Ficha para praticar 1

Pág. 4

1.1. $A\cup\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)=A\cup\left(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}\right)=$ Leis de De Morgan

$=A\cup\left(\overline{A}\cup B\right)=$ $\overline{\overline{B}}=B$

$=\left(A\cup\overline{A}\right)\cup B=$ Propriedade associativa

$=\mathrm{U}\cup B=$ $A\cup\overline{A}=U$

$=\mathrm{U}$ Elemento absorvente

1.2. $\left(\overline{A\cup\overline{B}}\right)\cap\overline{B}=\left(\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}\right)\cap\overline{B}=$ Leis de De Morgan

$=\left(\overline{A}\cap B\right)\cap\overline{B}=$ $\overline{\overline{B}}=B$

$=\overline{A}\cap\left(B\cap\overline{B}\right)=$ Propriedade associativa

$=\overline{A}\cap\varnothing=$ $B\cap\overline{B}=\varnothing$

$=\varnothing$ Elemento absorvente

1.3. $\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=$ Propriedade distributiva

$=A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)=$

$=A\cap U=$ $B\cup\overline{B}=U$

$=A$ Elemento neutro

1.4. $\left(\overline{A\cap B}\right)\cup\left(A\cup B\right)=$ Leis de De Morgan

$=\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cup\left(A\cup B\right)=$

$=\left(\overline{A}\cup A\right)\cup\left(\overline{B}\cup B\right)=$ Propriedade associativa

$=U\cup U=$ $A\cup\overline{A}=U$ e $\overline{B}\cup B=U$

$=U$ Idempotência

1.5. $\left[\left(A\cup\overline{B}\right)\cap B\right]\cap\overline{A}=$

$=\left[\left(A\cap B\right)\cup\left(\overline{B}\cap B\right)\right]\cap\overline{A}=$ Propriedade distributiva

$=\left[\left(A\cap B\right)\cup\varnothing\right]\cap\overline{A}=$ $\overline{B}\cap B=\varnothing$

$=\left(A\cap B\right)\cap\overline{A}=$ Elemento neutro

$=\left(A\cap\overline{A}\right)\cap B=$ Propriedades associativa e comutativa

$=\varnothing\cap B=$ $A\cap\overline{A}=\varnothing$

$=\varnothing$

1.6. $\left[\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup B\right)\cap\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\overline{A}\right)\right]\cup A=$

$=\left[\left(\left(A\cap B\right)\cap\left(\overline{B}\cup B\right)\right)\cap\left(\left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)\right)\right]\cup A=$

Propriedade distributiva

$=\left[\left(\left(A\cup B\right)\cap\mathrm{U}\right)\cap\left(\mathrm{U}\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)\right)\right]\cup A=$

$B\cup\overline{B}=U$ e $A\cup\overline{A}=U$

$=\left[\left(A\cup B\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)\right]\cup A=$ Elemento neutro

$=\left[A\cup\left(A\cup B\right)\right]\cap\left[A\cup\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right]=$

Propriedades distributiva e comutativa

$=\left[\left(A\cup A\right)\cup B\right]\cap\left[\left(A\cup\overline{A}\right)\cup\overline{B}\right]=$

Propriedade associativa

$=\left(A\cup B\right)\cap\left(U\cup\overline{B}\right)=$ $A\cup A=A$ e $A\cup\overline{A}=U$

$=\left(A\cup B\right)\cap U=$ Elemento absorvente

$=A\cup B$ Elemento neutro

2.1. $A\cap\left(B\cup\overline{A}\right)=$

$=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{A}\right)=$ Propriedade distributiva

$=\varnothing\cup\varnothing$, $A\cap B=\varnothing$, pois A e B são disjuntos e $A\cap\overline{A}=\varnothing$

$=\varnothing$ Idempotência

2.2. $\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap A=$

$=\left(\overline{A\cap B}\right)\cap A=$ Leis de De Morgan

$=\overline{\varnothing}\cap A=$ $A\cap B=\varnothing$

$=U\cap A=$ $\overline{\varnothing}=U$

$=A$ Elemento neutro

3.1. $A\cup B=\{1,\ 3,\ 7,\ 8\}\cup\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}=$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$

3.2. $A\cap B=\{1,\ 3,\ 7,\ 8\}\cap\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}=$

$=\{7\}$

3.3. $\overline{A}=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$

3.4. $\overline{B}=\{1,\ 3,\ 5,\ 8\}$

3.5. $A\setminus B=\{1,\ 3,\ 7,\ 8\}\setminus\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}=\{1,\ 3,\ 8\}$

3.6. $B\setminus A=\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}\setminus\{1,\ 3,\ 7,\ 8\}=\{2,\ 4,\ 6\}$

4.1. $B\cap\left(\overline{B\cup\overline{A}}\right)=B\cap\left(\overline{B}\cap\overline{\overline{A}}\right)=$

$=B\cap\left(\overline{B}\cap A\right)=$

$=\left(B\cap\overline{B}\right)\cap A=$

$=\varnothing\cap A=\varnothing$

4.2. $\overline{\left(A\cap B\right)\cup\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}=\overline{\left[\left(A\cap B\right)\cup\overline{A}\right]\cup\overline{B}}=$

$=\overline{\left[\left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(B\cup\overline{A}\right)\cup\overline{B}\right]}=$

$=\overline{\left[\mathrm{U}\cap\left(B\cup\overline{A}\right)\right]\cup\overline{B}}=$

$=\overline{\left(B\cup\overline{A}\right)\cup\overline{B}}=$

$=\overline{\left(B\cup\overline{B}\right)\cup\overline{A}}=$

$=\overline{U\cup\overline{A}}=$

$=\overline{U}=\varnothing$

5.1. $\left(\overline{A\cap B}\right)\cup A=\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cup A=$

$=\left(\overline{A}\cup A\right)\cup\overline{B}=$

$=U\cup\overline{B}=U$

5.2. $\left[\left(A\cap B\right)\cup\left(A\setminus B\right)\right]\cup\left(\overline{A}\cap\mathrm{U}\right)=$

$=\left[\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]\cup\overline{A}=$

$=\left[A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)\right]\cup\overline{A}=$

$=\left(A\cap\mathrm{U}\right)\cup\overline{A}=$

$=A\cup\overline{A}=U$

Pág. 5

6.

	B	$\overline{B}$	**Total**
A	3	5	8
$\overline{A}$	11	6	17
Total	14	11	25

7.1. $A\times B=\{(a,\ 1),\ (a,\ 2),\ (b,\ 1),\ (b,\ 2),\ (c,\ 1),\ (c,\ 2)\}$

7.2. $B\times C=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)\}$

7.3. $(A\times B)\cup(B\times C)=$

$=\{(a,\ 1),\ (a,\ 2),\ (b,\ 1),\ (b,\ 2),\ (c,\ 1),$

$(c,\ 2),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)\}$

7.4. $A\times C=\{(a,\ 2),\ (a,\ 3),\ (b,\ 2),\ (b,\ 3),\ (c,\ 2),\ (c,\ 3)\}$

$B\times A=\{(1,\ a),\ (1,\ b),\ (1,\ c),\ (2,\ a),\ (2,\ b),\ (2,\ c)\}$

$(A\times C)\cup(B\times A)=$

$=\{(a,\ 2),\ (a,\ 3),\ (b,\ 2),\ (b,\ 3),\ (c,\ 2),\ (c,\ 3),$

$(1,\ a),\ (1,\ b),\ (1,\ c),\ (2,\ a),\ (2,\ b),\ (2,\ c)\}$

8. Pelo principio de adição o CD que a Cristina irá levar para casa da amiga pode ser escolhido de $5+3=8$ maneiras diferentes.

9. O número pedido é, pelo princípio da multiplicação:

$28^2\times 25\times 24\times 26^2=317\ 990\ 400$

10. A Cristina pode vestir-se de duas formas:

▪ *T-shirt*, calça e sapatos ▪ *T-shirt*, saia e sapatos

Portanto, o número pedido é: $8\times 4\times 3+8\times 3\times 3=168$.

11. O condutor será um rapaz, pelo que, existem duas alternativas e para cada uma destas existem três alternativas para escolher a rapariga que vai viajar a seu lado. Para estas, existem $3\times 2\times 1=6$ alternativas para os jovens que vão viajara atrás.

Assim existem $2\times 3\times 6=36$ maneiras de ocupar os lugares.

Pág. 6

12.1. Esquematizando:

1.ª escolha: 5 opções (1, 3, 5, 7 ou 9)

2.ª escolha: 10 opções

3.ª escolha: 10 opções

4.ª escolha: 1 opção (igual ao algarismo dos milhares)

5.ª escolha: 1 opção (igual ao algarismo das dezenas de milhar)

Existem $5\times 10\times 10\times 1\times 1=500$ capicuas.

12.2. Há 5 escolhas para o primeiro algarismo; o seguinte e o terceiro são quaisquer números ímpares, logo há, também, 5 escolhas; para o quarto e o quinto não há escolha porque vão repetir, respetivamente, o segundo e o primeiro.

Existem $5\times 5\times 5\times 1\times 1=125$ capicuas.

13.1. Os lugares das pontas podem ser ocupados de duas maneiras diferentes:

A Ana numa ponta e o Carlos na outra e trocando de "pontas". Os restantes quatro lugares podem ser ocupados de $4\times 3\times 2\times 1$ maneiras diferentes.

Podem ocupar os lugares de $2\times 4\times 3\times 2\times 1=48$ maneiras.

13.2. — — — — — —

- A Beatriz pode escolher lugar de 4 maneiras diferentes (lugares 2, 3, 4 e 5);
- O Carlos e o Dinis têm duas maneiras de escolher lugar ao lado da Beatriz (CBD ou DBC);
- Os restantes três elementos podem escolher lugar de $3\times 2\times 1$ maneiras diferentes.

Podem ocupar os lugares de $4\times 2\times 3\times 2\times 1=48$ maneiras.

13.3. Esquematizando:

rapariga rapariga rapariga rapariga rapaz rapaz

↳ $4\times 3\times 2\times 1\times 2\times 1$ (as raparigas podem sentar-se de $4\times 3\times 2\times 1$ maneiras diferentes e os dois rapazes de 2×1 maneiras diferentes)

De modo análogo, pode ser:

rapaz rapariga rapariga rapariga rapariga rapaz

ou

rapaz rapaz rapariga rapariga rapariga rapariga

Podem ocupar os lugares de $3\times 4\times 3\times 2\times 1\times 2\times 1=144$ maneiras.

14.1. $\dfrac{1.^{\text{o}}\text{A}}{9}\ \dfrac{2.^{\text{o}}\text{A}}{10}\ \dfrac{3.^{\text{o}}\text{A}}{2}$

→ 0 ou 5

→ 1 a 9

$9\times 10\times 2=180$ elementos.

14.2. Como 5 é ímpar, a soma dos outros dois algarismos do número tem de ser ímpar. Tal só é possível se os dois algarismos forem um par e outro ímpar.

Esquematizando:

5 par ímpar ou 5 ímpar par

$1\times 5\times 4$ $\quad 1\times 4\times 5$

→ 1, 3, 7, 9 → 0, 2, 4, 6, 8

→ 0, 2, 4, 6, 8 → 1, 3, 7, 9

$1\times 5\times 4+1\times 4\times 5=40$ elementos.

14.3. $\dfrac{7}{8}\ \dfrac{8}{1}\ \dfrac{\ }{7}$ (todos exceto 0, 7 e 8)

$\dfrac{7}{1}\ \dfrac{9}{1}\ \dfrac{\ }{8}$ (todos exceto 7 e 9)

$\dfrac{8,\ 9}{2}\ \dfrac{\ }{9}\ \dfrac{\ }{8}$

$7+8+2\times 9\times 8=159$ elementos.

15.1. No baralho existem quatro damas, portanto, podemos retirar de $4\times 3=12$ maneiras.

15.2. Esquematizando:

1.ª carta		2.ª carta	1.ª carta		2.ª carta
Paus		Não é de Paus	Não é de Paus		Paus
13	×	39	39	×	13

Podemos retirar de $13\times 39+39\times 13=1014$ maneiras.

15.3. No baralho existem 12 figuras, portanto, podemos retirar de $12\times 11=132$ maneiras.

15.4. Para cada naipe existem 13×12 maneiras de retirar duas cartas e, como há 4 naipes, podemos retirar de $13\times 12\times 4=624$ maneiras.

Pág. 7

16.1. Para que as quatro bolas extraídas tenham a mesma cor, apenas pode ser a cor vermelha ou a cor azul.

Existem $10\times 9\times 8\times 7$ maneiras diferentes de extrair quatro bolas vermelhas e $7\times 6\times 5\times 4$ maneiras diferentes de extrair quatro bolas azuis.

É possível obter $10\times 9\times 8\times 7+4\times 6\times 5\times 4=5880$ maneiras.

16.2. $\frac{V}{10}\ \frac{V}{9}\ \frac{V}{8}\ \frac{AB}{10}$

A bola azul ou branca pode sair em 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º lugar.
É possível obter $(10\times9\times8\times10)\times4=28\ 800$ maneiras.

17.1. Esquematizando:

$$\frac{\{6,9\}}{2}\times\frac{}{5}\times\frac{}{4}\times\frac{}{3}$$

É possível obter $2\times5\times4\times3=120$ números.

17.2. Esquematizando:

$$\frac{}{5}\times\frac{}{4}\times\frac{}{3}\times\frac{\{1,3,9\}}{3}$$

É possível obter $5\times4\times3\times3=180$ números.

17.3. Esquematizando:

$$\frac{3}{1}\times\frac{1}{1}\times\frac{}{4}\times\frac{}{3}\ \text{ou}\ \frac{\{1,2\}}{2}\times\frac{}{5}\times\frac{}{4}\times\frac{}{3}$$

É possível obter $4\times3+2\times5\times4\times3=132$ números.

18.1. Existem 18 opções de escolha para o responsável pelos transportes (a turma tem 18 rapazes), 29 opções de escolha para o responsável pelo alojamento e 28 opções de escolha para o responsável pela gestão económica. Ao todo são $18\times29\times28=14\ 616$ comissões que podem ser formadas.

18.2. Há 3 opções de escolha para o António e para cada uma das 3 opções existem 29×28 2opções de escolha para os outros dois cargos.

É possível constituir a comissão de $3\times29\times28=2436$ maneiras.

18.3. Podem ser formadas $18\times17\times16+12\times11\times10=6216$ comissões.

19.1. Esquematizando:

$$\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}\times\underset{\substack{\downarrow\\ 0,\,1,\,4,\,5,\,6,\,8\text{ ou }9}}{\frac{}{7}}\times\frac{7}{1}\ \text{ou}\ \frac{2}{1}\times\underset{\substack{\downarrow\\ 0,\,1,\,4,\,5,\,6,\,8\text{ ou }9}}{\frac{}{7}}\times\frac{3}{1}\times\frac{7}{1}\ \text{ou}\ \underset{\substack{\downarrow\\ 1,\,4,\,5,\,6,\,8\text{ ou }9}}{\frac{}{6}}\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}\times\frac{7}{1}$$

Em qualquer das três opções anteriores o 2 e o 3 podem trocar de posição, portanto, o número pedido é: $(7+7+6)\times2=40$

19.2. O número 7 é ímpar, pelo que a soma dos restantes três algarismos tem se ser par para que a soma dos quatro algarismo seja ímpar.

A soma de três algarismos é par no caso de os três algarismos serem pares ou no caso de dois serem ímpares e o terceiro par:

$$\frac{P}{4}\ \frac{P}{4}\ \frac{P}{3}\ \frac{7}{1}$$

↳ não pode ser 0

$$\frac{P}{4}\ \frac{I}{4}\ \frac{I}{3}\ \frac{7}{1}$$

$$\frac{I}{4}\ \frac{P}{5}\ \frac{I}{3}\ \frac{7}{1}$$

$$\frac{I}{4}\ \frac{I}{3}\ \frac{P}{5}\ \frac{7}{1}$$

O número pedido é:

$$4\times4\times3+4\times4\times3+4\times5\times3+4\times3\times5=216$$

Ficha para praticar 2

Pág. 8

1. Pelo princípio da multiplicação podem estar devidamente identificados:
$23\times10\times10\times10\times23=529\ 000$ livros.

2. $\frac{A}{18}\ \frac{B}{18}\ \frac{C}{18}\ \frac{D}{18}\ \frac{E}{17}$

Assim, pelo princípio de multiplicação, podem escolher os bolos de $18^4\times17=1\ 784\ 592$ maneiras.

3.1. Há 10 maneiras de escolher o algarismo que se repete e 9 maneiras de escolher o algarismo diferente. O algarismo diferente pode aparecer no 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º lugar. Existem $10\times9\times4=360$ códigos de multibanco diferentes.

3.2. $\frac{1.^{\text{o}}A}{10}\ \frac{2.^{\text{o}}A}{9}\ \frac{3.^{\text{o}}\ A}{9}\ \frac{4.^{\text{o}}A}{9}$

→ diferente do 3.º A
→ diferente do 2.º A
→ diferente do 1º A

Existem $10\times9^3=7290$ códigos de multibanco diferentes.

4.1. As duas vogais podem ficar juntas em 5 situações (ou ocupam as duas primeiras posições, ou ocupam a segunda e a terceira posições, ou ocupam a terceira e quarta posição, ou ocupam a quarta e quinta posições ou ocupam a quinta e sexta posições).

É possível formar $5\times5^2\times10^4=1\ 250\ 000$ códigos diferentes.

4.2. Esquematizando:

$$\frac{A}{10}\times\frac{A}{10}\times\frac{V}{5}\times\frac{V}{5}\times\frac{A}{10}\times\frac{A}{10}=250\ 000$$

É possível formar 250 000 códigos diferentes.

4.3. Esquematizando:

$$\frac{A}{10}\times\frac{A}{10}\times\frac{V}{5}\times\underset{\substack{\downarrow\\ \text{igual à anterior}}}{\frac{V}{1}}\times\frac{A}{10}\times\frac{A}{10}=50\ 000$$

É possível formar 50 000 códigos diferentes.

4.4. Esquematizando

$$\frac{3}{1}\times\frac{}{9}\times\frac{}{9}\times\frac{}{9}\times\frac{a}{1}\times\frac{\text{vogal}}{4}$$

O algarismo 3 pode ocupar qualquer uma das quatro primeiras posições e as duas vogais podem trocar de posição.

É possível formar $9^3\times4\times4\times2=23\ 328$ códigos diferentes.

5.1. $\frac{1.^{\text{o}}A}{8}\ \frac{2.^{\text{o}}A}{8}\ \frac{5}{1}$ (O 1.ºA é diferente de 0)

$\frac{1.^{\text{o}}A}{9}\ \frac{2.^{\text{o}}A}{8}\ \frac{0}{1}$

$8\times8+9\times8=136$ números

5.2. O 5 é um número ímpar e, como tal, a soma dos dois restantes algarismo terá de ser ímpar para que a soma dos três algarismos seja par.

Assim, os dois restantes algarismos têm de ser um par e o outro ímpar. Temos 5 hipóteses de escolha de algarismo par e apenas 4 hipótese de escolha de algarismo ímpar (não pode ser o 5) e estes dois algarismos podem, ainda, trocar de posição (dezenas-unidades).
$5\times4\times2=40$ números.

Pág. 9

6.1. $2400 = 2^5 \times 3 \times 5^2$

Os divisores de 2400 são da forma $2^a \times 3^b \times 5^c$ com $a \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $b \in \{0,\ 1\}$ e $c \in \{0,\ 1,\ 2\}$.

Portanto, tem-se seis possibilidades para a , duas possibilidades para b e três possibilidades para c .

O número de divisores naturais de 2400 é $6 \times 2 \times 3 = 36$.

6.2. Os divisores pares de 2400 são aqueles em que o expoente da potência de base 2 não é nulo, pelo que existem cinco possibilidade para a , as mesmas duas possibilidades para b e as mesmas três possibilidades para c .

O número de divisores naturais é $5 \times 2 \times 3 = 30$.

7.1. $2^6 = 64$ subconjuntos

7.2. $2^{13} = 8192$ subconjuntos

8.1. $\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{1,\ 5\}\ \{1,\ 6\},\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},$
$\{2,\ 5\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 4\},\ \{3,\ 5\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 5\},\ \{4,\ 6\}$
e $\{5,\ 6\}$

8.2. $\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},$
$\{1,\ 5\},\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{2,\ 5\},\ \{3,\ 4\},\ \{3,\ 5\},\ \{4,\ 5\},$
$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 5\},$
$\{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{3,\ 4,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},$
$\{1,\ 2,\ 3,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

9.1. Dado → 6 possibilidades
Moeda → 2 possibilidades
Esta experiência tem $6 \times 2 = 12$ resultados possíveis.

9.2. 1.ª extração → 9 possibilidades
2.ª extração → 8 possibilidades
A experiência tem $9 \times 8 = 72$ resultados possíveis.

9.3. dado octaédrico → 8 possibilidades
dado cúbico → 6 possibilidades
dado dodecaédrico → 12 possibilidades
A experiência tem $8 \times 6 \times 12 = 576$ resultados possíveis

10.1. $2^{11} = 2048$, pelo que o cardinal de A é 11, isto é, $\#A = 11$.

10.2. O número de subconjuntos de A com exatamente três elementos é igual a $\dfrac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$.

Pág. 10

11.1. $\dfrac{7!}{9!} = \dfrac{7!}{9 \times 8 \times 7!} = \dfrac{1}{9 \times 8} = \dfrac{1}{72}$

11.2. $\dfrac{5!-7!}{4!} = \dfrac{5\times4!-7\times6\times5\times4!}{4!} = \dfrac{4!(5-7\times6\times5)}{4!} = \dfrac{4!(-205)}{4!} =$
$= -205$

11.3. $\dfrac{1}{7!} - \dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{7 \times 6!} - \dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{7 \times 6!} - \dfrac{7}{7 \times 6!} = -\dfrac{6}{7 \times 6!} =$
$= -\dfrac{6}{7 \times 6 \times 5!} = -\dfrac{1}{7 \times 5!} = -\dfrac{1}{7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = -\dfrac{1}{840}$

11.4. $\dfrac{n!}{(n-1)!} + \dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} + \dfrac{(n+1)n!}{n!} = n + (n+1) =$
$= 2n + 1$

11.5. $\dfrac{(n-4)!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-4)!}{(n-2)(n-3)(n-4)!} = \dfrac{1}{(n-2)(n-3)} =$
$= \dfrac{1}{n^2 - 5n + 6}$

11.6. $\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+1)n!+(n+2)(n+1)n!}{n!} =$
$= \dfrac{n!\left[(n+1)+(n+2)(n+1)\right]}{n!} = n + 1 + n^2 + 3n + 2 =$
$= n^2 + 4n + 3$

12.1. $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 = \dfrac{13!}{8!}$

12.2. $301 \times 300 \times 299 = \dfrac{301!}{298!}$

12.3. $14 \times 15 \times 16 \times 17 = \dfrac{17!}{13!}$

12.4. $300 \times 299 \times 298 = \dfrac{300!}{297!}$

12.5. $40 \times 41 \times 42 \times 43 = \dfrac{43!}{39!}$

12.6. $(n-5)(n-4) = \dfrac{(n-4)!}{(n-6)!}$

12.7. $n(n-1)(n-2)(n-3) = \dfrac{n!}{(n-4)!}$

12.8. $n(n+2)(n+1) = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

13.1. $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 30 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30 \Leftrightarrow n(n-1) = 30 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow n = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-30)}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = -5 \vee n = 6$
Como $n \geq 2$, $n = 6$.

13.2. $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} = 9n + 30 \Leftrightarrow \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 9n + 30 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 9n + 30 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 = 9n + 30 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n^2 - 12n - 28 = 0 \Leftrightarrow n = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times (-28)}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = -2 \vee n = 14$
Como $n \geq 3$, $n = 14$.

13.3. $\dfrac{n! + (n+1)!}{(n^2 - n)(n-2)!} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{n! + (n+1)n!}{n(n-1)(n-2)!} = 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{n! + (n+1)n!}{n!} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{n!\left[1 + (n+1)\right]}{n!} = 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 + n + 1 = 4 \Leftrightarrow n = 2$
Como $n \geq 2$, $n = 2$

13.4. $\dfrac{(n+1)!\,(n-1)!}{n!} = \dfrac{7(n-1)!}{n!} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n+1)!\,(n-1)! = 7(n-1)! \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n+1)n(n-1)! + (n-1)! = 7(n-1)! \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n-1)!\left[(n+1)n + 1\right] = 7(n-1)! \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n+1)n + 1 = 7 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n^2 + n + 1 = 7 \Leftrightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = -3 \vee n = 2$
Como $n \geq 1$, $n = 2$

14. O António pode escolher um livro de Matemática e um livro de Física, ou um livro de Matemática e um livro de Programação ou, ainda, um livro de Física e um livro de Programação. O António pode escolher os livros de $12\times 5+12\times 3+5\times 3=111$ maneiras diferentes.

Pág. 11

15.1. É possível formar $9\times 8\times 7\times 6\times 5=15\ 120$ números.

15.2. Temos duas hipóteses:

- exatamente três algarismos iguais

  $9\times 8\times 4$

  → número de posições que o algarismo pode ocupar;

  → número de maneiras de escolher o algarismo diferente;

  → número de maneiras de escolher os algarismos iguais.

- exatamente quatro algarismos iguais:

  Temos nove hipóteses.

É possível formar $9\times 8\times 4+9=297$ números.

15.3. $3+4+5=12$ (par)

A soma de todos os algarismos é par se os restantes dois algarismos são ambos pares ou são ambos ímpares:

É possível formar $4\times 4+5\times 5=41$ números.

16.

▨	7	▨	7
▨	7	6	▨
7	▨	7	▨

$7\times 7+7\times 6+7\times 7=140$

Existem 140 maneiras diferentes de fazer a bandeira.

17.1. Em cada questão existem quatro alternativas, assim, pelo principio da multiplicação tem

$$4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4=4^8=65\ 536$$

65 536 chaves.

17.2. O número de chaves sem qualquer resposta com a opção (B) é 3^8.

$4^8-3^8=58\ 975$ chaves.

18.1. $\underset{4}{\text{—}}\ \underset{5}{\text{—}}\ \underset{5}{\text{—}}\ \underset{5}{\text{—}}\ \underset{1}{\overset{0}{\text{—}}}$

→ não pode ser 0

É possível formar $4\times 5^3=500$ números.

18.2. $\underset{4}{\text{—}}\ \underset{5}{\text{—}}\ \underset{5}{\text{—}}\ \underset{3}{\text{—}}$

→ 0, 4 ou 6

→ não pode ser 0

É possível formar $4\times 5^2\times 3=300$ números.

18.3. $\underset{4}{\text{—}}\ \underset{5}{\text{—}}\ \underset{5}{\text{—}}\ \underset{1}{\text{—}}\ \underset{1}{\text{—}}$

→ igual ao primeiro

→ igual ao segundo

→ não pode ser 0

É possível formar $4\times 5^2=100$ números.

Ficha de teste 1

Pág. 12

1. **(A)** $A\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=$

$=\varnothing\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=A\cap\overline{B}=A\setminus B$

(B) $A\cup(B\setminus A)=A\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=(A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{A}\right)=$

$=(A\cup B)\cap \mathrm{U}=A\cup B$

(C) $(A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)=A\cup\left(B\cap\overline{B}\right)=A\cup\varnothing=A$

(D) $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=B\cap\left(A\cup\overline{A}\right)=B\cap \mathrm{U}=B$

Resposta: **(C)**

2. Restam cinco pares: 0 , 2 , 4 , 6 , 8

quatro ímpares: 3 , 5 , 7 , 9

Números de maneiras de escolher dois pares: $5\times 4=20$

Número de maneiras de escolher dois ímpares: $4\times 3=12$

No segundo caso, temos:

Número de maneiras de escolher os dois algarismos diferentes de 1 : 20 + 12 = 32

Número de maneiras de escolher dois lugares na sequência de seis para os algarismos diferentes de 1: 15

$\{1,\ 2\},\{1,\ 3\},\{1,\ 4\},\{1,\ 5\},\{1,\ 6\}\rightarrow 5$

$\{2,\ 3\},\{2,\ 4\},\{2,\ 5\},\{2,\ 6\}\rightarrow 4$

$\{3,\ 4\},\{3,\ 5\},\{3,\ 6\}\rightarrow 3$

$\{4,\ 5\},\{4,\ 6\}\rightarrow 2$

$\{5,\ 6\}\rightarrow \underline{1}$

15

Há $32\times 15=48$ possibilidades

Resposta: **(C)**

3. $1080=2^3\times 3^3\times 5$

Os divisores de 1080 são da forma $2^a\times 3^b\times 5^c$ com $a\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $b\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ e $c\in\{0,\ 1\}$

Para que o divisor seja ímpar o expoente da potência de base 2 tem de ser nulo pelo que só há uma possibilidade para o valor de $a=0$.

Portanto, há quatro possibilidade para b e para cada uma destas há duas possibilidades para c .

O número pedido é $4\times 2=8$.

Resposta: **(A)**

4. Subconjuntos do conjunto A com dois ou menos elementos:

- conjunto vazio;
- 7 conjuntos com um elemento;
- 21 conjuntos com dois elementos: $6+5+4+3+2+1$

	1	2	3	4	5	6	7		
1	▨	V	V	V	V	V	V	–	6
2	▨	▨	V	V	V	V	V	–	5
3	▨	▨	▨	V	V	V	V	–	4
4	▨	▨	▨	▨	V	V	V	–	3
5	▨	▨	▨	▨	▨	V	V	–	2
6	▨	▨	▨	▨	▨	▨	V	–	1
									21

Por outro lado, $2^7=128$, ou seja, o conjunto A tem no total 128 conjuntos e destes $128-(21+7+1)=99$ têm pelo menos três elementos.

Resposta: **(D)**

5. $\frac{5}{4!\times 7!}+\frac{3}{5!\times 6!}=\frac{5}{4!\times 7\times 6!}+\frac{3}{5\times 4!\times 6!}=$

$=\frac{5\times 5}{4!\times 7\times 6!\times 5}+\frac{3\times 7}{5\times 4!\times 6!\times 7}=$

$=\frac{25+21}{4!\times 7\times 6!\times 5}=\frac{46}{4!\times 7\times 6!\times 5}=\frac{46}{7!\times 5!}$

Resposta: (**C**)

Pág. 13

6. $\left(A\cup B\right)\setminus A=\left(A\cup B\right)\cap\overline{A}$

$=\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=$

$=\varnothing\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=$

$=B\cap\overline{A}=$

$=B\setminus A$

Portanto, $\left(A\cup B\right)\setminus A=B\setminus A$ e não igual a B , pelo que a proposição p é falsa.

$A\cup\left(B\setminus A\right)=A\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=$

$=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup\overline{A}\right)=$

$=\left(A\cup B\right)\cap \mathrm{U}=$

$=A\cup B$

Portanto, $A\cup\left(B\setminus A\right)=A\cup B$ e não é igual a U pelo que a proposição q é falsa.

Por outro lado, a proposição $p\Leftrightarrow q$ é verdadeira, já que as proposições p e q têm o mesmo valor lógico.

7. $\underset{1}{\underline{A}}\ \ \underset{1}{\underline{O}}\ \ \underset{3}{\underline{\quad}}\ \ \underset{2}{\underline{\quad}}$

$\underset{1}{\underline{T}}\ \ \underset{18}{\underline{\quad}}\ \ \underset{17}{\underline{\quad}}\ \ \underset{16}{\underline{\quad}}$

$3\times 2\times 18\times 17\times 16=29\ 376$

8.1. $\underset{5}{\underline{\quad}}\ \ \underset{6}{\underline{\quad}}\ \ \underset{6}{\underline{\quad}}$

Podemos formar $5\times 6\times 6=180$ números.

8.2. Temos duas situações:

- caso em que o algarismo das unidades é 0

$\underset{5}{\underline{\quad}}\times\underset{4}{\underline{\quad}}\times\underset{3}{\underline{\quad}}\times\underset{1}{\underline{0}}$

- caso em que o algarismo das unidades não é 0

$\underset{4}{\underline{\quad}}\times\underset{4}{\underline{\quad}}\times\underset{3}{\underline{\quad}}\times\underset{2}{\underline{\{4,\,6\}}}$

Podemos formar $5\times 4\times 3+4^2\times 3\times 2=156$ números.

9.1. Um baralho de 52 cartas tem 12 figuras e 4 ases, portanto, é possível obter de $12\times 11\times 4\times 3=1584$ maneiras diferentes.

9.2. Um baralho de 52 cartas tem quatro ases e 24 cartas vermelhas que não são ases.

$\underset{4}{\underline{\text{Ás}}}\ \ \underset{24}{\underline{\text{V}}}\ \ \underset{23}{\underline{\text{V}}}\ \ \underset{22}{\underline{\text{V}}}$

$4\times 24\times 23\times 22\times 4=194\ 304$

↳ número de posições que o ás pode ocupar

É possível obter de 194 304 maneiras diferentes.

9.3. Pretende-se obter pelo menos três cartas vermelhas, ou seja, exatamente três cartas vermelhas e uma preta ou quatro cartas vermelhas. Esquematizando:

$\underset{26}{\underline{\text{V}}}\times\underset{25}{\underline{\text{V}}}\times\underset{24}{\underline{\text{V}}}\times\underset{26}{\underline{\text{P}}}\times\underset{4}{\underline{\quad}}$

↳ Número de posições em que pode ser extraída a carta preta

$\underset{26}{\underline{\text{V}}}\times\underset{25}{\underline{\text{V}}}\times\underset{24}{\underline{\text{V}}}\times\underset{23}{\underline{\text{V}}}$

É possível obter de:

$26\times 25\times 24\times 26\times 4+26\times 25\times 24\times 23=1\ 981\ 200$

maneiras diferentes.

10. $\frac{\left(n-2\right)!}{\left(n-4\right)!}=6\Leftrightarrow\frac{\left(n-2\right)\left(n-3\right)\left(n-4\right)!}{\left(n-4\right)!}=6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(n-2\right)\left(n-3\right)=6\Leftrightarrow n^2-5n+6=6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-5n=0\Leftrightarrow n\left(n-5\right)=0\Leftrightarrow n=0\vee n=5$

Como $n\geq 4$, $n=5$.

Ficha para praticar 3

Pág. 14

1.1. $10\times 9\times 8\times 7={}^{10}A_4$

1.2. $\left(n+1\right)\left(n+2\right)=\left(n+2\right)\left(n+1\right)={}^{n+2}A_2$

1.3. $20\times 19\times 18\times\ldots\times 6\times 5={}^{20}A_{16}$

1.4. $200\times 199\times 198\times\ldots\times 42\times 41={}^{200}A_{160}$

2.1. Pretende-se o número de diferentes maneiras de distribuir oito tipos diferentes de gelado em dez compartimentos distintos.

Podem-se colocar de ${}^{10}A_8=1\ 814\ 400$ maneiras distintas.

2.2. Existem ${}^{5}A_2$ maneiras de dispor o gelado de baunilha e o gelado de caramelo pelos cinco compartimentos da fila de trás. Arrumados estes, temos ${}^{8}A_6$ formas de arrumar os restantes seis sabores nos oito lugares que ficam disponíveis. Desta forma, podem-se colocar de ${}^{5}A_2\times{}^{8}A_6=403\ 200$ maneiras distintas.

3.1. O número total de maneiras de colorir as oito faces usando oito das dez cores disponíveis é ${}^{10}A_8=1\ 814\ 400$.

3.2. Qualquer uma das oito faces do octaedro pode ser colorida de amarelo, pelo que existem oito opções para o fazer e para cada uma destas, as restantes sete faces podem ser coloridas usando sete das nove cores disponíveis (já não pode ser usada a cor amarela), o que pode ser feito de ${}^{9}A_7$ maneiras diferentes.

Pode-se colorir de $8\times{}^{9}A_7=1\ 451\ 520$ maneiras diferentes.

4. A prateleira de cima tem espaço para oito livros e os de Física são seis, pelo que existem ${}^{8}A_6$ maneiras diferentes de dispor os livros de Física na prateleira de cima.

Para cada uma destas maneiras existem 10! maneiras de dispor os livros de Matemática pelos 10 lugares disponíveis.

Pode-se dispor de ${}^{8}A_6\times 10!=73\ 156\ 608\ 000$ maneiras diferentes.

Pág. 15

5.1. O número total de disposições diferente que se podem obter é ${}^{12}A_4 = 11\ 880$.

5.2. Esquematizando:

$$\underset{1}{\underline{\ 6\ }} \times \underset{11}{\underline{\quad}} \times \underset{10}{\underline{\quad}} \times \underset{9}{\underline{\quad}} = {}^{11}A_3$$

Podem-se obter ${}^{11}A_3 = 990$ disposições diferentes.

5.3. Esquematizando:

$$\underset{1}{\underline{\ 8\ }} \times \underset{1}{\underline{\ 10\ }} \times \underset{10}{\underline{\quad}} \times \underset{9}{\underline{\quad}}$$

ou

$$\underset{10}{\underline{\quad}} \times \underset{1}{\underline{\ 8\ }} \times \underset{1}{\underline{\ 10\ }} \times \underset{9}{\underline{\quad}}$$

ou

$$\underset{10}{\underline{\quad}} \times \underset{9}{\underline{\quad}} \times \underset{1}{\underline{\ 8\ }} \times \underset{1}{\underline{\ 10\ }}$$

São três hipóteses, mais outras três, pois os cartões com os números 8 e 10 podem trocar entre si as posições. Para cada posição que eles ocupem, os outros dois cartões podem ser dispostos de $10 \times 9 = {}^{10}A_2$ maneiras diferentes.

Podem-se obter $3 \times 2 \times {}^{10}A_2 = 540$ disposições.

6.1. Dispomos de dez algarismos (do 0 ao 9). Os números de três algarismos diferentes pedidos são os arranjos dos dez algarismos, três a três, exceto os que começar por dez. É possível formar ${}^{10}A_3 - {}^{9}A_2 = 648$ ou $9 \times {}^{9}A_2 = 648$ números.

6.2. O 1 e o 2 entram obrigatoriamente, pelo que podem ocupar ${}^{4}A_2$ posições diferentes. Os restantes lugares são preenchidos por dois algarismos escolhidos entre oito: ${}^{8}A_2$. O número total é ${}^{4}A_2 \times {}^{8}A_2$. No entanto, há que subtrair os números em que o algarismo dos milhares é 0. Esses números são: o número de posições diferentes do 1 e do 2 dado por ${}^{3}A_2$ e o número de maneiras de escolher o outro algarismo que é 7. Assim, o número a subtrair é ${}^{3}A_2 \times 7$.

É possível formar ${}^{4}A_2 \times {}^{8}A_2 - {}^{3}A_2 \times 7 = 630$ números.

6.3. Os algarismos 0, 1 e 2 podem permutar entre si de $3! = 6$ maneiras diferentes. Por outro lado, a sequência destes algarismos pode dispor-se das seguintes formas:

$$\underline{\ 1\ }\ \ \underline{\ 0\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}$$

$$3! \times {}^{7}A_2 - \underbrace{2! \times {}^{7}A_2} = 4 \times {}^{7}A_2$$

O 0 não pode ocupar a casa das dezenas de milhar, pelo que temos de retirar os números de cinco algarismos nas condições pedidas mas começados por 0.

ou

$$\underline{\quad}\ \ \underline{\ 1\ }\ \ \underline{\ 0\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\quad}\qquad 3! \times {}^{7}A_2$$

ou

$$\underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\ 1\ }\ \ \underline{\ 0\ }\ \ \underline{\ 2\ }\qquad 3! \times {}^{7}A_2$$

É possível formar:

$4 \times {}^{7}A_2 + 3! \times {}^{7}A_2 + 3! \times {}^{7}A_2 = 16 \times {}^{7}A_2 = 672$ números.

7.1. Numa semirreta, o sentido é importante. Por exemplos, as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{B}A$ são diferentes.

Portanto, cada par ordenado de duas letras diferentes corresponde a uma semirreta. Com cinco pontos não colineares, ou seja, com cinco letras, podemos formar ${}^{5}A_2$ pares ordenados de duas letras distintas. Como ${}^{5}A_2 = 20$, consideramos que podemos definir 20 semirretas, logo a proposição p é verdadeira.

Por outro lado, no caso de uma reta não interessa o sentido, por exemplo, a reta AB é igual à reta BA . Assim, o número de retas que podem ser definidas com os cinco pontos é igual a ${}^{5}C_2 = 10$. Logo, a proposição q é falsa e, portanto, a proposição $p \Leftrightarrow q$ também é falsa.

7.2. Três pontos definem um triângulo. Como não interessa a ordem pela qual as letras se dispõem, podem-se definir ${}^{5}C_3 = 10$ triângulos distintos.

Pág. 16

8.1. Pretende-se escolher um conjunto de 5 alunos de entre 28, o que pode ser feito de ${}^{28}C_5$ maneiras diferentes.

A escolha pode ser feita de ${}^{28}C_5 = 98\ 280$ maneiras diferentes.

8.2. Pretende-se escolher 3 raparigas de entre 15 e 2 rapazes de entre 13, tal pode ser feito de ${}^{15}C_3 \times {}^{13}C_2$ maneiras diferentes.

A escolha pode ser feita de ${}^{15}C_3 \times {}^{13}C_2 = 35\ 490$ maneiras diferentes.

8.3. Pretende-se que a comissão seja constituída por cinco alunos dos dois géneros, mas que tenha mais rapazes do que raparigas, tal acontece quando a comissão é constituída por três rapazes e duas raparigas ou por quatro rapazes e uma rapariga.

A escolha pode ser feita de ${}^{13}C_3 \times {}^{15}C_2 + {}^{13}C_4 \times 15 = 40\ 755$ maneiras diferentes.

9.1. No caso de entre os 12 pontos não haver 5 pontos colineares, o número de retas distintas definidas por estes pontos era igual a ${}^{12}C_2$. A este número devemos retirar os conjuntos de dois elementos que é possível definir com os cinco pontos colineares à exceção de um deles, já que todos definem a mesma reta.

Assim, podemos definir ${}^{12}C_2 - {}^{5}C_2 + 1 = 57$ ou ${}^{7}C_2 + 5 \times 7 + 1 = 57$ retas distintas.

9.2. Três pontos não colineares definem um triângulo.

1.º caso: nenhum dos cinco pontos colineares é vértice do triângulo. Neste caso, podemos definir ${}^{7}C_3$ triângulos diferentes.

2.º caso: o triângulo tem dois vértices entre os cinco pontos colineares. Neste caso, podemos definir ${}^{5}C_2 \times 7$ triângulo diferentes.

3.º caso: o triângulo tem um e um só vértice entre os cinco pontos colineares. Neste caso, podemos definir $5 \times {}^{7}C_2$ triângulos diferentes.

Assim, podemos definir ${}^{7}C_3 + {}^{5}C_2 \times 7 + 5 \times {}^{7}C_2 = 210$ triângulos distintos.

10.1. O tabuleiro dispões de 15 casas com um número ímpar e de 10 casas com um número par. Como estas peças são todas iguais, o número de maneiras diferentes de as dispor no tabuleiro é ${}^{15}C_3$. Por outro lado, as peças diferentes devem ocupar uma casa com um número par, pelo que o número de maneiras diferentes de as dispor é ${}^{10}A_5$.

Assim, é possível dispor as peças de ${}^{15}C_3 \times {}^{10}A_5 = 13\ 759\ 200$ maneiras diferentes.

10.2. Pretendemos dispor no tabuleiro nove fichas, numeradas de 1 a 9, portanto há cinco fichas numeradas com um número ímpar. Estas devem ocupar uma e uma só diagonal. Cada diagonal do tabuleiro é constituída por cinco casas, tantas quantas as fichas numeradas com um número ímpar, logo, estas fichas podem ser dispostas no tabuleiro, em cada diagonal, de 5! maneiras diferentes.

Nas restantes 20 casas disponíveis, irão ser colocadas quatro fichas numeradas com um número par, pelo que existem ${}^{20}A_4$ maneiras diferentes de as colorir.

As fichas podem ser colocadas de $5! \times 2 \times {}^{20}A_4 = 27\ 907\ 200$ maneiras.

Pág. 17

11.1. Existem ${}^{7}C_3$ maneiras diferentes de escolher as três posições do algarismo 5.

Para cada uma destas, existem 4! maneiras diferentes de escolher as posições para os restantes algarismos, que são diferentes (3, 6, 4 e 2).

É possível formar ${}^{7}C_3 \times 4! = 840$ números.

Nos números pares, o algarismo das unidades é 2, 4 ou 6.

Para cada uma destas três escolhas, existem ${}^{6}C_3$ maneiras diferentes de escolher as três posições do algarismo 5 e para cada uma destas existem 3! maneiras diferentes de escolher as posições para os restantes três algarismos.

É possível formar $3 \times {}^{6}C_3 \times 3! = 360$ números pares.

12.1. Para que o número tenha quatro algarismos e seja menor que 4000, o algarismo dos milhares pode ser 1 ou 3. Para cada uma destas hipóteses, existem cinco hipóteses para o algarismo das centenas, quatro hipóteses para o algarismo das dezenas e três hipóteses para o algarismo das unidades.

O conjunto A tem $2 \times 5 \times 4 \times 3 = 120$ elementos.

12.2. Os elementos de A podem ser de dois tipos:

$$\underset{2}{\underline{\{1,\ 3\}}}\quad \underset{4}{\underline{\qquad}}\quad \underset{3}{\underline{\qquad}}\quad \underset{3}{\underline{\{4,\ 6,\ 8\}}}$$

São $2 \times 4 \times 3 \times 3 = 72$ números pares.

13.1. Existem ${}^{4}C_2$ maneiras diferentes de escolher dois reis, de entre quatro. Para cada uma destas, existem ${}^{4}C_2$ maneiras de escolher duas damas, de entre quatro.

${}^{4}C_2 \times {}^{4}C_3 = 36$ maneiras diferentes.

13.2. Existem quatro escolhas possíveis para a primeira carta da sequência, pois existem quatro damas. Para cada uma destas, existem 7! maneiras diferentes de dispor as restantes cartas.

É possível construir $4 \times 7! = 20\ 160$ sequências diferentes.

14.1. $${}^{n}A_2 = 12 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 12 \Leftrightarrow n^2 - n = 12 \Leftrightarrow n^2 - n - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-12)}}{2} \Leftrightarrow n = 4 \vee n = -3$$

Como $n \geq 2$, $n = 4$.

14.2. $${}^{n}A_2 = \frac{7(n-1)!}{(n-2)!} \Leftrightarrow n(n-1) = \frac{7(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 7n - 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n = 7n - 7 \Leftrightarrow n^2 - 8n + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 7}}{2} \Leftrightarrow n = 7 \vee n = 1$$

Como $n \geq 2$, $n = 7$.

15.1. As três primeiras bolas extraídas são brancas.

${}^{7}C_4$ é o número de maneiras diferentes de as quatro restantes bolas brancas poderem ocupar quatro lugares, de entre os sete disponíveis; as três bolas pretas ocuparão, para cada uma das maneiras de colocar as brancas, os restantes lugares de modo único.

A extração pode ser feita de ${}^{7}C_4 = 35$ maneiras.

15.2. O número de maneiras diferentes de dispor as duas primeiras bolas é 2 (branca, preta ou preta, branca).

${}^{8}C_2$ é o número de maneiras diferentes de as restantes oito bolas (duas pretas e seis brancas) poderem ocupar os restantes oito lugares (as duas bolas pretas podem ser colocadas nos restantes oito lugares de ${}^{8}C_2$ maneiras diferentes e as seis bolas brancas ocuparão, para cada uma das maneiras de colocar as pretas, os restantes lugres, de modo único).

A extração pode ser feita de $2 \times {}^{8}C_2 = 56$ maneiras.

Ficha para praticar 4

Pág. 18

1. $${}^{n}C_p + {}^{n}C_{p+1} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} + \frac{n!}{(n-p-1)!\,(p+1)!}$$

multiplicando ambos os termos da primeira fração por $p+1$ e os da segunda por $n-p$:

$$= \frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)\,p!} + \frac{n!(n-p)}{(n-p)(n-p-1)!(p+1)!} =$$

$$= \frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!} + \frac{n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!} =$$

$$= \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{n!(p+1+n-p)}{(n-p)!(p+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} = {}^{n+1}C_{p+1}$$

2. Se a massa dos três últimos elementos é 3404, então a soma dos três primeiros também é 3404, pelo que a soma do segundo com o terceiro é 3403, já que o primeiro é 1. Como a soma do segundo com o terceiro elemento de uma linha é igual ao terceiro elemento da linha seguinte, este é igual a 3403.

3. Existem $2^5 = 32$ subconjuntos:
$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\},$
$\{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{a, b, c\},$
$\{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\},$
$\{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\},$
$\{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}$ e
$\{a, b, c, d, e\}$

4. $2^5 - 1 = 31$
→ exclui-se o conjunto vazio
→ num conjunto com 5 elementos é possível definir 2^5 subconjuntos

A Cristina pode fazer 31 saladas.

5.1. ${}^{30}C_{p+2} = {}^{30}C_{4p+8} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p + 2 = 4p + 8 \vee p + 2 = 30 - (4p + 8) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3p = -6 \vee p + 2 = 30 - 4p - 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p = -2 \vee 5p = 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p = -2 \vee p = 4$

Por outro lado:
$p + 2 \le 30 \wedge 4p + 8 \le 30 \wedge p + 2 \ge 0 \wedge 4p + 8 \ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p \le 28 \wedge p \le 5{,}5 \Leftrightarrow p \ge -2 \wedge p \ge -2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2 \le p \le 5{,}5$

Portanto, $p = -2 \vee p = 4$.

5.2. ${}^{40}C_{2p} = {}^{40}C_{p+10} \Leftrightarrow 2p = p + 10 \vee 2p = 40 - (p + 10) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p = 10 \vee 2p = 40 - p - 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p = 10 \vee 3p = 30 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p = 10 \vee p = 10 \Leftrightarrow p = 10$

Por outro lado:
$2p \le 40 \wedge p + 10 \le 40 \wedge 2p \ge 0 \wedge p + 10 \ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p \le 20 \wedge p \le 30 \wedge p \ge 0 \wedge p \ge -10 \Leftrightarrow -10 \le p \le 30$

Portanto, $p = 10$.

6. A linha do Triângulo de Pascal que tem 41 elementos é a linha de ordem 40, ou seja, é a linha que contém todos os elementos da forma ${}^{40}C_p$.

Como ${}^{40}C_0 = 1$, ${}^{40}C_1 = 40$, ${}^{40}C_2 = 780$ e ${}^{40}C_3 = 9880$, somente os três primeiros e os três últimos elementos são menores do que 1000. Portanto, $41 - 6 = 35$ elementos são maiores do que 1000.

7.1. O primeiro elemento de qualquer linha do Triângulo de Pascal é 1 e o segundo é n, portanto, $n = 30$, pelo que essa linha contém todos os elementos da forma ${}^{30}C_p$.

O quarto elemento da linha anterior é ${}^{29}C_3 = 3654$.

7.2. Os três últimos elementos da linha seguinte são: ${}^{31}C_{29}$, ${}^{31}C_{30}$ e ${}^{31}C_{31}$.

Assim, ${}^{31}C_{29} + {}^{31}C_{30} + {}^{31}C_{31} = 465 + 31 + 1 = 497$.

7.3. A linha é a de ordem 30 e tem 31 elementos, pelo que o maior elemento dessa linha é o elemento central, ou seja, ${}^{30}C_{15} = 155\ 117\ 520$.

8.1. ${}^{n}C_{10} = {}^{n}C_{11} \Leftrightarrow 10 = n - 11 \Leftrightarrow n = 21$

Trata-se da linha de ordem 21.

A linha seguinte é a de ordem 22, onde o maior elemento é o central, que é ${}^{22}C_{11} = 705\ 432$.

8.2. Como ${}^{21}C_0 = 1$, ${}^{21}C_1 = 21$, ${}^{21}C_2 = 210$, ${}^{21}C_3 = 1330$, ${}^{21}C_4 = 5985$ e ${}^{21}C_5 = 20\ 349$, somente os cinco primeiros e os cinco últimos elementos são menores do que 10 000. Portanto, 10 elementos são menores do que 10 000.

Pág. 19

9.1. A linha do Triângulo de Pascal que tem 15 elementos é a linha de ordem 14, a qual contém todos os elementos da forma ${}^{14}C_p$.

O sétimo elemento dessa linha é ${}^{14}C_6 = 3003$.

9.2. A linha anterior é a de ordem 13, portanto, a soma de todos os elementos dessa linha é $2^{13} = 8192$.

9.3. Ora, ${}^{14}C_0 = 1$, ${}^{14}C_1 = 14$, ${}^{14}C_2 = 91$, ${}^{14}C_3 = 364$, ${}^{14}C_4 = 1001$ e ${}^{14}C_5 = 2002$, logo, somente os cinco primeiros e os cinco últimos elementos dessa linha são menores que 2000. Como a linha tem 15 elementos, podemos concluir que tem cinco elementos maiores que 2000.

10. Seja n a ordem dessa linha, então $2^n = 2048$, pelo que $n = 11$, pois $2^{11} = 2048$. A linha de ordem 11 contém todos os elementos da forma ${}^{11}C_p$, já a linha seguinte contém todos os elementos da forma ${}^{12}C_p$ e o maior elemento desta linha é o central, ou seja, ${}^{12}C_6 = 924$.

11.1. O segundo elemento de qualquer linha do Triângulo de Pascal é igual a n, ordem da linha. Por outro lado, o segundo elemento é igual ao penúltimo, pelo que $n \times n = 324$ e, portanto, $n = \sqrt{324} = 18$.

Assim, o quinto elemento desta linha é ${}^{18}C_4 = 3060$.

11.2. A linha seguinte é a de ordem 19, pelo que o quarto e o sétimo elemento dessa linha são ${}^{19}C_3$ e ${}^{19}C_6$, respetivamente. Portanto, ${}^{19}C_3 + {}^{19}C_6 = 28\ 101$.

11.3. A linha de ordem 18 que tem 19 elementos são todos os elementos da forma ${}^{18}C_p$.

Assim, ${}^{18}C_0 = {}^{18}C_{18}$, … , ${}^{18}C_8 = {}^{18}C_{10}$.

Há nove pares de elementos iguais.

12. A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é igual à soma dos três primeiros.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & n & & a \\ 1 & & 1+n & & n+a & \end{array}$$

$1 + n + a = 562 \Leftrightarrow n + a = 562 - 1 \Leftrightarrow n + a = 561$

O terceiro elemento da linha seguinte é 561.

13.1.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & n & & a & & 6545 \\ 1 & & 1+n & & n+a & & & \end{array}$$

$1 + n + a + 6545 = 7176 \Leftrightarrow n + a = 630$

Portanto, o terceiro elemento da linha seguinte é 630.

13.2. Seja n a ordem da linha. A linha seguinte é a de ordem $n + 1$ e o seu terceiro elemento é 630, logo ${}^{n+1}C_2 = 630$.

Resolvendo a equação:

$${}^{n+1}C_2 = 630 \Leftrightarrow \frac{(n+1)n}{2} = 630 \Leftrightarrow n^2 + n - 1260 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1260)}}{2} \Leftrightarrow n = -36 \vee n = 35$$

Como $n \ge 1$, temos $n = 35$.

A linha de ordem 35 tem 36 elementos.

14.1. O segundo elemento dessa linha do Triângulo de Pascal é 2016, pelo que a ordem desta linha é, também, 2016. Assim, a ordem da linha seguinte é 2017 e, portanto, o vigésimo elemento da linha seguinte é ${}^{2017}C_{19}$.

14.2. A linha do Triângulo de Pascal de ordem 2016 tem 2017 elementos e é a linha que contém todos os elementos da forma ${}^{2016}C_p$. Como ${}^{2016}C_0 = 1$, ${}^{2016}C_1 = 2016$, ${}^{2016}C_2 = 2\ 031\ 120$ e ${}^{2016}C_3 = 1\ 363\ 558\ 560$, somente os três primeiros elementos e os três últimos elementos são menores que dez milhões. Portanto, $2017 - 6 = 2011$ elementos dessa linha são maiores do que dez milhões.

Pág. 20

15.1. $\sum_{i=0}^{n} {}^{n}C_i = 32\ 768 \Leftrightarrow {}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + ... + {}^{n}C_{n-1} + {}^{n}C_n = 32\ 768$

$\Leftrightarrow 2^n = 32\ 768$, portanto, $n = 15$, pois $2^{15} = 32\ 768$.

Logo, substituindo n por 15 em ${}^{n-2}C_3$:

${}^{15-2}C_3 = {}^{13}C_3 = 286$

15.2. $\sum_{i=0}^{n+1} {}^{n+1}C_i = {}^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + ... + {}^{n+1}C_n + {}^{n+1}C_{n+1} =$

$= 2^{n+1}$

$n = 15$, pelo que, substituindo-se por 15 em 2^{n+1} ,

$2^{15+1} = 2^{16} = 65\ 536$.

16.1. $(x-3)^5 = (x+(-3))^5 = \sum_{p=0}^{5} {}^{5}C_p (x)^{5-p} (-3)^p =$

$= 1x^5(-3)^0 + 5x^4(-3)^1 + 10x^3(-3)^2 + 10x^2(-3)^3 +$

$+5x(-3)^4 + 1x^0(-3)^5 =$

$= x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$

16.2. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = \sum_{p=0}^{4} {}^{4}C_p (x)^{4-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p =$

$= 1x^4\left(\frac{1}{x}\right)^0 + 4x^3\left(\frac{1}{x}\right)^1 + 6x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4x\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 1x^0\left(\frac{1}{x}\right)^4 =$

$= x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

16.3. $\left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2}\right)^4 = \left(\frac{x}{3} + \left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)^4 = \sum_{p=0}^{4} {}^{4}C_p \left(\frac{x}{3}\right)^{4-p} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^p =$

$= 1\left(\frac{x}{3}\right)^4\left(-\frac{x^2}{2}\right)^0 + 4\left(\frac{x}{3}\right)^3\left(-\frac{x^2}{2}\right)^1 + 6\left(\frac{x}{3}\right)^2\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 +$

$+4\left(\frac{x}{3}\right)^1\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + 1\left(\frac{x}{3}\right)^0\left(-\frac{x^2}{2}\right)^4 =$

$= \frac{x^4}{81} - \frac{2}{27}x^5 + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6}x^7 + \frac{x^8}{16}$

16.4. $\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^6 = \sum_{p=0}^{6} {}^{6}C_p \left(\frac{2}{x}\right)^{6-p} \left(x^2\right)^p =$

$= 1\left(\frac{2}{x}\right)^6\left(x^2\right)^0 + 6\left(\frac{2}{x}\right)^5\left(x^2\right)^1 + 15\left(\frac{2}{x}\right)^4\left(x^2\right)^2 +$

$+20\left(\frac{2}{x}\right)^3\left(x^2\right)^3 + 15\left(\frac{2}{x}\right)^2\left(x^2\right)^4 +$

$+6\left(\frac{2}{x}\right)^1\left(x^2\right)^5 + 1\left(\frac{2}{x}\right)^0\left(x^2\right)^6 =$

$= \frac{64}{x^6} + \frac{192}{x^3} + 240 + 160x^3 + 60x^6 + 12x^9 + x^{12}$

17.1. $\left(1+\sqrt{3}\right)^4 = \sum_{p=0}^{4} {}^{4}C_1 1^{4-p}\left(\sqrt{3}\right)^p =$

$= 1\times 1^4 \times \left(\sqrt{3}\right)^0 + 4\times 1^3 \times \left(\sqrt{3}\right)^1 + 6\times 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 +$

$+4\times 1^1 \times \left(\sqrt{3}\right)^3 + 1\times 1^0 \times \left(\sqrt{3}\right)^4 =$

$= 1 + 4\sqrt{3} + 18 + 4\times 3\sqrt{3} + 9 =$

$= 28 + 16\sqrt{3}$

17.2. $\left(2-\sqrt{2}\right)^5 = \left(2+\left(-\sqrt{2}\right)\right)^5 = \sum_{p=0}^{5} {}^{5}C_p 2^{5-p}\left(-\sqrt{2}\right)^p =$

$= 1\times 2^5\left(-\sqrt{2}\right)^0 + 5\times 2^4\left(-\sqrt{2}\right)^1 + 10\times 2^3\left(-\sqrt{2}\right)^2 +$

$+10\times 2^2\left(-\sqrt{2}\right)^3 + 5\times 2^1\left(-\sqrt{2}\right)^4 + 1\times 2^0\left(-\sqrt{2}\right)^5 =$

$= 32 - 80\sqrt{2} + 160 + 40\left(-2\sqrt{2}\right) + 40 - 4\sqrt{2} =$

$= 232 - 164\sqrt{2}$

17.3. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - 1\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + (-1)\right)^4 = \sum_{p=0}^{4} {}^{4}C_p \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{4-p} (-1)^p =$

$= 1\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4(-1)^0 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3(-1)^1 + 6\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2(-1)^2 +$

$+4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^1(-1)^3 + 1\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^0(-1)^4 =$

$= \frac{4}{81} - 4\times\frac{2\sqrt{2}}{27} + \frac{4}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 1 =$

$= \frac{193}{81} - \frac{44\sqrt{2}}{27}$

17.4. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)^3 = \sum_{p=0}^{3} {}^{3}C_p \left(\frac{1}{2}\right)^{3-p}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^p =$

$= 1\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^0 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 +$

$+1\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 =$

$= \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{27} =$

$= \frac{5}{8} - \frac{13\sqrt{3}}{36}$

18.1. $(2x-1)^5 = 32x^5 - 80x^4 + 10x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{5} {}^{5}C_p (2x)^{5-p}(-1)^p = 32x^5 - 80x^4 + 10x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1(2x)^5(-1)^0 + 5(2x)^4(-1)^1 + 10(2x)^3(-1)^2 +$

$+10(2x)^2(-1)^3 + 5(2x)^1(-1)^4 + 1(2x)^0(-1)^5 =$

$= 32x^5 - 80x^4 + 10x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1 =$

$= 32x^5 - 80x^4 + 10x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 80x^3 - 40x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$

18.2. $\left(x+2\right)^4 = x^4 + 8x^3 + 8$

$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{4} {}^4C_p x^{4-p} 2^p = x^4 + 8x^3 + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \times x^4 \times 2^0 + 4 \times x^3 \times 2^1 + 6 \times x^2 \times 2^2 + 4 \times 4^1 \times 2^3 +$
$+ 1 \times 4^0 \times 2^4 = x^4 + 8x^3 + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = x^4 + 8x^3 + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24x^2 + 32x + 16 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24x^2 + 32x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}$

19.1. $T_{p+1} = {}^9C_p \left(\frac{1}{x^2}\right)^{9-p} \left(\frac{x}{2}\right)^p =$

$= {}^9C_p \left(x^{-2}\right)^{9-p} \left(\frac{1}{2}\right)^p x^p =$

$= {}^9C_p \left(\frac{1}{2}\right)^p x^{-18+2p} x^p =$

$= {}^9C_p \left(\frac{1}{2}\right)^p x^{-18+3p}$

$T_{4+1} = {}^9C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 x^{-18+3\times4} = 126 \times \frac{1}{16} \times x^{-6} = \frac{63}{8x^6}$

O 5.º termo é $\frac{63}{8x^6}$

19.2. $T_{p+1} = {}^7C_p \left(x^3\right)^{7-p} \left(\frac{2}{x}\right)^p = {}^7C_p x^{21-3p} 2^p \left(\frac{1}{x}\right)^p =$

$= {}^7C_p 2^p x^{21-3p} \left(x^{-1}\right)^p = {}^7C_p 2^p x^{21-3p} x^{-p} =$

$= {}^7C_p 2^p x^{21-4p}$

$T_{4+1} = {}^7C_4 2^4 x^{21-4\times4} = 35 \times 16x^5 = 560x^5$

O 5.º termo é $560x^5$

19.3. $T_{p+1} = {}^6C_p \left(\frac{1}{x}\right)^{6-p} \left(\sqrt{x}\right)^p = {}^6C_p \left(x^{-1}\right)^{6-p} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^p =$

$= {}^6C_p \times x^{p-6} x^{\frac{p}{2}} = {}^6C_p x^{x-6+\frac{p}{2}} = {}^6C_p x^{\frac{3p}{2}-6}$

$T_{4+1} = {}^6C_4 x^{\frac{3\times4}{2}-6} = 15x^0 = 15$

O 5.º termo é 15.

19.4. $T_{p+1} = {}^{10}C_p \left(x\sqrt{x}\right)^{10-p} \left(-\frac{3}{x}\right)^p =$

$= {}^{10}C_p \left(x \times x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-p} \left(-3\right)^p \left(\frac{1}{x}\right)^p =$

$= {}^{10}C_p \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{10-p} \left(-3\right)^p \left(x^{-1}\right)^p =$

$= {}^{10}C_p \left(-3\right)^p x^{15-\frac{3}{2}p} x^{-p} =$

$= {}^{10}C_p \left(-3\right)^p x^{15-\frac{3}{2}p-p} = {}^{10}C_p \left(-3\right)^p x^{15-\frac{5}{2}p}$

$T_{4+1} = {}^{10}C_4 \left(-3\right)^4 x^{15-\frac{5}{2}\times4} = 210 \times 81x^5 = 17\,010x^5$.

O 5.º termo é $17\,010x^5$.

Pág. 21

20.1. $T_{p+1} = {}^4C_p \left(\sqrt{x}\right)^{4-p} \left(-3\right)^p =$

$= {}^4C_p \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{4-p} \left(-3\right)^p = {}^4C_p x^{2-\frac{1}{2}p} \left(-3\right)^p$

O termo independente de x é aquele em que o expoente de $x^{2-\frac{1}{2}p}$ é igual a 0. Assim:

$2 - \frac{1}{2}p = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}p = 2 \Leftrightarrow p = 4$

$T_{4+1} = {}^4C_4 x^0 \left(-3\right)^4 = 81$

Portanto, o termo independente de x é 81.

20.2. $T_{p+1} = {}^4C_p x^{2-\frac{1}{2}p\left(-3\right)^p}$.

O termo de grau 1 é aquele em que o expoente de $x^{2-\frac{1}{2}p}$ é igual a 1. Assim:

$2 - \frac{1}{2}p \Leftrightarrow \frac{1}{2}p = 1 \Leftrightarrow p = 2$

$T_{2+1} = {}^4C_2 x^1 \left(-3\right)^2 = 54x$

Portanto, o termo de grau 1 é $54x$.

21.1. $T_{p+1} = {}^6C_p \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{6-p} \left(\frac{1}{x^2}\right)^p =$

$= {}^6C_p \left(\frac{1}{2}\right)^{6-p} \left(\sqrt{x}\right)^{6-p} \left(x^{-2}\right)^p =$

$= {}^6C_p \left(\frac{1}{2}\right)^{6-p} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{6-p} x^{-2p} = {}^6C_p \left(\frac{1}{2}\right)^{6-p} x^{3-\frac{p}{2}} x^{-2p} =$

$= {}^6C_p \left(\frac{1}{2}\right)^{6-p} x^{3-\frac{5}{2}p}$

$T_{3+1} = {}^6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} x^{3-\frac{5}{2}\times3} = 20\left(\frac{1}{2}\right)^3 x^{-\frac{9}{2}} =$

$= \frac{5}{2} x^{-\frac{9}{2}} = \frac{5}{2x^{\frac{9}{2}}} = \frac{5}{2\sqrt{x^9}}$

O 4.º termo é $\frac{5}{2\sqrt{x^9}}$.

21.2. O termo de grau -2 é aquele em que $3 - \frac{5}{2}p = -2$.

Assim:

$3 - \frac{5}{2}p \Leftrightarrow \frac{5}{2}p = 5 \Leftrightarrow p = 2$.

$T_{2+1} = {}^6C_p \left(\frac{1}{2}\right)^{6+2} x^{-2} = 15\left(\frac{1}{2}\right)^4 x^{-2} = \frac{15}{16}x^{-2}$.

O coeficiente do termo em x^{-2} é $\frac{15}{16}$.

21.3. O termo de grau -7 é aquele em que $3 - \frac{5}{2}p = -7$.

Assim:

$3 - \frac{5}{2}p = -7 \Leftrightarrow \frac{5}{2}p = 10 \Leftrightarrow p = 4$

$T_{4+1} = {}^6C_p \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4} x^{-7} = 15\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-7} = \frac{15}{4}x^{-7}$

O termo de grau -7 é $\frac{15}{4}x^{-7}$.

22. $$T_{p+1} = {}^{12}C_p\left(x\sqrt[3]{x}\right)^{12-p}\left(\frac{1}{x^3}\right)^p =$$

$$= {}^{12}C_p\left(x \times x^{\frac{1}{3}}\right)^{12-p}\left(x^{-3}\right)^p =$$

$$= {}^{12}C_p\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-p} x^{-3p} = {}^{12}C_p x^{16-\frac{4}{3}p} x^{-3p} =$$

$$= {}^{12}C_p x^{16-\frac{4}{3}p-3p} = {}^{12}C_p x^{16-\frac{13}{3}p}$$

O termo de grau 3, caso exista, é aquele em que

$16-\frac{13}{3}p = 3$.

Assim:

$16-\frac{13}{3}p = 3 \Leftrightarrow \frac{13}{3}p = 13 \Leftrightarrow p = 3$

$T_{3+1} = {}^{12}C_3 x^3 = 220x^3$

O termo de grau 3 é $220x^3$.

23. A soma dos coeficientes dos termos de uma forma reduzida de um polinómio $P(x)$ obtém-se substituindo x por 1. Assim:

23.1. $\left(\frac{1}{1^2} - 3\times 1\right)^5 = (-2)^5 = -32$

A soma pedida é -32.

23.2. $\left(6\times 1 - 1^3\right)^7 = 5^7 = 78\ 125$

A soma pedida é 78 125.

23.3. $\left(\frac{\sqrt{1}}{3} - \frac{1}{2}\right)^{10} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{1}{60\ 466\ 175}$

A soma pedida é $\frac{1}{60\ 466\ 176}$.

23.4. $\left(-1^5 - 4\times 1^2\right)^3 = (-5)^3 = -125$

A soma pedida é –125.

24.1. $\sum_{k=0}^{10} {}^{10}C_k 3^{10-k}(-2)^k = (3-2)^{10} = 1^{10} = 1$

24.2. $\sum_{k=0}^{7} {}^{7}C_k 2^{7-k}(-3)^k = (2-3)^7 = (-1)^7 = -1$

24.3. $\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k (-1)^k = (0-1)^n = (-1)^n =$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

24.4. $\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k (-3)^{n-k} 4^k = (-3+4)^n = 1^n = 1$

Ficha de teste 2

Pág. 22

1. Existem ${}^7C_3$ maneiras diferentes de escolher três posições para o algarismo 2.
Para cada uma destas, existem ${}^4C_2$ maneiras diferentes de escolher as duas posições do algarismo 3. Uma vez selecionadas as posições que os algarismos 2 e 3 vão ocupar, restam duas posições disponíveis, que são obrigatoriamente preenchidas com o algarismo 9.
Existem, assim, ao todo, ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ números diferentes que satisfazem as condições enunciadas.
Resposta: **(C)**

2. O número de maneiras diferentes de escolher os lugares da fila de trás onde as quatro raparigas se vão sentar é ${}^6A_4$. Para cada uma destas maneiras, existem 8! maneiras diferentes de os oito rapazes ocuparem os restantes oito lugares disponíveis. O número pedido é ${}^6A_4 \times 8!$

Resposta: **(C)**

3. Vamos contar os casos em que está preenchida, com peças vermelhas, a diagonal indicada na figura.

●		
	●	
		●

Restam duas peças vermelhas para distribuir por seis quadrículas e, evidentemente, as quatro peças amarelas vão ocupar as quadrículas restantes.
Temos ${}^6C_2$ tabuleiros com esta diagonal preenchida e, como é óbvio, há outros tantos tabuleiros com a outra diagonal preenchida. Todavia, há um tabuleiro como o da figura que se segue que foi contado duas vezes.

●		●
	●	
●		●

Trata-se do tabuleiro que tem as duas diagonais preenchidas. Assim, existem $2\times {}^6C_2 - 1 = 29$ tabuleiros nas condições enunciadas.
Resposta: **(B)**

4. Há duas letras "A" e duas letras "S".
Assim, existem ${}^{10}C_2$ maneiras diferentes de colocar as duas letras "A" e para cada uma destas maneiras existem ${}^8C_2$ maneiras diferentes de colocar as duas letras "S" e para cada maneira de colocar as letras "A" e as letras "S", existem 6! maneiras de colocar as restantes letras.
O número pedido é ${}^{10}C_2 \times {}^8C_2 \times 6! = 907\ 200$.

Resposta: **(A)**

5. Os número primos de 1 a 9 são: 2 , 3 , 5 e 7.
Duas das quatro faces da pirâmide já têm os números 2 e 3, pelo que resta numerar as outras duas faces com os números 5 e 7; existem 2! maneiras de o fazer. Para cada uma destas maneiras, existem 5! maneiras de numerar as faces restantes do poliedro (com os números 1 , 4 , 6 , 8 e 9).
O número pedido é $2!\times 5! = 240$.
Resposta: **(B)**

Pág. 23

6.1. Há três casos a considerar

$$\frac{\text{I}}{5}\ \frac{\text{I}}{4}\ \frac{\text{P}}{5}\quad \frac{\text{I}}{5}\ \frac{\text{P}}{5}\ \frac{\text{I}}{4}\quad \frac{\text{P}}{4}\ \frac{\text{I}}{5}\ \frac{\text{I}}{5}$$

↳ não pode ser 0

É possível formar $(5\times 4\times 5)\times 2 + 4\times 5\times 5 = 480$ números.

6.2. $$\frac{3}{1}\ \frac{5}{1}\ \frac{}{8}\ ;\ \frac{3}{1}\ \frac{}{8}\ \frac{5}{1}\ ;\ \frac{}{7}\ \frac{3}{1}\ \frac{5}{1}$$

$(8+8+7)\times 2 = 46$

↳ pode ser 35 ou 53

Existem 46 números.

7.1. Seja n o número de variedades de fruta existentes nessa frutaria. Uma equação que traduz o problema é ${}^{n}C_2 = 378$.

$${}^{n}C_2 = 378 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 378 \Leftrightarrow n^2 - n - 756 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(756)}}{2} \Leftrightarrow n = -27 \vee n = 28$$

Como $n \geq 2$, $n = 28$.

Na frutaria existem 28 variedades de fruta.

7.2. Pretende-se escolher, de entre as 28 variedades de frutas disponíveis na frutaria, seis.

Assim, existem ${}^{28}C_6 = 376\ 740$ maneiras diferentes de fazer uma salada de fruta nas condições enunciadas.

8.1. No conjunto das 13 cartas, pretende-se que os reis estejam incluídos, pelo que resta escolher nove cartas das restantes 48 cartas do baralho que não são reis.

${}^{48}C_9 = 1\ 677\ 106\ 640$ maneiras diferentes.

8.2.

R	D	Outras
4	4	44
3	2	8

${}^{4}C_3 \times {}^{4}C_2 \times {}^{44}C_8 = 4\ 253\ 583\ 048$ maneiras diferentes.

9. Por exemplo:

Uma empresa tem 18 funcionários, dos quais 10 são mulheres e 8 são homens.

Pretende-se formar uma comissão de trabalhadores para organizaram a festa de Natal.

Sabe-se que a comissão terá obrigatoriamente três mulheres e dois homens, e que a Maria e o Miguel, trabalhadores desta empresa, não querem fazer parte da comissão em simultâneo.

Quantas comissões diferentes se podem formar?

Ficha para praticar 5

Pág. 24

1.1.

V	B	Total
5	10	15
3	0	3
0	3	

Números de casos possíveis: ${}^{15}C_3 = 455$

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_3 + {}^{10}C_3 = 130$

$$P = \frac{130}{455} = \frac{2}{7}$$

1.2.

I	P
8	7
2	1

Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2 \times {}^{7}C_1 = 196$

$$P = \frac{196}{455} = \frac{28}{65}$$

1.3. Com número par há 2 bolas vermelhas e 5 brancas.

V	B
2	5
2	1
1	2

Número de casos possíveis:

${}^{2}C_2 \times {}^{5}C_1 + {}^{2}C_1 \times {}^{5}C_2 = 5 + 20 = 25$

$$P = \frac{25}{455} \approx 5\%$$

2.1. Número de casos possíveis: 10^4

$$\frac{\ }{10}\ \frac{\ }{10}\ \frac{\ }{10}\ \frac{\ }{10}$$

Número de casos favoráveis:

$$\frac{3}{1}\ \frac{\ }{9}\ \frac{\ }{9}\ \frac{\ }{9}$$

$9^3 \times 4$

↳ há 4 possíveis lugares para o 3

$$P = \frac{9^3 \times 4}{10^4} = 0{,}2916$$

2.2. Número de casos favoráveis:

- Códigos com exatamente dois algarismos iguais a zero:
  ${}^{4}C_2 \times 9^2 = 486$
- Códigos com exatamente três algarismos iguais a zero:
  ${}^{4}C_3 \times 9 = 36$
- Códigos com exatamente quatro algarismos iguais a zero:
  Existe apenas um código, concretamente o 0000.

O número de casos favoráveis é $486 + 36 + 1 = 523$

O número de casos possíveis é $10^4 = 10\ 000$.

A probabilidade pedida é, pela regra de Laplace, $\frac{523}{10000}$.

3.1. Número de casos possíveis: $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 27\ 216$

Número de casos favoráveis:

$$\frac{\ }{8} \times \frac{\ }{8} \times \frac{\ }{7} \times \frac{\ }{6} \times \frac{5}{1}$$

O algarismo das unidades é 5

ou

$$\frac{\ }{9} \times \frac{\ }{8} \times \frac{\ }{7} \times \frac{\ }{6} \times \frac{0}{1}$$

O algarismo das unidades é 0. O número de casos favoráveis é, portanto, $8^2 \times 7 \times 6 + 9 \times 7 \times 7 \times 6 = 5712$.

A probabilidade pedida é, pela regra de Laplace, $\frac{5712}{27\ 216} = \frac{17}{81}$.

3.2. De cordo com a Regra de Laplace, dado um espaço de resultados E , finito, se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento $A \in P(E)$, é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento A e o número de casos possíveis.

O número de casos possíveis é $9^2 \times 8 \times 7 \times 6$, pois para o primeiro algarismo temos nove escolhas; para o segundo também temos nove escolhas porque, se por um lado não podemos utilizar o algarismo 0 nas dezenas de milhar, já o podemos usar como algarismo dos milhares

O número de casos favoráveis é $5 \times {}^{8}A_3 \times 4 + {}^{9}A_4$ já que:

um número é par quando o algarismo das unidades é 0, 2, 4 , 6 ou 8.

A parcela ${}^{9}A_4$ é o número total de números de cinco algarismos diferentes terminados em 0: ${}^{9}A_4$ é o número de sequências de quatro algarismos diferentes escolhidos de 1 a 9.

A parcela $8\times{}^{8}A_3\times 4$ corresponde aos números de cinco algarismos diferentes terminados em 2, 4, 6 ou 8.
O fator 4 corresponde precisamente às quatro hipóteses que existem para o algarismo das unidades.
Para cada uma dessas escolhas, temos 8 hipóteses para o algarismo das dezenas de milhar, que não pode ser zero, nem o algarismo que já escolhemos para as unidades.
Finalmente, para cada par de escolhas já feitas temos ${}^{8}A_3$ maneiras de escolher a sequência dos três algarismos do meio de entre os 8 que estão disponíveis.
A probabilidade pedida é, pela regra de Laplace, $\frac{8\times{}^{8}A_3\times 4\times{}^{9}A_4}{9^2\times 8\times 7\times 6}$.

Pág. 25

4.1. Número de casos possíveis: ${}^{20}C_5$

Número de casos favoráveis:

$$\begin{array}{cc} \underline{\text{B}} & \underline{\text{A}} \\ \underline{12} & \underline{8} \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{array}\quad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Mais fichas brancas}\\ \text{do que azuis}\end{array}$$

${}^{12}C_3\,{}^{8}C_2 + {}^{12}C_4\,{}^{8}C_1 + {}^{12}C_5$

Assim, a probabilidade pedida pela Regra de Laplace

$$\frac{{}^{12}C_3\times{}^{8}C_2+{}^{12}C_4\times{}^{8}C_1+{}^{12}C_5}{{}^{20}C_5}=\frac{682}{969}.$$

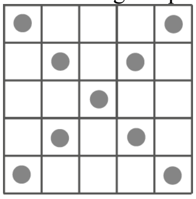
4.2. Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_5+{}^{8}C_5$.

Número de casos possíveis: ${}^{20}C_5$.

$$P=\frac{{}^{12}C_5+{}^{12}C_5}{{}^{20}C_5}=\frac{53}{969}.$$

5.1. Como as fichas são todas iguais, o número de casos possíveis é o número de maneiras de escolher um conjunto de 10 quadrículas de entre 25: ${}^{25}C_{10}$.

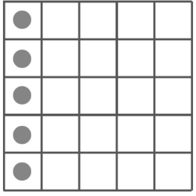
No entanto pretende-se que as duas diagonais fiquem preenchidas. Observe-se a figura que se segue.



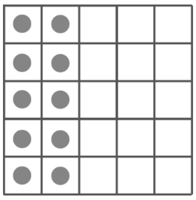
Resta uma peça para distribuir por 16 quadrículas. Temos 16 casos favoráveis. Assim, e recorrendo à regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{16}{{}^{25}C_{10}}=\frac{2}{408\ 595}$.

5.2. O número de casos possíveis é ${}^{25}C_{10}$.

O número de casos favoráveis são aqueles em que unicamente uma coluna fica totalmente preenchida.
Comecemos por contar os quadros em que está preenchida a coluna representada na figura.



Restam cinco fichas para distribuir por 20 quadrículas.
Temos ${}^{20}C_5$ quadros com esta coluna preenchida e, evidentemente, há outros tantos quadros com cada uma das outras quatro colunas preenchidas.
No entanto, há quadros como o da figura que não devem ser contado, uma vez que apresentam duas colunas totalmente preenchidas e não unicamente uma, como se pretende.



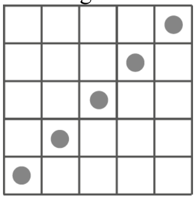
O número total de quadros em que as duas colunas estão totalmente preenchidas é ${}^{5}C_2$ (escolher duas colunas de entre 5). O número de casos favoráveis é ${}^{20}C_5\times 5-{}^{5}C_2$.

A probabilidade pedida, pela Regra de Laplace, é

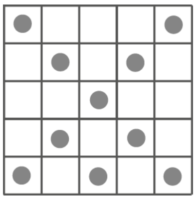
$$\frac{{}^{20}C_5\times 5-{}^{5}C_2}{{}^{25}C_{10}}\approx 0{,}024.$$

5.3. O número de casos possíveis é ${}^{25}C_{10}$.

Contemos agora os casos favoráveis, ou seja, aqueles em que pelo menos uma diagonal fica preenchida.
Comecemos por contar os quadros em que está preenchida a diagonal indicada na figura.



Restam cinco peças para distribuir por 20 quadrículas.
Temos ${}^{20}C_5$ quadros com esta diagonal preenchida e, como é óbvio, há outros tantos quadros com a outra diagonal preenchida.
No entanto, há quadros como o da figura seguinte que foram contados duas vezes.



Esses quadros são os que têm as duas diagonais preenchidas. Já estão nove peças nas diagonais e, portanto, ocupadas nove quadrículas.
Resta uma peça para distribuir por 16 quadrículas, o que pode ser feito, obviamente, de 16 maneiras diferentes.
Há, então, ${}^{20}C_5\times 2-16$ caos possíveis e a probabilidade pedida, recorrendo à regra de Laplace, é

$$\frac{{}^{20}C_5\times 2-16}{{}^{20}C_{10}}\approx 0{,}0095$$

6.1. A linha do Triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 22, como o primeiro e o último números são 1, a soma do segundo com o penúltimo é 20, sendo estes iguais entre si, e por isso iguais a $\frac{20}{2}=10$.

Na linha do Triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 10, os elementos são da forma ${}^{10}C_k$, pelo que a composição da linha é:

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Assim, escolhendo, ao acaso, um elemento desta linha, a probabilidade de ele ser ímpar é $\frac{4}{11}$.

6.2. O número de casos possíveis é ${}^{11}C_2$.

O produto dos dois elementos não é superior a 10, apenas quando são escolhidos:

- os dois 1 → um caso: ${}^{2}C_2=1$
- um 10 e um 1 → quatro casos: ${}^{2}C_1\times{}^{2}C_1=4$

O número de casos favoráveis é ${}^{11}C_5-5$.

A probabilidade pedida é $\frac{{}^{11}C_2-5}{{}^{11}C_2}=\frac{10}{11}$.

Pág. 26

7. A equação $x^2+kx+1=0$ é impossível em $\mathbb{R}$ se e só se $k^2-4<0 \Leftrightarrow -2<k<2$.

Sendo k o valor que se obtém no lançamento do dado, k apenas toma os valores: –1 , 1 e 2. Como o dado tem três faces com o número 1 e uma face com o número –1, existem quatro casos favoráveis.

Então, a probabilidade pedida é $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

8.1. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=$

$=1-P\left(A\cap B\right)=$

$=1-0,25=$

$=0,75$

Portanto, $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0,75$.

8.2. $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=$

$=P\left(A\right)+1-P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap B\right)=$

$=0,35+1-0,3-0,25=$

$=0,8$

Portanto, $P\left(A\cup B\right)=0,8$

9.1. $P\left(A\cup B\right)=1-P\left(\overline{A\cup B}\right)=$

$=1-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=$

$=1-0,2=$

$=0,8$

Portanto, $P\left(A\cup B\right)=0,8$.

9.2. $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+1-P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,8=0,4+1-P\left(\overline{B}\right)-0,3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\overline{B}\right)=1,1-0,8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\overline{B}\right)=0,3$

Portanto, $P\left(\overline{B}\right)=0,3$.

10.1. $P\left(A\cup B\right)+P\left(\overline{A}\right)-P\left(B\right)=$

$=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)+P\left(\overline{A}\right)-P\left(B\right)=$

$=1-P\left(\overline{A}\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)+P\left(\overline{A}\right)-P\left(B\right)=$

$=1-P\left(A\cap B\right)=$

$=P\left(\overline{A\cap B}\right)=P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$

10.2. $P\left(A\cup\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cup B\right)=$

$=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)-\left[P\left(\overline{A}\right)+P(B)-P\left(\overline{A}\cap B\right)\right]=$

$=P\left(A\right)+1-P\left(B\right)-\left[P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)\right]-$

$-\left[1-P\left(A\right)+P\left(B\right)-\left(P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right)\right]=$

$=P\left(A\right)+1-P\left(B\right)-P\left(A\right)+P\left(A\cap B\right)-1+P\left(A\right)-$

$-P\left(B\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=$

$=P\left(A\right)-P\left(B\right)$

10.3. $P\left(\overline{A\cup B}\right)+P\left(A\cap\overline{B}\right)=$

$=1-P\left(A\cup B\right)+P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)=$

$=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]+P(A)-P(A\cap B)=$

$=1-P\left(A\right)-P\left(B\right)+P\left(A\cap B\right)+P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)=$

$=1-P\left(B\right)=P\left(\overline{B}\right)$

10.4. $P\left(A\cap B\right)+P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A}\cup B\right)$

$P\left(\overline{A}\cup B\right)=P\left(\overline{A}\right)+P\left(B\right)-P\left(\overline{A}\cap B\right)=$

$=P\left(\overline{A}\right)+P\left(B\right)-\left(P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right)=$

$=P\left(\overline{A}\right)+P\left(B\right)-P\left(B\right)+P\left(A\cap B\right)=$

$=P\left(A\cap B\right)+P\left(\overline{A}\right)$

10.5. $P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)\geq P\left(\overline{A\cap B}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-P\left(A\right)+1-P\left(B\right)\geq 1-P\left(A\cap B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-P\left(A\right)-P\left(B\right)\geq 1-P\left(A\cap B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\geq P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\geq P\left(A\cup B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(A\cup B\right)\leq 1$

Esta desigualdade é verdadeira, quaisquer que sejam os acontecimentos A e B , pois a probabilidade de qualquer acontecimento nunca é superior a um.

Como $P\left(A\cup B\right)\leq 1\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)\geq P\left(\overline{A\cap B}\right)$,

podemos afirmar que esta desigualdade é verdade, quaisquer que sejam os acontecimentos A e B .

11. $P\left(A\cup B\right)=\frac{11}{15}$, $P\left(A\right)=\frac{5}{9}P\left(B\right)$

$P\left(A\mid B\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}P\left(B\right)$.

Por outro lado, $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$.

$\frac{11}{15}=\frac{5}{9}P\left(B\right)+P\left(B\right)-\frac{1}{3}P\left(B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{11}{15}=\frac{11}{9}P\left(B\right)\Leftrightarrow P\left(B\right)=\frac{11}{15}:\frac{11}{9}\Leftrightarrow P\left(B\right)=\frac{3}{5}$

$P(A)=\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{3}$ e $P(A\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$

Temos, ainda, $P(A)\times P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$ e, como $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$, conclui-se que os acontecimentos A e B são independentes.

12.1. $P(B)\times P(A\mid B)+P(\overline{B})\times P(A\mid \overline{B})=$

$$=P(B)\times\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+P(\overline{B})\times\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}=$$

$$=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})=$$

$$=P(A\cap B)+P(A)-P(A\cap B)=P(A)$$

12.2. $P(\overline{A}\mid B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=$

$$=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=$$

$$=1-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A\mid B)$$

Pág. 27

13.1. Se A e B são acontecimentos incompatíveis, então: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Logo:

$$\frac{2}{3}=P(A)+\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(A)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(A)=\frac{5}{12}$$

13.2. Se A e B são acontecimentos independentes então:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{4}\times P(A)$$

Por outro lado, sabe-se que:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, logo

$$\frac{2}{3}=P(A)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times P(A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=P(A)-\frac{1}{4}\times P(A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{12}=\frac{3}{4}P(A)\Leftrightarrow P(A)=\frac{5}{12}:\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A)=\frac{5}{9}$$

14. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "O aluno escolhido é rapaz"
B : "O aluno escolhido é moreno"

Sabe-se que:

- $P(A)=\frac{1}{3}$; $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$
- $P(B\mid \overline{A})=\frac{1}{2}$ e $P(B\mid A)=0,45$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=$$

$$=P(A)\times P(B\mid A)+P(\overline{A})\times P(B\mid \overline{A})=$$

$$=\frac{1}{3}\times 0,45+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=$$

$$=0,15+\frac{1}{3}=\frac{15}{100}+\frac{1}{3}=\frac{3}{20}+\frac{1}{3}=\frac{9+20}{60}=\frac{29}{60}$$

A probabilidade pedida é, portanto, $P(B)=\frac{29}{60}$.

15. Sejam A, B, C e D os acontecimentos:

A : "O participante é ministro"
B : "O participante é secretário de estado"
C : "O participante é homem"
D : "O participante é mulher"

Sabemos que:

- $P(A)=P(B)=0,5$
- $P(C\mid A)=0,6$
- $P(D\mid B)=0,7$

Pretende-se determinar $P(B\mid D)$.

Através do teorema da probabilidade total, temos:

$$P(B\mid D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{P(B)\times P(D\mid B)}{P(A\cap D)+P(B\cap D)}=$$

$$=\frac{P(B)\times P(D\mid A)}{P(A)\times P(D\mid A)+P(B)\times P(D\mid B)}$$

Como $P(D\mid A)=P(\overline{C}\mid A)=$

$$=1-P(C\mid A)=1-0,6=0,4$$

$$P(B\mid D)=\frac{0,5\times 0,7}{0,5\times 0,4+0,5\times 0,7}=\frac{7}{11}$$

A probabilidade pedida é $\frac{7}{11}$.

16.1. Número de casos possíveis: ${}^{52}C_2=1326$

Número de casos favoráveis ao acontecimento contrário (saírem duas cartas de paus): ${}^{13}C_2=78$

$$P=1-\frac{78}{1326}=\frac{16}{17}$$

16.2. $P((A\cap \overline{B})\mid C)$ significa a probabilidade de sair uma carta de copas que não seja figura na segunda extração, sabendo que saiu o ás de copas na primeira extração.

Tem-se, assim, que o número de casos favoráveis é 51 (número de cartas existentes no baralho, após a extração da primeira carta, a qual não foi reposta no baralho); o número de casos favoráveis é 9 (número de cartas de copas existentes no baralho que não são figuras, após a extração da primeira carta, a qual, por ser o ás de copas, faz com que o baralho tivesse apenas 12 cartas de copas das quais três são figuras).

A probabilidade pedida é, por aplicação da Regra de Laplace, $\frac{9}{51}=\frac{3}{17}$.

Ficha para praticar 6

Pág. 28

1.1.

A	V	Total
4	5	9
2	1	3
3	0	

Número de casos possíveis: ${}^{9}C_3$

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_2\times{}^{5}C_1+{}^{4}C_3\times{}^{5}C_0$

$$P=\frac{{}^{4}C_2\times{}^{5}C_1+{}^{4}C_3\times{}^{4}C_0}{{}^{9}C_3}=\frac{17}{42}$$

1.2.

A	V
4	5
3	0
0	3

Número de casos favoráveis é ${}^5C_3 + {}^4C_3$.

$$P = \frac{{}^5C_3 + {}^4C_3}{{}^9C_3} = \frac{10+4}{84} = \frac{1}{6}.$$

2. Ao lançar um dado equilibrado, com as faces numerada de 1 a 6, a probabilidade de sair número múltiplo de 3 é igual a $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Portanto, a probabilidade de não sair um número múltiplo de 3 é igual a $\frac{2}{3}$. Por outro lado, o número de posições, em que as três faces que têm um número múltiplo de 3 podem ocupar na sequência de seis lançamentos é igual a ${}^6C_3$. A probabilidade pedida é

$${}^6C_3 \times \underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}_{\text{em 3 lançamentos sai múltiplo de 3}} \times \underbrace{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}_{\text{em 3 lançamentos não sai múltiplo de 3}} \approx 0,219$$

3.1. O António retira, simultaneamente e ao acaso, duas moedas do bolso. A quantia, em euros, correspondente às moedas retiradas é igual a 2 euros, quando e apenas quando, ele retira duas moedas de um euro. Assim, o número de casos favoráveis é igual a ${}^3C_2 = 3$ já que o número de casos possíveis é igual a ${}^8C_2 = 28$. Assim, a probabilidade pedida é, de acordo com a regra de Laplace, $\frac{3}{28}$.

3.2. Sejam A e B dois acontecimentos:

A : "As duas moedas retiradas pelo António são iguais"

B : "A quantia, em euros, correspondente às duas moedas retiradas pelo António é igual a 2 euros"

Pretende-se determinar $P(B \mid A)$.

O número de maneiras diferentes de retirar duas moedas iguais é dado por ${}^3C_2 + {}^4C_2$ (ou retira duas moedas das três de um euro ou retira duas moedas das quatro de 50 cêntimos). Portanto, a probabilidade pedida, por aplicação da regra de Laplace é $\frac{{}^3C_2}{{}^3C_2 + {}^4C_2} = \frac{1}{3}$.

Em alternativa:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}}{\frac{3}{8}\times\frac{2}{7} + \frac{4}{8}\times\frac{3}{7}} = \frac{\frac{3}{28}}{\frac{9}{28}} = \frac{1}{3}$$

4.1. Número de casos possíveis: 8!

Número de casos favoráveis:

$$\underbrace{4!}_{\text{maneiras de sentar 4 rapazes nos 4 lugares ímpares}} \times \underbrace{4!}_{\text{maneiras de sentar 4 raparigas nos 4 lugares pares}} \times \underbrace{2}_{\text{pode ser rapazes nos pares e raparigas nos ímpares}}$$

$$P = \frac{2\times 4!\times 4!}{8!} = \frac{1}{35}$$

4.2. $P = \frac{{}^7C_3}{{}^8C_3} = \frac{5}{8}$.

Pág. 29

5.1. $P\left(\overline{A} \cup B\right) = P\left(\overline{A}\right) + P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right) =$

$= 1 - P(A) + P(B) - \left[P(B) - P(A \cap B)\right] =$

$= P\left(\overline{A} \cup B\right) = 1 - P(A) + P(A \cap B)$

Substituindo $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ por 0,45 e $P(A)$ por 0,65:

$0,45 = 1 - 0,65 + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$

5.2. $P\left(A \cup \overline{B}\right) = P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(A \cap \overline{B}\right) =$

$= P(A) + P\left(\overline{B}\right) - \left[P(A) \times P(A \cap B)\right] =$

$= P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P(A) + P(A \cap B) =$

$= 1 - P(B) + P(A \cap B)$

Substituindo $P(B)$ por 0,15 e $P(A \cap B)$ por 0,1:

$P\left(A \cup \overline{B}\right) = 1 - 0,15 + 0,1 = 0,95$

6.1.

- $P(A \setminus B) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - \frac{1}{10}$

- $P(A) = 0,9P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A)}{0,9}$

Por outro lado, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$\frac{3}{5} = P(A) + \frac{P(A)}{0,9} - \left[P(A) - \frac{1}{10}\right] \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{P(A)}{0,9} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{P(A)}{0,9} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A) = 0,45$

Portanto, $P(A) = 0,45$.

6.2. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = P(A) - \frac{1}{10} = 0,45 - 0,1 = 0,35$

$P(B) = \frac{0,45}{0,9} = 0,5$

Assim, $P(A \mid B) = \frac{0,35}{0,5} = 0,7$.

7. $\frac{P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{P(B)} = \frac{1 - P(A) - P\left(\overline{A \cup B}\right)}{P(B)} =$

$= \frac{1 - P(A) - \left(1 - P(A \cup B)\right)}{P(B)} =$

$= \frac{-P(A) + P(A \cup B)}{P(B)} =$

$= \frac{-P(A) + P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} = P\left(\overline{A} \mid B\right)$

8.1. Sejam os acontecimentos:

A : “O habitante é um homem.”

B : “O habitante tem menos de 45 anos.”

- $P\left(\overline{A}\right)=0{,}54$ pelo que $P(A)=1-0{,}54=0{,}46$
- $P\left(B\mid\overline{A}\right)=0{,}3$ pelo que $P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=1-0{,}3=0{,}7$
- $P(B\mid A)=0{,}2$ pelo que $P\left(\overline{B}\mid A\right)=1-0{,}2=0{,}8$

Pretende-se determinar $P\left(A\mid\overline{B}\right)$.

$$P(A\mid B)=\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{P(A)\times P\left(\overline{B}\mid A\right)}{P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}=$$

$$=\frac{P(A)\times P\left(\overline{B}\mid A\right)}{P(A)\times P\left(\overline{B}\mid A\right)+P\left(\overline{A}\right)\times P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)}=$$

$$=\frac{0{,}46\times 0{,}8}{0{,}46\times 0{,}8+0{,}54\times 0{,}7}=\frac{0{,}368}{0{,}746}=\frac{184}{373}$$

8.2. Pretende-se determinar $P(A\cup B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=0{,}46+(1-0{,}746)-P(A)\times P(B\mid A)=$$

$$=0{,}46+0{,}254-0{,}46\times 0{,}2=$$

$$=0{,}46+0{,}254-0{,}092=\frac{311}{500}$$

9. Os acontecimentos A e B são independentes se e somente se $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-P\left(\overline{A}\right)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}$$

Substituindo $P\left(\overline{A}\right)$ por $\frac{2}{3}$ e $P(B)$ por $\frac{1}{2}$, vem

$$1-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{5}{6}-P(A\cap B)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

Por outro lado, $P(A)\times P(B)=\left[1-P\left(\overline{A}\right)\right]\times P(B)=$

$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

Conclui-se, portanto, que A e B são acontecimentos independentes, pois $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

10. $P\left(C\mid\left(A\cap\overline{B}\right)\right)$ significa a probabilidade de a segunda bola extraída ser vermelha ou verde sabendo que a primeira bola extraída tinha um número par e era vermelha. O número de casos possíveis é 11 (depois de ser retirada a primeira bola, restam 11 bolas no saco). O número de casos favoráveis é 7 (existem no saco 4 bolas verdes e 3 bolas vermelhas, pois a primeira bola extraída era vermelha e não foi reposta no saco).

Portanto e, por aplicação da regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{7}{11}$.

11.1. Sejam os acontecimentos:

E : “a máquina teve problemas elétricos”

M : “a máquina teve problemas mecânicos”

$P(M)=0{,}2$; $P\left(E\mid\overline{M}\right)=0{,}15$ e $P(E\mid M)=0{,}3$

A máquina para de funcionar imediatamente quando tem problemas elétricos (podendo ou não ter problemas mecânicos).

Assim, pretende-se determinar $P(E)$.

$$P(E)=P(M)\times P(E\mid M)+P\left(\overline{M}\right)\times P\left(E\mid\overline{M}\right)$$

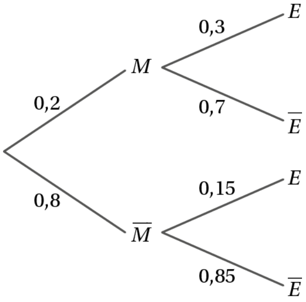
$$=0{,}2\times 0{,}3+(1-0{,}2)\times 0{,}15$$

$$=0{,}18=\frac{9}{50}$$

A probabilidade pedida é $\frac{9}{50}$.

11.2. Pretende-se determinar $P\left(M\mid\overline{E}\right)$ já que a probabilidade pedida é a probabilidade de ter ocorrido um problema mecânico na máquina sabendo que esta não parou o seu funcionamento (se não parou é porque não teve problema elétrico).

Construindo um diagrama de árvore, vem que:



$$P\left(M\mid\overline{E}\right)=\frac{P\left(M\cap\overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)}=$$

$$=\frac{P(M)\times P\left(\overline{E}\mid M\right)}{P\left(\overline{M}\cap\overline{E}\right)+P\left(M\cap\overline{E}\right)}=$$

$$=\frac{P(M)\times P\left(\overline{E}\mid M\right)}{P\left(\overline{M}\right)\times P\left(\overline{E}\mid\overline{M}\right)+P(M)\times P\left(\overline{E}\mid M\right)}=$$

$$=\frac{0{,}2\times 0{,}7}{0{,}8\times 0{,}85+0{,}2\times 0{,}7}=\frac{7}{41}$$

A probabilidade pedida é $\frac{7}{41}$.

12.

- $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
- $P\left(\overline{A}\mid B\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=$

$$=\frac{P(B)-P(A)\times P(B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(B)\left[1-P(A)\right]}{P(B)}=1-P(A)=P\left(\overline{A}\right)$$

- $P\left(\overline{B} \mid A\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} =$

$$= \frac{P(A) - P(A) \times P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)\left[1 - P(B)\right]}{P(A)} =$$

$$= 1 - P(B) = P\left(\overline{B}\right)$$

- $P\left((A \cap B) \mid \overline{B}\right) = \frac{P\left[(A \cap B) \cap \overline{B}\right]}{P\left(\overline{B}\right)} =$

$$= \frac{P\left[A \cap \left(B \cap \overline{B}\right)\right]}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{P(\emptyset)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{0}{P\left(\overline{B}\right)} = 0$$

Por outro lado, $P(A) < P(B)$, daí que:

$$P(A) < P(B) \Leftrightarrow 1 - P\left(\overline{A}\right) < 1 - P\left(\overline{B}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -P\left(\overline{A}\right) < -P\left(\overline{B}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\right) > P\left(\overline{B}\right)$$

$P(A) \times P(B) \neq 0$, pelo que $P(A)$ e $P(B)$ são probabilidades não nulas.

Portanto, $0 < P\left(\overline{B}\right) < P\left(\overline{A}\right)$, ou seja,

$P\left((A \cap B) \mid \overline{B}\right) < P\left(\overline{B} \mid A\right) < P\left(\overline{A} \setminus B\right)$.

13.1. Sejam os acontecimentos:

F : "O automóvel é um grande familiar"

E : "O automóvel é um executivo"

M : "O automóvel é um monovolume"

A : "O automóvel é preto"

$P(E) = 0{,}5$, $P(M) = 0{,}2$, $P(F) = 1 - (0{,}5 + 0{,}2) = 0{,}3$,

$P(A \mid E) = 0{,}7$, $P\left(\overline{A} \mid M\right) = 0{,}4$ e $P(A) = 0{,}55$

Pretende-se determinar $P\left(F \mid \overline{A}\right)$.

Construindo uma tabela, tem-se

- $P(A \cap E) = P(E) \times P(A \mid E) = 0{,}5 \times 0{,}7 = 0{,}35$
- $P\left(\overline{A} \cap M\right) = P(M) \times P\left(\overline{A} \mid M\right) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$

	F	E	M	Total
A	0,08	0,35	0,12	0,55
$\overline{A}$	0,22	0,15	0,08	0,45
Total	0,3	0,5	0,2	1

$P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$

$P\left(\overline{A} \cap E\right) = 0{,}5 - 0{,}35 = 0{,}15$

$P\left(\overline{A} \cap F\right) = 0{,}45 - 0{,}08 - 0{,}15 = 0{,}22$

$$P\left(F \mid \overline{A}\right) = \frac{P\left(F \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0{,}22}{0{,}45} = \frac{22}{45}$$

13.2. O número de casos possíveis é igual a ${}^{120}C_5$.

55% de 120 é igual a 66, pelo que existem 66 automóveis pretos e, evidentemente, 54 que não são pretos. O número de casos favoráveis é igual a ${}^{66}C_3 \times {}^{54}C_2$.

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace, $\frac{{}^{66}C_3 \times {}^{54}C_2}{{}^{120}C_5} = \frac{69\ 960}{230\ 609} \approx 34\%$.

14. $P\left(\overline{A} \mid B\right) - P\left(\overline{B}\right) \times P\left(\overline{A} \mid B\right) =$

$$= P\left(\overline{A} \mid B\right)\left[1 - P\left(\overline{B}\right)\right] =$$

$$= P\left(\overline{A} \mid B\right) \times P(B) =$$

$$= \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} \times P(B) =$$

$$= P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

15. $P\left(\left(\overline{B \cup C}\right) \mid A\right) = 1 - P\left((B \cup C) \mid A\right) =$

$$= 1 - \frac{P\left[(B \cup C) \cap A\right]}{P(A)} =$$

$$= 1 - \frac{P\left[(B \cap A) \cup (C \cap A)\right]}{P(A)} =$$

$$= 1 - \frac{P(B \cap A) + P(C \cap A)}{P(A)}$$, pois $B \cap A$ e $C \cap A$ são incompatíveis, uma vez que $B \cap C = \emptyset$

$$= 1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} - \frac{P(C \cap A)}{P(A)} =$$

$$= 1 - P(B \mid A) - P(C \mid A) =$$

$$= P\left(\overline{B} \mid A\right) - P(C \mid A) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Ficha de teste 3

Pág. 32

1. Seja n o segundo elemento dessa linha.

$n^2 = 961$, portanto, $n = \sqrt{961} \Leftrightarrow n = 31$.

Na linha do Triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 31, os elementos são da forma ${}^{31}C_k$, pelo que, recorrendo à calculadora, podemos verificar a composição da linha:

1 31 465 4495 31465 169911 … 169911 31465 4495 465 31 1

Assim, existem dez elementos dessa linha que são menores que 10^5 (os cinco primeiros e os cinco últimos) e como a linha de ordem 31 tem 32 elementos, existem $32 - 10 = 22$ elementos superiores a 10^5, donde, a probabilidade pedida é $\frac{22}{32} = \frac{11}{16}$.

Resposta: **(B)**

2. O termo geral do desenvolvimento de $A(x)$ é:

$$T_{p+1} = {}^{10}C_p \left(x^4\right)^{10-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p = {}^{10}C_p x^{40-4p} \left(x^{-1}\right)^p$$

$$= {}^{10}C_p x^{40-4p} x^{-p} = {}^{10}C_p x^{40-5p}$$

Pretende-se determinar o coeficiente do termo em x^{15}, pelo que:

$40-5p=15 \Leftrightarrow 5p=40-15 \Leftrightarrow p=5$

Trata-se do 6.º termo, substituindo p por 5 em T_{p+1}:

$T_{5+1}={}^{10}C_5 x^{15} \Leftrightarrow T_6=252$.

Portanto, $k=252$

Resposta: **(D)**

3.
- $P(A\cup B)\le 1$

  $P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 0,7+0,5-P(A\cap B)\le 1 \Leftrightarrow P(A\cap B)\ge 0,2$
- $P(A\cap B)\le P(B)$

  $P(A\cap B)\le 0,5 \Leftrightarrow 0,2\le P(A\cap B)\le 0,5 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -0,5\le -P(A\cap B)\le -0,2 \Leftrightarrow$ $\quad P(B)=0,5$

  $\Leftrightarrow 0\le P(B)-P(A\cap B)\le 0,3 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 0\le P(\overline{A}\cap B)\le 0,3$

Dos valores das opções o único que pode ser é 0,15.

Resposta: **(A)**

4. Trata-se da probabilidade de comer a maçã sabendo que não tem fome, ou seja, $P(A\mid B)$ e como esta probabilidade é igual a $\frac{1}{3}$ temos que $P(A\mid B)=\frac{1}{3}$

Resposta: **(B)**

5. Os acontecimentos A e B são independentes se e somente se $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=$$
$$=0,6+0,5-0,6\times 0,5=0,8$$

Resposta: **(C)**

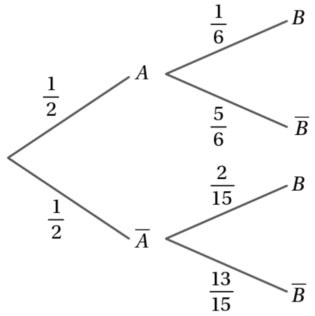
6. No dado viciado a probabilidade de sair face com o número 1 é igual a $\frac{1}{3}$, portanto, neste dado a probabilidade de não sair face com o número 1 é igual a $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Como as restantes faces têm igual probabilidade de ocorrer, temos que a probabilidade de sair cada uma delas é igual a $\frac{2}{3}:5=\frac{2}{15}$. Assim a probabilidade de sair face 3 no daco viciado é igual a $\frac{2}{15}$.

No dado equilibrado esta probabilidade é $\frac{1}{6}$.

Sejam os acontecimentos:

A: "Lança o dado equilibrado"

B: "Sai a face com o número 3"



Pretende-se determinar $P(\overline{A}\mid B)$.

$$P(\overline{A}\mid B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A}\cap B)+P(A\cap B)}=$$
$$=\frac{P(\overline{A})\times P(B\mid \overline{A})}{P(\overline{A})\times P(B\mid \overline{A})+P(A)\times P(B\mid A)}=$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{15}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{15}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{20}}=\frac{4}{9}$$

A probabilidade pedida é $\frac{4}{9}$.

7. $P\left[\left(\overline{\overline{A}\cap B}\right)\mid B\right]=P\left[\left(A\cup\overline{B}\right)\mid B\right]=$

$$=\frac{P\left[\left(A\cup\overline{B}\right)\cap B\right]}{P(B)}=$$
$$=\frac{P\left[\left(A\cap B\right)\cup\left(\overline{B}\cap B\right)\right]}{P(B)}=$$
$$=\frac{P\left[\left(A\cap B\right)\cup\varnothing\right]}{P(B)}=$$
$$=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=$$

Como A e B são dois acontecimentos independentes, temos que $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

$$=\frac{P(A)\times P(B)}{P(B)}=P(A)$$

8.1. Sejam os acontecimentos:

A: "Sair bola azul"

B: "Sair face com número múltiplo de 3 no lançamento do dado"

$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, pois $B=\{3,6\}$, logo, $P(\overline{B})=\frac{2}{3}$

$P(A\mid B)=\frac{5}{8}$ e $P(A\mid \overline{B})=\frac{3}{4}$

Aplicando o teorema da probabilidade total:

$$P(A)=P(B)\times P(A\mid B)+P(\overline{B})\times P(A\mid \overline{B})=$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{17}{24}$$

A probabilidade pedida é $\frac{17}{24}$.

8.2. A caixa 2 contém, no total, $4+n$ bolas.

Uma equação que traduz o problema é:

$$\frac{{}^3C_1\times{}^nC_1}{{}^{4+n}C_2}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{3\times n}{\frac{(4+n)(3+n)}{2}}=\frac{2}{5}$$
$$\Leftrightarrow\frac{6n}{n^2+7n+12}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow 30n=2n^2+14n+24$$
$$\Leftrightarrow n^2+7n+12=15n\Leftrightarrow n^2-8n+12=0$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times12}}{2}\Leftrightarrow n=6\vee n=2$$

O valor de n tem de ser um número natural, logo $n=2\vee n=6$, pelo que o problema tem duas soluções.