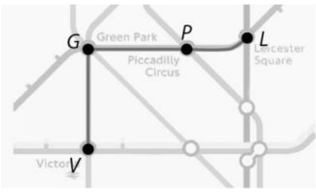
Modelos matemáticos

1.1. Modelos de grafos

Pág. 8



Pág. 10

1.1. $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

1.2. $A = \{BB, BC, BE, EB, EC, CD, DE, EF, FD, DF\}$

1.3. A, G e H

1.4. BE e EB; DF e FD

1.5. BB e DD

Pág. 11

2.1. **a)** D e C **b)** D e E
c) DA e BA **d)** DC e AB

2.2. Duas. CB e AB

Pág. 13

3.1. Por exemplo, AED ou $ABCD$

3.2. $EDCBAE$ e EFE

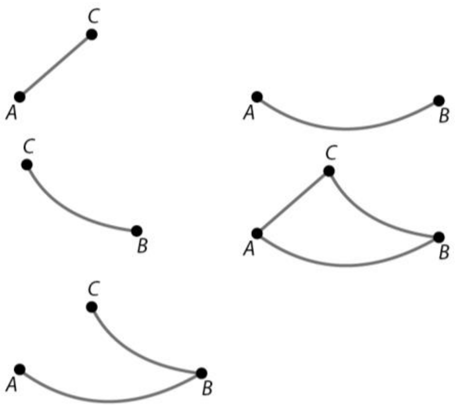
4. Por exemplo:

4.1. Aa_2Ba_4C e $Aa_1Fa_7Ea_6Da_5C$

4.2. $Ca_5Da_6Ea_7Fa_1Aa_2Ba_4C$ e $Ca_4Ba_2Aa_1Fa_8Ea_6Da_5C$

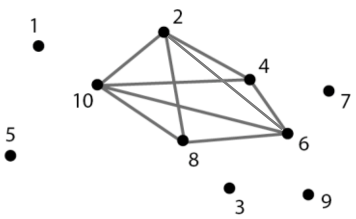
Pág. 14

5.



Pág. 15

6.1. 8 arestas



6.2.

Vértice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Grau	0	4	0	3	0	4	0	3	0	4

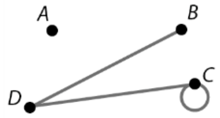
$0 + 4 + 0 + 3 + 0 + 4 + 0 + 3 + 0 + 4 = 18$

$18 = 2 \times 9$

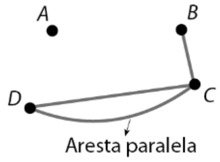
Pág. 16

7.1. Como a soma dos graus $(1 + 2 + 3 + 3 = 9)$ é ímpar.
9 não pode ser o dobro de um número inteiro de arestas (o dobro de um número inteiro é sempre um número par).
Assim sendo, não é possível construir o grafo.

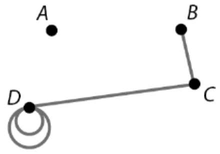
7.2. **a)**



ou



b)



Pág. 17

8.1. De $|A| = \frac{n(n-1)}{2}$

vem que:

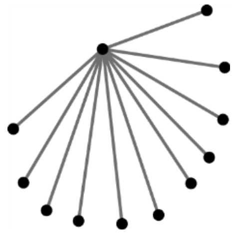
$2|A| = n(n-1)$

$66 = \frac{n(n-1)}{2}$

$132 = n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - n = 132 \Leftrightarrow$

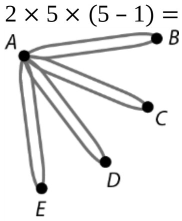
$\Leftrightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{n = -11} \vee n = 12$



Resposta: 12 primos

8.2. $2 \times 5 \times (5 - 1) = 2 \times 5 \times 4 = 40$



$A \rightarrow B = 2$, $C = 2$, $D = 2$, $E = 2$

$C \rightarrow A = 2$, $B = 2$, $D = 2$, $E = 2$

$B \rightarrow A = 2$, $C = 2$, $D = 2$, $E = 2$

$D \rightarrow A = 2$, $B = 2$, $C = 2$, $D = 2$

$E \rightarrow A = 2$, $B = 2$, $C = 2$, $D = 2$

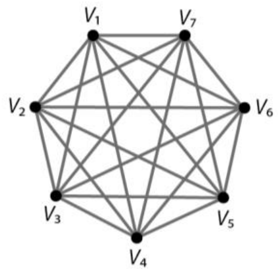
ou

$4 \times 2 \times 5 = 40$

Resposta: 40 beijos

Pág. 18

9.1.



9.2. $|A| = \dfrac{7(7-1)}{2} = 21$

Resposta: 21 arestas

9.3. Cada vértice tem grau 6 $(n-1)$.

Resposta: Grau 6

Pág. 19

10. O grafo não é bipartido pois há arestas a ligar os vértices do mesmo conjunto.

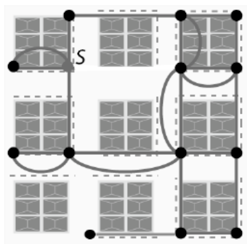
$V = \{A, B, C, D, E, F\}$ $\quad V = V_1 \cup V_2$

$V_1 = \{B, D, F\}$; $V_2 = \{C, E, A\}$

Nota: Cada extremo de uma aresta tem de estar em conjuntos diferentes.

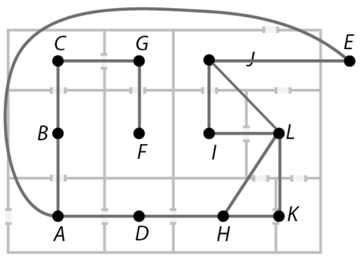
Pág. 20

11.



Pág. 21

12.1.



12.2. Não. Num grafo completo cada vértice liga todos os outros. Por exemplo, os vértices F e I não estão ligados por nenhuma aresta.

12.3. O grafo é conexo, pois qualquer vértice está ligado por uma aresta ou por uma sequência de arestas a qualquer um dos outros vértices do grafo.

12.4. Se, por exemplo, retirarmos a aresta FG o grafo fica desconexo. A divisão F fica isolada.

12.5.

Grau $A = 3$	Grau $B = 2$	Grau $C = 2$
Grau $D = 2$	Grau $E = 2$	Grau $F = 1$
Grau $G = 2$	Grau $H = 3$	Grau $I = 2$
Grau $J = 3$	Grau $K = 2$	Grau $L = 4$

12.6. $28 = 2 \times 14$

Resposta: 14 arestas

Pág. 23

13. *ABDGEDFECFBCA*

Pág. 24

14. Não é um grafo de Euler, uma vez que tem vértices de grau ímpar (vértices A e C).

15.1. Não é um grafo de Euler (euleriano), pois tem vértices de grau ímpar (F e E de grau 3).

15.2. O grafo admite um caminho de Euler, pois é conexo e possui apenas dois vértices de grau ímpar.

15.3. ***E*** *D C H E I H G* ***F*** ou *F G H C D E H F E*

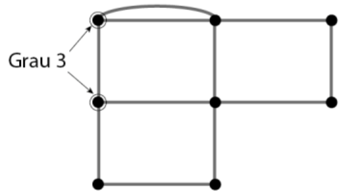
Vértice de grau ímpar

Pág. 25

16. Sim, pois este grafo é conexo e todos os vértices têm grau par, logo é um grafo euleriano.

Pág. 26

17. Não, embora seja conexo tem dois vértices de grau ímpar. Portanto, o grafo G admite um caminho euleriano.



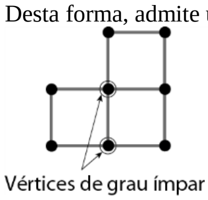
Pág. 27

18. É, pois todos os vértices possuem grau par e é conexo. Desta forma, o grafo G admite um circuito euleriano iniciando-se em qualquer vértice.

Pág. 28

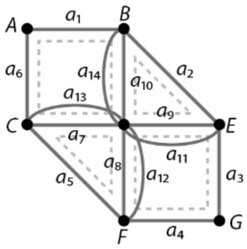
19. O grafo não é conexo (desconexo), por isso não é euleriano.

20. O grafo é conexo e tem apenas dois vértices de grau ímpar. Desta forma, admite um caminho euleriano.



Pág. 29

21.1.



21.2. O grafo é conexo e todos os vértices são de grau par, logo trata-se de um grafo euleriano.

21.3. Circuito euleriano:

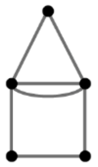
ABDBEDEGFDFCDCA

ou

$Aa_1Ba_{10}Da_{14}Ba_2Ea_9Da_{11}Ea_3Ga_4Fa_8D\,a_{10}Fa_5Ca_7Da_{13}Ca_6A$

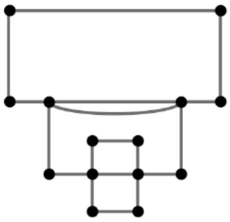
Pág. 31

22.



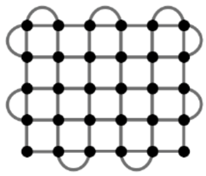
Pág. 32

23.



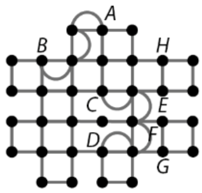
Pág. 33

24.



Pág. 35

25.1. O II, pois repete um menor número de arestas.
25.2.

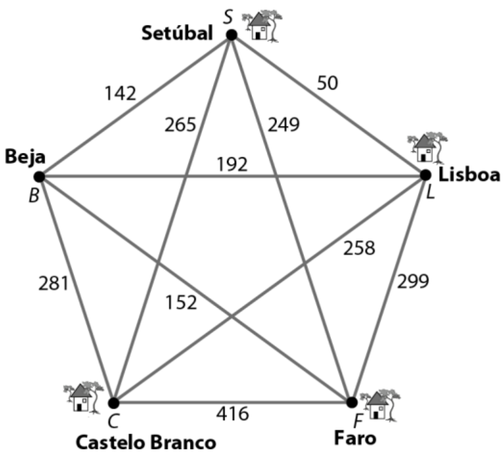


Pág. 37

26. G_1 é um grafo de Hamilton, pois admite um circuito de Hamilton. Por exemplo, *DABCHGFED*.
G_2 não é um grafo de Hamilton, pois qualquer esforço para obter um circuito de Hamilton levaria à repetição de vértices.

Pág. 45

27.



Algoritmo da cidade mais próxima:
$B \xrightarrow[142]{} S \xrightarrow[50]{} L \xrightarrow[258]{} C \xrightarrow[416]{} F \xrightarrow[152]{} B$ Total: 1018

Algoritmo do peso das arestas:
$B \xrightarrow[142]{} S \xrightarrow[50]{} L \xrightarrow[258]{} C \xrightarrow[416]{} F \xrightarrow[152]{} B$ Total: 1018

Circuitos de Hamilton:

Circuito 1
$B \xrightarrow[152]{} F \xrightarrow[249]{} S \xrightarrow[265]{} C \xrightarrow[258]{} L \xrightarrow[192]{} B$ Total:1116

Circuito 2 (Circuito ótimo)
$B \xrightarrow[152]{} F \xrightarrow[249]{} S \xrightarrow[50]{} L \xrightarrow[258]{} C \xrightarrow[281]{} B$ Total: 990

Circuito 3
$B \xrightarrow[152]{} F \xrightarrow[299]{} L \xrightarrow[258]{} C \xrightarrow[265]{} S \xrightarrow[142]{} B$ Total 1116

Circuito 4
$B \xrightarrow[152]{} F \xrightarrow[299]{} L \xrightarrow[50]{} S \xrightarrow[265]{} C \xrightarrow[281]{} B$ Total 1047

Circuito 5
$B \xrightarrow[152]{} F \xrightarrow[299]{} C \xrightarrow[50]{} L \xrightarrow[265]{} S \xrightarrow[281]{} B$ Total 1018

Circuito 6
$B \xrightarrow[152]{} F \xrightarrow[416]{} C \xrightarrow[365]{} S \xrightarrow[50]{} L \xrightarrow[192]{} B$ Total 1075

Circuito 7
$B \xrightarrow[192]{} L \xrightarrow[258]{} C \xrightarrow[265]{} S \xrightarrow[249]{} F \xrightarrow[152]{} B$ Total 1116

Circuito 8
$B \xrightarrow[192]{} L \xrightarrow[258]{} C \xrightarrow[416]{} F \xrightarrow[249]{} S \xrightarrow[142]{} B$ Total 1257

Circuito 9
$B \xrightarrow[192]{} L \xrightarrow[50]{} S \xrightarrow[249]{} F \xrightarrow[416]{} C \xrightarrow[281]{} B$ Total 1188

Circuito 10
$B \xrightarrow[192]{} L \xrightarrow[50]{} S \xrightarrow[265]{} C \xrightarrow[416]{} F \xrightarrow[152]{} B$ Total 1075

Circuito 11
$B \xrightarrow[192]{} L \xrightarrow[299]{} F \xrightarrow[249]{} S \xrightarrow[265]{} C \xrightarrow[281]{} B$ Total 1286

Circuito 12
$B \xrightarrow[192]{} L \xrightarrow[299]{} F \xrightarrow[416]{} C \xrightarrow[265]{} S \xrightarrow[142]{} B$ Total 1314

Circuito 13 (Circuito ótimo)
$B \xrightarrow[281]{} C \xrightarrow[258]{} L \xrightarrow[50]{} S \xrightarrow[249]{} F \xrightarrow[152]{} B$ Total 990

Circuito 14
$B \xrightarrow[281]{} C \xrightarrow[258]{} L \xrightarrow[299]{} F \xrightarrow[249]{} S \xrightarrow[142]{} B$ Total 1229

Circuito 15
$B \xrightarrow[281]{} C \xrightarrow[265]{} S \xrightarrow[249]{} F \xrightarrow[299]{} L \xrightarrow[192]{} B$ Total 1286

Circuito 16
$B \xrightarrow[281]{} C \xrightarrow[265]{} S \xrightarrow[50]{} L \xrightarrow[299]{} F \xrightarrow[152]{} B$ Total 1047

Circuito 17
$B \xrightarrow[281]{} C \xrightarrow[416]{} F \xrightarrow[249]{} S \xrightarrow[50]{} L \xrightarrow[192]{} B$ Total 1188

Circuito 18
$B \xrightarrow[281]{} C \xrightarrow[265]{} S \xrightarrow[249]{} F \xrightarrow[299]{} L \xrightarrow[192]{} B$ Total 1188

Circuito 19
$B \xrightarrow[142]{} S \xrightarrow[249]{} F \xrightarrow[299]{} L \xrightarrow[258]{} C \xrightarrow[281]{} B$ Total 1229

Circuito 20
$B \xrightarrow[142]{} S \xrightarrow[249]{} F \xrightarrow[258]{} C \xrightarrow[258]{} L \xrightarrow[192]{} B$ Total 1257

Circuito 21
$B \xrightarrow[142]{} S \xrightarrow[265]{} C \xrightarrow[258]{} L \xrightarrow[299]{} F \xrightarrow[152]{} B$ Total 1116

Circuito 22

$B \underset{142}{\rightarrow} S \underset{265}{\rightarrow} C \underset{416}{\rightarrow} F \underset{299}{\rightarrow} L \underset{192}{\rightarrow} B$ Total 1314

Circuito 23

$B \underset{142}{\rightarrow} S \underset{50}{\rightarrow} L \underset{258}{\rightarrow} C \underset{416}{\rightarrow} F \underset{152}{\rightarrow} B$ Total 1018

Circuito 24

$B \underset{142}{\rightarrow} S \underset{50}{\rightarrow} L \underset{299}{\rightarrow} F \underset{416}{\rightarrow} C \underset{281}{\rightarrow} B$ Total 1188

Resposta: O melhor circuito é um dos circuitos ótimos de Hamilton: $B \underset{152}{\rightarrow} F \underset{249}{\rightarrow} S \underset{50}{\rightarrow} L \underset{258}{\rightarrow} C \underset{281}{\rightarrow} B$ **ou** $B \underset{281}{\rightarrow} C \underset{258}{\rightarrow} L \underset{50}{\rightarrow} S \underset{249}{\rightarrow} F \underset{152}{\rightarrow} B$, com um custo total de 990.

Pág. 46

28. Da tabela conclui-se que:

Vértice inicial A

Vértice, não selecionado, mais próximo de $A : E(42)$

Vértice, não selecionado, mais próximo de $E : B(80)$

Vértice, não selecionado, mais próximo de $B : C(39)$

Vértice, não selecionado, mais próximo de $C : D(70)$

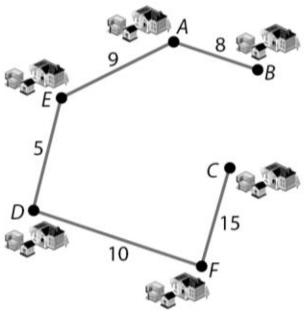
Vértice, não selecionado, mais próximo de $D : A(67)$

Assim, $A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$

$42 + 80 + 39 + 70 + 67 = 298$ km

Pág. 51

29.



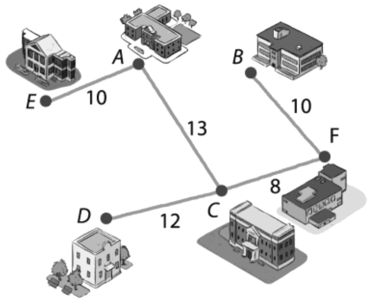
ED AB AE DF FC

Peso total = (5 + 8 + 9 + 10 +15) km = 47 km

Pág. 53

30. Kruskal: CF AE BF DC AC

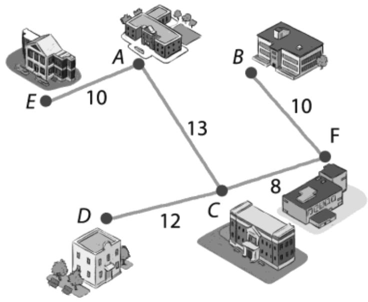
(8 + 10 + 10 + 12 + 13 = 53)



Resposta: Peso total 53

Prim: CF BF CD AC AE

(8 + 10 + 12 + 13 + 10 = 53)



Resposta: Peso total 53

Pág. 55

31.1.

Tarefa	Tempo (min)	Dependência
T_1	10	nenhuma
T_2	5	nenhuma
T_3	7	T_1 e T_2 (1)
T_4	12	T_2 (1)
T_5	10	nenhuma
T_6	15	T_4 e T_5 (2)

31.2. As tarefas T_1, T_2 e T_5 podem ser realizadas em simultâneo. Então, para T_1, T_2 e T_5 são necessários 10 minutos.

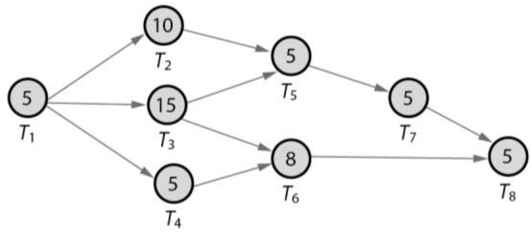
Para realizar T_3 são necessários 7 minutos e depende de T_1 e T_2 (10 + 7), logo demora 17 minutos.

T_4 demora 12 minutos e depende de T_2, logo, demora 17 (12 + 5) minutos.

T_6 demora 15 minutos mas depende de T_4 e T_5 32 (17 + 15) minutos.

Resposta: 17 minutos

32.1.



32.2. T_1 demora 5 dias T_2 demora 15 dias

T_3 demora 20 dias T_4 demora 10 dias

T_5 demora 25 dias T_6 demora 28 dias

T_7 demora 30 dias T_8 demora 35 dias

Logo, o tempo mínimo é 35 dias.

Resposta:35 dias

Pág. 59

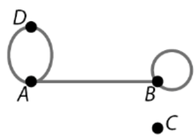
33.1. **a)** $V = \{A, B, C, D\}$

b) $A = \{AD, DA, BB\}$

c) Vértice isolado: C

d) BB

e) AD e DA



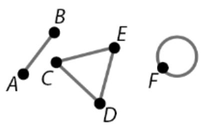
33.2. **a)** $V = \{A, B, C, D, E, F\}$

b) $A = \{AB, CD, DE, CE, FF\}$

c) Não tem

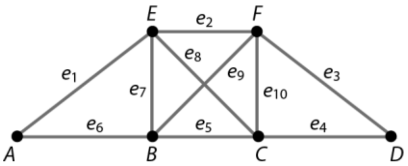
d) FF

e) Não tem



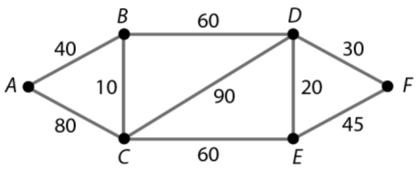
34. Os grafos **34.1.**, **34.2.** e **34.4.** são conexos, pois qualquer vértice está ligado por uma aresta ou a uma sequência de arestas a qualquer um dos outros vértices do grafo.

35.



- $Ae_6Be_7Ee_1A$
- $Be_7Ee_8Ce_5B$
- $Ae_1Ee_8Ce_5Be_6A$
- $Ee_2Fe_3De_4Ce_8E$

36.



- $A \underset{40}{\rightarrow} B \underset{60}{\rightarrow} D \underset{30}{\rightarrow} F = 130$ km
- $A \underset{80}{\rightarrow} C \underset{60}{\rightarrow} E \underset{45}{\rightarrow} F = 185$ km
- $A \underset{80}{\rightarrow} C \underset{90}{\rightarrow} D \underset{30}{\rightarrow} F = 200$ km
- $A \underset{40}{\rightarrow} B \underset{10}{\rightarrow} C \underset{90}{\rightarrow} D \underset{30}{\rightarrow} F = 170$ km
- $A \underset{80}{\rightarrow} C \underset{10}{\rightarrow} B \underset{60}{\rightarrow} D \underset{30}{\rightarrow} F = 180$ km
- $A \underset{40}{\rightarrow} B \underset{10}{\rightarrow} C \underset{60}{\rightarrow} E \underset{45}{\rightarrow} F = 155$ km

37.1. Todos os grafos são conexos, pois existe, em cada um deles, quatro caminhos a unir quaisquer dois dos seus vértices.

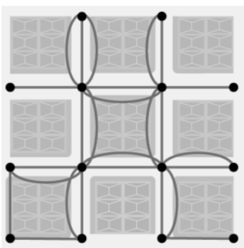
37.2.

Grafo	Pontes
I	a_1; a_2; a_3; a_4
II	a_4
III	a_5; a_9; a_{10}

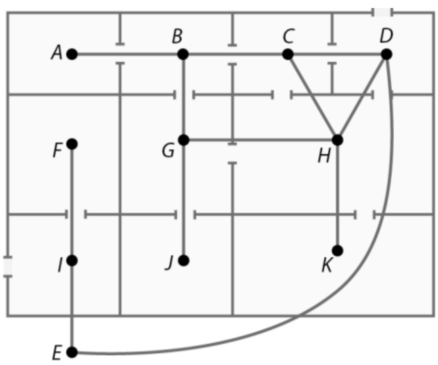
Pág. 60

38. Todos os vértices têm o mesmo grau ou valência (grau 3).

39.



40.1.

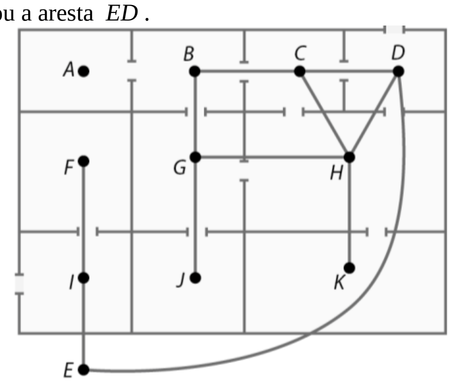


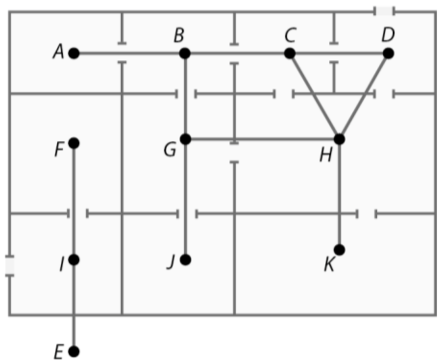
40.2. O grafo não é completo, pois num grafo completo qualquer par de vértices está ligado por uma aresta, o que não é verificado neste caso, por exemplo, os vértices J e K não estão ligados.

40.3. É conexo, pois existe um caminho a unir quaisquer dos seus vértices.

40.4. 12 arestas

40.5. Do grafo anterior deveria excluir, por exemplo, a aresta AB ou a aresta ED .

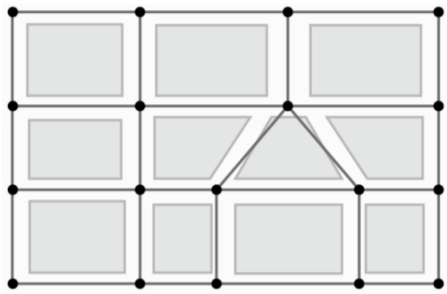




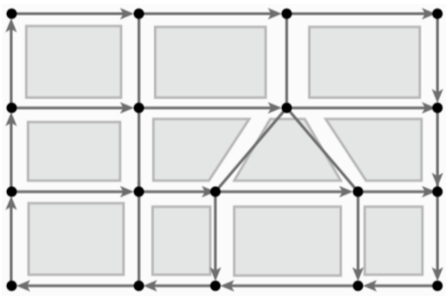
40.6. O número de arestas é igual a metade da soma de todos os graus dos vértices, isto é:

se $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$, então $|A| = \frac{\sum_{v \in V} g(v)}{2}$

41.1.

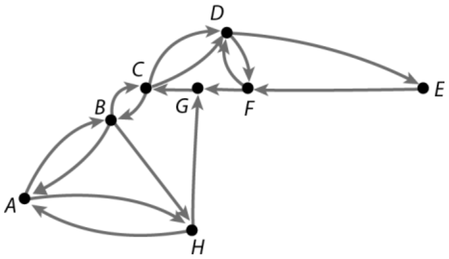


41.2.



Pág. 61

42.



42.1. $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

42.2. $A = \{(A, B), (B, A), (B, C), (C, B), (C, D), (D, C), (D, E), (E, F), (D, F), (F, D), (F, G), (G, C), (H, G), (B, H), (A, H), (H, A)\}$

42.3. $A \rightarrow (A, B), (B, H), (H, A)$

$B \rightarrow (B, A), (A, B)$

$C \rightarrow (C, B), (B, C)$

$D \rightarrow (D, E), (E, F), (F, D)$

$E \rightarrow (E, F), (F, D), (D, E)$

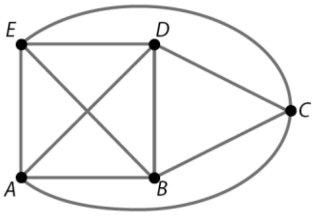
$F \rightarrow (F, D), (D, F)$

$G \rightarrow (G, C), (C, B), (B, H), (H, G)$

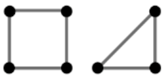
$H \rightarrow (H, A), (A, H)$

43. Por definição um circuito de Euler é um circuito que passa uma única vez em cada aresta do grafo. E como um grafo diz-se euleriano se admitir um circuito de Euler, então um grafo nessas condições é conexo e todos os seus vértices são de grau par. Assim, estão nestas condições os grafos **43.1.**, **43.3.** e **43.6.**.

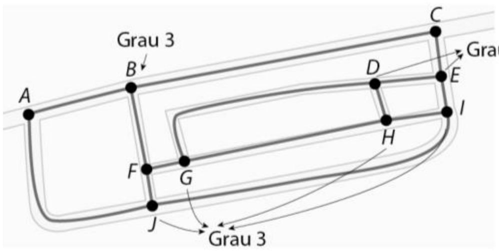
44. Por exemplo: *ABCDEA*



45. Todos os vértices são de grau par mas é desconexo, logo não admite um circuito de Euler.

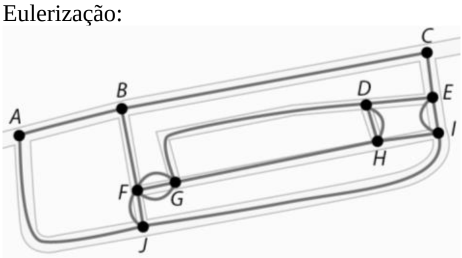


46.1.



46.2. Não, no grafo existem vários vértices com grau ímpar (mais do que dois). Portanto, não existe nenhum caminho (nem circuito) euleriano. Teremos de repetir mais.

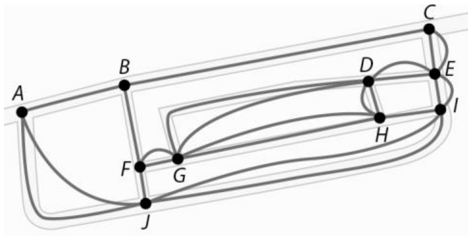
46.3. Eulerização:



Ruas a repetir: *FG*, *DH*, *EI* e *FJ*.

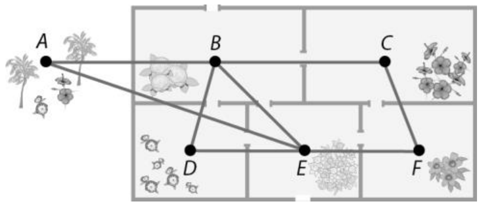
Será necessário iniciar o caminho em *B* ou em *J*.

46.4.



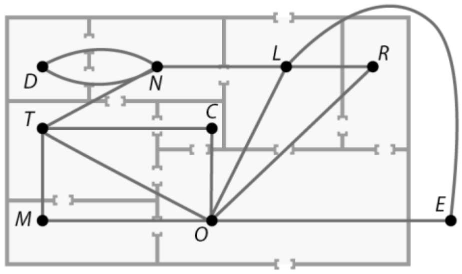
Pág. 62

47.

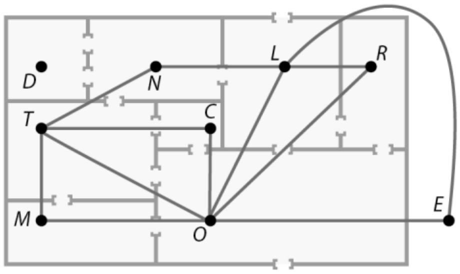


Sim, é possível. *ABCFEDBEA*

48.



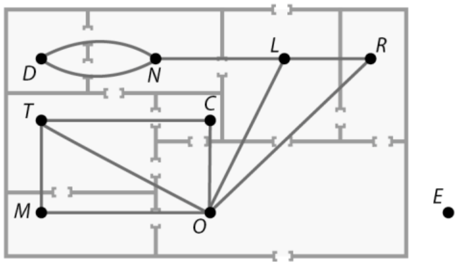
Jardineiro: circuito com início em *E* eliminando *D*.



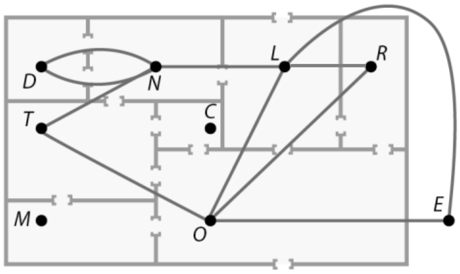
- Grafo conexo.
- Todos os vértices são de grau par.

Circuito: *EOTMOCTNLORLE*

Mordomo: mentiu, pois os vértices *L*, *T*, *O* e *E* são de grau ímpar. Deste forma não existe nenhum caminho de Euler.



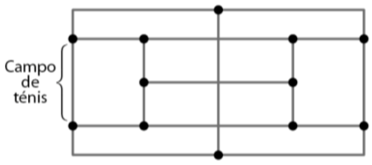
Cozinheiro: entrou pelas traseiras e saiu pela frente. Visitou todas as salas, exceto a dos Cravos e a das Margaridas.



- É conexo.
- Todos os vértices são de grau par.

Circuito possível: *EOTNDNLORLE*

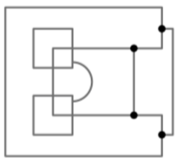
49.



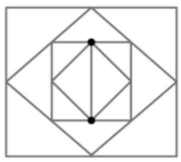
São 10 os vértices de grau ímpar. Se houver no máximo dois vértices de grau ímpar haveria um caminho euleriano e não seria necessário levantar o rolo. Desta forma, teríamos de adicionar mais cinco caminhos. Logo, é necessário levantar o rolo cinco vezes.

Pág. 63

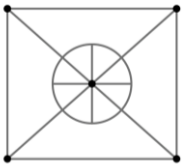
50.1. 2 vezes



50.2. 0 vezes



50.3. 3 vezes



51. Um cirtuito de Hamilton é um caminho que começa e acaba no mesmo vértice, passando por todos os vértices uma única vez (exceto o primeiro que também é o último).

51.1. Não **51.2.** Não **51.3.** Não
51.4. Não **51.5.** Sim **51.6**. Não
51.7. Sim **51.8.** Sim

52. Por exemplo:

52.1. *FABDCEGF* ou *GECBDFAG*

52.2. *ABCGFEHDA* ou *DACGFBEHD*

53.1. *DFAHBGCED*

$D \xrightarrow[5]{} F \xrightarrow[13]{} A \xrightarrow[1]{} H \xrightarrow[2]{} B \xrightarrow[3]{} G \xrightarrow[10]{} C \xrightarrow[9]{} E \xrightarrow[7]{} D$

Peso total $= 40$

53.2. *HFGABCDEH*

Pág. 64

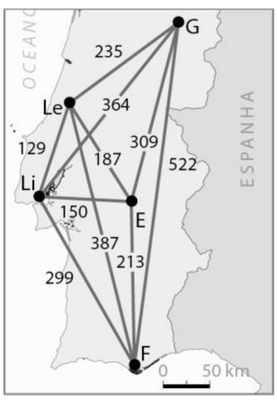
54. G_1 não é uma árvore. (G_1 não é conexo)

G_2 é uma árvore

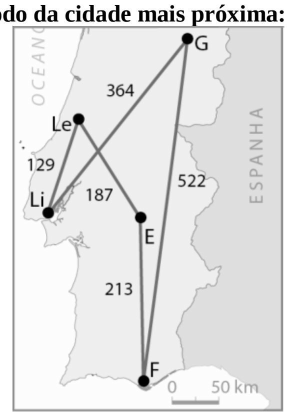
G_3 não é uma árvore pois tem arestas paralelas (só pode haver um caminho entre dois quaisquer vértices)

G_4 não é uma árvore pois tem um lacete.

55.

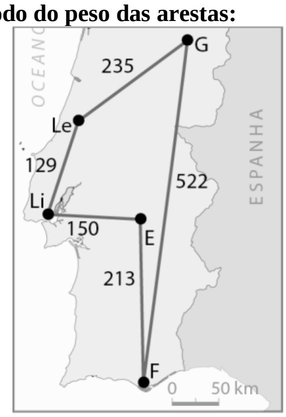


Método da cidade mais próxima:



$Li \xrightarrow[129]{} Le \xrightarrow[187]{} E \xrightarrow[213]{} F \xrightarrow[522]{} G \xrightarrow[364]{} Li = 1415$ km

Método do peso das arestas:



$Li \xrightarrow[150]{} E \xrightarrow[213]{} F \xrightarrow[522]{} G \xrightarrow[235]{} Le \xrightarrow[129]{} Li = 1249$ km

56.1. Método da cidade mais próxima:

$Vi \xrightarrow[95]{} Av \xrightarrow[58]{} Co \xrightarrow[117]{} Po \xrightarrow[53]{} Br \xrightarrow[48]{} Vc \xrightarrow[154]{} Vr \xrightarrow[110]{} Vi$

$= 635$ km

56.2. Método do peso das arestas:

$Vi \xrightarrow[110]{} Vr \xrightarrow[154]{} Vc \xrightarrow[48]{} Br \xrightarrow[53]{} Po \xrightarrow[68]{} Av \xrightarrow[58]{} Co \xrightarrow[96]{} Vi$

$= 587$ km

57. V_1V_5; $V_1\,V_2V_3V_4V_5$; $V_1V_2V_5$; $V_1V_5V_2V_5$; $V_1V_2V_3V_4V_2V_5$

Pág. 65

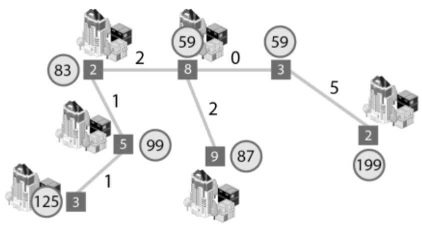
58.1. Método da cidade mais próxima:

$Pa \xrightarrow[296]{} Br \xrightarrow[672]{} Be \xrightarrow[1117]{} Bu \xrightarrow[1344]{} Co \xrightarrow[620]{} Os \xrightarrow[590]{} Es \xrightarrow[237]{} He \xrightarrow[2744]{} Pa$

58.2. Não, a escolha mais económica seria a cidade de Bruxelas (*Br*) com um circuito de Hamilton de 6976 km, isto é,

$Br \xrightarrow[296]{} Pa \xrightarrow[534]{} Be \xrightarrow[1117]{} Bu \xrightarrow[1344]{} Co \xrightarrow[620]{} Os \xrightarrow[590]{} Es \xrightarrow[237]{} He \xrightarrow[2238]{} Br$

59.



Para cada localidade, vamos calcular o número de passagens de nível a atravessar.

$$\begin{aligned}\text{Custo} &= 2 \times 8 + (2 \times 3 + 0 \times 3) + \\ &+ (2 \times 2 + 0 \times 2 + 5 \times 2) + \\ &+ (2 \times 9 + 2 \times 9) + 1 + 5 + \\ &+ (1 \times 3 + 1 \times 3) = 83\end{aligned}$$

A solução será então qualquer localidade com custo 59.

60.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A		11	15	12	22	21	31
B			27	20	14	23	35
C				9	21	20	16
D					12	11	19
E						7	21
F							14
G							

Método do peso das arestas:

$F \underset{7}{\to} E \underset{14}{\to} B \underset{11}{\to} A \underset{31}{\to} G \underset{16}{\to} C \underset{9}{\to} D \underset{11}{\to} F \ = 99$ km

Método da cidade mais próxima:

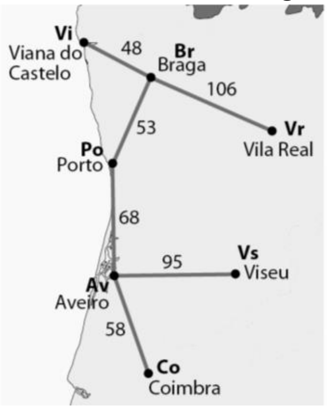
$F \underset{7}{\to} E \underset{12}{\to} D \underset{9}{\to} C \underset{15}{\to} A \underset{11}{\to} B \underset{35}{\to} G \underset{14}{\to} F \ = 103$ km

Peso total: 103 km

Pág. 66

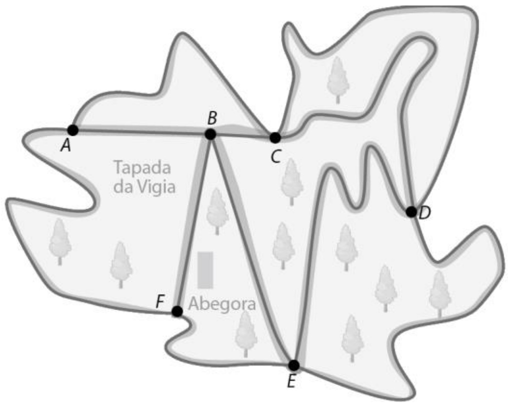
61.1. Kruskal

Peso total: 428 km

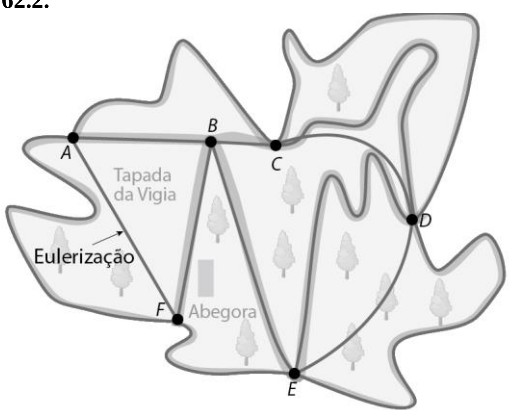


61.2. 428×1030 € $= 440\ 840$ €

62.1.



62.2.



Como os vértices A e F são de grau ímpar, não é possível encontrar um circuito euleriano. Desta forma, o grupo de jovens terá de repetir um caminho!

62.3. Devemos eulerizar o grafo, por forma a ser possível encontrar um percurso.

Assim, acrescentamos a aresta AF para que o grafo fique eulerizado.

Percurso: *ABCDEDCAFBEFA*

62.4. Se estamos perante um problema é conveniente identificar os seus elementos fundamentais, destacando-os e omitindo informação não relevante.

Na situação apresentada do Parque da Pena, determinar um percurso que torne o trabalho do grupo de jovens o mais eficiente possível leva-nos a identificar o essencial nos caminhos e nos cruzamentos. Desta forma, foi criado um modelo de grafo na resposta à questão **62.1.**, onde os caminhos são representados por arestas e os cruzamentos por vértices.

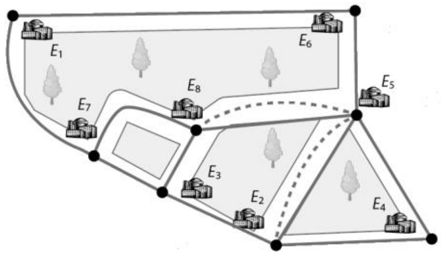
A realidade foi largamente simplificada ao omitir elementos como a fonte, os lados, os jardins e o comprimento dos percursos.

Passamos a ter uma nova visão sobre o problema original dando ênfase aos elementos essenciais.

Pág. 67

63.1. Um percurso possível: $E_4E_5E_6E_1E_7E_8E_3E_2$

63.2. Vértices: ecopontos; Arestas: troços de rua



O funcionário conclui a impossibilidade de inspecionar todos os troços da rua, passando unicamente uma vez por cada uma delas, começando e terminando no mesmo ecoponto, já que isso corresponderia a percorrer todas as arestas do grafo que modela a situação, uma única vez, começando e terminando no mesmo vértice. Significava isso que teríamos de encontrar no grafo um circuito de Euler, o que não acontece, pois os vértices E_2 e E_8 têm grau 3.

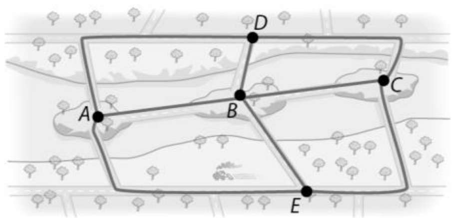
Para que o funcionário possa rentabilizar o tempo de inspeção terá de repetir alguns troços de rua (arestas).

A melhor maneira de o fazer é repetir dois troços, E_5E_8 e E_2E_5 (a tracejado no grafo).

Um percurso que se inicie e termine em E_2 e permita ao funcionário inspecionar todos os troços de rua, repetindo o mínimo possível, é $E_2E_5E_4E_2E_3E_7E_1E_6E_5E_8E_7E_3E_8E_5E_2$.

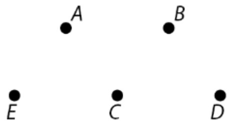
Pág. 68

1.1.



1.2. Circuito: *A – B – D – C – E – A*

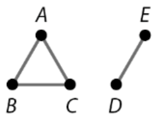
2. Não.



Grau $A = 2$ Grau $B = 2$ Grau $C = 3$
Grau $D = 4$ Grau $E = 6$
Total $= 17$
17 é número ímpar.
17 não pode ser o dobro de um número inteiro de arestas (o dobro de um número inteiro é sempre um número par).

3. Soma dos graus dos vértices: $2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16$
$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A| = 16 \rightarrow |A| = 8$ arestas

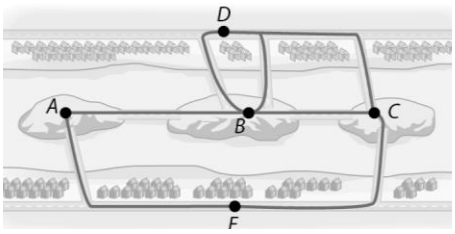
4. Consideremos o grafo seguinte.



Grafo G

No grafo G é possível construir um circuito (*ABCA*, por exemplo), no entanto, este grafo é desconexo e tem dois vértices de grau ímpar, logo, não podemos concluir que se trata de um grafo de Euler.

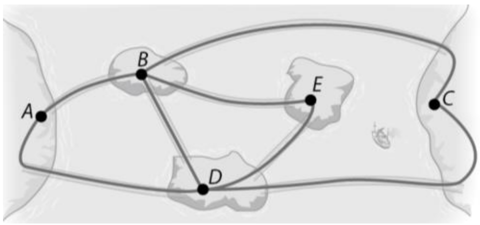
5.1.



C tem grau ímpar.

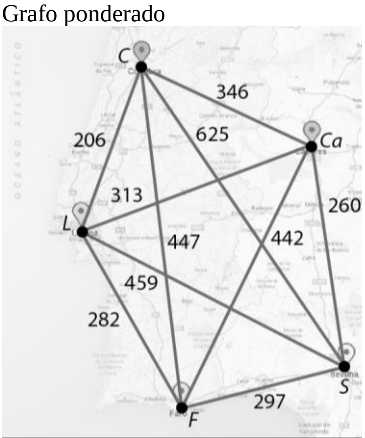
5.2. Não.

6. Circuito: *ADCBEDBA*



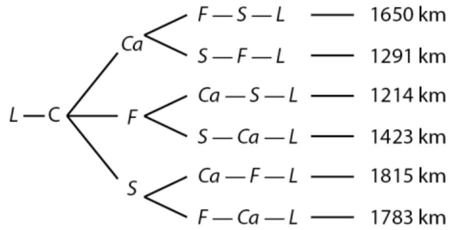
Pág. 69

7.1. Grafo ponderado



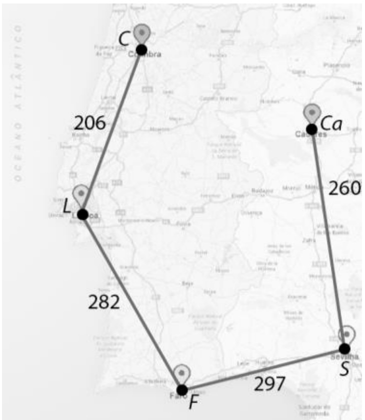
$L \underset{206}{\rightarrow} C \underset{346}{\rightarrow} Ca \underset{442}{\rightarrow} F \underset{197}{\rightarrow} S \underset{459}{\rightarrow} L = 1650$ km

7.2.



O António ao ter que começar por visitar o seu cliente em Coimbra fica com 6 possibilidades de percursos, esquematizados acima.
Se de coimbra seguir para Faro e só depois visitar as cidades espanholas, ou seja:
$L \underset{206}{\rightarrow} C \underset{447}{\rightarrow} F \underset{442}{\rightarrow} Ca \underset{260}{\rightarrow} S \underset{459}{\rightarrow} L = 1841$ km
ou
$L \underset{206}{\rightarrow} C \underset{447}{\rightarrow} F \underset{197}{\rightarrow} S \underset{260}{\rightarrow} Ca \underset{313}{\rightarrow} L = 1423$ km
não estará a percorrer o circuito de menor distância.
O circuito que lhe permite economizar no espaço percorrido é $L \rightarrow C \rightarrow Ca \rightarrow S \rightarrow F \rightarrow L$, com um total de 1291 km.

7.3. Kurskal:



$\underset{197}{FS} \rightarrow \underset{206}{CL} \rightarrow \underset{260}{SCa} \rightarrow \underset{282}{LF} = 945$ km

Uma localização possível da filial e área de residência dos funcionários é a cidade de Faro.