt{3 + \frac{2}{n}} + 1 \right]} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n}}{\sqrt{3 + \frac{2}{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{n} \times \frac{2+0}{\sqrt{3+0}+1} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \times \frac{2}{\sqrt{3}+1} = +\infty \times \frac{2}{\sqrt{3}+1} = +\infty
 \end{aligned}$$

9. O ponto V pertence ao semieixo positivo das cotas, pelo que as suas coordenadas são do tipo $(0, 0, z)$, $z > 0$.

Por outro lado, este ponto também pertence ao plano ABV. Assim, $3 \times 0 + z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = 6$, logo $V(0, 0, 6)$.

O ponto A pertence ao plano xOy, pelo que tem cota nula, mas também, pertence ao plano ABV, logo:

$$3x + 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, $A(2, -2, 0)$ e, consequentemente, $B(2, 2, 0)$.

$\overrightarrow{AV}$ e $\overrightarrow{BV}$ são vetores diretores das retas AV e BV, respetivamente.

$$\overrightarrow{VA} = A - V = (2, -6, -6)$$

$$\overrightarrow{VB} = B - V = (2, 2, -6)$$

$$\|\overrightarrow{VA}\| = \|\overrightarrow{VB}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{44}$$

$$\cos(\widehat{VA, VB}) = \frac{\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{VB}}{\|\overrightarrow{VA}\| \|\overrightarrow{VB}\|} =$$

$$= \frac{2 \times 2 - 2 \times 2 + 6 \times 6}{\sqrt{44} \times \sqrt{44}} = \frac{36}{44} = \frac{9}{11}$$

$$\widehat{AVB} = \arccos\left(\frac{9}{11}\right) \approx 35,1^\circ$$

A amplitude do ângulo AVB é, aproximadamente, $35,1^\circ$.

Construindo a tabela de sinais vem:

x	$-\infty$	-3		-2	$+\infty$
$2x+6$	-	0	+	+	+
$x+2$	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	n.d.	+

Portanto, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup]-2, +\infty[$.

Resposta: (B)

2. A função g é contínua em $x = -1$ se e só se existe

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x).$$

Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ existe quando e apenas quando

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = g(-1).$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x^2 + 4x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4 \times (-1)^2 + 4 \times (-1)}{-1+1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (4x) = -4
 \end{aligned}$$

$$g(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (4x - 2k) = -4 - 2k$$

Logo, $-4 - 2k = -4 \Leftrightarrow -2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$.

Resposta: (C)

3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 12x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \vee (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f'	-	0	+	+	+
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

Mín.

Portanto,

■ f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$

■ f tem um mínimo para $x = 0$, sendo esse mínimo $f(0) = -2$.

Resposta: (B)

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x) + 2x}{x} = 6 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{g(x)}{x} + 2 \right) = 6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} + 2 = 6 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 4$

Logo, o declive da reta que é assíntota oblíqua ao gráfico de g é igual a 4.

Das condições dadas a única que garante este pressuposto é a equação $y = 4x$.

Resposta: (B)

5. $u_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
 $u_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{Logo, } u_2 - u_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Resposta: (A)

Teste de avaliação 4

Págs. 9 e 10

1. $2x+6=0 \Leftrightarrow x=-3$
 $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

6.1. $D_f = \mathbb{R}$

■ Em $]-\infty, 6[$:

f é contínua por ser definida pelo quociente de funções contínuas: ambas funções polinomiais.

■ Em $]6, +\infty[$:

f é contínua por ser definida pelo quociente de funções contínuas: uma é a diferença entre a raiz quadrada de uma função afim e uma função constante e a outra é uma função afim.

■ Em $x = 6$:

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x^2 - 1}{x - 13} = \frac{6^2 - 1}{6 - 13} = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{\sqrt{4x+1} - 5}{x - 6} = \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{(\sqrt{4x+1} - 5)(\sqrt{4x+1} + 5)}{(x - 6)(\sqrt{4x+1} + 5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{(\sqrt{4x+1})^2 - 5^2}{(x - 6)(\sqrt{4x+1} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{4x + 1 - 25}{(x - 6)(\sqrt{4x+1} + 5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{4x - 24}{(x - 6)(\sqrt{4x+1} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{4(x - 6)}{(x - 6)(\sqrt{4x+1} + 5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{4}{\sqrt{4x+1} + 5} = \frac{4}{\sqrt{4 \times 6 + 1} + 5} = \frac{4}{5 + 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$f(6) = \frac{2}{5}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = f(6)$, podemos

concluir que não existe $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ e, conseqüentemente,

a função f não é contínua em $x = 6$.

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{6\}$.

6.2. $f(x) \leq -3 \wedge x < 6 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 13} \leq -3 \wedge x < 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 13} + 3 \leq 0 \wedge x < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 + 3(x - 13)}{x - 13} \leq 0 \wedge x < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - 40}{x - 13} \leq 0 \wedge x < 6 \quad (1)$$

■ $x^2 + 3x - 40 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-40)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -8$$

■ $x - 13 = 0 \Leftrightarrow x = 13$

Vamos, agora, construir uma tabela tendo em conta que $x < 6$.

x	$-\infty$	-8		5		6
$x^2 + 3x - 40$	+	0	-	0	+	
$x - 13$	-	-	-	-	-	
$\frac{x^2 + 3x - 40}{x - 13}$	-	0	+	0	-	

Voltando a (1), temos que:

$$\frac{x^2 + 3x - 40}{x - 13} \leq 0 \wedge x < 6 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -8] \cup [5, 6[$$

7. A afirmação (A) é falsa.

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

A afirmação (B) é falsa.

Como $f(x) = -2$ é impossível, $f(x) = k$ é possível para qualquer número real $k \neq -2$.

A afirmação (C) é falsa.

f é estritamente crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

8.1. $f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^3)'(x^2 - 1) - x^3(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} =$

$$= \frac{3x^2(3x^2 - 1) - x^3(2x)}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 0 \vee x^2 - 3 = 0) \wedge (x^2 - 1)^2 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

Logo, a função f' tem apenas um zero, $x = \sqrt{3}$.

Vamos construir uma tabela de variação.

x	0		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'		-		-	0	+
f		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Mín.

Intervalos de monotonia: f é estritamente decrescente em $]0, 1[$ e em $]1, \sqrt{3}]$ e é estritamente crescente em

$$[\sqrt{3}, +\infty[.$$

Extremos: $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ é mínimo relativo.

8.2. f é contínua em $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ pois é definida pelo quociente de

duas funções contínuas: ambas funções polinomiais.

0 e 1 são pontos aderentes ao domínio que não lhe pertencem.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0, \text{ como o limite não é infinito,}$$

então a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Assim, e como $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, a reta de equação $y = x$ é a

única assíntota não vertical ao gráfico de f .

Conclusão: $x = 1$ e $y = x$ são as equações das assíntotas ao gráfico de f .

9. O declive da reta r é $f'(a)$, pelo que a equação reduzida da reta r é do tipo $y = f'(a)x + b$.

Por outro lado, sabemos que a reta r passa pelo ponto de coordenadas $(a, f(a))$, logo $f(a) = f'(a)a + b$, donde

$$b = f(a) - f'(a)a. \text{ Assim, } y = f'(a)x + b \text{ e}$$

$$b = f(a) - f'(a)a. \text{ Portanto, } y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a.$$

Teste de avaliação 5

Págs. 11 e 12

1. A reta dos mínimos quadrados tem declive negativo pois o coeficiente de correlação r é negativo (existe associação linear negativa). Logo, a opção (B) é excluída. Por outro lado, o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, isto é, $(4, 5)$, pertence à reta de mínimos quadrados.

$$\text{Assim, } y = -\frac{1}{2}x + 7 \text{ é das equações dadas a única que pode}$$

ser a da reta dos mínimos quadrados.

Resposta: (D)

2. Nos gráficos I e III a associação linear entre as variáveis estatísticas x e y é positiva e no gráfico II essa associação é negativa. Por outro lado, a associação linear entre as variáveis estatísticas x e y é mais forte no gráfico I que no gráfico III, pelo que o coeficiente de correlação associado ao gráfico I é maior que o coeficiente de correlação associada ao gráfico III. O coeficiente de correlação associado ao gráfico II é negativo, já nos outros dois gráficos é positivo.

Resposta: (C)

3. $e_A = 3,2 - 0,4 \times 2 - 0,2 = 2,2$; $e_B = 1,8 - 0,4 \times 3 - 0,2 = 0,4$; $e_C = 4,4 - 0,4 \times 4 - 0,2 = 2,6$.
Seja S a soma pedido, então $S = 2,2 + 0,4 + 2,6 = 5,2$.

Resposta: (B)

4. $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $u_2 = \cos(\pi) = -1$ e $u_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Como $u_1 > u_2$ e $u_2 < u_3$, podemos concluir que (u_n) não é crescente nem decrescente.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq 1$, logo a sucessão (u_n) é minorada e majorada, pelo que é limitada.

Resposta: (D)

5. $f'(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)' = 2x + \frac{1}{x^2}$

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 é igual a $f'(-1)$. Assim:

$$f'(-1) = 2 \times (-1) + \frac{1}{(-1)^2} = -2 + 1 = -1$$

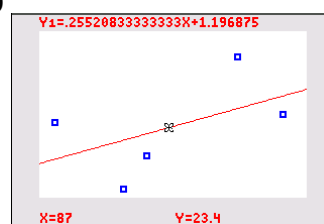
Resposta: (A)

- 6.1. Seja x a variável número de golos marcados e y a variável número de cartões amarelos.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 i}{5} = \frac{435}{5} = 87 \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = \frac{117}{5} = 23,4$$

Portanto, a média do número de golos marcados é 87 e a média do número de cartões amarelos é 23,4.

- 6.2. a)



b) $SS_x = \sum_{i=1}^5 (x_i - 87)^2 = 576$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{10326 - 5 \times 87 \times 23,4}{576} \approx 0,26$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} \approx 1,20$$

Portanto, $y = 0,26x + 1,20$ é a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados pedida.

7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(2+h) - d(2)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2+h)^2 - 10(2+h) + 60] - [2^2 - 10 \times 2 + 60]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 20 - 10h + 60 - 44}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h-6) = -6$$

Interpretação: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(2+h) - d(2)}{h} = d'(2) = -6$ significa que a velocidade no instante $t = 2$ é igual a -6 cm/s.

8. $2 \cos(6\pi - x) + 3 \sin\left(-x - \frac{19}{2}\pi\right) + 4 \tan(-x + 80\pi) =$

$$= 2 \cos(-x) + 3 \sin\left(-x - \frac{16\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) + 4 \tan(-x) =$$

$$= 2 \cos(x) + 3 \sin\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right) + 4 \tan(-x) =$$

$$= 2 \cos(x) - 3 \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - 4 \tan(x) =$$

$$= 2 \cos(x) - 3(-\cos(x)) - 4 \tan(x) =$$

$$= 2 \cos(x) + 3 \cos(x) - 4 \tan(x) =$$

$$= 5 \cos(x) - 4 \tan(x)$$

- 9.1. As retas r e s definem um plano pois são retas concorrentes: passam ambas no ponto $A(0, 1, -1)$ e têm direções diferentes.

$\vec{r}(1, 3, 2)$ e $\vec{s}(2, 1, -1)$ são vetores diretores das retas r e s , respectivamente.

- 9.2. Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano definido pelas

retas r e s , então,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 3, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b + 2c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b - 2c \\ 2(-3b - 2c) + b - c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b - 2c \\ -6b - 4c + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b - 2c \\ -5b - 5c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3(-c) - 2c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -c \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{n}(c, -c, c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é a família dos vetores,

não nulos, perpendiculares ao plano definido pelas retas r e s .

Por exemplo, se $c = 1$, $\vec{n}(1, -1, 1)$ é um desses vetores.

Como o plano passa pelo ponto $A(0, 1, -1)$, vem que:

$$\begin{aligned} 1(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z + 1) &= 0 \Leftrightarrow x - y + 1 + z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y + z + 2 = 0 \end{aligned}$$

Logo, $x - y + z = 0$ é uma equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s .

Teste de avaliação global

Págs. 13 a 15

1. Temos que $\overline{AD} = 50$, então, $\overline{BD} = 50 - \overline{AB}$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \text{ e } \overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2$$

Por outro lado, sabemos que $\overline{BC} = \overline{BE}$, portanto,

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{AB}^2 + 30^2 = (50 - \overline{AB})^2 + 40^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{AB}^2 + 900 = 2500 - 100\overline{AB} + \overline{AB}^2 + 1600 \\ &\Leftrightarrow 900 = 4100 - 100\overline{AB} \\ &\Leftrightarrow 100\overline{AB} = 3200 \\ &\Leftrightarrow \overline{AB} = 32 \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{AB} = 32$ e $\overline{BD} = 50 - 32 = 18$

Usando as razões trigonométricas, vem:

$$\tan(\hat{CBA}) = \frac{30}{32}, \text{ ou seja,}$$

$$\hat{CBA} = \arctan\left(\frac{30}{32}\right) \wedge \hat{CBA} \in]-90^\circ, 90^\circ[\text{ e } \tan(\hat{DBE}) = \frac{40}{18},$$

$$\text{ou seja, } \hat{DBE} = \arctan\left(\frac{40}{18}\right) \wedge \hat{DBE} \in]-90^\circ, 90^\circ[.$$

$$\text{Logo, } \theta = 180^\circ - \arctan\left(\frac{30}{32}\right) - \arctan\left(\frac{40}{18}\right) \approx 71,1^\circ$$

Resposta: (C)

2. $r: 4x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y = -4x + 3 \Leftrightarrow y = -2x + \frac{3}{2}$

O declive da reta r é -2 , pelo que o declive de uma reta perpendicular à reta r é $\frac{1}{2}$.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{2} \Leftrightarrow x-2 = 2y+1 \Leftrightarrow 2y = x-2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1: \text{ o declive é } \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (x, y) &= (4, 3) + k(4, 2), k \in \mathbb{R}; \text{ o vetor diretor é } \\ &\vec{u}(4, 2), \text{ pelo que o declive é } \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (x, y) &= \lambda(-10, -5), \lambda \in \mathbb{R}; \text{ vetor diretor é } \\ &\vec{v}(-10, -5), \text{ pelo que o declive é } \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{x}{2} = 3 - y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3; \text{ o declive é } -\frac{1}{2}.$$

Resposta: (D)

$$\begin{aligned} 3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3n}{n+4} + 3^{n+5} \times 2^{-2n} \right)^{(\infty \times 0)} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3n}{n+4} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{n+5} \times 2^{-2n}) = \\ &= -3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+5}}{2^{2n}} \right) = -3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+5}}{4^n} = -3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \times 3^5}{4^n} = \\ &= -3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \times 3^5 = -3 + 0 \times 3^5 = -3 \end{aligned}$$

Resposta: (A)

$$\begin{aligned} 4. \quad f'(x) \left(x - 4(\sqrt{x})^3 \right)' &= 1 - 4 \times 3(\sqrt{x})^2 \times (\sqrt{x})' = \\ &= 1 - 12(\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - 6\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } f'(8) = 1 - 6\sqrt{8} = 1 - 6 \times 2\sqrt{2} = 1 - 12\sqrt{2}.$$

Resposta: (B)

5. Ao primeiro gráfico corresponde o coeficiente de correlação maior visto que a associação linear entre as variáveis é positiva, o que não acontece em qualquer dos outros três gráficos. Ao gráfico C corresponde um coeficiente de correlação nulo, já que não existe associação linear entre as variáveis. Ao gráfico B e ao gráfico D correspondem coeficientes de correlação negativos, visto que ambos apresentam uma associação linear entre as variáveis negativa. Por outro lado, a associação linear do gráfico B é mais forte que a associação linear do gráfico D , portanto, o coeficiente de correlação do gráfico B está mais próximo de -1 que a correlação do gráfico D . Logo, $r_2 < r_4 < r_3 < r_1$.

Resposta: (B)

- 6.1. A função f é contínua em $x = 0$ quando e apenas quando existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe se e somente se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2\sqrt{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \right) = \\ &= 2\sqrt{3} \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{3} = \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{3} = f(0) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{3}x) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, então, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e, portanto, a função f não é contínua em $x = 0$.

$$\begin{aligned} 6.2. \quad f(x) = 0 &\Leftrightarrow \left[2\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0 \wedge x \leq 0 \right] \vee \\ &\vee \left[x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{3}x = 0 \wedge x > 0 \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \wedge x \leq 0 \right] \vee \\ &\vee \left[x(x - \sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0 \wedge x > 0 \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \\ &\vee \left[(x = 0 \vee x - \sqrt{6} - \sqrt{3} = 0) \wedge x > 0 \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\left(x = \frac{11}{12}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{19}{12}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \wedge x \leq 0 \right] \vee \\ &\vee x = \sqrt{6} + \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{11}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^- \vee x = \frac{19}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^- \vee \\ &\vee x = \sqrt{6} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

7.1. O quadrado $[ABCD]$ tem área igual a 16 unidades quadradas, pelo que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 4$. Portanto, $B(6, 0, 0)$ e $V(2, -4, 5)$.

Determinemos um vetor diretor da reta BV .

$$\overline{BV} = V - B = (2, -4, 5) - (6, 0, 0) = (-4, -4, 5)$$

Temos as equações paramétricas da reta BV :

$$\begin{cases} x = 6 - 4\lambda \\ y = -4\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 7.2. \quad A(6, -4, 0), B(6, 0, 0) \text{ e } V(2, -4, 5) \\ \overline{VA} = A - V = (6, -4, 0) - (2, -4, 5) = (4, 0, -5) \\ \overline{VB} = B - V = (6, 0, 0) - (2, -4, 5) = (4, 4, -5) \\ \|\overline{VA}\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \\ \|\overline{VB}\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{57} \\ \overline{VA} \cdot \overline{VB} = (4, 0, -5) \cdot (4, 4, -5) = \\ = 4 \times 4 + 0 \times 4 + (-5) \times (-5) = 16 + 25 = 41 \end{aligned}$$

O ângulo α é o ângulo formado pelos vetores $\overline{VA}$ e $\overline{VB}$, pelo que:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos(\widehat{\overline{VA}, \overline{VB}}) = \frac{\overline{VA} \cdot \overline{VB}}{\|\overline{VA}\| \times \|\overline{VB}\|} = \frac{41}{\sqrt{41} \times \sqrt{57}} = \\ &= \frac{41\sqrt{41}}{\sqrt{41} \times \sqrt{41} \times \sqrt{57}} = \frac{41}{\sqrt{57}} \end{aligned}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

Logo, temos que o valor exato de $\sin^2 \alpha$ é:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{41}{\sqrt{57}}\right)^2 = 1 - \frac{41}{57} = \frac{16}{57}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) + 1} = \frac{\frac{u_n}{2} + \frac{1}{2u_n} - 1}{\frac{u_n}{4} + \frac{1}{u_n} + 1} = \\ &= \frac{\frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2u_n}}{\frac{u_n^2 + 1 + 2u_n}{2u_n}} = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2 + 2u_n + 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{(u_n + 1)^2} = v_n^2 \end{aligned}$$

9.1. Para $x > 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^2 - 10x + 9}{x - 1} \right)' = \\ &= \frac{(2x^2 - 10x + 9)'(x - 1) - (2x^2 - 10x + 9)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{(4x - 10)(x - 1) - (2x^2 - 10x + 9) \times 1}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{4x^2 - 4x - 10 + 10 - 2x^2 + 10x - 9}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2} = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 4x + 1 = 0 \wedge (x - 1)^2 \neq 0) \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \wedge x \neq 1 \right) \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{4 + \sqrt{8}}{4} \vee x = \frac{4 - \sqrt{8}}{4} \right) \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} \vee x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} \right) \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	1		$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'		-	0	+
f		$\searrow$		$\nearrow$

Mín.

$f\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é o mínimo absoluto de f , pelo que a abcissa do

ponto A é $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9.2. Uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -3 é: $y - f(-3) = f'(-3)(x + 3)$

$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$$

$$\text{Para } x \leq 1, \quad f'(x) = (x^2 + 2x)' = 2x + 2.$$

$$f'(-3) = 2 \times (-3) + 2 = -6 + 2 = -4$$

$$\text{Logo, } y - 3 = -4(x + 3) \Leftrightarrow y = -4x - 12 + 3 \Leftrightarrow y = -4x - 9.$$

Assim, $y = -4x - 9$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -3.