

Ficha para praticar 6

- 1.1. $A_n = 127 + 10n$ (progressão aritmética)
 1.2. $B_n = 127 \times 10^n$ (progressão geométrica)
 1.3. $P_n = 40 - 5(n - 1)$ ou $P_n = 45 - 5n$ (progressão aritmética)

1.4. $T_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (progressão geométrica)

2.1. $\begin{cases} A_0 = 7 \\ A_n = A_{n-1} + 5, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$

2.2. $A_n = 7 + 5n$

3.1. **Crescimento populacional positivo:** significa que o tamanho da população aumenta à medida que o tempo aumenta.

Por exemplo, a evolução do capital investido num banco numa conta a prazo com taxa de juro anual.

Crescimento populacional negativo: significa que o tamanho da população diminui à medida que o tempo aumenta.

Por exemplo, a evolução do valor de um automóvel a partir do momento em que é adquirido.

3.2. **Crescimento discreto:** o tamanho da população é alterado e contabilizado periodicamente, por exemplo de hora a hora, ou de mês a mês, ou de ano em ano, etc.

Por exemplo, a evolução do número de golos marcados por um jogador por jornada num campeonato.

Crescimento contínuo: o tamanho da população é alterado a todo o instante. Dizemos que o crescimento se caracteriza por mudanças que ocorrem permanentemente.

Por exemplo, a evolução da concentração de penicilina no organismo desde o momento em que foi administrada através de uma injeção.



Resposta: Terá amealhado 360 €.

4.2. $300 + 15n$

4.3. $300 + 15n = 650 \Leftrightarrow 15n = 650 - 300 \Leftrightarrow 15n = 350 \Leftrightarrow n = \frac{350}{15}$

Então $n \approx 23,3$.

Resposta: Terá de esperar 24 meses.

5.1. Designemos por (U_n) a sequência.

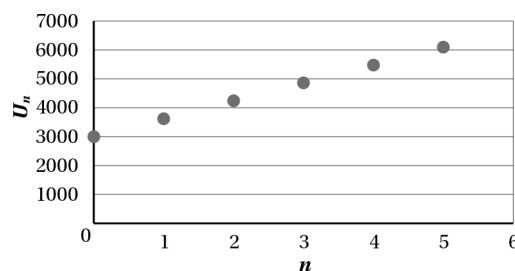
Expressão recursiva:

$\begin{cases} U_0 = 3000 \\ U_n = U_{n-1} + 620, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$

Termo geral: $U_n = 3000 + 620n$

5.2.

2010	$U_0 = 3000$
2011	$U_1 = 3620$
2012	$U_2 = 4240$
2013	$U_3 = 4860$
2014	$U_4 = 5480$
2015	$U_5 = 6100$



5.3. $U_{10} = 3000 + 620 \times 10 = 9200$

Resposta: Espera vender 9200 unidades.

5.4. $3000 + 620n = 18\,000 \Leftrightarrow 620n = 18\,000 - 3000 \Leftrightarrow 620n = 15\,000 \Leftrightarrow n = \frac{15\,000}{620}$

Então $n \approx 24,2$.

Ao fim de 25 anos, ou seja, em 2035.

6.1. Crescente exponencial negativo

6.2. 1 ano: $120 \times 0,70 = 84$

2 anos: $84 \times 0,70 = 58,8$

Ao fim de 2 anos, o apartamento vale 58 800 €.

6.3. $\begin{cases} D_0 = 120\,000 \\ D_n = D_{n-1} \times 0,70, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$

6.4. $D_n = 120\,000 \times 0,70^n$

7.1. 1 ano: $1500 + 0,03 \times 1500 = 1545$ €

2 anos: $1500 + 2 \times 0,03 \times 1500 = 1590$ €

3 anos: $1500 + 3 \times 0,03 \times 1500 = 1635$ €

Resposta: Terá 1635 €.

7.2. $C_n = 1500 + 1500 \times 0,03n$ ou $C_n = 1500(1 + 0,03n)$

7.3. $1500 + 1500 \times 0,03n = 1750 \Leftrightarrow 45n = 1750 - 1500 \Leftrightarrow n = \frac{250}{45}$

Então $n \approx 5,6$.

Resposta: Ao fim de 6 anos.

Ficha para praticar 7

1.1. 1 de setembro: 111

1 de outubro: 122

Resposta: Durante o mês de setembro foram vendidos 122 *smartwatches*.

1.2. Designado por (W_n) a sucessão, como se trata de uma progressão aritmética de razão 11 e termo inicial 34:

$W_n = 34 + 11n$

1.3. Pretende determinar-se a soma dos 12 primeiros termos da progressão aritmética W_n .

Sabe-se que $W_0 = 34$ (mês da inauguração) e

$W_{11} = 34 + 11 \times 11 = 155$, logo $S_{12} = \frac{34+155}{2} \times 12 = 1134$.

Foram vendidos 1134 *smartwatches*.

1.4. Dezembro de 2016 $\rightarrow n = 23$

$W_{23} = 34 + 11 \times 23 = 287$

$287 \times 105 = 30\,135$

Resposta: Volume de negócio: 30 135 €

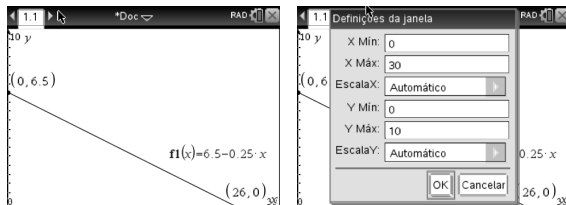
2.1. $P(10) = 6,5 - 0,25 \times 10 = 4$

Resposta: 4000 insetos

2.2. $6,5 - 0,25t = 0,5 \Leftrightarrow -0,25t = 0,5 - 6,5 \Leftrightarrow -0,25t = -6 \Leftrightarrow t = \frac{6}{0,25} \Leftrightarrow t = 24$

Resposta: Ao fim de 24 horas.

2.3.



Resposta: Ao fim de 26 horas a praga foi extinta, ou seja, no dia 19 de novembro de 2015 às 19 horas.

3.1.

x	y
0,75	290
0,60	370

Regressão linear (a partir da calculadora gráfica):

$$y = -533,33x + 690$$

3.2. $500 = -533,33x + 690 \Leftrightarrow 533,33x = 190 \Leftrightarrow x = \frac{190}{533,33}$

Então $x \approx 0,356$.

Resposta: Para garantir que vende, pelo menos, 500 bolos, o preço terá de ser 0,35 €.

4.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $m \approx 0,043$ e $b \approx 1,078$.

Resposta: Modelo linear: $y = 0,043x + 1,078$

4.2. a) Para $x = 11$ (ano 2010): $y = 0,043 \times 11 + 1,078 = 1,551$

Resposta: Projecção: 1 551 000 habitantes.

b) Para $x = 7,5$ (ano 1975): $y = 0,043 \times 7,5 + 1,078 = 1,4005$

Resposta: 1 400 500 habitantes.

c) $0,043x + 1,078 = 1,3 \Leftrightarrow 0,043x = 1,3 - 1,078 \Leftrightarrow x = \frac{0,222}{0,043}$

Então $x \approx 5,2$, o que corresponde ao ano 1952.

Resposta: No ano 1952.

5.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $m \approx 1,25$ e $b \approx 2,18$.

Modelo linear: $y = 1,25x + 2,18$

5.2. Horário da 17:00 às 18:00 corresponde a $x = 11$.

Assim, $y = 1,25 \times 11 + 2,18 = 15,93$.

Resposta: Estima-se que tenham passado na portagem, aproximadamente, 159 automóveis.

Ficha para praticar 8

1.1.

Ano	1970	1980	1990	2000	2010
N.º de ursos-pardos	2400	2460	2522	2585	2650

1.2. $2400 \times 1,025^x$

1.3. Ano 2020: $x = 5$

$$2400 \times 1,025^5 \approx 2715$$

Resposta: Aproximadamente, 2715 ursos-pardos.

1.4. Ano 2000: $x = 3$

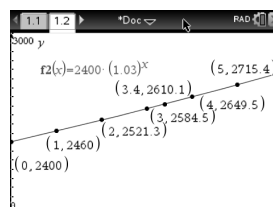
Ano 2004: $x = 3,4$

Ano 2010: $x = 4$

$$\text{Assim, } 2400 \times 1,025^{3,4} \approx 2610$$

Resposta: Estima-se que existam, aproximadamente, 2610 ursos-pardos.

1.5.

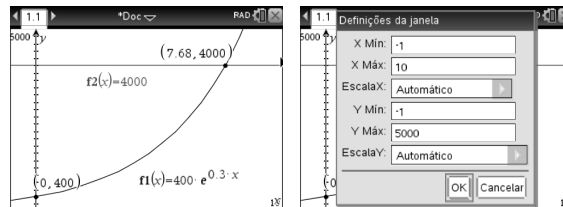


2.1. $P(t) = 400e^{0,3t}$

2.2. $P(12) = 400e^{0,3 \times 12} \approx 14\,639$

Resposta: Aproximadamente, 14 639 bactérias.

2.3.



7,68 horas: 7 horas e $0,68 \times 60 \approx 41$ minutos

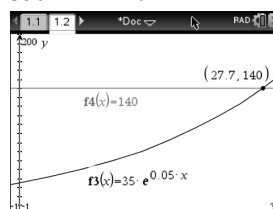
Resposta: Ao fim de 7 horas e 41 minutos.

3.1. $M(0) = 35e^{0,05 \times 0} = 35$

Existiam inicialmente 35 milhões de microrganismos.

3.2. $4 \times 35 = 140$

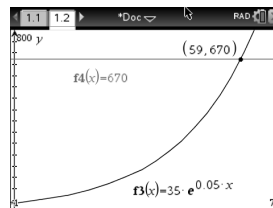
$$35e^{0,05d} = 140$$



$$0,7 \times 24 \approx 17 \text{ horas}$$

Resposta: Ao fim de 27 dias e 17 horas.

3.3.



Resposta: Ao fim de 59 dias.

4.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 15,07$ e $b \approx 0,88$.

Resposta: Modelo exponencial: $y = 15,07 \times 0,88^x$

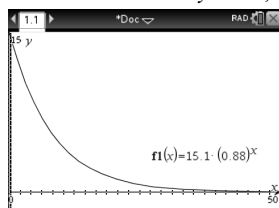
4.2. a) Para $x = 11$, $y = 15,07 \times 0,88^{11} \approx 3,7$.

Resposta: Aproximadamente, 3,7 milhões de euros.

b) Para $x = 3$, $y = 15,07 \times 0,88^3 \approx 10,3$.

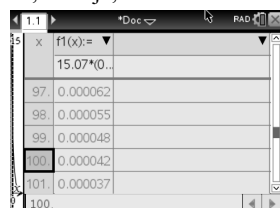
Resposta: Aproximadamente, 10,3 milhões de euros.

c) Gráfico do modelo: $y = 15,07 \times 0,88^x$



Segundo este modelo (decrecente exponencial) a empresa nunca deixará de ter prejuízo por muitos anos que passem.

Observe-se no gráfico que a curva nunca atinge o eixo dos xx , ou seja, a reta horizontal $y = 0$.



Claro que analisando a tabela observa-se que passados, aproximadamente, 100 anos o valor do prejuízo já é tão baixo (muito próximo do zero) que podemos considerar que deixa de existir prejuízo. No entanto, não é aconselhável usar este modelo para fazer previsões a tão longo prazo.

Ficha para praticar 9

1. Designemos por I_S a intensidade do sismo em Sendai, I_K a intensidade do sismo em Katmandu e por M_S a magnitude do sismo em Sendai.

Sabe-se que $I_S = 13 \times I_K$ e que $M_K = 7,8$, ou seja, $\log\left(\frac{I_K}{S}\right) = 7,8$.

Assim:

$$\begin{aligned} M_S &= \log\left(\frac{I_S}{S}\right) = \log\left(\frac{13 \times I_K}{S}\right) = \log(13 \times I_K) - \log S = \\ &= \log 13 + \log I_K - \log S = \log 13 + \log\left(\frac{I_K}{S}\right) = \\ &= \log 13 + 7,8 \approx 8,9 \end{aligned}$$

Resposta: O sismo de Sendai teve uma magnitude de 8,9 na escala de Richter.

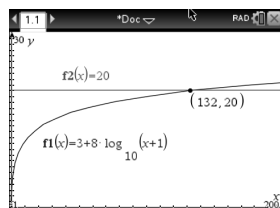
2.1. $A(0) = 3 + 8 \log(0 + 1) = 3$

Resposta: Foram plantadas 300 árvores.

2.2. $A(1) = 3 + 8 \log(1 + 1) \approx 5,41$

Resposta: Aproximadamente, 541 árvores.

2.3.



132 meses: 11 anos

Resposta: Ao fim de 11 anos.

2.4. Não, pois apesar de o crescimento logarítmico apresentar um crescimento lento a partir de certa altura ele não deixa de ser ilimitado.

3.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 2042,02$ e $b \approx 504,11$.

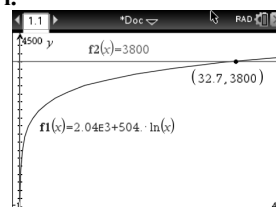
Resposta: Modelo logarítmico: $y = 2042,02 + 504,11 \ln x$

3.2. a) Ano 2020: $x = 25$

$$y = 2042,02 + 504,11 \times \ln 25 \approx 3665$$

Resposta: Aproximadamente, 3665 amostras.

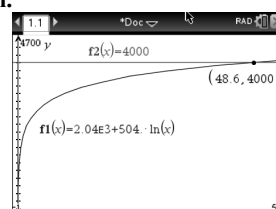
b) i.



$$1996 + 32 - 1 = 2027$$

Resposta: No ano 2027.

ii.



$$1996 + 48 - 1 = 2043$$

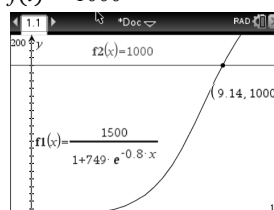
Resposta: No ano 2043.

Ficha para praticar 10

1.1. $f(3) = \frac{1500}{1 + 749e^{-0,8 \times 3}} \approx 21,8$

Resposta: 21 pessoas

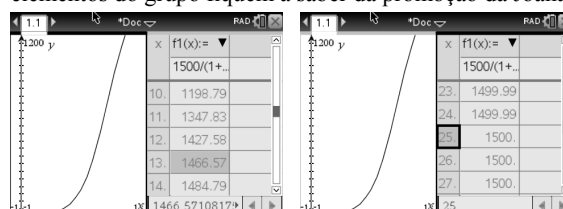
1.2. $f(t) = 1000$



$$0,14 \times 60 \approx 8 \text{ minutos}$$

Ao fim de 9 horas e 8 minutos.

1.3. Com o decorrer do tempo prevê-se que todos os 1500 elementos do grupo fiquem a saber da promoção da Joana.



2. Afirmação I

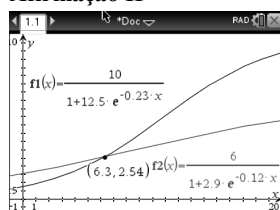
$$A(0) = \frac{10}{1 + 12,5e^{-0,23 \times 0}} \approx 0,74$$

$$B(0) = \frac{6}{1 + 2,9e^{-0,12 \times 0}} \approx 1,54$$

$$B(0) - A(0) = 1,54 - 0,74 = 0,8$$

A afirmação I é falsa. A árvore da espécie *A* tinha aproximadamente menos 0,8 m de altura do que a árvore da espécie *B*.

Afirmação II



A afirmação II é falsa. Foram necessários mais do que 6,3 anos.

Afirmação III

A altura da árvore da espécie *A* tende a estabilizar perto dos 10 m (valor do parâmetro *c*).

A altura da árvore da espécie *B* tende a estabilizar perto dos 6 m (valor do parâmetro *c*).

Assim, a diferença entre as alturas tenderá para $10 - 6 = 4$ m.

3.1. $L(0) = 20$ e $L(11) = 60$

$$L(0) = 20 \Leftrightarrow \frac{k}{1 + ae^{-0,4 \times 0}} = 20 \Leftrightarrow \frac{k}{1 + a} = 20 \Leftrightarrow k = 20 + 20a$$

$$L(11) = 60 \Leftrightarrow \frac{k}{1 + ae^{-0,4 \times 11}} = 60 \Leftrightarrow \frac{20 + 20a}{1 + ae^{-4,4}} = 60$$

$$\Leftrightarrow 20 + 20a = 60 + 60e^{-4,4} \Leftrightarrow 20a - 60e^{-4,4} a = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(20 - 60e^{-4,4}) = 40 \Leftrightarrow a = \frac{40}{20 - 60e^{-4,4}}$$

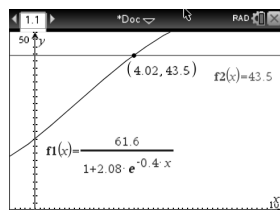
Então $a \approx 2,08$ e $k \approx 20 + 20 \times 2,08 = 61,6$.

Resposta: $a \approx 2,08$ e $k \approx 61,6$

3.2. $L(5) = \frac{61,6}{1 + 2,08e^{-0,4 \times 5}} \approx 48,069$

Resposta: Aproximadamente, 48 069 €.

3.3.



Ao fim de, aproximadamente, 4 anos.

3.4. Espera-se obter no máximo, aproximadamente, 61 600 € de lucro.

4.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 0,68$, $b \approx 0,10$ e $c \approx 6,19$.

Resposta: Modelo logístico: $y = \frac{6,19}{1 + 0,68e^{-0,10x}}$

4.2. Para $x = 20$, $y = \frac{6,19}{1 + 0,68e^{-0,10 \times 20}} \approx 5,668$

Resposta: Prevê-se que sejam recolhidas, aproximadamente, 5 668 000 toneladas de lixo.

4.3. Não, pois segundo o modelo, que é limitado, com o decorrer do tempo a quantidade de lixo recolhida tende a estabilizar perto das 6,19 milhões de toneladas.

Ficha de teste 2

1.1. Representando por (V_n) a sequência que traduz a quantidade, em milhares de litros, de vinho produzido, n anos após o primeiro ano de atividade:

$$V_n = 42 + 3n$$

1.2. $V_5 = 42 + 3 \times 5 = 57$

Resposta: Produzirá 57 mil litros de vinho.

1.3. $V_0 = 42 + 3 \times 0 = 42$

$$V_9 = 42 + 3 \times 9 = 69$$

$$V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_9 = S_{10} = \frac{V_0 + V_9}{2} \times 10 = \frac{42 + 69}{2} \times 10 = 555$$

Resposta: Durante 10 anos foram produzidos 555 mil litros de vinho.

1.4. $42 + 3n = 63 \Leftrightarrow 3n = 63 - 42 \Leftrightarrow 3n = 21 \Leftrightarrow n = \frac{21}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = 7$$

Resposta: Ao fim de 7 anos.

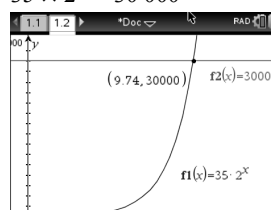
2.1.

Meses decorridos	Número de indivíduos
0	35
1	$35 \times 2 = 70$
2	$70 \times 2 = 140$
3	$140 \times 2 = 280$
4	$280 \times 2 = 560$
5	$560 \times 2 = 1120$
6	$1120 \times 2 = 2240$

Resposta: Terá 2240 indivíduos.

2.2. 35×2^n

2.3. $35 \times 2^n = 30\,000$



Resposta: Ao fim de 10 meses.

3.1. Conta A

$$8000 \times 1,065 = 8520 \text{ €}$$

$$8520 \times 1,065 = 9073,80 \text{ €}$$

Conta B

$$8000 \times 1,065 = 8520 \text{ €}$$

$$8000 + 520 \times 2 = 9040 \text{ €}$$

Resposta: Conta A: 9073,80 €

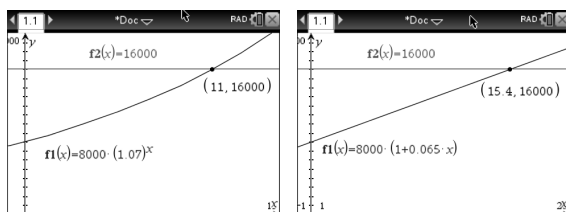
Conta B: 9040 €

3.2. Conta A: $C_n = 8000 \times 1,065^n$

Conta B: $C_n = 8000 + 8000 \times 0,065n$ ou

$$C_n = 8000(1 + 0,065n)$$

3.3.

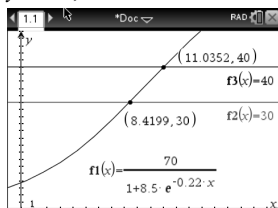


Resposta: Conta A: Em, aproximadamente, 11 anos.

Conta B: Em, aproximadamente, 15 anos.

4.1. Representando graficamente $y = \frac{70}{1 + 8,5e^{-0,22x}}$, $y = 30$ e

$y = 40$, obtém-se:



Os pontos de interseção assinalados nos gráficos informam-nos que a Laura atingiu 30 kg aos 8,4199 anos, e atingiu os 40 kg aos 11,0352 anos.

$11,0352 - 8,4199 = 2,6153$ anos

$0,6153 \times 12 \approx 7$ meses

Resposta: O peso da Laura esteve entre 30 kg e 40 kg durante cerca de 2 anos e 7 meses.

4.2. Dia 1 de junho de 2012: $t = 14$ anos

Assim, $P(14) \approx 50,336$ kg.

De acordo com o modelo, a altura da Laura era de 160 cm, ou seja, 1,60 m.

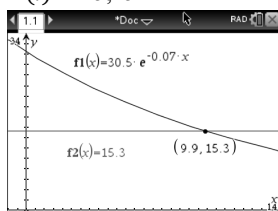
Portanto, $IMC = \frac{50,336}{1,60^2} \approx 19,662$.

Resposta: O IMC da Laura no dia 1 de junho de 2012 era, aproximadamente, 19,7.

5.1. $H(0) = 30,5e^{-0,07 \times 0}$

Resposta: 30 500 habitantes

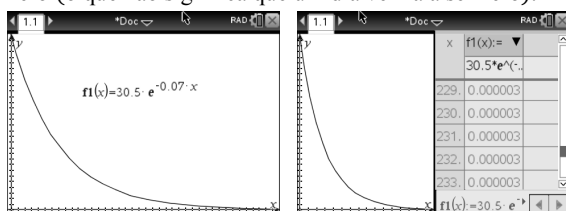
5.2. $H(t) = 15,25$



$0,9 \times 12 \approx 11$ meses

Resposta: Ao fim de, aproximadamente, 9 anos e 11 meses.

5.3. A afirmação é verdadeira. Uma vez que estamos perante um decrescimento exponencial, o número de habitantes tende para zero (o que não significa que um dia venha a ser zero).



6. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx -140,125$ e $b \approx 58,744$.

Modelo logarítmico: $y = -140,125 + 58,744 \ln x$

No dia 1 de dezembro de 2014 o André tinha 16 anos e 6 meses, ou seja, 198 meses:

$16 \times 12 + 6 = 198$

A altura do André é dada por:

$y = -140,125 + 58,744 \ln 198 \approx 170,5$

Resposta: A altura do André no dia 1 de dezembro de 2014 é, aproximadamente, 170,5 cm.

7.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx 61,593$ e $b \approx 0,988$.

Modelo exponencial: $y = 61,593 \times 0,988^x$

Para $x = 7$, $y = 61,593 \times 0,988^7 \approx 56,6$.

Resposta: Prevê-se que, em 2015, houvesse, aproximadamente, 56,6% de positivas no exame de MACS.

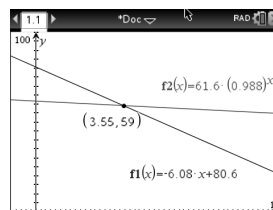
7.2. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se $a \approx -6,082$ e $b \approx 80,618$.

Modelo linear: $y = -6,082x + 80,618$

Para $x = 9$, $y = -6,082 \times 9 + 80,618 \approx 25,9$.

Segundo o modelo encontrado, prevê-se que, em 2017, haja aproximadamente, 25,9% de positivas no exame de Matemática A.

7.3. Gráfico dos dois modelos em simultâneo:



Conclusão: de acordo com os modelos encontrados nas alíneas anteriores, podemos afirmar que a percentagem de positivas a Matemática A “nunca mais” voltará a ser superior à de MACS.

8.1. Modelo logístico:

$$y = \frac{3264,07}{1 + 140,06e^{-0,39x}}$$

Modelo logarítmico:

$$y = -1064,14 + 1071,61 \times \ln x$$

8.2. Ano 2005: $x = 23$

Modelo logístico:

$$y = \frac{3264,07}{1 + 140,06e^{-0,39 \times 23}} \approx 3207 \text{ casos}$$

Modelo logarítmico:

$$y = -1064,14 + 1071,61 \times \ln 23 \approx 2296 \text{ casos}$$

Valor real: 1997 casos

Ambos os modelos produzem resultados bastante diferentes do valor real, em especial o modelo logístico.

Isto, juntamente com o “aspeto” do gráfico de barras, leva-nos a concluir que os modelos apresentados ajustam-se convenientemente ao período de 1987 a 2000 mas a partir daí já não.

8.3. Não, pois observa-se que de 1983 a 2000 a tendência era de crescimento (com uma ligeira estabilização) mas a partir daí passou a haver um decrescimento do número de casos de infeção VIH.

Isto significa que os modelos ajustam-se bem ao período de 1983 a 2000 mas a partir desse ano há uma inversão da tendência, “inutilizando” os modelos para previsões a longo prazo.

- 9.1. Atendendo a que a população duplica de 25 em 25 anos e que no ano zero a população é de 1 milhão, insere-se na calculadora gráfica os dados constantes da tabela:

Anos decorridos x	População (em milhões): y
0	1
25	2
50	4
75	8

Obtém-se o modelo de crescimento exponencial:

$$y = 1 \times 1,0281^x$$

Atendendo a que a quantidade de reservas alimentares começa em 1 milhão de unidades e aumenta 1 milhão de 25 em 25 anos (repare que ao fim de 200 anos é 9 e ao fim de 300 anos é 13), insere-se na calculadora gráfica os dados constantes da tabela:

Anos decorridos x	Quantidade de reservas alimentares (em milhões de unidades) y
0	1
25	2
50	3
75	4
200	9
300	13

Obtém-se o modelo de crescimento linear:

$$y = 0,04x + 1$$

- 9.2. Quatro séculos: $x = 400$

População: $y = 1 \times 1,0281^{400} \approx 65\,184$

Alimento: $y = 0,04 \times 400 + 1 \approx 17$

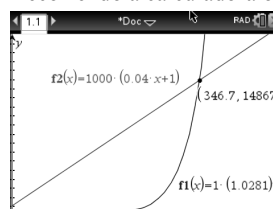
Resposta: 65184 milhões de habitantes e 17 milhões de unidades de reservas alimentares.

- 9.3. Como cada 1000 habitantes necessita de 1 unidade de reservas alimentares, então 1000 milhões de habitantes necessitarão de 1 milhão de unidades.

Queremos saber qual o ano em que o número de habitantes seja igual a 1000 vezes a quantidade de reservas alimentares, ou seja, pretende-se determinar x tal que:

$$1 \times 1,0281^x = 1000 \times (0,04x + 1)$$

Recorrendo à calculadora obtém-se:



Ponto de interseção (aproximadamente): (347, 14 867)

Conclui-se que a população apenas teria reservas alimentares para, aproximadamente, 347 anos (depois do início da contagem).

- 9.4. Supusemos que tanto a população inicial como as reservas alimentares eram de 1 milhão.

No entanto, pode haver inicialmente pouca população e muitos meios de subsistência o que permitiria, ao fim de muitos anos, a invenção de novos métodos de produção que permitiriam aumentar os meios de subsistência de forma mais rápida.

Por outro lado, a população também pode começar a crescer mais lentamente devido a fatores como casamentos mais tardio, menos filhos por falta de tempo para os criar, catástrofes naturais, guerras, doenças, etc.

Os modelos populacionais são válidos para o intervalo de tempo onde se recolhem os dados e um bom indicador para valores próximos desses.

No entanto, nem sempre são fiáveis para se fazer previsões a longo prazo.