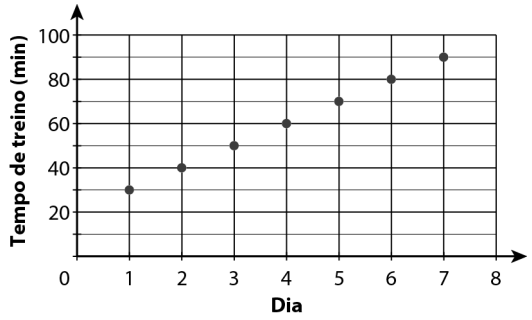
1.2. Modelos populacionais

1.1. **Pág. 70**

Dia	Tempo de treino (em minutos)
1	30
2	40
3	50
4	60
5	70
6	80
7	90



1.2. Dia 8: 100 min
dia 9: 110 min
dia 10: 120 min (2 horas)
Ao fim de 10 dias.

1.3. $20 + 10n$

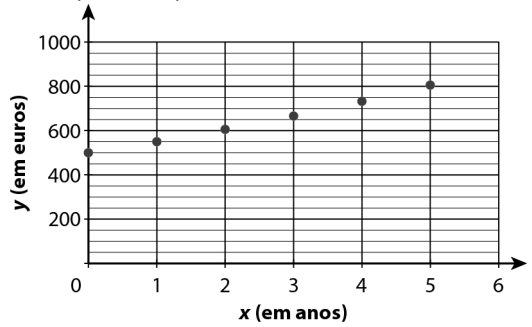
1.4. $n = 14$, logo $20 + 10 \times 14 = 20 + 140 = 160$.
O treino durará 160 minutos.

1.5. $30 + 40 + 50 + 60 + \ldots + 140 + 150 + 160 = 1330$
Treinará, no total, 1330 minutos.

2.1. Ao fim de 1 ano: $500 + 0{,}10 \times 500 = 500 \times 1{,}1 = 550$
Ao fim de 2 anos: $550 \times 1{,}1 = 605$
Ao fim de 1 ano terá 550 € e ao fim de 2 anos 605 €.

2.2. $500 \times 1{,}1^x$

2.3. $500 \times 1{,}1^0 = 500$ €
$500 \times 1{,}1^1 = 550$ €
$500 \times 1{,}1^2 = 605$ €
$500 \times 1{,}1^3 = 605{,}50$ €
$500 \times 1{,}1^4 = 732{,}05$ €
$500 \times 1{,}1^5 \approx 805{,}26$ €



Pág. 74

64.1. Observe que:
$n = 0$ 4
$n = 1$ $18 = 5 \times 4 - 2$
$n = 2$ $88 = 5 \times 18 - 2$
$n = 3$ $438 = 5 \times 88 - 2$
$n = 4$ $2188 = 5 \times 438 - 2$
Logo, o próximo termo é dado por $5 \times 2188 - 2$, ou seja, 10 938.

64.2. Designando a sequência por (P_n) podemos escrever:

$$\begin{cases} P_0 = 4 \\ P_n = 5P_{n-1} - 2, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$

Pág. 75

65.1. 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24

65.2. Designando a sequência por (T_n) podemos escrever:

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = 1 \\ T_2 = 2 \\ T_n = T_{n-3} + T_{n-2} + T_{n-1}, \text{ para } n > 2 \end{cases}$$

65.3. 5, 5, 5, 15, 25, 45

$$\begin{cases} T_0 = 5 \\ T_1 = 5 \\ T_2 = 5 \\ T_n = T_{n-3} + T_{n-2} + T_{n-1}, \text{ para } n > 2 \end{cases}$$

Pág. 79

66.1. Designando a sequência por (C_n) podemos escrever:

$$\begin{cases} C_0 = 45 \\ C_n = C_{n-1} + 4, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$

66.2. $C_n = 45 + 4n$

66.3. $C_{20} = 45 + 4 \times 20 = 45 + 80 = 125$
Haverá 125 caixotes do lixo.

67.1. $A_1 = A_0 + 25 = 60 + 25 = 85$
$A_2 = A_1 + 25 = 85 + 25 = 110$
$A_3 = A_2 + 25 = 110 + 25 = 135$

67.2. Como $r = 25$ e $A_0 = 60$, então $A_n = 60 + 25n$.

67.3. $A_{99} = 60 + 25 \times 99 = 2535$

$$S_{100} = \frac{A_0 + A_{99}}{2} \times 100 = \frac{60 + 2535}{2} \times 100 = 129\ 750$$

Logo, a soma é 129 750.

Pág. 82

68.1. Designando a sequência por (F_n) podemos escrever:

$$\begin{cases} F_0 = 1250 \\ F_n = F_{n-1} \times 1{,}05, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$ (Fórmula recursiva)

ou

$F_n = 1250 \times 1{,}05^n$ (Termo geral)

68.2. Para $n = 11$, $F_{11} = 1250 \times 1{,}05^{11} \approx 2137{,}9$.
Serão cometidas cerca de 2138 faltas.

69.1. $T_1 = T_0 \times 1{,}5 = 4 \times 1{,}5 = 6$
$T_2 = T_1 \times 1{,}5 = 6 \times 1{,}5 = 9$
$T_3 = T_2 \times 1{,}5 = 9 \times 1{,}5 = 13{,}5$
Termo geral: $T_n = 4 \times 1{,}5^n$

69.2.

$$S_{20} = 4 \times \frac{1 - 1{,}5^{20}}{1 - 1{,}5} \approx 26\ 594{,}054$$

A soma é, aproximadamente, 26 594,054.

Pág. 85

70.1. $A(0) = 40 \times 0 + 120 = 120$
Significa que no dia de abertura do festival foram necessários 120 kg de alimentos para abastecer a zona de restauração.

70.2. Para $n = 4$ tem-se:

$A(4) = 40 \times 4 + 120 = 280$ kg

70.3. $40t + 120 = 400 \Leftrightarrow 40t = 400 - 120 \Leftrightarrow 40t = 280 \Leftrightarrow t = \frac{280}{40}$

$\Leftrightarrow t = 7$

Ao fim de 8 dias após a abertura (ao fim de 7 dias ainda é possível o abastecimento).

Pág. 86

71.1. Designemos por $V(t)$ o valor, em euros, que a Clara tem no seu mealheiro t semanas após um determinado instante inicial. Estamos perante uma progressão aritmética de razão 2,50 e termo inicial 3,50. Assim, $V(t) = 3{,}50 + 2{,}50t$ é um modelo que pode representar a situação descrita.

71.2. $V(30) = 3{,}50 + 2{,}50 \times 30 = 78{,}50$ €.

Terá 78,50 €.

Pág. 88

72.1. a) Recorrendo à calculadora gráfica obtemos, com aproximação às milésimas, os valores dos parâmetros m e b: $m \approx -1{,}994$ e $b \approx 50{,}840$.

Assim, $y = -1{,}994x + 50{,}840$.

Modelo: $C(t) = -1{,}994t + 50{,}840$

b) Recorrendo à calculadora gráfica obtemos, com aproximação às milésimas, os valores dos parâmetros m e b: $m \approx -1{,}994$ e $b \approx 4046{,}397$.

Assim, $y = -1{,}994x + 4046{,}397$.

Modelo: $C(t) = -1{,}994t + 4046{,}397$

72.2. Ano 2020 → $t = 16$

$C(16) = -1{,}994 \times 16 + 50{,}840 = 18{,}936$

Prevê-se que, em 2020, se realizem cerca de 18 936 casamentos.

Pág. 89

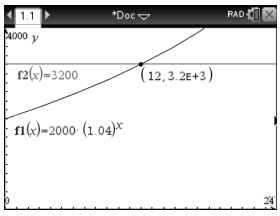
73.1. $C(5) = 2000 \times 1{,}04^5 \approx 2433{,}31$

Aproximadamente, 2433,31 €.

73.2. Recorre-se à calculadora gráfica para resolver a equação:

$2000 \times 1{,}04^t = 3200$.

Ao fim de 12 anos.



Pág. 90

74.1. Designando por $A(t)$ o número de bactérias do tipo A, t horas após o início do estudo, podemos escrever:

$A(t) = 3000 \times 1{,}07^t$

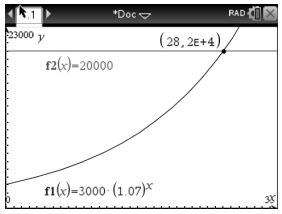
Designando por $B(t)$ o número de bactérias do tipo B, t horas após o início do estudo, podemos escrever:

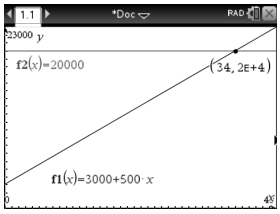
$B(t) = 3000 + 500t$

74.2. O tipo A (crescimento exponencial).

74.3. Pretende-se resolver as equações $3000 \times 1{,}07^t = 20\,000$ e $3000 + 500t = 20\,000$.

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se o ponto de interseção de cada um dos gráficos (tipo A e tipo B) com a reta de equação $y = 20\,000$.





Tipo A: Ao fim de 28 horas, ou seja, 1 dia e 4 horas.

Tipo B: Ao fim de 34 horas, ou seja, 1 dia e 10 horas.

Pág. 92

75.1. a) Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 31{,}7$ e $b \approx 298{,}3$.

Modelo linear: $y = 31{,}7x + 298{,}3$

Estimativas: para $x = 3$, $y = 31{,}7 \times 3 + 298{,}3 \approx 393$;

para $x = 8$, $y = 31{,}7 \times 8 + 298{,}3 \approx 552$.

Segundo este modelo estima-se que em 2005 sejam, aproximadamente, 393 indivíduos e em 2010, aproximadamente, 552 (por 1000 habitantes).

b) Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 311{,}9$ e $b \approx 1{,}1$.

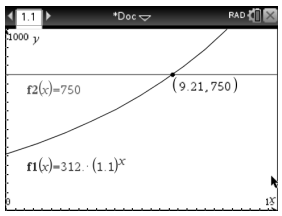
Modelo exponencial: $y = 311{,}9 \times 1{,}1^x$

Estimativas: para $x = 3$, $y = 311{,}9 \times 1{,}1^3 \approx 415$;

para $x = 8$, $y = 311{,}9 \times 1{,}1^8 \approx 669$.

Segundo este modelo estima-se que em 2005 sejam, aproximadamente, 415 indivíduos e em 2010, aproximadamente, 669 (por 1000 habitantes).

75.2. Resolve-se graficamente a equação $311{,}9 \times 1{,}1^x = 750$.



Repare que $x \approx 9$ corresponde ao ano 2011.

Na realidade, em 2011 o número de indivíduos é igual a 590. Podemos concluir que o modelo exponencial poderá não ser o mais indicado para fazer previsões nesta situação. Repare que é um modelo ilimitado com um crescimento muito rápido a partir de um determinado momento, no entanto, na realidade, sabe-se que o número de indivíduos será, no máximo, igual a 1000.

Pág. 93

76.1. Modelo linear

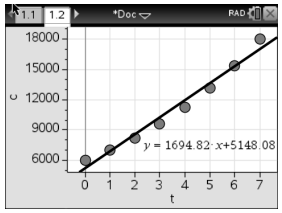
$y = 1694{,}82x + 5148{,}08$

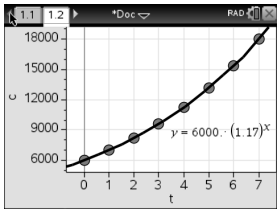
$r \approx 0{,}988$

Modelo exponencial

$y = 6000 \times 1{,}17^x$

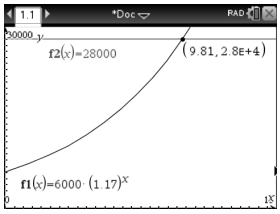
$r \approx 1$





O modelo exponencial ajusta-se melhor e, neste caso, de forma perfeita ao conjunto de dados ($r \approx 1$).

76.2. Regime de capitalização composto.
Resolve-se graficamente a equação:
$6000 \times 1{,}17^x = 28\,000$
Ao fim de 10 anos.

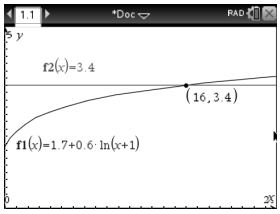


Pág. 96

77.1. a) $P(0) = 1{,}7 + 0{,}6 \ln(0 + 1) = 1{,}7$
A população é de 1,7 milhões.

b) $P(6) = 1{,}7 + 0{,}6 \ln(6 + 1) \approx 2{,}9$
A população é de, aproximadamente, 2,9 milhões.

77.2. $2 \times 1{,}7 = 3{,}4$
Resolve-se graficamente a equação:
$1{,}7 + 0{,}6 \ln(t + 1) = 3{,}4$
Ao fim de 16 anos.



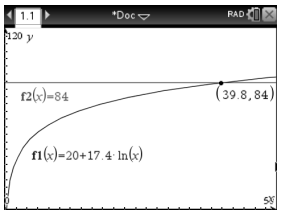
77.3. Não, pois apesar de o crescimento logarítmico se apresentar cada vez "mais lento" com o passar do tempo, ele não deixa de ser ilimitado.

78.1. $f(1) = 20 \Leftrightarrow a + b \ln(1) = 20 \Leftrightarrow a = 20$

$f(10) = 60 \Leftrightarrow 20 + b \ln(10) = 60 \Leftrightarrow b = \dfrac{40}{\ln 10}$

Então $b \approx 17{,}372$.

78.2. Recorre-se à calculadora para resolver graficamente a inequação:
$20 + 17{,}372 \ln x > 84$
Terão de passar 40 anos.



Pág. 97

79.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 12{,}53$ e $b \approx -1{,}10$.
Modelo logarítmico: $y = 12{,}53 - 1{,}10 \ln x$

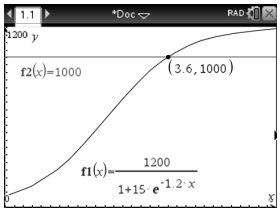
79.2. Para $x = 15$, $y = 12{,}53 - 1{,}10 \times \ln(15) \approx 9{,}55$.
Prevê-se que irá alcançar a marca de 9,55 segundos.

Pág. 101

80.1. $S(7) = \dfrac{1200}{1 + 15e^{-1{,}2 \times 7}} \approx 1196$

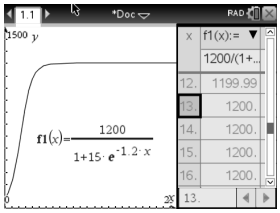
Aproximadamente, 1196 *smartphones*.

80.2. Resolve-se graficamente a equação:
$\dfrac{1200}{1 + 15e^{-1{,}2t}} = 1000$
No mês de abril.



80.3. A loja suporta vender, no máximo, 1200 *smartphones*. O modelo logístico apresenta um crescimento limitado, tendo neste caso 1200 como limite. Isto significa que, por muitos meses que passem, o número de *smartphones* vendidos nunca será superior a 1200.

Observe que:



Pág. 103

81.1. 59% de 8 563 501
$0{,}59 \times 8\,563\,501 \approx 5\,052\,466$
Aproximadamente, 5 052 466 residentes com pelo menos 15 anos.

81.2. Recorrendo à calculadora obtém-se $a \approx 6{,}85$; $b \approx 0{,}27$ e $c \approx 69{,}27$.
Modelo: $y = \dfrac{69{,}27}{1 + 6{,}85e^{-0{,}27x}}$

81.3. Ano 2020 → $x = 23$

$y = \dfrac{69{,}27}{1 + 6{,}85e^{-0{,}27 \times 23}} \approx 68{,}3$

Estima-se que aproximadamente 68,3% dos residentes, com pelo menos 15 anos, utilizem Internet.

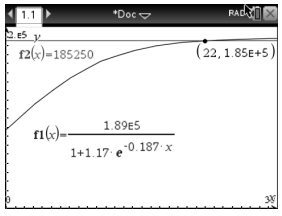
81.4. A afirmação é verdadeira uma vez que, como o crescimento logístico é limitado, de acordo com o modelo obtido na alínea **81.2.** o limite máximo será 69,27%.

82.1. Ano 1995 → $x = 0$. Recorrendo à calculadora obtém-se $a \approx 1{,}1738$; $b \approx 0{,}1865$ e $c \approx 188\,833{,}3$.
Modelo logístico: $y = \dfrac{188\,833{,}3}{1 + 1{,}1738e^{-0{,}1865x}}$
Ano 2013 → $x = 18$

$y = \dfrac{188\,833{,}3}{1 + 1{,}1738e^{-0{,}1865 \times 18}} \approx 181\,414{,}4$

Estima-se que, para 2013, o PIB seja de, aproximadamente, 181 414,4 milhões de euros. Este valor está distante do valor tabelado o que pode significar que as estimativas apresentadas para 2013 e 2014 tenham sido efetuadas recorrendo a um outro modelo que não o logístico.

82.2. Resolve-se graficamente a equação:
$\dfrac{188\,833{,}3}{1 + 1{,}1738e^{-0{,}1865x}} = 185\,250$
$x = 22$ → Ano 2017
No ano 2017.



Pág. 106

83.1. $\begin{cases} L_0 = 150 \\ L_n = L_{n-1} + 70, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$

83.2. $L_n = 150 + 70n$

83.3. $n = 24$ meses ; $L_{24} = 150 + 70 \times 24 = 1830$
Ao fim de 2 anos haverá, nos tanques, 1830 kg de lixo tóxico.

84.1. $\dfrac{42 - 60}{3} = -6$

$\begin{cases} T_0 = 60 \\ T_n = T_{n-1} - 6, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$

84.2. $T_n = 60 - 6n$

84.3. $T_{49} = 60 - 6 \times 49 = -234$

$$S_{50} = \frac{T_0 + T_{49}}{2} \times 50 = \frac{60 + (-234)}{2} \times 50 = -4350$$

A soma é – 4350.

85.1. a) $\begin{cases} P_0 = 2450 \\ P_n = P_{n-1} \times 1{,}08, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$

b) $P_n = 2450 \times 1{,}08^n$

85.2. Para $n = 9$, $P_9 = 2450 \times 1{,}08^9 \approx 4897{,}6$.

Em 2019 terá 4897 habitantes.

86. Designando por (C_n) a sequência que descreve a evolução do capital tem-se que $C_n = 3500 \times 1{,}06^n$.

Para $n = 4$, $C_4 = 3500 \times 1{,}06^4 \approx 4418{,}67$ €.

Ao fim de 4 anos terá disponível, aproximadamente, 4418,67 €.

87.1. $P_n = 30 \times 1{,}2^n$

$P_{20} = 30 \times 1{,}2^{20} \approx 1150{,}13$

87.2.
$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_{39} = S_{40} = 30 \times \frac{1 - 1{,}2^{40}}{1 - 1{,}2} \approx 220\ 315{,}74$$

88.1. $A_n = 4{,}2 + 5n$.

Trata-se de um crescimento linear.

88.2. $S_n = 3 \times 2{,}5^n$

Trata-se de um crescimento exponencial.

89. Podemos representar a situação pela sequência 6, 18, 54, 162, … que é uma progressão geométrica com termo inicial 6 e razão 3. Pretende-se determinar a soma dos 11 primeiros termos da progressão geométrica (corresponde a dez envios após o primeiro convite).

$$S_{11} = 6 \times \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 531\ 438$$

Assim, ao fim de dez envios estarão convidadas 531 438 pessoas.

90.1. $P(5) = 70{,}5 \Leftrightarrow 3(1 - 5) + a = 70{,}5 \Leftrightarrow -12 + a = 70{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 70{,}5 + 12 \Leftrightarrow a = 82{,}5$

90.2. $P(10) = 3(1 - 10) + 82{,}5 = 55{,}5$

Estima-se que tenha 55 500 habitantes.

90.3. $P(t) = 20 \Leftrightarrow 3(1 - t) + 82{,}5 = 20 \Leftrightarrow 3 - 3t + 82{,}5 = 20 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -3t = 20 - 3 - 82{,}5 \Leftrightarrow t = \frac{65{,}5}{3}$$

Então $t \approx 22$ anos.

Daqui a, aproximadamente, 22 anos.

Pág. 107

91.1. Ao fim de 1 ano: 100% – 8% = 92 % de espaço livre

Assim, 0,92 × 12 288 ≈ 11 305 GB livres.

91.2. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $m = 6{,}60$ e $b \approx 0{,}67$.

Modelo: $y = 6{,}6x + 0{,}67$

Para $x = 10$ (ano 2019), $y = 6{,}6 \times 10 + 0{,}67 = 66{,}67$.

Deve-se então calcular 66,67% de 12 288 GB, ou seja:

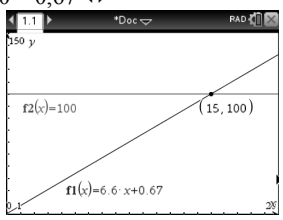
0,6667 × 12 288 ≈ 8192

Aproximadamente, 8192 GB.

91.3. Resolve-se analiticamente a equação $6{,}6x + 0{,}67 = 100$.

$6{,}6x + 0{,}67 = 100 \Leftrightarrow 6{,}6x = 100 - 0{,}67 \Leftrightarrow x = \frac{99{,}33}{6{,}6}$

Então, $x \approx 15$. Alternativamente, pode-se resolver graficamente a equação.



Como 2009 + 15 = 2024, podemos afirmar que se prevê que o agrupamento tenha de substituir o servidor no ano 2024.

92.1. Decrescimento exponencial.

92.2. $D(0) = 1299 \times e^{-0{,}083\,382 \times 0} = 1299$ €

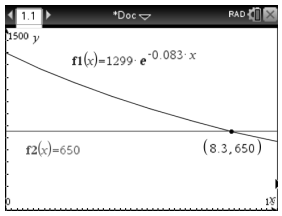
92.3. $D(12) = 1299 \times e^{-0{,}083\,382 \times 12} \approx 477{,}60$

Ao fim de 1 ano vale, aproximadamente, 477,60 €.

92.4. Resolve-se graficamente a equação:

$1299 \times e^{-0{,}083\,382t} = 650$

Ao fim de, aproximadamente, 8 meses.



93.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 1{,}21$ e $b \approx 1{,}39$.

Modelo exponencial: $y = 1{,}12 \times 1{,}39^x$

93.2. Para $x = 10$ (10.º dia de análise), $y = 1{,}21 \times 1{,}39^{10} \approx 32{,}58$.

Estima-se que existam, aproximadamente, 3258 milhões de bactérias por cm^3.

Pág. 108

94.1. $L(0) = 12{,}41 \Leftrightarrow a + \ln(e + 0) = 12{,}41 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + \ln e = 12{,}41 \Leftrightarrow a + 1 = 12{,}41 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 11{,}41$

94.2. $L(9) = 11{,}41 + \ln(e + 9) \approx 13{,}87$

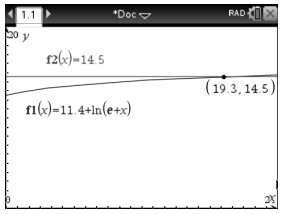
Obteve, aproximadamente, 1387 € de lucro.

94.3. Resolve-se graficamente a equação:

$11{,}41 + \ln(e + x) = 14{,}50$

19 dias após 1 de agosto: 20 de agosto

No dia 20 de agosto.



95.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 15{,}347$ e $b \approx 27{,}126$.

Modelo logarítmico: $y = 15{,}347 + 27{,}126 \ln x$

95.2. Início do ano 2003 → $x = 4$

$y = 15{,}347 + 27{,}126 \ln 4 \approx 53$

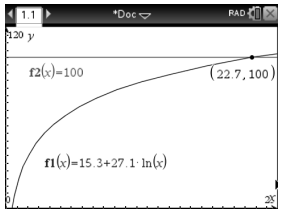
Aproximadamente, 53 000 borboletas.

95.3. Resolve-se graficamente a equação:

$15{,}347 + 27{,}126 \ln x = 100$

Como $x = 22$ corresponde ao início do ano de 2021 então $x = 22{,}7$ corresponde ainda ao ano 2021.

No decorrer do ano 2021.



95.4. Não, pois o modelo reflete um crescimento ilimitado sendo que, por exemplo, o espaço no borboletário é limitado (bem como o alimento ou os recursos financeiros).
Com o passar do tempo, o crescimento do número de borboletas terá de estabilizar e não ultrapassar um determinado limite máximo, o que não acontece com este modelo.

96.1. Final de 2012: $t = 12$

$$U(12) = \frac{4424}{1+113e^{-0,878\times 12}} \approx 4411$$

Aproximadamente, 4411 ursos afetados.

96.2.
$$U(3) = \frac{4424}{1+113e^{-0,878\times 3}} \approx 485,5$$

$$U(6) = \frac{4424}{1+113e^{-0,878\times 6}} \approx 2795,8$$

$$\frac{2795,8-485,5}{485,5}\times 100 = 476\%$$

O aumento é de, aproximadamente, 476%.

96.3.
$$U(24) = \frac{4424}{1+113e^{-0,878\times 24}} \approx 4424$$

Assim, $\frac{4424}{7000}\times 100 = 63,2\%$.

Pág. 109

97.1. Recorrendo à calculadora obtém-se $a \approx 8,64$; $b \approx 0,39$ e $c \approx 427,02$.

Modelo logístico: $y = \frac{427,02}{1+8,64e^{-0,39x}}$

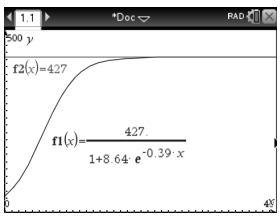
97.2. Ano 2003 $\rightarrow x = 7$

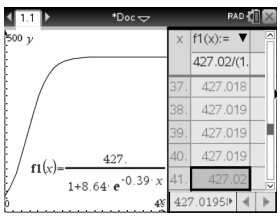
$$y = \frac{427,02}{1+8,64e^{-0,39\times 7}} \approx 273$$

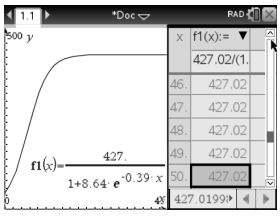
Assim, .

Estima-se que tenham sido vendidos/alugados cerca de 273 imóveis.

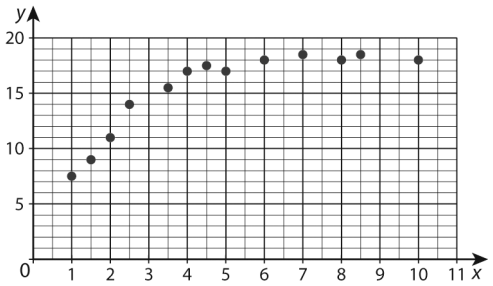
97.3. Segundo o modelo apresentado, a imobiliária nunca irá vender/alugar 460 imóveis.
A partir da análise do gráfico ou da tabela facilmente se percebe que, por muito tempo que passe, o número de imóveis vendidos/alugados irá estabilizar próximo dos 427.







98.1.



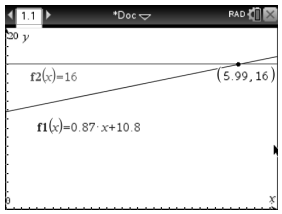
98.2. O modelo logístico, pois apresenta um crescimento limitado, evidenciando inicialmente um crescimento lento, seguido de um crescimento muito rápido e uma posterior fase de amortecimento. A partir daí o crescimento passa a ser muito lento, apresentando uma tendência de estabilização.

98.3. Modelo linear: $y = 0,87x + 10,79$
Modelo exponencial: $y = 10,51 \times 1,07^x$
Modelo logarítmico: $y = 8,70 + 4,63 \ln x$
Modelo logístico: $y = \frac{18,24}{1+3,91e^{-0,94x}}$

98.4. a) Modelo linear: $y = 0,87 \times 9 + 10,79 = 18,62$
Modelo exponencial: $y = 10,51 \times 1,07^9 \approx 19,32$
Modelo logarítmico: $y = 8,70 + 4,63 \ln 9 \approx 18,87$
Modelo logístico: $y = \frac{18,24}{1+3,91e^{-0,94\times 9}} \approx 18,22$

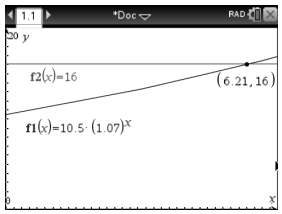
b) Recorrendo à calculadora gráfica:

Linear



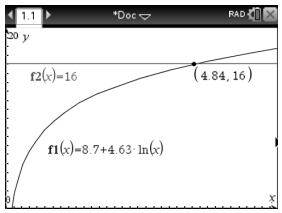
$x \approx 5,99$

Exponencial



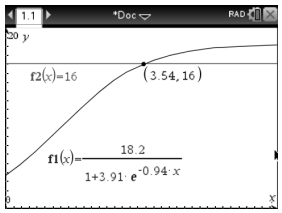
$x \approx 6,21$

Logarítmico



$x \approx 4,84$

Logístico



$x \approx 3,54$

98.5. Modelação logística.
Exemplos de argumentos:

- Pela análise da tabela, espera-se que para $y = 16$ o valor de x esteja próximo de 3,5 ou 4. Na alínea anterior, observa-se que apenas o modelo logístico verifica esta característica.
- Pela análise da tabela, também se percebe que o crescimento é limitado pois a partir de determinado valor de x os valores de y estabilizam em torno de 18 e 18,5. Sabemos que, dos quatro modelos estudados, apenas o logístico é limitado.

Pág. 110

1.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a = 95{,}8$ e $b = -190\,857{,}2$.

Modelo linear: $y = 95{,}8x - 190\,857{,}2$

1.2. Para $x = 2012$, $y = 95{,}8 \times 2012 - 190\,857{,}2 = 1892{,}4$.

Prevê-se que, em 2012, tenha havido cerca de 1892 doutoramentos.

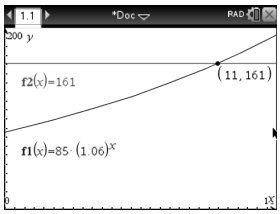
1.3. $95{,}8x - 190\,857{,}2 = 840 \Leftrightarrow 95{,}8x = 191\,697{,}2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{191697{,}2}{95{,}8}$$

Então $x \approx 2001$.

No ano 2001.

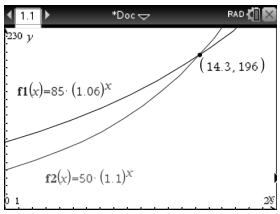
2.1. Designemos por $B(t)$ o número de leões da população Beta, t anos após 2008. Podemos então definir o modelo exponencial $B(t) = 85 \times 1{,}06^t$ e resolver graficamente a inequação $85 \times 1{,}06^t \geqslant 161$.



$2008 + 11 = 2019$

No ano 2019.

2.2. Designemos por $A(t)$ o número de leões da população Alfa, t anos após 2008. Podemos então definir o modelo exponencial $A(t) = 50 \times 1{,}10^t$ e resolver graficamente a inequação $A(t) > B(t)$, ou seja, $50 \times 1{,}10^t > 85 \times 1{,}06^t$.



$2008 + 14 = 2022$

No ano 2022.

3.1. Sabe-se que $h = 140$, $m_0 = 300$ e $r = \frac{\ln 2}{140} \approx 0{,}004\,95$.

Assim, $m(t) = 300\mathrm{e}^{-0{,}004\,95t}$.

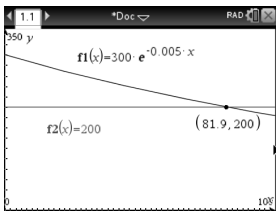
3.2. $m(365) = 300\mathrm{e}^{-0{,}004\,95 \times 365} \approx 49$ mg

Aproximadamente, 49 mg de polónio.

3.3. Resolve-se graficamente a equação:

$300\mathrm{e}^{-0{,}004\,95t} = 200$

Ao fim de, aproximadamente, 82 dias.

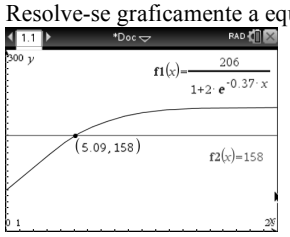


Pág. 111

4.1. $I(0) = \frac{206}{1 + 2\mathrm{e}^{-0{,}37 \times 0}} \approx 68{,}7$

Estavam já infetadas 68 pessoas.

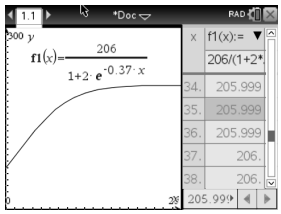
4.2. Resolve-se graficamente a equação $\frac{206}{1 + 2\mathrm{e}^{-0{,}37t}} = 158$.

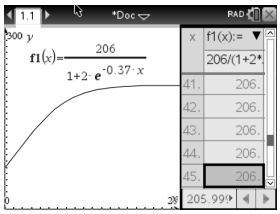


Ao fim de, aproximadamente, 5 dias.

4.3. Estima-se que fiquem infetadas 206 pessoas. Este é o limite máximo em torno do qual este crescimento logístico tende a estabilizar.

Observe-se o excerto da tabela de valores:





5.1.

	Grupo etário	
Modelo	**0-14**	**65+**
Exponencial	$y = 2{,}787 \times 0{,}989^x$ $r \approx -0{,}95$	$y = 0{,}687 \times 1{,}021^x$ $r \approx 0{,}998$
Logarítmico	$y = 2{,}773 - 0{,}233 \ln x$ $r \approx -0{,}76$	$y = 0{,}509 + 0{,}280 \ln x$ $r \approx 0{,}82$

5.2. Para ambos os grupos etários o modelo mais adequado é o exponencial.

5.3. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se:

$$y = \frac{14{,}551}{1 + 0{,}685\mathrm{e}^{-0{,}012x}}$$

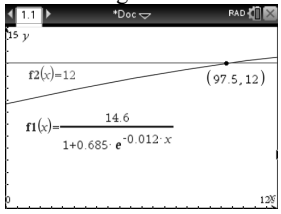
5.4. a) Para $x = 46$, $y = \frac{14{,}551}{1 + 0{,}685\mathrm{e}^{-0{,}012 \times 46}} \approx 10{,}435$.

Estima-se que, em 2005, havia, aproximadamente, 10,435 milhões de residentes.

b) Para $x = 61$, $y = \frac{14{,}551}{1 + 0{,}685\mathrm{e}^{-0{,}012 \times 61}} \approx 10{,}945$.

Estima-se que, em 2020, haja, aproximadamente, 10,945 milhões de residentes.

c) Resolve-se graficamente a equação $\frac{14{,}551}{1 + 0{,}685\mathrm{e}^{-0{,}012x}} = 12$.



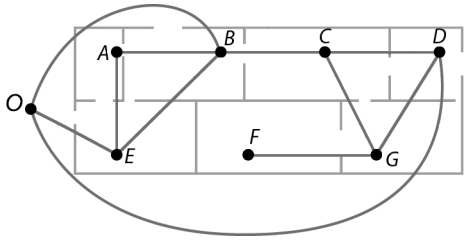
$1960 + 98 - 1 = 2057$

No ano 2057.

Exercícios tipo exame

Pág. 112

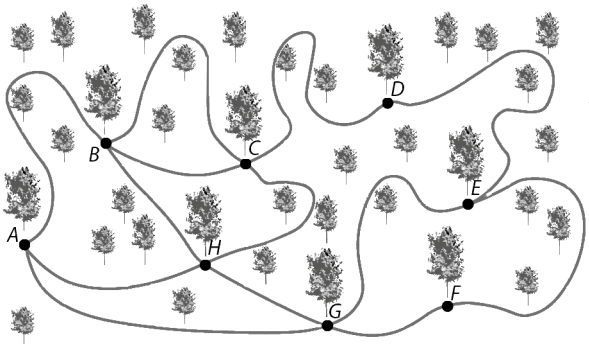
1.1. Vamos esquematizar através de um grafo a situação apresentada. Os vértices do grafo representam as secções e as arestas as passagens (portas) entre as secções.
O vértice O representa o exterior do armazém.



É possível que o funcionário passe pelo menos uma vez por todas as secções (vértices) e volte a sair do armazém. Por exemplo, *OEABCGFGDO*.

1.2. Procuramos saber se o grafo admite um circuito de Hamilton, ou seja, se existe um caminho que começa e acaba no mesmo vértice, passando por todos os vértices e não mais do que uma vez por cada um deles.
Da observação do grafo facilmente se conclui que não existem circuitos de Hamilton pois para passar no vértice *F* tem de passar duas vezes no vértice *G*. Dito por outras palavras, para o funcionário ir à secção *F* tem de passar pela secção *G* duas vezes (para entrar em *F* e para sair de *F*).

2.1.



Como o grafo é conexo e apenas tem dois vértices de grau ímpar (o *A* e *E*), então o grafo admite um caminho euleriano. Isto significa que o grafo admite um caminho que passa uma única vez em cada aresta.
Assim, o vigilante não tem de percorrer cada um dos trilhos mais do que uma vez. Por exemplo, *ABCBHAGFEGHCDE*.

2.2. Percurso: *ABCBHAGEFGHCDEGA*

Pág. 113

3. Aplicando o algoritmo do peso das arestas definimos a rede de caminhos, ***ABCDEGF***.
N.º de metros de cabo de rede: $7 + 4 + 8 + 6 + 2 + 3 = 30$ m
Aplicando o algoritmo da cidade mais próxima definimos a rede de caminhos ***ABFGEDC***.
N.º de metros de cabo de rede: $7 + 4 + 3 + 2 + 6 + 8 = 30$ m

4. Depois de a Bárbara sair do bloco *A* tem duas hipóteses à mesma distância: bloco *B* ou *D*. Ao escolher aleatoriamente uma delas, faz com que a distância total percorrida seja diferente. Vejamos:
Percurso optando por *B*: ***ABCEDA***
Distância: $50 + 50 + 70 + 55 + 50 = 275$ m
Percurso optando por *D*: ***ADEBCA***
Distância: $50 + 55 + 55 + 50 + 55 = 265$ m

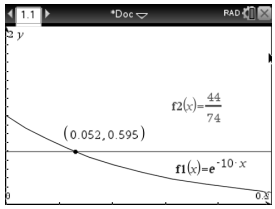
Pág. 114

5.1. $D_0 = 95 - 21 = 74$ °C
$T(t) = 21 + 74\,e^{-kt}$ (vamos determinar o valor do parâmetro k)
$T(10) = 65 \Leftrightarrow 21 + 74e^{-10k} = 65 \Leftrightarrow 74e^{-10k} = 44 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{44}{74} \overset{*}{\Leftrightarrow} -10k = \ln\left(\frac{44}{74}\right) \Leftrightarrow k = -\frac{\ln\left(\frac{444}{74}\right)}{10}$$

Então $k \approx 0{,}051\,99$.

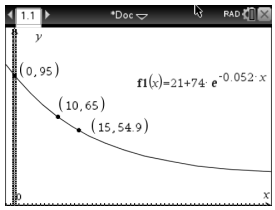
* Alternativamente pode resolver-se graficamente a equação $e^{-10k} = \frac{44}{74}$.



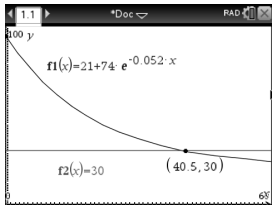
Assim, $T(t) = 21 + 74e^{-0{,}051\,99t}$.

5.2. $T(15) = 21 + 74e^{-0{,}051\,99 \times 15} \approx 54{,}9$ °C

5.3.

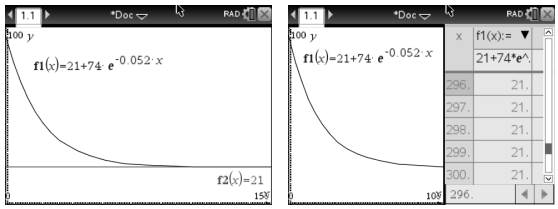


5.4. **a)** Resolve-se graficamente a equação $21 + 74e^{-0{,}051\,99t} = 30$.



Passados 40,5 minutos, ou seja, 40 minutos e 30 segundos.

b) Nunca.



Como se pode observar no excerto da tabela de valores, a temperatura irá tendencialmente estabilizar em torno dos 21 °C (temperatura ambiente).

Pág. 115

6.1. Recorrendo à calculadora obtém-se $a \approx 3{,}472$; $b \approx 0{,}864$ e $c \approx 3{,}652$.

Modelo logístico: $y = \dfrac{3{,}652}{1+3{,}472\mathrm{e}^{-0{,}864x}}$

6.2. **a)** $09:45 \Rightarrow x = 3{,}5$

Assim, $y = \dfrac{3{,}652}{1+3{,}472\mathrm{e}^{-0{,}864\times 3{,}5}} \approx 3{,}125$.

Aproximadamente, 3125 operações.

b) Resolve-se graficamente a equação:

$$\frac{3{,}652}{1+3{,}472\mathrm{e}^{-0{,}864x}} = 3{,}55$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $t = 5{,}55$.

$5{,}55 \times 30 = 166{,}5$ minutos

$166{,}5 : 60 = 2{,}775$ horas

0,775 horas $\approx$ 47 minutos

Assim, o número de operações ultrapassou, pela primeira vez, as 3550 ao fim de, aproximadamente, 2 horas e 47 minutos, ou seja, às 10:47.

6.3. Recorrendo à calculadora obtém-se $a \approx 0{,}05$ e $b = 3{,}5$.

Modelo linear: $y = 0{,}05x + 3{,}5$

$$0{,}05x + 3{,}5 = 4 \Leftrightarrow 0{,}05x = 4 - 3{,}5 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}5}{0{,}05} \Leftrightarrow x = 10$$

Como 10 períodos de 30 minutos são 5 horas, o número de operações atingiu as 4000 às 16:00.