Ficha para praticar 1

1.1. $1480+710+894=3084$

3084 participantes.

1.2. $\frac{1480}{3084}\times 100\approx 47,99\%$ (moção A)

$\frac{710}{3084}\times 100\approx 23,02\%$ (moção B)

$\frac{894}{3084}\times 100\approx 28,99\%$ (moção C)

Moção A: aproximadamente 47,99 %
Moção B: aproximadamente 23,02 %
Moção C: aproximadamente 28,99 %

1.3. Vencedora: moção A (pois obteve mais votos que as moções B e C)
Tipo de maioria: maioria simples (maioria relativa)

2.1. Afonso: 12 votos, ou seja, $\frac{12}{30}\times 100=40\%$ dos votos.

Ana: 7 votos, ou seja, $\frac{7}{30}\times 100\approx 23,33\%$ dos votos.

Hélder: 1 voto, ou seja, $\frac{1}{30}\times 100\approx 3,33\%$ dos votos.

Flávio: 10 votos, ou seja, $\frac{10}{30}\times 100\approx 33,33\%$ dos votos.

Candidato	N.º de votos	Percentagem de votos
Afonso	12	40 %
Ana	7	23,33 %
Hélder	1	3,33 %
Flávio	10	33,33 %
Total	**30**	**99,99 %**

2.2. Sim, o Afonso pode ser declarado vencedor pelo sistema maioritário de uma volta pois alcançou uma maioria relativa.

2.3. De acordo com os dados disponíveis não se pode declarar um vencedor pela aplicação desse sistema. Seria necessária uma segunda volta apenas com os dois candidatos mais votados (Afonso e Flávio). Nesta fase, os alunos da turma apenas votariam num desses dois candidatos e vencia quem obtivesse mais votos.

2.4. Tem de obter mais de 50 % dos votos.

3.1. Votos validamente expressos: $108+18+104+115=345$

W: $\frac{108}{345}\times 100\approx 31,3\%$

X: $\frac{18}{345}\times 100\approx 5,2\%$

Y: $\frac{104}{345}\times 100\approx 30,1\%$

Z: $\frac{115}{345}\times 100\approx 33,3\%$

Candidatos que passam à segunda ronda: W, Y e Z.

3.2. Não, pois na segunda ronda nada nos garante que os 5,2 % de votantes que votaram no candidato X não votem, por exemplo, no Y, tornando-o vencedor.

4.1. Número total de votos: $90+180+271=541$

Joana: $\frac{90}{541}\times 100\approx 16,636\%$

Diogo: $\frac{180}{541}\times 100\approx 33,272\%$

Clara: $\frac{271}{541}\times 100\approx 50,092\%$

Candidato	Fração de votos	Percentagem de votos
Joana	$\frac{90}{541}$	16,636 %
Diogo	$\frac{180}{541}$	33,272 %
Clara	$\frac{271}{541}$	50,092 %

4.2. Clara

4.3. Sim, existe um vencedor logo na primeira volta, a Clara, pois obtém mais de 50 % dos votos.

Ficha para praticar 2

1.1. Número total de votos: $20+21+11=52$
O: 20 votos em primeira preferência
P: 21 votos em primeira preferência
K: 11 votos em primeira preferência

$\frac{21}{52}\times 100\approx 40,4\%$

O vencedor é o candidato P com, aproximadamente, 40,4 % dos votos em primeira preferência.

1.2. Pela alínea 1.1., o candidato K é eliminado.
<u>Nova contagem</u>
O: 20 + 11 = 31 votos em primeira preferência
P: 21 votos em primeira preferência
Vencedor: candidato O

1.3. Se P desistir, o novo vencedor é o candidato K com 21+11=32 votos em primeira preferência.

2.1.

	Número de votos					
Prefe-rências	**2**	**3**	**8**	**7**	**2**	**8**
1.ª	Bacalhau com natas	Lasanha	Frango assado	Bacalhau com natas	Frango assado	Francesinha
2.ª	Lasanha	Francesinha	Bacalhau com natas	Francesinha	Lasanha	Bacalhau com natas
3.ª	Francesinha	Bacalhau com natas	Lasanha	Lasanha	Bacalhau com natas	Frango assado
4.ª	Frango assado	Frango assado	Francesinha	Frango assado	Francesinha	Lasanha

2.2. Vencedor: Frango assado, com 10 votos em primeira preferência.
Pode-se argumentar que não é justo pelo simples facto de o frango assado surgir em último lugar para 12 votantes e em penúltimo para 8. Note-se que o bacalhau com natas só tem menos 1 voto em primeira preferência (do que o frango assado) mas surge em segundo lugar 16 vezes, enquanto que o frango assado não é a segunda preferência de qualquer votante.

2.3. Candidatos eliminados (com menos votos como primeira preferência): Lasanha e Francesinha
Nova contagem
Bacalhau com natas: 2+3+7+8=20
Frango assado: 8+2=10
Vencedor: Bacalhau com natas

2.4. Candidato eliminado (com menos votos como primeira preferência): Lasanha
Nova contagem 1
Bacalhau com natas: 2+7=9 (eliminado)
Francesinha: 3+8=11
Frango assado: 8+2=10
Nova contagem 2
Francesinha: 2+3+7+8=20
Frango assado: 8+2=10
Vencedor: Francesinha

2.5. Três métodos diferentes produzem três vencedores diferentes.

3.1. a) A: 90+70=160
B: 150
C: 65
D: 72+128=200
Vencedor: candidato D

3.1. b) Candidatos eliminados: C e B
Nova contagem
A: 90+70+150+65=375
D: 72+128=200
Vencedor: candidato A

3.1. c) Candidato eliminado: C
Nova contagem 1
A: 90+70+65=225
B: 150 (eliminado)
D: 72+128=200
Nova contagem 1
A: 90+70+150+65=375
D: 72+128=200
Vencedor: candidato A

3.2. $\frac{200}{575}\times 100 \approx 34{,}8\%$
Não obteve maioria absoluta pois não alcançou mais de 50 % dos votos (apenas 34,8 %).

Ficha para praticar 3

1.1.

1.º	A	A	B	**B**	C	C
2.º	B	C	A	**C**	A	B
3.º	C	B	C	**A**	B	A
Votos	**5**	**3**	**4**	**5**	**2**	**2**

1.2. A: $5\times 3+3\times 3+4\times 2+5\times 1+2\times 2+2\times 1=43$ pontos
B: $5\times 2+3\times 1+4\times 3+5\times 3+2\times 1+2\times 2=46$ pontos
C: $5\times 1+3\times 2+4\times 1+5\times 2+2\times 3+2\times 3=37$ pontos
Vencedor: Bruno

1.3. A vs B (A: 5+3+2=10, B: 11) – Vence B
A vs C (A: 5+3+4=12, C: 9) – Vence A
B vs C (B: 5+4+5=14, C: 7) – Vence B
Vencedor: Bruno

1.4. O trabalho do Bruno pois vence pela aplicação dois métodos das alíneas anteriores (Borda e Condorcet) e ainda caso fosse aplicado o método da pluralidade.

2.1. $6+7+4+9+2=28$ alunos
28 alunos

2.2. Diana

2.3. O vencedor é a Diana com maioria simples (relativa).

2.4. Abílio: $6\times 5+7\times 2+4\times 4+9\times 1+2\times 1=71$ pontos
Elsa: $6\times 4+7\times 3+4\times 1+9\times 4+2\times 5=95$ pontos
Carlos: $6\times 3+7\times 4+4\times 5+9\times 3+2\times 4=101$ pontos
Bernardo: $6\times 2+7\times 5+4\times 2+9\times 2+2\times 3=79$ pontos
Diana: $6\times 1+7\times 1+4\times 3+9\times 5+2\times 2=74$ pontos
Vencedor: Carlos

2.5. Abílio vs Elsa (Abílio: 6+4=10, Elsa: 18)
Vence a Elsa
Abílio vs Carlos (Abílio: 6, Carlos: 22)
Vence o Carlos
Abílio vs Bernardo (Abílio: 6+4=10, Bernardo: 18)
Vence o Bernardo
Abílio vs Diana (Abílio: 6+7+4=17, Diana: 11)
Vence o Abílio
Elsa vs Carlos (Elsa: 6+9+2=17, Carlos: 11)
Vence a Elsa
Elsa vs Bernardo (Elsa: 6+9+2=17, Bernardo: 11)
Vence a Elsa
Elsa vs Diana (Elsa: 6+7+2=15, Diana: 13)
Vence a Elsa
Carlos vs Bernardo (Carlos: 6+4+9+2=21, Bernardo: 7)
Vence o Carlos
Carlos vs Diana (Carlos: 6+7+4+2=19, Diana: 9)
Vence o Carlos
Bernardo vs Diana (Bernardo: 6+7+2=15, Diana: 13)
Vence o Bernardo

Candidato	N.º de vitórias
Abílio	1
Elsa	4
Carlos	3
Bernardo	2
Diana	0

Vencedor: Elsa (é um vencedor de Condorcet)

2.6.

Candidato	N.º de aprovações
Abílio	6 + 4 = 10
Elsa	6 + 9 + 2 = 17
Carlos	7 + 4 + 2 = 13
Bernardo	7
Diana	9

Vencedor: Elsa (com 17 aprovações).

3.1. João: $40\times1+45\times3+38\times1=213$ pontos
Rui: $40\times3+45\times1+38\times2=241$ pontos
Luís: $40\times2+45\times2+38\times3=284$ pontos
Vencedor: Luís

3.2. $\frac{45}{123}\times100\approx36,6\%$

O vencedor seria o João com, aproximadamente, 36,6 % de votos em primeira preferência.

3.3. Rui vs Luís (Rui: 40, Luís: 45+38=83) – Vence o Luís
João vs Luís (João: 45, Luís: 40+38=78) – Vence o Luís
Rui vs João (Rui: 40+38=78, João: 45) – Vence o Rui
O Luís está em condições de se considerar o vencedor pois ganha quando comparado com qualquer um dos outros candidatos.
Luís: 2 vitórias
Rui: 1 vitória
João: nenhuma vitória

Ficha para praticar 4

1. **Método de Sainte-Laguë**

	PPD/PSD; CDS-PP	PS	MIL	PCP-PEV
1	11 247,0	3 674,0	1 826,0	354,0
3	3 749,0	1 224,7	608,7	118,0
5	2 249,4	734,8	365,2	70,8
7	1 606,7	524,9	260,9	50,6
9	1 249,7	408,2	202,9	39,3
11	1 022,5	334,0	166,0	32,2
13	865,2	282,6	140,5	27,2
15	749,8	244,9	121,7	23,6

Câmara Municipal de Lamego			
Partidos	N.º de votos	N.º de vereadores (Método de Hondt)	N.º de vereadores (Método de Sainte-Laguë)
PPD/PSD; CDS-PP	11 247	6	5
PS	3 674	1	1
MIL	1 826	0	1
PCP-PEV	354	0	0

2.1. **Hondt**

	A	B	C	D
1	198,0	1 750,0	1 308,0	834,0
2	99,0	875,0	654,0	417,0
3	66,0	583,3	436,0	278,0
4	49,5	437,5	327,0	208,5
5	39,6	350,0	261,6	166,8
6	33,0	291,7	218,0	139,0
7	28,3	250,0	186,9	119,1
8	24,8	218,8	163,5	104,3
9	22,0	194,4	145,3	92,7

Sainte-Laguë

	A	B	C	D
1	198,0	1 750,0	1 308,0	834,0
3	66,0	583,3	436,0	278,0
5	39,6	350,0	261,6	166,8
7	28,3	250,0	186,9	119,1
9	22,0	194,4	145,3	92,7
11	18,0	159,1	118,9	75,8
13	15,2	134,6	100,6	64,2
15	13,2	116,7	87,2	55,6

Listas	Votos	N.º de mandatos (Método de Hondt)	N.º de mandatos (Método de Sainte-Laguë)
A	198	0	1
B	1 750	5	4
C	1 308	3	3
D	834	2	2
Total	2059	10	10

2.2. **Hondt**

	A	B	C + D
1	198,0	1 750,0	2 142,0
2	99,0	875,0	1 071,0
3	66,0	583,3	714,0
4	49,5	437,5	535,5
5	39,6	350,0	428,4
6	33,0	291,7	357,0
7	28,3	250,0	306,0
8	24,8	218,8	267,8
9	22,0	194,4	238,0

Sainte-Laguë

	A	B	C + D
1	198,0	1 750,0	2 142,0
3	66,0	583,3	714,0
5	39,6	350,0	428,4
7	28,3	250,0	306,0
9	22,0	194,4	238,0
11	18,0	159,1	194,7
13	15,2	134,6	164,8
15	13,2	116,7	142,8

Listas	Votos	N.º de mandatos (Método de Hondt)	N.º de mandatos (Método de Sainte-Laguë)
A	198	0	1
B	1 750	4	4
C + D	2 142	6	5
Total	2059	10	10

Pela aplicação do método de Sainte-Laguë não compensa a formação da coligação.
Se for aplicado o método de Hondt já é vantajosa a formação da coligação pois a lista B perde um mandato para a coligação C + D.

2.3. Hondt

	A	B	C	D
1	198,0	1750,0	1308,0	834,0
2	99,0	875,0	654,0	417,0
3	66,0	583,3	436,0	278,0
4	49,5	437,5	327,0	208,5
5	39,6	350,0	261,6	166,8
6	33,0	291,7	218,0	139,0
7	28,3	250,0	186,9	119,1
8	24,8	218,8	163,5	104,3
9	22,0	194,4	145,3	92,7

Sainte-Laguë

	A	B	C	D
1	198,0	1750,0	1308,0	834,0
3	66,0	583,3	436,0	278,0
5	39,6	350,0	261,6	166,8
7	28,3	250,0	186,9	119,1
9	22,0	194,4	145,3	92,7
11	18,0	159,1	118,9	75,8
13	15,2	134,6	100,6	64,2
15	13,2	116,7	87,2	55,6
17	11,6	102,9	76,9	49,1

Listas	Votos	N.º de mandatos (Método de Hondt)	N.º de mandatos (Método de Sainte-Laguë)
A	198	0	1
B	1 750	6	6
C	1 308	5	4
D	834	3	3
Total	2 059	14	14

Pelo método de Hondt a lista mais beneficiada com o aumento do número de mandatos é a C, enquanto que pelo método de Sainte-Laguë é a B. A lista A é a única que não beneficia com o aumento do número de mandatos.

3.1.

	X	Y	Z
1	2 100,0	400,0	1 100,0
2	1 050,0	200,0	550,0
3	700,0	133,3	366,7
4	525,0	100,0	275,0
5	420,0	80,0	220,0
6	350,0	66,7	183,3
7	300,0	57,1	157,1

Sucursal X: 4 especialistas
Sucursal Y: nenhum especialista
Sucursal Z: 2 especialistas

3.2. Divisor-padrão: 600

Sucursal	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de especialistas extra	Total a atribuir
X	3,5000	3	0,5000		3
Y	0,6667	0	0,6667	1	1
Z	1,8333	1	0,8333	1	2
Total		4 Sobram 2 lugares			6

Sucursal X: 3 especialistas
Sucursal Y: 1 especialista
Sucursal Z: 2 especialistas

4.1.

Regiões	Número de Praticantes (P)	Quota-padrão (P:DP)	Quota inferior (QI)	Parte Decimal
Minho	561	12,715	12	0,715
Beiras	345	7,820	7	0,820
Alentejo	120	2,720	2	0,720
Ribatejo	870	19,719	19	0,719
Algarve	310	7,026	7	0,026

2206	Número total de praticantes (TP)
50	Representantes a distribuir (R)
44,12	Divisor-padrão (DP=TP:R)

4.2.

Regiões	Número de Representantes
Minho	12
Beiras	8
Alentejo	3
Ribatejo	20
Algarve	7

Ficha para praticar 5

1. Divisor-padrão: 13,4375

Modalidade	Quota-padrão	Quota arredondada
Aeróbica	3,7209	4
Musculação/manutenção	5,8047	6
Cycling	2,3814	2
Hidroginástica	2,2326	2
Body Pump	1,8605	2
Total	---	**16**

Aeróbica: 4 representantes; Musculação/manutenção: 6 representantes; Cycling: 2 representantes; Hidroginástica: 2 representantes; Body Pump: 2 representantes

2.1. Divisor-padrão: 282,60
Divisor modificado: 269

Zona	Quota-padrão	Quota inferior	Quota modificada	Quota modificada inferior
Norte	21,9391	21	23,0483	23
Centro	16,9851	16	17,8439	17
Sul	7,6079	7	7,9926	7
Regiões autónomas	3,4678	3	3,6431	3
Total	---	**47**	---	**50**

Norte: 23 representantes; Centro: 17 representantes; Sul: 7 representantes; Regiões autónomas: 3 representantes

2.2. Divisor-padrão: 282,60

Divisor modificado: 298

Zona	Quota--padrão	Quota superior	Quota modificada	Quota modificada superior
Norte	21,9391	22	20,8054	21
Centro	16,9851	17	16,1074	17
Sul	7,6079	8	7,2148	8
Regiões autónomas	3,4678	4	3,2886	4
Total	---	**51**	---	**50**

Norte: 21 representantes; Centro: 17 representantes; Sul: 8 representantes; Regiões autónomas: 4 representantes

3. Divisor-padrão: 12,733

Divisor modificado: 13

Área científica	Quota--padrão	Média geométrica	Quota arredondada pela regra H-H
Matemática	4,7120	4,4721	5
Biologia	3,5340	3,4641	4
Química	4,0838	4,4721	4
Física	2,6702	2,4495	3
Total	---	---	**16**

Área científica	Quota modificada	Média geométrica	Quota modificada arredondada pela regra H-H
Matemática	4,6154	4,4721	5
Biologia	3,4615	3,4641	3
Química	4,0000	4,4721	4
Física	2,6154	2,4495	3
Total	---	---	**15**

Matemática: 5 trabalhos

Biologia: 3 trabalhos

Química: 4 trabalhos

Física: 3 trabalhos

4.1. a) **MÉTODO DE HAMILTON**

Divisor-padrão: 3567,1875

Região	Quota--padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota--padrão	Número de representantes
Golden	21,1371	21	0,1371	21
Fuji	1,8922	1	0,8922	1+1=2
Reineta	8,9707	8	0,9707	8+1=9
Total	---	**30**	---	**32**

Golden: 21 representantes

Fuji: 2 representantes

Reineta: 9 representantes

4.1. b) **MÉTODO DE JEFFERSON**

Divisor-padrão: 3567,188

Divisor modificado: 3400

Região	Quota--padrão	Quota inferior	Quota modificada	Quota modificada inferior
Golden	21,1371	21	22,1765	22
Fuji	1,8922	1	1,9853	1
Reineta	8,9707	8	9,4118	9
Total	---	**30**	---	**32**

Golden: 22 representantes

Fuji: 1 representante

Reineta: 9 representantes

4.1. c) **MÉTODO DE ADAMS**

Divisor-padrão: 3567,1875

Divisor modificado: 3600

Região	Quota-padrão	Quota superior	Quota modificada	Quota modificada superior
Golden	21,1371	22	20,9444	21
Fuji	1,8922	2	1,8750	2
Reineta	8,9707	9	8,8889	9
Total	---	**33**	---	**32**

Golden: 21 representantes

Fuji: 2 representantes

Reineta: 9 representantes

4.1. d) **MÉTODO DE WEBSTER**

Divisor-padrão: 3567,1875

Região	Quota-padrão	Quota arredondada
Golden	21,1371	21
Fuji	1,8922	2
Reineta	8,9707	9
Total	---	**32**

Golden: 21 representantes

Fuji: 2 representantes

Reineta: 9 representantes

4.1. e) **MÉTODO DE HILL-HUNTINGTON**

Divisor-padrão: 3567,1875

Região	Quota--padrão	Média geométrica	Quota arredondada pela regra H-H
Golden	21,1371	21,4942	21
Fuji	1,8922	1,4142	2
Reineta	8,9707	8,4853	9
Total	---	---	**32**

Golden: 21 representantes

Fuji: 2 representantes

Reineta: 9 representantes

4.2.

	Número de representantes				
Região	Hamilton	Jefferson	Adams	Webster	Hill-Huntington
Golden	21	22	21	21	21
Fuji	2	1	2	2	2
Reineta	9	9	9	9	9

Ficha de teste 1

1.1. $45+22+24=91$

Candidato A: $\frac{45}{91}\times 100 \approx 49,45\%$

Vencedor: candidato A com maioria relativa. Se obtivesse mais 1 voto alcançava a maioria absoluta.

1.2. Candidato eliminado na primeira contagem: B (menos votado)
Nova contagem
A: 45 votos
C: 22 + 24 = 46 votos
Vencedor: candidato C
Obtém-se um vencedor diferente relativamente ao resultado da alínea anterior.

2.1. $10+20+40+50+60=180$
180 associados

2.2. Candidato A: $10+20+40=70$ primeiras preferências
$\frac{70}{180}\times 100\approx 38,89\%$
Candidato A com 70 primeiras preferências (aproximadamente 38,89 %)

2.3. Presidente: candidato A
Vice-presidente: candidato B

2.4. Não, pois nenhum dos candidatos obtém mais de 50 % dos votos.
Os dois candidatos mais votados (A e B) teriam que se submeter a uma segunda ronda de votações, vencendo aquele que obtivesse mais votos.

2.5. A: $10\times 4+20\times 4+40\times 4+50\times 1+60\times 1=390$ pontos
B: $10\times 1+20\times 3+40\times 2+50\times 2+60\times 4=490$ pontos
C: $10\times 2+20\times 1+40\times 3+50\times 4+60\times 2=480$ pontos
D: $10\times 3+20\times 2+40\times 1+50\times 3+60\times 3=440$ pontos
Presidente: candidato B
Vice-presidente: candidato C

2.6. A: 10 + 20 + 40 = 70 aprovações
B: 20 + 60 = 80 aprovações
C: 40 + 50 = 90 aprovações
D: 10 + 50 + 60 = 120 aprovações
Presidente: candidato D
Vice-presidente: candidato C

3.1. Número total de votos: $80+90+100+76=346$
Lobato: $\frac{80}{346}\times 100\approx 23,1\%$
Azevedo: $\frac{76}{346}\times 100\approx 22\%$
Paiva: $\frac{90}{346}\times 100\approx 26\%$
Martins: $\frac{100}{346}\times 100\approx 28,9\%$
Lobato: aproximadamente 23,1%
Azevedo: aproximadamente 22%
Paiva: aproximadamente 26%
Martins: aproximadamente 28,9%

3.2. $346:2=173$
Deveria ter obtido, no mínimo, 174 votos.

3.3. Candidato eliminado na primeira contagem: Azevedo

Nova contagem 1	Nova contagem 2
Lobato: 80 + 76 = 156	Lobato: 80 + 76 = 156
Paiva: 90 (eliminado)	Martins: 90 + 100 = 190
Martins: 100	Vencedor: Martins

3.4. Lobato: $80\times 4+90\times 1+100\times 3+76\times 3=938$ pontos
Azevedo: $80\times 3+90\times 3+100\times 1+76\times 4=914$ pontos
Paiva: $80\times 2+90\times 4+100\times 2+76\times 2=872$ pontos
Martins: $80\times 1+90\times 2+100\times 4+76\times 1=736$ pontos
Vencedor: Lobato (não é o mesmo vencedor encontrado na alínea anterior)

4.1. A: $30\times 4+24\times 3+15\times 3+21\times 3+30\times 1=330$ pontos
B: $30\times 1+24\times 4+15\times 4+21\times 1+30\times 2=267$ pontos
C: $30\times 2+24\times 2+15\times 1+21\times 4+30\times 3=297$ pontos
D: $30\times 3+24\times 1+15\times 2+21\times 2+30\times 4=306$ pontos
Vencedor: Alcinda

4.2. A vs B (A: 30 + 21 = 51, B: 24 + 15 + 30 = 69) – Vence B
A vs C (A: 30 + 24 + 15 = 69, C: 51) – Vence A
A vs D (A: 90, D: 30) – Vence A
B vs C (B: 24 + 15=39, C: 81) – Vence C
B vs D (B: 24 + 15=39, D: 81) – Vence D
C vs D (C: 24 + 21=45, D: 75) – Vence D
Não existe vencedor (empate entre a Alcinda e a Dalila).

5.1. Número de votos em primeira preferência:
Madrid: 50 + 30 = 80 votos
Vigo: 60 votos
Sevilha: 40 votos
Granada: 14 + 22 = 36 votos

5.2. Para ser eleita vencedora logo na primeira contagem, uma cidade teria que ter obtido maioria absoluta, ou seja, mais de 50% dos votos em primeira preferência (o que corresponde a, no mínimo, 109 votos).

5.3. Elimina-se Granada após a primeira contagem.
Nova contagem 1
Madrid: 50 + 44 = 94 votos
Vigo: 60 votos (eliminada)
Sevilha: 40 + 22 = 62 votos
Nova contagem 2
Madrid: 50 + 44 = 94 votos
Sevilha: 60 + 40 + 22 = 122 votos
A cidade onde se vai realizar a viagem de finalistas, segundo este método, é Sevilha.

5.4. Madrid:
$50\times 4+60\times 1+40\times 1+14\times 3+30\times 4+22\times 2=506$ pontos
Sevilha:
$50\times 3+60\times 3+40\times 4+14\times 1+30\times 2+22\times 3=630$ pontos
Granada:
$50\times 2+60\times 2+40\times 3+14\times 4+30\times 1+22\times 4=514$ pontos
Vigo:
$50\times 1+60\times 4+40\times 2+14\times 2+30\times 3+22\times 1=510$ pontos
A cidade onde se vai realizar a viagem de finalistas, segundo este método, é Sevilha (tal como na alínea anterior).

5.5. Uma vez que 4% dos alunos do 12.º ano não votaram, 216 votos correspondem a 96 % dos alunos do 12.º ano.

216 ---------- 96%

x ---------- 100%

$$x = \frac{216 \times 100}{96} = 225$$

Nesta escola, o 12.º ano é frequentado por 225 alunos.

6. Divisor-padrão: 168,25

Aldeia	Quota--padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota--padrão	Número de operacionais
W	11,887	11	0,887	11 + 1 = 12
X	11,233	11	0,233	11
Y	9,510	9	0,510	9 + 1 = 10
Z	7,370	7	0,370	7
Total	**---**	**38**	**---**	**40**

Aldeia W: 12 operacionais

Aldeia X: 11 operacionais

Aldeia Y: 10 operacionais

Aldeia Z: 7 operacionais

7.1. MÉTODO DE JEFFERSON

Divisor-padrão: 24 311,838

Divisor modificado: 22 000

Partido/ Coligação	Quota--padrão	Quota inferior	Quota modificada	Quota modificada inferior
BE	0,8796	0	0,9720	0
CDS-PP	2,8361	2	3,1341	3
MPT	0,0851	0	0,0941	0
PH	0,0824	0	0,0911	0
PCP-PEV	2,3502	2	2,5972	2
MRPP	0,1887	0	0,2085	0
POUS	0,0265	0	0,0293	0
PPD/PSD	12,2948	12	13,5868	13
PPM	0,1110	0	0,1227	0
PS	18,0643	18	19,9625	19
PSN	0,0812	0	0,0897	0
Total	**---**	**34**	**---**	**37**

Partido/Coligação	N.º de mandatos (método de Jefferson)
BE	0
CDS-PP	3
MPT	0
PH	0
PCP-PEV	2
MRPP	0
POUS	0
PPD/PSD	13
PPM	0
PS	19
PSN	0

Confirma-se que os resultados produzidos por ambos os métodos são iguais.

7.2. MÉTODO DE HAMILTON

Divisor-padrão: 24 311,8378

Partido/ Coligação	Quota-‘padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota--padrão	N.º de mandatos
BE	0,8796	0	0,8796	0 + 1 = 1
CDS-PP	2,8361	2	0,8361	2 + 1 = 3
MPT	0,0851	0	0,0851	0
PH	0,0824	0	0,0824	0
PCP-PEV	2,3502	2	0,3502	2 + 1 = 3
MRPP	0,1887	0	0,1887	0
POUS	0,0265	0	0,0265	0
PPD/PSD	12,2948	12	0,2948	12
PPM	0,1110	0	0,1110	0
PS	18,0643	18	0,0643	18
PSN	0,0812	0	0,0812	0
Total	**---**	**34**	**---**	**37**

Partido/Coligação	N.º de mandatos (método de Hamilton)
BE	1
CDS-PP	3
MPT	0
PH	0
PCP-PEV	3
MRPP	0
POUS	0
PPD/PSD	12
PPM	0
PS	18
PSN	0

O método de Hamilton não produz a mesma distribuição de mandatos.

7.3. De facto, verifica-se que, neste caso, o método de Hondt “não protege” os partidos mais pequenos (menos votados). O método de Hamilton, comparativamente com o método de Hondt, faz com que os dois maiores partidos percam um mandato, cada um deles, em favor de dois partidos menos votados.

7.4. MÉTODO DE WEBSTER

Divisor-padrão: 24 311,8378

Divisor modificado: 23 800

Partido/ Coligação	Quota--padrão	Quota arredondada	Quota modificada	Quota modificada arredondada
BE	0,8796	1	0,8985	1
CDS-PP	2,8361	3	2,8971	3
MPT	0,0851	0	0,0870	0
PH	0,0824	0	0,0842	0
PCP-PEV	2,3502	2	2,4008	2
MRPP	0,1887	0	0,1928	0
POUS	0,0265	0	0,0271	0
PPD/PSD	12,2948	12	12,5592	13
PPM	0,1110	0	0,1134	0
PS	18,0643	18	18,4528	18
PSN	0,0812	0	0,0829	0
Total	**---**	**36**	**---**	**37**

Partido/Coligação	N.º de mandatos (método de Webster)
BE	1
CDS-PP	3
MPT	0
PH	0
PCP-PEV	2
MRPP	0
POUS	0
PPD/PSD	13
PPM	0
PS	18
PSN	0

7.5. Divisor-padrão: 23 672,0526

Partido/ Coligação	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de mandatos
BE	0,9033	0	0,9033	0 + 1 = 1
CDS-PP	2,9128	2	0,9128	2 + 1 = 3
MPT	0,0874	0	0,0874	0
PH	0,0847	0	0,0847	0
PCP-PEV	2,4137	2	0,4137	2
MRPP	0,1938	0	0,1938	0
POUS	0,0272	0	0,0272	0
PPD/PSD	12,6271	12	0,6271	12 + 1 = 13
PPM	0,1140	0	0,1140	0
PS	18,5525	18	0,5525	18 + 1 = 19
PSN	0,0834	0	0,0834	0
Total	---	**34**	---	**38**

Partido/Coligação	N.º de mandatos (método de Hamilton)
BE	1
CDS-PP	3
MPT	0
PH	0
PCP-PEV	2
MRPP	0
POUS	0
PPD/PSD	13
PPM	0
PS	19
PSN	0

O aumento do número total de mandatos faz com que o PCP--PEV perca um mandato (passa de 3 para 2). Estamos na presença do chamado Paradoxo de Alabama (um aumento do número total de lugares a distribuir pode levar a que uma lista perca um lugar).

8. MÉTODO DE HILL-HUNTINGTON

Divisor-padrão: 113,4250

Divisor modificado: 115

Escola	Quota-padrão	Média geométrica	Quota arredondada pela regra H-H
ES de Beiraliz	17,6328	17,4929	18
EB 2,3 de Beirais de Cima	5,5720	5,4772	6
ES/3 de Algures	6,9650	6,4807	7
ES de Nenhures	9,8303	9,4868	10
Total	---	---	**41**

Escola	Quota modificada	Média geométrica	Quota modificada arredondada pela regra H-H
ES de Beiraliz	17,3913	17,4929	17
EB 2,3 de Beirais de Cima	5,4957	5,4772	6
ES/3 de Algures	6,8696	6,4807	7
ES de Nenhures	9,6957	9,4868	10
Total	---	---	**40**

ES de Beiraliz: 17 livros

EB 2,3 de Beirais de Cima: 6 livros

ES/3 de Algures: 7 livros

ES de Nenhures: 10 livros

Ficha para praticar 6

1.1. A Liliana fica com p_3 , a Manuela com p_2 e a Cristina com p_1 .

1.2. Liliana: p_2 ; Manuela: p_1 ; Cristina: p_3

1.3. Afirmação (C).

2.1. Não, pois quando procede à divisão fá-lo de forma a gerar três partes com o mesmo valor ($\frac{1}{3}$ do total), logo ficará satisfeito com qualquer parte.

2.2. a) Fatia F_3 .

2.2. b) A: Fatia F_2 e B: Fatia F_1

2.2. c) Não, pois cada um deles fica com uma fatia que considera valer pelo menos $\frac{1}{3}$ do valor total do bolo.

3.1. Pedro: T_1
Miguel: T_3
Gustavo: T_2

3.2. Por exemplo: Pedro: T_1
Miguel: T_2
Gustavo: T_3

3.3. Por exemplo: Pedro: T_2
Miguel: T_3
Gustavo: T_1

4.1. Para o Ivo, o frango "vale" $\frac{3}{4}$ da quiche e o atum $\frac{1}{4}$.

Metade com mais atum: $\frac{30º}{180º}\times\frac{3}{4}+\frac{150º}{180º}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\approx 33{,}3\%$

Metade com mais frango: $\frac{30º}{180º}\times\frac{1}{4}+\frac{150º}{180º}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\approx 66{,}7\%$

Metade com mais atum: aproximadamente 33,3% do valor total da quiche.

Metade com mais frango: aproximadamente 66,7% do valor total da quiche.

4.2. O Ivo escolhe a parte com mais frango (que para ele vale aproximadamente 66,7% do valor total da quiche) e a Mariana fica com a parte com mais atum (que para ela vale 50% do valor total da quiche).

4.3. Se o Ivo fosse o divisor poderia cortar a quiche de uma das três formas que se seguem:

- Metade atum e metade frango – corte na "vertical".
  Ambas as partes: $\frac{90º}{180º}\times\frac{1}{4}+\frac{90º}{180º}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}=50\%$
- A parte toda de atum mais uma fatia de frango com "amplitude" 60º.
  Uma parte $\frac{60º}{180º}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=50\%$ e a outra
  $\frac{120º}{180º}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}=50\%$.
- Uma fatia de frango com "amplitude" 96º e uma fatia de atum com "amplitude" 72º.
  Uma parte $\frac{96º}{180º}\times\frac{3}{4}+\frac{72º}{180º}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=50\%$ e a outra
  $\frac{84º}{180º}\times\frac{3}{4}+\frac{108º}{180º}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=50\%$.

5. Ana: T_2
Bento: T_1
Margarida: T_3

Ficha para praticar 7

1. O Pedro (pois foi o último a diminuir).

2.1. Alda **2.2.** Bruna **2.3.** Diana
2.4. Bruna **2.5.** Bruna
2.6. A Carina e a Elsa. Dividem a *pizza* usando o método do divisor-selecionador (tu cortas, eu escolho).

3.1. Por exemplo: Participante A: B_1 e C_2
Participante B: B_2 e B_3
Participante C: C_1 e C_3
3.2. Por exemplo: Participante A: B_3 e C_1
Participante B: B_1 e B_2
Participante C: C_2 e C_3

4.1. Sócio C **4.2.** Sócio A
4.3. Sócio B **4.4.** Sócio A
4.5. Terceira ronda: o sócio A fica com a parcela
Quarta ronda: o sócio D fica com a parcela
Quinta ronda: os sócios E e F aplicam o método do divisor--selecionador para dividir parte do terreno que sobra.

5. O selecionador único (clube B) escolhe uma subparte de cada um dos divisores.
Vamos supor que B escolhe A1, C2, D4 e E2.
Distribuição final:
"Os Aritméticos" (A) – A2, A3, A4 e A5
"Os Bispos" (B) - A1, C2, D4 e E2
"Os Cavaleiros" (C) – C1, C3, C4 e C5
"Os Dominós" (D) – D1, D2, D3 e D5
"Os Excêntricos" (E) – E1, E3, E4 e E5

Ficha para praticar 8

1. Zulmira: fica temporariamente com o peluche e a bolsa.
Xavier: fica temporariamente com a carteira.
<u>Pontuação</u>
Zulmira: $30+55=85$ pontos (vencedor inicial)
Xavier: 50 pontos (perdedor inicial)
<u>Quocientes</u>
Peluche: $\frac{30}{20}=1,5$ (item a transferir)
Bolsa: $\frac{55}{30}\approx 1,8$
<u>Nova pontuação</u>
Zulmira: 55 pontos
Xavier: $50+20=70$ pontos
O vencedor inicial passa a ter menos pontos que o perdedor inicial logo temos que "fracionar" o item peluche.
<u>Equação</u>
Seja x a parte do peluche que fica com o vencedor inicial (Zulmira).
$$30x+55=50+20(1-x)\Leftrightarrow 30x+20x=50+20-55$$
$$\Leftrightarrow 50x=15\Leftrightarrow x=\frac{15}{50}\Leftrightarrow x=0,3$$
Assim:
- A Zulmira fica com 30% do peluche (do tempo de utilização por exemplo) e com a bolsa.
- O Xavier fica com 70% do peluche e com a carteira.

Confirmação das pontuações:
Zulmira: $0,30\times 30+55=64$ pontos
Xavier: $0,70\times 20+50=64$ pontos

2. Francisco: fica temporariamente com o relógio e o perfume.
Afonso: fica temporariamente com o videojogo e a mochila.
<u>Pontuação</u>
Francisco: $30+35=65$ pontos (vencedor inicial)
Afonso: $25+20=45$ pontos (perdedor inicial)
<u>Quocientes</u>
Relógio: $\frac{30}{25}=1,2$
Perfume: $\frac{35}{30}\approx 1,17$ (item a transferir)
<u>Nova pontuação</u>
Francisco: 30 pontos
Afonso: $25+20+30=75$ pontos
O vencedor inicial passa a ter menos pontos que o perdedor inicial logo temos que "fracionar" o item perfume.
<u>Equação</u>
Seja x a parte do perfume que fica com o vencedor inicial (Francisco).
$$35x+30=25+20+30(1-x)\Leftrightarrow 35x+30x=25+20+30-30$$
$$\Leftrightarrow 65x=45\Leftrightarrow x=\frac{45}{65}$$
Então $x\approx 0,69$.

Assim:

- O Francisco fica com aproximadamente 69% do perfume e com o relógio.
- O Afonso fica com aproximadamente 31% do perfume, com o videojogo e com a mochila.

Confirmação das pontuações:
Francisco: $0,69\times35+30\approx54$ pontos
Afonso: $0,31\times30+25+20\approx54$ pontos

3. Escolhe-se um elemento externo à partilha para ser o divisor (neste caso será o professor).
O divisor move a faca lenta e continuamente, digamos da esquerda para a direita, sobre o bolo até que algum dos alunos diga "stop".
O aluno que disse "stop" fica com a parte que é cortada e retira-se do processo.
O processo é repetido com a restante parte do bolo até todos os alunos terem uma parte.

4. Maria: fica temporariamente com o candeeiro e o guarda-joias.
Manuel: fica temporariamente com a escrivaninha e a escultura (a escultura fica com o Manuel pois este tem menos pontos).
<u>Pontuação</u>
Maria: $50+20=70$ pontos (vencedor inicial)
Manuel: $30+10+10=50$ pontos (perdedor inicial)
<u>Quocientes</u>
Candeeiro: $\frac{50}{40}=1,25$ (item a transferir)
Guarda-joias: $\frac{20}{10}=2$
Se transferirmos o candeeiro para o Manuel, a Maria passa a ter menos pontos logo vamos "fracionar" o item candeeiro.
<u>Equação</u>
Seja x a parte do candeeiro que fica com o vencedor inicial (Maria).

$$50x+20=30+10+10+40(1-x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 50x+40x=30+10+10+40-20$$
$$\Leftrightarrow 90x=70\Leftrightarrow x=\frac{70}{90}$$

Então, $x\approx0,78$.
Assim:

- A Maria fica com o guarda-joias e com aproximadamente 78% do candeeiro.
- O Manuel fica com o quadro, a escrivaninha, a escultura e com aproximadamente 22% do candeeiro.

Confirmação das pontuações:
Maria: $0,78\times50+20=59$ pontos
Manuel: $0,22\times40+30+10+10\approx59$ pontos

5. Bruno: fica temporariamente com o FAFI16 e o FACTMINER.
Filipe: fica temporariamente com o SEP16 e o ATG6.
<u>Pontuação</u>
Bruno: $30+45=75$ pontos (vencedor inicial)
Filipe: $40+30=70$ pontos (perdedor inicial)
<u>Quocientes</u>
FAFI16: $\frac{30}{10}=3$
FACTMINER: $\frac{45}{20}=2,25$ (item a transferir)
Se transferirmos o FACTMINER para o Filipe, o Bruno passa a ter menos pontos logo vamos "fracionar" o item FACTMINER.
<u>Equação</u>
Seja x a parte do jogo FACTMINER que fica com o vencedor inicial (Bruno).

$$45x+30=40+30+20(1-x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 45x+20x=40+30+20-30$$
$$\Leftrightarrow 65x=60\Leftrightarrow x=\frac{60}{65}$$

Então, $x\approx0,923$.
Assim:

- O Bruno fica com o FAFI16 e cerca de 92,3% do FACTMINER (tempo de utilização, por exemplo).
- O Filipe fica com o SEP16, o ATG6 e cerca de 7,7% do FACTMINER (tempo de utilização, por exemplo).

Confirmação das pontuações:
Bruno: $30+0,923\times45\approx71,5$ pontos
Filipe: $40+30+0,077\times20\approx71,5$ pontos

Ficha para praticar 9

1.

	A	B	C	D
Valor total licitado	**160,00**	**147,00**	**143,00**	**157,00**
Valor Justo	40,00	36,75	35,75	39,25
Distribuição dos bens		Automóvel	Terreno	Apartamento
Valor total dos bens atribuídos	0,00	12,00	40,00	70,00
Saldo	40,00 **Recebe**	24,75 **Recebe**	– 4,25 **Paga**	– 30,75 **Paga**
Dinheiro disponível* 20,25	5,06	5,06	5,06	5,06
Total Final	45,06	41,81	40,81	44,31

* Dinheiro disponível:

$$(4,25+30,75)-(40+24,75)+50=20,25$$
$$20,25:4\approx5,06$$

A: recebe 40 000+5 060=45 060 € em dinheiro.
B: recebe 24 750+5 060=29 810 € em dinheiro e fica com o automóvel.
C: paga 4 250 €, recebe 5 060 € em dinheiro e fica com o terreno.
D: paga 30 750 €, recebe 5 060 € em dinheiro e fica com o apartamento.

2. Valor global e a porção justa de cada jovem:

	Manuel	José	Paulo
Participação	**40%**	**30%**	**30%**
Valor global	$140+800+580=1520$	$120+700+700=1520$	$180+600+500=1280$
Porção justa	$0,40\times1520=608$	$0,30\times1520=456$	$0,30\times1280=384$

Da análise dos dados do enunciado pode fazer-se a seguinte atribuição dos bens:
Máquina Fotográfica – Paulo
Televisor – Manuel
Consola de Jogos – José
Podemos de seguida apurar o valor recebido (na forma de bens), a diferença para a porção justa, o excesso e a respetiva distribuição.

	Manuel	José	Paulo
Porção justa	608	456	384
Valor recebido	800	700	180
Diferença	$800-608=192$	$700-456=244$	$180-384=-204$
Excesso: $192+244-204=232$			
Distribuição	$0,4\times232=92,8$	$0,3\times232=69,6$	$0,3\times232=69,6$
Total	$192-92,8=99,2$	$244-69,6=174,4$	$-204-69,9=-273,6$
	Televisor	Consola	Máq. fotográfica

Assim o Manuel recebe o televisor e paga 99,20 €; o José recebe a consola de jogos e paga 174,40 € e o Paulo recebe a máquina fotográfica e 273,60 €.
Nenhum dos jovens terá direito a reclamar porque o valor total recebido por cada um deles é, em todos os casos, superior à sua avaliação total do prémio:
Manuel: recebeu o televisor (avaliado por 800 €) e pagou 99,20 €, recebendo um valor total de 700,80 €, sendo a sua porção justa de 608 €.
José: recebeu a Consola de jogos (avaliada por 700€) e pagou 174,40 €, recebendo um valor total de 525,60 €, sendo a sua porção justa de 456 €.
Paulo: recebeu a máquina fotográfica (avaliada por 180 €) e mais 273,60 €, recebendo um valor total de 453,60 €, sendo a sua porção justa de 384 €.

3.

- Procura-se a primeira marca (que é R_1), logo o Rui fica com as miniaturas 1 e 2.
- São retiradas as marcas do Rui e procura-se a primeira segunda marca (que é M_2), logo o Manuel fica com as miniaturas entre as marcas M_1 e M_2, ou seja, 5, 6 e 7.
- Retiram-se as marcas do Manuel e procura-se a primeira terceira marca (que é J_3), logo o João fica com as miniaturas entre J_2 e J_3, ou seja, as miniaturas 9, 10 e 11.
- Retiram-se as marcas do João e o Ivo fica com as miniaturas a partir da sua terceira marca, ou seja, as miniaturas 13 e 14.

Distribuição final:
Rui – miniaturas 1 e 2
Manuel – miniaturas 5, 6 e 7
João – miniaturas 9, 10 e 11
Ivo – miniaturas 13 e 14
Sobram as miniaturas: 3, 4, 8 e 12.
Faz-se um sorteio e atribui-se cada uma das quatro miniaturas que sobram a cada um dos quatro irmãos.

Ficha de teste 2

1.1. José: B4
Dalila: B5
Susana: B1
Martim: B3
Bruno: B2

1.2. a) Primeira parte: Susana
Segunda parte: Martim
Terceira parte: Bruno

1.2. b) José

1.2. c) Utilizam o método do divisor-selecionador.

1.2. d) (A) Falsa (B) Falsa
(C) Verdadeira (D) Falsa

2.1. Para o Marco, a metade com chocolate vale $\frac{3}{4}$ do valor total do bolo, ou seja, $\frac{3}{4}\times24=18$ euros e a metade com morango $\frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{1}{4}\times24=6$ euros.

Divisão I: $\frac{90º}{180º}\times18+\frac{90º}{180º}\times6=12$ euros cada uma das partes.

Divisão II: 18 euros a parte com chocolate e 6 euros a parte com morango.

Divisão III: $\frac{60º}{180º}\times18+6=12$ euros a parte com morango e chocolate e $\frac{120º}{180º}\times18=12$ euros a parte só com chocolate.

Divisão IV: $\frac{60º}{180º}\times18+\frac{72º}{180º}\times6=8,40$ euros a parte com chocolate (60º) e morango (72º) e $\frac{180º-60º}{180º}\times18+\frac{180º-72º}{180º}\times6=15,60$ euros a restante.

Divisão V: $\frac{96º}{180º}\times18+\frac{72º}{180º}\times6=12$ euros a parte com chocolate (96º) e morango (72º) e $\frac{180º-96º}{180º}\times18+\frac{180º-72º}{180º}\times6=12$ euros a restante.

Conclusão: As divisões possíveis, caso o Marco seja o divisor, são: I, III e V.

2.2. **Divisão I**: é indiferente pois qualquer uma das partes vale, para a Lília, 12 €.

Divisão III: a melhor fatia para a Lília é a que corresponde à fatia de chocolate (60º) mais toda a parte de morango.

Vale $\left(\frac{1}{3}+\frac{60^\circ}{180^\circ}\times\frac{2}{3}\right)\times 24 \approx 13{,}33$ € para ela.

Divisão V: a melhor fatia para a Lília é a que corresponde à fatia de chocolate (180º – 96º=84º) mais a fatia de morango (180º – 72º=108º).

Vale $\left(\frac{2}{3}\times\frac{84^\circ}{180^\circ}+\frac{1}{3}\times\frac{108^\circ}{180^\circ}\right)\times 24 \approx 12{,}27$ € para ela.

3.1. Não, pois ambas as fatias representam mais de um terço de cada metade do queijo.

3.2. a) Clara: T_1 ; Iva: T_2 e André: T_3

3.2. b) Fica com T_1 aquela que lhe atribuir maior valor. Em caso de empate faz-se um sorteio para decidir quem fica com a fatia.

3.3. O André divide o queijo em três partes que considera iguais. Podem ocorrer seis situações distintas.

1. A Iva acha que as fatias são iguais, logo o problema fica resolvido. A Clara escolhe uma fatia e a Iva escolhe uma das outras, ficando o André com a que sobra.

2. A Iva acha que duas fatias, digamos T_1 e T_2, são iguais mas maiores que a terceira (designemos por F). Neste caso, a Clara tem duas hipóteses:

- Se escolher T_1 (ou T_2), a Iva escolhe T_2 (ou T_1) e o André fica com F.
- Se escolher a fatia F, a Iva escolhe T_1 (ou T_2) e o André fica com T_2 (ou T_1).

3. A Iva acha que T_1 e T_2 são maiores que F e T_1 é maior que T_2. Então a Iva corta um bocado (apara) da fatia T_1 para que esta fique igual a T_2. Neste caso, a Clara tem três hipóteses:

- Se escolher T_1, a Iva escolhe T_2 e o André fica com a fatia F.
- Se escolher T_2, a Iva fica com T_1 (obrigatoriamente) e o André fica com F.
- Se escolher F, a Iva fica com T_1 (pois aparou-a) e o André fica com T_2.

3.4. Nos métodos das alíneas 3.1 e 3.2 não há desperdício do bolo, contrariamente ao que acontece no método da alínea 3.3.

O método da alínea 3.3 é livre de inveja pois cada pessoa pensa ter escolhido a fatia justa.

Os métodos das outras alíneas podem não ser livres de inveja. No método do selecionador único, aquele que escolhe pode considerar que as duas partes que escolheu representam mais de um terço do queijo, logo um dos outros (ou ambos) ficam com menos de um terço do queijo.

No método do divisor único, aquele que divide considera uma fatia igual a aproximadamente um terço do queijo, mas se outra pessoa considerar uma das fatias maior que um terço do queijo o que resta será considerado menos que um terço do queijo.

4.1. Qualquer uma.

4.2. $6+4{,}50+6{,}50=17$

$17:3\approx 5{,}67$ euros

Parte 1 e parte 3

4.3. $4{,}50+5{,}50+5=15$

$15:3=5$ euros

Parte 2 e parte 3

4.4. Por exemplo

Amigo X: Parte 1

Amigo Y: Parte 3

Amigo Z: Parte 2

Observação: Também é possível cada um dos amigos ficar com a parte que mais valoriza (Amigo X: Parte 3; Amigo Y: Parte 1; Amigo Z: Parte 2).

5.1.

	Herdeiros		
	Pedro	**Rita**	**Sofia**
Valor da herança	300 000 €	300 000 €	270 000 €
Valor que cada um considera justo receber	100 000 €	100 000 €	90 000 €

5.2. O apartamento é atribuído à Rita e o terreno ao Pedro uma vez que são os herdeiros que mais valorizam cada um dos bens referidos. Após esta distribuição, considera-se que cada herdeiro recebe o valor que atribui ao bem com que ficou, não esquecendo que a Sofia nada recebeu.

Atribuídos os bens, tem de se analisar quais os herdeiros que têm de disponibilizar dinheiro e quais têm de receber dinheiro, pelo facto do valor recebido pelo herdeiro poder não igualar a parte que este considerava justa.

Resumindo a informação numa tabela:

	Herdeiros		
	Pedro	**Rita**	**Sofia**
Bem atribuído	Terreno	Apartamento	
Dinheiro a disponibilizar ou a receber	0 (100 000 – 100 000)	a disponibilizar 110 000 € (210 000 – 100 000)	a receber 90 000 € (0 – 90 000)

Dos 110 000 € disponibilizados pela Rita, 90 000 € são para a Sofia, sobrando 20 000 € que irão ser distribuídos equitativamente pelos três herdeiros, ou seja, cada um irá receber 6666,67 € $\left(\frac{20\,000}{3}\approx 6666{,}67\right)$

Desta forma, no final desta distribuição, sintetize-se o que cada herdeiro recebeu:

Pedro: o terreno e recebeu 6666,67 € em dinheiro;

Rita: o apartamento e teve de dar 103 333,33 € em dinheiro;

Sofia: recebe 96 666,67 € em dinheiro.

Nenhum dos herdeiros pode reclamar porque todos receberam mais do que a parte que consideravam justa. Vejamos:

	Herdeiros		
	Pedro	**Rita**	**Sofia**
Valor que cada um considera justo receber	100 000 €	100 000 €	90 000 €
Valor dos bens recebidos	106 666,67 € (terreno + 6666,67 €)	106 666,67 € (apartamento – 110 000 € + 6666,67 €)	96 666,67 € (90 000 € + 6666,67 €)

6. Diogo: Limpeza da sala e limpeza da cozinha
$40+20=60$ pontos
Martinho: Televisão, Internet e Visitas
$20+20+20=60$ pontos
Como as pontuações são iguais, o processo fica terminado.
O Diogo vê as suas exigências satisfeitas quanto à limpeza da sala e limpeza da cozinha.
O Martinho vê as suas exigências satisfeitas quanto à televisão, internet e visitas.

7. Amigo A: boneco 1
Amigo B: boneco 10
Amigo C: boneco 7
Amigo D: boneco 3, 4 e 5
Sobram os bonecos 2, 6, 8 e 9 que podem ser atribuídos a cada um dos amigos através de um sorteio.

Ficha para praticar 10

1.1. Qualitativa
1.2. Quantitativa contínua
1.3. Qualitativa
1.4. Qualitativa
1.5. Qualitativa
1.6. Quantitativa discreta
1.7. Quantitativa contínua
1.8. Qualitativa
1.9. Quantitativa contínua

2.1. a) Alunos do 10.º B (22 alunos)
b) Idades dos alunos (n.º inteiro de anos)
c) Quantitativa discreta
d) N.º de alunos com 16 anos ou mais:
4 + 2 = 6
$\frac{6\times100}{22}=27,(27)$
A percentagem de alunos com idades não inferiores a 16 anos é 27,27% .

2.2. a) Empresas portuguesas de comércio e serviços
b) 43% das empresas portuguesas de comércio e serviços
c) Previsão de vendas
d) Qualitativa

3.1. a) Alunos do 9.º ano do agrupamento de escolas da Zona Centro
b) Os 120 alunos do 9.º ano do agrupamento de escolas da Zona Centro que foram inquiridos
c) Nível de preparação para a prova final
d) Qualitativa

3.2. 120 alunos
Preparados: 30 + 15 + 12 = 57%
$\frac{57\times120}{100}=68,4$
68 alunos

4.1. a) 22% → sapatos
30% → botas
k% → ténis
Como $22+30+k=100 \Rightarrow k=48$
48% dos alunos usavam ténis.
b) sapatos ou botas: 22 + 30 = 52
52% dos alunos usaram sapatos ou botas
$\frac{52\times50}{100}=26$
26 alunos usavam sapatos ou botas.

4.2. a) Os 1500 alunos da escola
b) Os 50 alunos da escola que foram inquiridos.
c) Tipo de calçado utilizado pelos alunos no dia 21 janeiro.
d) Qualitativa

Ficha de teste 3

1. O gráfico 2. No gráfico 1, o eixo vertical (n.º de peças defeituosas) tem origem no 5 e não em 0.

2.1. Estiveram estacionado menos de 1 hora 10 automóveis.
2.2. N.º de automóveis estacionados de 2 a 5 horas:
50 + 30 + 10 = 90
90 automóveis estiveram estacionados duas ou mais horas.
2.3. Não; o número de horas de estacionamento no parque tem de ser superior ao do horário de trabalho (8h), isto é, não pode ser considerado como tempo máximo de estacionamento as 5 h que constam do gráfico apresentado.

3.1. a) 100 – (22 + 48) = 30
30% dos alunos da turma A obtiveram nível 2.
b) 100 – (30 + 25 + 15 + 10) = 20
20% dos alunos da turma B obtiveram nível 2.
3.2. Nível superior ou igual a 3 na turma A: 48 + 22 = 70
70%
Nível superior ou igual a 3 na turma B: 30 + 25 + 15 = 70
70%
O João pode não ter razão, apesar da percentagem de alunos, que obteve nível superior ou igual a três, ser igual nas duas turmas: 70% ; no entanto, não sabemos se as duas turmas têm o mesmo número de alunos. Apenas neste último caso o João teria razão.
4.1. O Nuno apresenta um número de vendas mais regular, isto é, o número de vendas semanais do Nuno, encontram-se mais próximos pelo que será mais fácil estimar o número de vendas do Nuno.

4.2. Nuno: 100 + 145 + 100 + 90 + 130 + 110 + 170 + 190 + + 150 + 170 = 1355

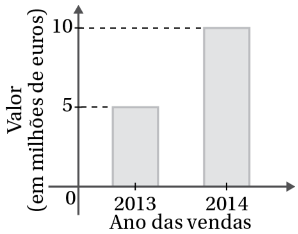
Joaquim: 50 + 60 + 100 + 200 + 80 + 40 + 190 + 215 + + 170 + 100 = 1205

O Nuno vendeu mais artigos nas últimas 10 semanas.

Ficha para praticar 11

1.1. O gráfico está mal construído, porque todas as dimensões do segundo desenho foram alteradas relativamente ao primeiro. Deveria apenas ter sido alterada a altura para o dobro.

1.2.



2.1. a) Nenhum aluno obteve classificação inferior a 4 , pois a nota mínima registada é 8 ou superior.

b) Com nota superior a 16, há 3 alunos.

Como a turma C tem 17 alunos: $\frac{3}{17} \approx 0{,}1765$

A percentagem de alunos com nota igual ou superior a 16 é 17,65% .

c) Os restantes alunos, logo 100% – 17,65% = 82,35%

2.2. a) Mínimo: 70

Máximo: 94

$\frac{24}{5} = 4{,}8$

$[4{,}8] + 1 = 5$

Amplitude das idades: 94 – 70 = 24

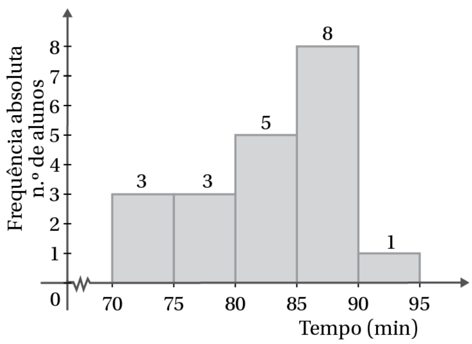
[70 , 75[; [75 , 80[; [80 , 85[; [85 , 90[; [90 , 95[

b)

Tempo (minutos)	Freq. absoluta	Freq. absoluta acumulada	Freq. relativa simples	Freq. relativa acumulada
[70 , 75[	3	3	0,15	0,15
[75 , 80[	3	6	0,15	0,30
[80 , 85[	5	11	0,25	0,55
[85 , 90[	8	19	0,4	0,95
[90 , 95[	1	20	0,05	1

c)

Tempo para resolução do teste



d) São 9 alunos em 20: $\frac{9 \times 100}{20} = 45$

45%

Ou, somando as duas linhas de frequência relativa simples, referentes às classes [85 , 90[e [90 , 95 [:

0,4 + 0,05 = 0,45 = 45%

3. $n = 80$

3.1.

Tempo (h)	Freq. absoluta	Freq. absoluta acumulada	Freq. relativa simples	Freq. relativa acumulada
[0 , 4[	8	8	0,1	0,1
[4 , 8[	15	23	0,1875	0,2875
[8 , 12[	24	47	0,3	0,5875
[12 , 16[	20	67	0,25	0,8375
[16 , 20[	13	80	0,1625	1

3.2. Consultar a coluna de frequência relativa acumulada 0,5875. Logo, 58,75%.

4.1. Para facilitar a leitura das frequências.

4.2. 11 alunos

4.3. Mais que um irmão, é ter dois irmãos ou mais: 11 alunos em 25 alunos do 10.ºC.

$\frac{11 \times 100}{25} = 44$

44% dos alunos têm mais do que um irmão.

A afirmação do Nuno está correta: mais de 40% dos alunos (44%) têm mais do que um irmão.

5.

1	7 9
2	3 4 6 7 8 8 9 9
3	1 1 2 3 6 7 8 8
4	1 4

Ficha de teste 4

1.1. Atendendo a que se trata de uma variável qualitativa, as barras deveriam estar afastadas. Foi construído um histograma em vez de um diagrama de barras.

1.2. As barras deveriam ter a mesma largura, pois a barra mais larga pode chamar mais a atenção, induzindo em erro.

2. Mínimo: 40,5

Máximo: 71,7

Amplitude dos dados: 31,2

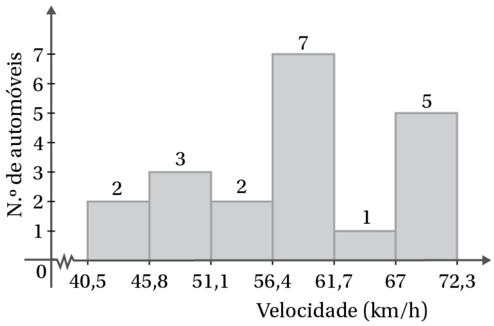
31,2 : 6 = 5,2

2.1. Vamos considerar a amplitude cada classe 5,3.

Velocidade (km/h)	Freq. absoluta	Freq. absoluta acumulada	Freq. relativa simples	Freq. relativa acumulada
[40,5 ; 45,8[	2	2	0,1	0,1
[45,8 ; 51,1[	3	5	0,15	0,25
[51,1 ; 56,4[	2	7	0,1	0,35
[56,4 ; 61,7[	7	14	0,35	0,70
[61,7 ; 67,0[	1	15	0,05	0,75
[67 ; 72,3[	5	20	0,25	1

2.2.

Velocidade dos automóveis num concurso



3.

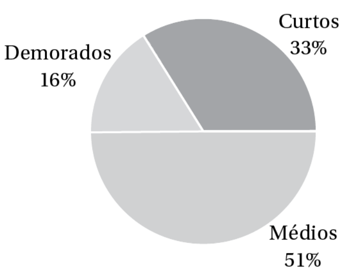
15	8
16	2 2 5 8
17	2 4 5 7
18	1 3 4 5 5
19	0

4. 0,16 × 360 = 57,6 graus

0,51 × 360 = 183,6 graus

0,33 × 360 = 118,8 graus

Gestão de águas

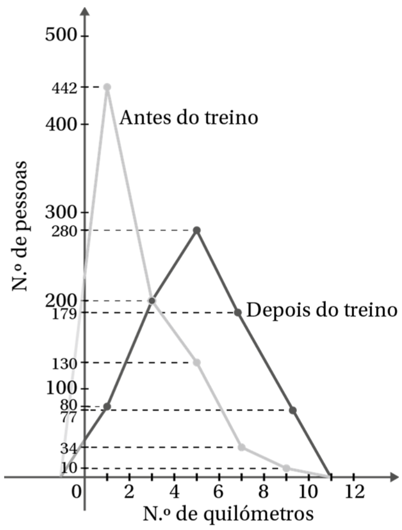


5.1.

Anos de casamento	Freq. simples acumulada	Freq. simples	Freq. relativa simples	Freq. relativa acumulada
6	2300	2300	0,575	0,575
12	3300	1000	0,25	0,825
18	3850	550	0,1375	0,9625
24	4000	150	0,0375	1

5.2. Até 12 anos.

6.



Verifica-se que, antes do treino, a maior parte das pessoas parava quando percorria, no máximo, 2 km e após o treino esta distância passou para no máximo 6 km.

Tudo indica que o treino aumentou a resistência física durante a corrida.

Ficha para praticar 12

1.1.

2	0
3	1 3
4	5 6 7 8 9
5	2 4 6 8 8
6	1 2 5

3|1 representa 31 SMS enviadas

1.2. a) $Me = P_{50} = ?$

$\frac{50\times16}{100} = 8$ (inteiro)

$Me = P_{50} = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{49+52}{2} = 50,5$

A mediana é 50,5 SMS enviadas.

b) $1.°Q = P_{25} = ?$

$\frac{25\times16}{100} = 4$ (inteiro)

$1.°Q = P_{25} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{45+46}{2} = 45,5$

O 1.º quartil é 45,5 SMS enviadas.

c) $3.°Q = P_{75} = ?$

$\frac{75\times16}{100} = 12$ (inteiro)

$3.°Q = P_{75} = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{58+58}{2} = 58$

O 3.º quartil é 58 SMS enviadas.

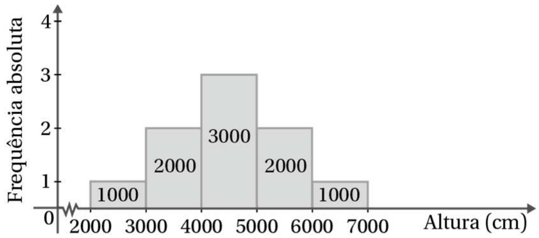
1.3. $P_{30} = ?$

$\frac{30\times16}{100} = 4,8$ (não inteiro)

$P_{30} = x_{(5)} = 46$; $P_{30} = 46$

30% dos alunos enviaram, no máximo, 46 SMS na semana passada.

2. $A_t = 9 \times 1000 = 9000$



2.1. a) $Me = P_{50} = ?$

$\frac{50\times9000}{100} = 4500$; $P_{50} \in [4000,\ 5000[$

$(P_{50} - 4000)\times 3 = 4500 - (2000+1000) \Leftrightarrow P_{50} = 4500$

(Atendendo à simetria do histograma, poderá ser determinada a mediana, determinando o ponto médio entre os extremos, o "meio" do histograma $\left.\frac{2000+7000}{2} = \frac{9000}{2} = 4500\right)$.

b) $1.^{\circ}Q = P_{25} = ?$

$$\frac{25 \times 9000}{100} = 2250 \; ; \quad P_{25} \in [3000,\ 4000[$$

$$(P_{25} - 3000) \times 2 = 2250 - (1000) \Leftrightarrow P_{25} = 3625$$

c) $3.^{\circ}Q = P_{75} = ?$

$$\frac{75 \times 9000}{100} = 6750 \; ; \quad P_{75} \in [5000,\ 6000[$$

$$(P_{75} - 5000) \times 2 = 6750 - (1000 + 2000 + 3000)$$

$$P_{75} = 5375$$

2.2. $P_{30} = ?$

$$\frac{30 \times 9000}{100} = 2700 \; ; \quad P_{30} \in [3000,\ 4000[$$

$$(P_{30} - 3000) \times 2 = 2700 - 1000 \Leftrightarrow P_{30} = 3850$$

$P_{70} = ?$

$$\frac{70 \times 9000}{100} = 6300 \; ; \quad P_{70} \in [5000,\ 6000[$$

$$(P_{70} - 5000) \times 2 = 6300 - (1000 + 2000 + 3000) \Leftrightarrow P_{70} = 5150$$

2.3.

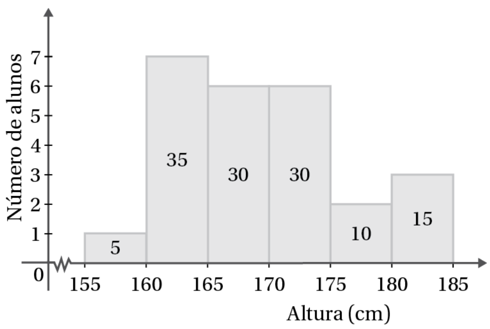
$P_{80} = ?$

$$\frac{80 \times 9000}{100} = 7200 \; ; \quad P_{80} \in [5000,\ 6000[$$

$$(P_{80} - 5000) \times 2 = 7200 - (1000 + 2000 + 3000) \Leftrightarrow P_{80} = 5600$$

O rendimento menos elevado do conjunto de rendimentos que são 20% mais elevados é 5600 euros.

3.1.



$A_t = 25 \times 5 = 125$

3.2. $P_{70} = ?$

$$\frac{70 \times 125}{100} = 87{,}5$$

$P_{70} \in [170,\ 175[$

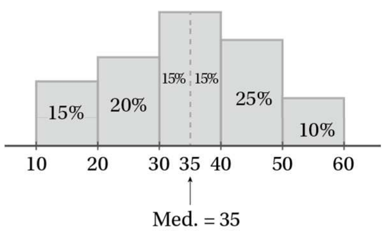
$$(P_{70} - 170) \times 6 = 87{,}5 - (5 + 35 + 30)$$

$P_{70} \approx 172{,}92$ (2 c. d.)

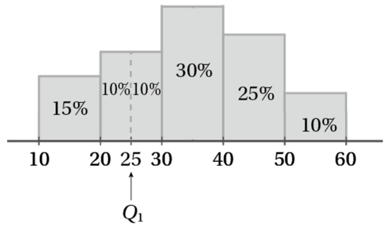
Pelo menos 70% dos alunos do 10 ºC, medem 172,92 cm ou menos.

4.1. $Me = ?$

10 + 20 + 15 = 50

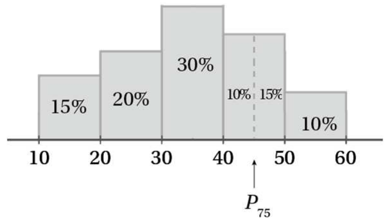


4.2. $1.^{\circ}Q = P_{25}$



$P_{25} = 25$

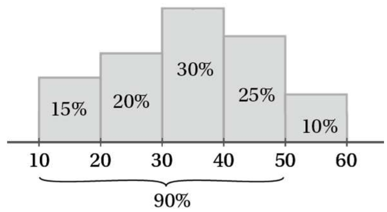
4.3. $3.^{\circ}Q = P_{75}$



25%	——	10	(50 – 40)
10%	——	P_{75}	

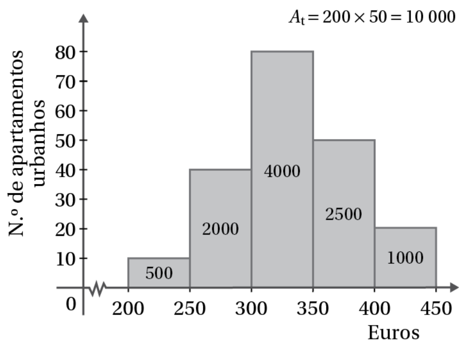
$P_{75} = 44$

4.4.

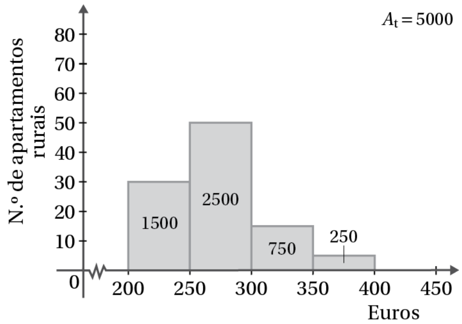


$P_{90} = 50$

5.1. a)



b)



5.2. a) $P_{50} = ?$

Zona rural: $\dfrac{50 \times 5000}{100} = 2500$; $P_{50} \in [250,\ 300[$

$(P_{50} - 250) \times 50 = 2500 - 1500 \Leftrightarrow P_{50} = 270$

Zona urbana: $\dfrac{50 \times 10000}{100} = 5000$; $P_{50} \in [300,\ 350[$

$(P_{50} - 300) \times 80 = 5000 - (500 + 2000) \Leftrightarrow P_{50} = 331{,}25$

b) $P_{75} = ?$

Zona rural: $\dfrac{75 \times 5000}{100} = 3750$; $P_{75} \in [250,\ 300[$

$(P_{75} - 250) \times 50 = 3750 - 1500 \Leftrightarrow P_{75} = 295$

Zona urbana: $\dfrac{75 \times 10\ 000}{100} = 7500$; $P_{75} \in [350,\ 400[$

$(P_{75} - 350) \times 50 = 7500 - (500 + 2000 + 4000) \Leftrightarrow P_{75} = 370$

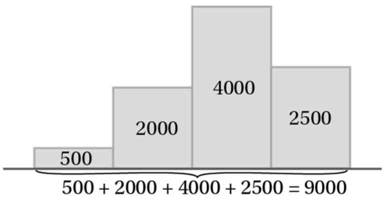
c) $P_{90} = ?$

Zona rural: $\dfrac{90 \times 5000}{100} = 4500$; $P_{90} \in [300,\ 350[$

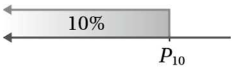
$(P_{90} - 350) \times 15 = 4500 - (1500 + 2500) \Leftrightarrow P_{90} \approx 383{,}3$

Zona urbana: $\dfrac{90 \times 10\ 000}{100} = 9000$

$P_{90} = 400$



d)



Zona rural: $\dfrac{10 \times 5000}{100} = 500$; $P_{10} \in [200,\ 250[$

$(P_{10} - 200) \times 30 = 500 \Leftrightarrow P_{10} \approx 216{,}67$

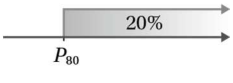
Dos valores das rendas rurais 10% menores o maior será aproximadamente 216,67 € .

Zona urbana: $\dfrac{10 \times 10\ 000}{100} = 1000$; $P_{10} \in [250,\ 300[$

$(P_{10} - 250) \times 40 = 1000 - 500 \Leftrightarrow P_{10} = 262{,}5$

Dos valores das rendas urbanas 10% menores o maior será 262,5 € .

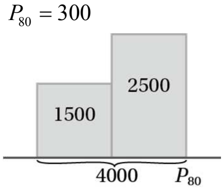
e)



$P_{80} = ?$

Zona rural: $\dfrac{80 \times 5000}{100} = 4000$

$P_{80} = 300$



Dos valores das rendas rurais 20% mais altas, a menor é 300 € .

Zona urbana: $\dfrac{80 \times 10000}{100} = 8000$; $P_{80} \in [350,\ 400[$

$(P_{80} - 350) \times 50 = 8000 - (500 + 2000 + 4000) \Leftrightarrow P_{80} = 380$

Dos valores das rendas urbanas 20% mais altas, a menor é 380 € .

Ficha para praticar 13

1.1. A mediana é 64.

1.2. Valor mínimo: 10

Valor máximo: 90

Amplitude: 90 – 10 = 80

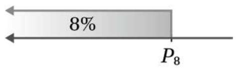
1.3. Amplitude interquartis:

$Q_3 - Q_1 = 80 - 26 = 54$

$AIQ = 54$

2. $n = 20$

2.1.



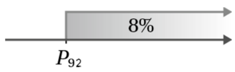
$P_8 = ?$

$\dfrac{8 \times 20}{100} = 1{,}6$ (não inteiro)

$P_8 = x_{(2)} = 9{,}2$

A maior classificação dos 8% piores é 9,2 .

2.2.



$P_{92} = ?$

$\dfrac{92 \times 20}{100} = 18{,}4$ (não inteiro)

$P_{92} = x_{(19)} = 18{,}8$

A menor classificação dos 8% melhores é 18,8 .

2.3. $Q_1 = P_{25} = ?$

$\dfrac{25 \times 20}{100} = 5$ (inteiro)

$P_{25} = \dfrac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \dfrac{11 + 11{,}2}{2} = 11{,}1$

$Me = P_{50} = ?$

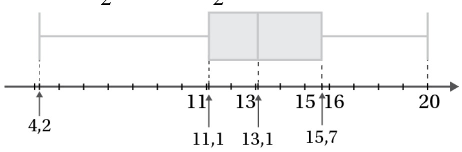
$\dfrac{50 \times 20}{100} = 10$ (inteiro)

$P_{50} = \dfrac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \dfrac{13 + 13{,}2}{2} = 13{,}1$

$Q_3 = P_{75} = ?$

$\dfrac{75 \times 20}{100} = 15$ (inteiro)

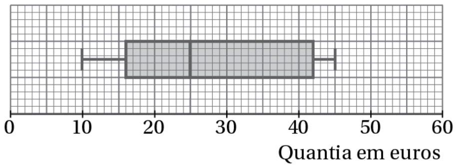
$P_{75} = \dfrac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = \dfrac{14{,}4 + 17}{2} = 15{,}7$



3. O Rui obteve 16 a MACS, o que corresponde a P_{95}, isto é, pelo menos 95% das classificações da turma são iguais ou inferiores a 16 ou, de outro modo, apenas 5% são superiores à sua.

A Educação Física obteve 16, o que corresponde a P_5 , isto é, pelo menos 5% das classificações da turma são inferiores ou iguais a 16 ou, de outro modo, 95% são superiores a 16.
Assim, teve melhor desempenho a MACS.

4.1.



4.2.

Menor quantia recebida	5
Maior quantia recebida	48
Mediana	32
1.º quartil	18
3.º quartil	40

	Raparigas	**Rapazes**
Menor quantia	10	5
Maior quantia	45	48
Mediana	25	32
1.º quartil	16	18
3.º quartil	42	40

Os rapazes receberam a menor quantia (5 €) mas também a maior (48 €).
Pelo menos 50% das ofertas obtidas pelas raparigas são iguais ou inferiores a 25 € e, no caso dos rapazes, 32 € .
Pelo menos 25% das ofertas obtidas pelas raparigas são iguais ou inferiores a 16 € e, no caso dos rapazes, 18 € .
Pelo menos 75% das ofertas obtidas pelas raparigas são iguais ou inferiores a 42 € e, no caso dos rapazes, 40 € .

Ficha de teste 5

1.1.
- opinião sobre a construção de uma autoestrada dos residentes urbanos.
- opinião sobre a construção de uma autoestrada dos residentes suburbanos.
- opinião sobre a construção de uma autoestrada dos residentes rurais.

Variáveis qualitativas: Opinião e Local de residência.

1.2. Habitantes de uma região

1.3. 200

1.4. **Urbana**
A favor: $\approx 33,33\%$ Contra: $\approx 66,67\%$

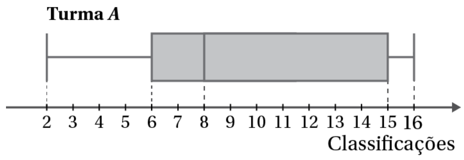
Suburbana
A favor: $\approx 58,33\%$ Contra: $\approx 41,67\%$

Rural
A favor : 70% Contra: 30%

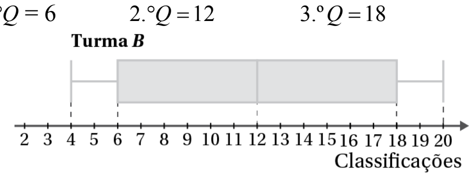
Há relação, pois quanto mais se afasta do centro urbano, mais favorável é a opinião da construção da autoestrada.

A favor: $\underbrace{33,33\%}_{\text{Urbana}} \rightarrow \underbrace{58,33\%}_{\text{Suburbana}} \rightarrow \underbrace{70\%}_{\text{Rural}}$

2.1. **Turma A**
Classificação mínima: 2
Classificação máxima: 16
$1.^{\circ}Q: 6$ $2.^{\circ}Q = Me: 8$
Amplitude Interquartis: 9 logo
$Q_3 - Q_1 = 9 \Rightarrow Q_3 = 9 + 6 \Rightarrow Q_3 = 15$



Turma B
Classificação mínima: 4
Classificação máxima: 16 + 4 = 20
$1.^{\circ}Q = 6$ $2.^{\circ}Q = 12$ $3.^{\circ}Q = 18$



2.2. A turma A tem globalmente classificações inferiores. A nota mínima e máxima são inferiores na turma A. Para além disso, pelo menos 50% das classificações da turma A são iguais ou inferiores a 8, isto é, metade dos alunos têm, no máximo, 8 valores. Tal não se verifica na turma B, onde pelo menos metade dos alunos tem classificações iguais ou inferiores a 12.

3.

Rio B		**Rio A**
7 6 5 5	1	0 2 3 5 6 7 7 8 8 9
7 3 2 2 1 0	2	0 1 2
2 1	3	3 4

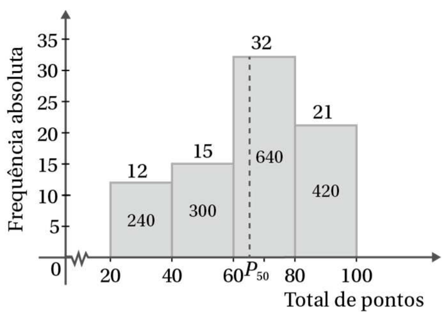
Mais de 50% dos peixes do rio A têm comprimentos superiores a 18 cm . Mais de 50% dos peixe do rio B têm comprimento superior a 21,5 cm , pelo que os dados indicam que no, no rio B, os peixes serão maiores.

4.1. $0,15 + \frac{15}{n} + \frac{32}{n} + \frac{21}{n} = 1$ (n representa o n.º total de pessoas)

$\Leftrightarrow 0,15n + 15 + 32 + 21 = n \Leftrightarrow 0,85n = 68 \Leftrightarrow n = \frac{68}{0,85} = 80$

Total de pontos	Frequência absoluta	Frequência relativa
[20 , 40[	12	15%
[40 , 60[	15	18,75%
[60 , 80[	32	40%
[80 , 100[	21	26,25%
Total	80	100%

4.2.



No eixo horizontal assinalou-se a mediana (P_{50}) .

4.3. $A_t = 80 \times 20 = 1600$

$P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 1600}{100} = 800$

$P_{50} \in [60,\ 80[$

$(P_{50} - 60) \times 32 = 800 - (300 + 240) \Leftrightarrow P_{50} = 68{,}125$

$P_{25} = ?$

$\frac{25 \times 1600}{100} = 400$

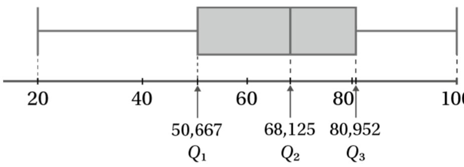
$(P_{25} - 40) \times 15 + 240 = 400 \Leftrightarrow P_{25} = 50{,}667$

$P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 1600}{100} = 1200$

$(P_{75} - 80) \times 21 + 300 + 240 + 640 = 1200 \Leftrightarrow P_{75} = 80{,}952$

O valor é a mediana (marcado no histograma).



4.4. $P_{70} = ?$

$\frac{70 \times 1600}{100} = 1120$

$P_{70} \in [60,\ 80[$

$(P_{70} - 60) \times 32 + 300 + 240 = 1120 \Leftrightarrow P_{70} = 78{,}125$

Pelo menos 70% dos candidatos obtiveram 78,125 pontos, ou menos, no teste de aptidão.

5. $P_{30} = 14$ e $P_{50} = 14$, logo como $P_{30} \le P_{40} \le P_{50}$ e $14 \le P_{40} \le 14$ pelo que, $P_{40} = 14$.

Ficha para praticar 14

1.1. N.º de funcionários – Quantitativa discreta

Escala de eficiência – Qualitativa

1.2. $\frac{9+15+12+12+13+20+22+17}{8} = 15$

Média do n.º de funcionários: 15

1.3. **a)** Moda do n.º de funcionários: 12

b) Moda da escala de eficiência: 5

2.1. 32 anos

2.2. **a)** Média: 35 anos

b) Mediana:

$P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 19}{100} = 9{,}5$ (não inteiro)

$P_{50} = x_{(10)} = 32$

$Me = 32$ anos.

c) $P_{25} = ?$

$\frac{25 \times 19}{100} = 4{,}75$ (não inteiro)

$P_{25} = x_{(5)} = 28$

$Q_1 = 28$ anos.

d) $P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 19}{100} = 14{,}25$

$P_{75} = x_{(15)} = 41$

$Q_3 = 41$ anos.

2.3. Inicialmente eram 19 compradores, pelo que acrescentando 1, ficam 20.

Seja k a idade do comprador em falta:

$\frac{665 + k}{20} = 36 \Leftrightarrow k = 55$

A idade do comprador não registado é 55 anos.

3. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, ..., x_n)$ os vencimentos dos funcionários.

Sabe-se que $\bar{x} = 1350$.

Se todos forem aumentados 5%:

$x_1 + 0{,}05x_1 = 1{,}05x_1$

$x_2 + 0{,}05x_2 = 1{,}05x_2$

$\ldots$

$x_n + 0{,}05x_n = 1{,}05x_n$

Pelo que: $\underset{\sim}{y} = 1{,}05\underset{\sim}{x}$.

Logo, $\bar{y} = 1{,}05\bar{x}$.

$\bar{y} = 1417{,}5$

A média dos novos vencimentos é 1417,5 euros.

4. $n = 45$

4.1. **a)** [50 , 61[

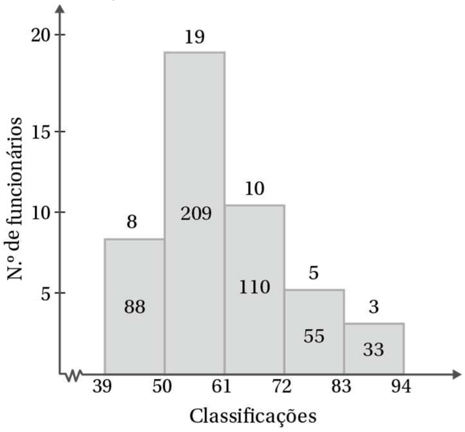
b) [50 , 61[

4.2. $\bar{x} = \frac{44{,}5 \times 8 + 55{,}5 \times 19 + 66{,}5 \times 10 + 77{,}5 \times 5 + 88{,}5 \times 3}{45} =$

$= \frac{2728{,}5}{45} \approx 60{,}6$

$\bar{x} \approx 60{,}6$

4.3. $A_t = 45 \times 11 = 495$



$Q_1 = P_{25} = ?$

$\frac{25 \times 495}{100} = 123{,}75$ $P_{25} \in [50,\ 61[$

$(P_{25} - 50) \times 19 = 123{,}75 - 88$; $P_{25} \approx 51{,}88$

$Me = P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 495}{100} = 247{,}5$ $P_{50} \in [50,\ 61[$

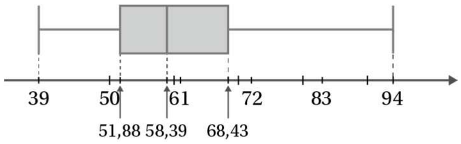
$(P_{50} - 50) \times 19 = 247{,}5 - 88$; $P_{50} \approx 58{,}39$

$P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 495}{100} = 371,25$ $\quad P_{75} \in [61,\ 72[$

$(P_{75} - 61) \times 10 = 371,25 - 297 \Leftrightarrow P_{75} \approx 68,43$

$Q_3 = 68,43$



5.1. a) [30 , 40[

b) [20 , 30[

5.2. $\bar{x} = \frac{5 \times 10 + 15 \times 20 + 25 \times 30 + 35 \times 40}{100} = 25$

$\bar{x} = 25$

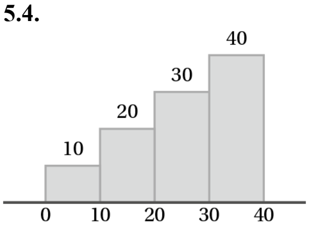
5.3. $P_{50} = Me = ?$

$\frac{50 \times 1000}{100} = 500$; $P_{50} \in [20, 30[$

$(P_{50} - 20) \times 30 = 500 - 300 \Leftrightarrow P_{50} \approx 26,7$

$Me \approx 26,7$ (1 c.d.)

5.4.



$A_1 = 100$

$A_2 = 200$

$A_3 = 300$

$A_4 = 400$

$A_t = 1000$

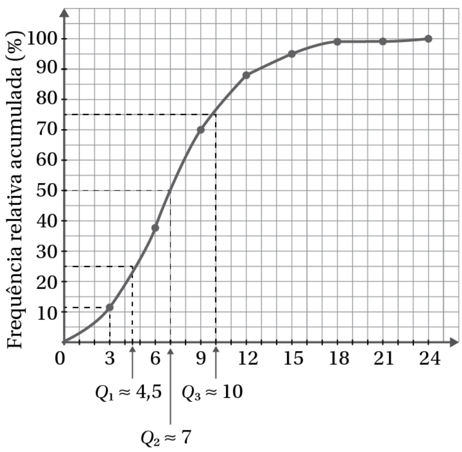
$A_t = 100 \times 10 = 1000$

Assimétrica negativa.

6.1.

Número de rebites	Frequência	Freq. relativa simples	Freq. relativa acumulada
[0 , 3[	4	0,12	0,12
[3 , 6[	9	0,26	0,38
[6 , 9[	11	0,32	0,7
[9 , 12[	6	0,18	0,88
[12 , 15[	2	0,06	0,94
[15 , 18[	1	0,03	0,97
[18 , 21[	0	0	0,97
[21 , 24[	1	0,03	1
Total	34	1	

6.2.



Ficha de teste 6

1. **(A)** G_2 **(B)** G_1 **(C)** G_3

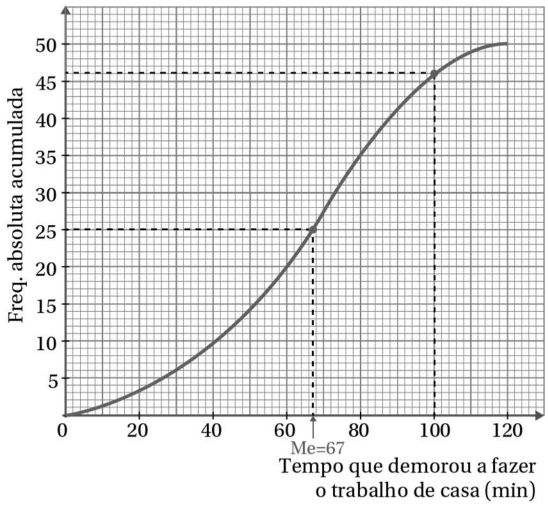
2. $n = 50$

2.1. $\bar{x} = \frac{15 \times 6 + 45 \times 14 + 75 \times 21 + 105 \times 9}{50} = 64,8$ minutos

2.2. a) Aproximadamente 67 minutos.

b) $50 - 46 = 4$

Quatro alunos



3.1. a) [40 , 50[

b) $n = 56$

Classe mediana [40 , 50[

3.2. $\bar{x} = \frac{5 \times 1 + 15 \times 3 + 25 \times 4 + 35 \times 12 + 45 \times 15 + 55 \times 10 +}{56}$

$\frac{65 \times 6 + 75 \times 3 + 85 \times 1 + 95 \times 1}{56} = 46,3$ (1 c. d.)

3.3. $A_t = 56 \times 10 = 560$

$A_1 = 10$ $\quad A_6 = 100$

$A_2 = 30$ $\quad A_7 = 60$

$A_3 = 40$ $\quad A_8 = 30$

$A_4 = 120$ $\quad A_9 = 10$

$A_5 = 150$ $\quad A_{10} = 10$

$P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 560}{100} = 280$

$P_{50} \in [40, 50[$

$(P_{50} - 40) \times 15 = 280 - (10 + 30 + 40 + 120) \Leftrightarrow P_{50} \approx 45,3$ (1 c.d.)

Pelo menos 50% das classificações nos exames foram inferiores ou iguais a 45,3% .

4. Notas no 1.° período: 12 14 10 15 8 13

Notas no 2.° período: 14 16 12 17 10 15

Se $\bar{x}$ é a média do 1.° período e $\bar{y}$ a média do 2.° período, então $\bar{y} = \bar{x} + 2$.

A média do 2.° período será acrescida de 2 valores.

5. $n = 45$

Valor mínimo: 6

Valor máximo: 95

5.1.

Classificações	Frequência absoluta	Freq. absoluta acumulada
[6 , 15[	4	4
[15 , 24[	6	10
[24 , 33[	3	13
[33 , 42[	4	17
[42 , 51[	5	22
[51 , 60[	5	27
[60 , 69[	8	35
[69 , 78[	4	39
[78 , 87[	3	42
[87 , 96[	3	45
	$\sum = 45$	

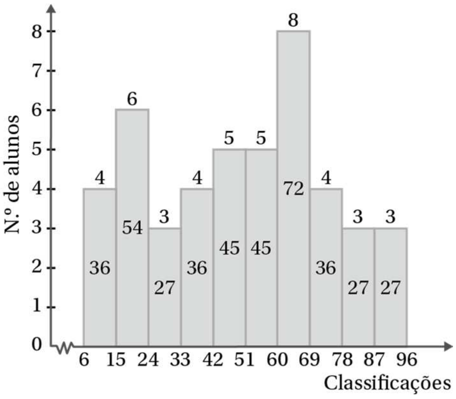
5.2. Classe modal: [60 , 69[; classe mediana: [51 , 60[

5.3. $\frac{(10,5\times4+19,5\times6+28,5\times3+37,5\times4+46,5\times5+55,5\times5+}{45}$

$\frac{+64,5\times8+73,5\times4+82,5\times3+91,5\times3)}{45}=49,7\approx50$

$\bar{x}\approx50$

5.4.



$A_t=45\times9=405$

$P_{25}=?$

$\frac{25\times405}{100}=101,25 \qquad P_{25}\in[24,\ 33[$

$(P_{25}-24)\times3=101,25-(36+54)\Leftrightarrow P_{25}=27,75$

$P_{50}=?$

$\frac{50\times405}{100}=202,5 \qquad P_{50}\in[51,\ 60[$

$(P_{50}-51)\times5=202,5-(36+54+27+36+45)\Leftrightarrow P_{50}=51,9$

$P_{75}=?$

$\frac{75\times405}{100}=303,75 \qquad P_{75}\in[60,\ 69[$

$(P_{75}-60)\times8=303,75-(36+54+27+36+45+45)$

$\Leftrightarrow P_{75}\approx67,59$

$P_{25}=27,75\ \%$; $P_{50}=51,9\ \%$; $P_{75}\approx67,59\ \%$

5.5.

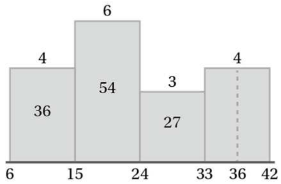
$P_{70}=?$

$\frac{70\times405}{100}=283,5 \qquad P_{70}\in[60,\ 69[$

$(P_{70}-60)\times8=283,5-243\Leftrightarrow P_{70}\approx65,06$

A menor classificação das 30% mais altas é 67% .

5.6. $36\in[33,\ 42[$



$A=36+54+27+12=129$

$\frac{k\,n\,h}{100}=129$

$\Leftrightarrow k\times405=12\ 900$

$\Leftrightarrow k\approx31,85$

$P_k=P_{32}$

$36\in P_{32}$

Percentil 32.

6. $\bar{x}$ salário médio anual de uma empresa

$\bar{x}=750$ euros

$\bar{y}$ = salário médio das mulheres

$\bar{z}$ = salário médio dos homens

$\bar{y}=600$ e $\bar{z}=800$

$n_y\rightarrow$ n.º de mulheres

$n_z\rightarrow$ n.º de homens

$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n_y}y_i}{n_y}$ e $\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n_z}z_i}{n_z}$

$\frac{\sum_{i=1}^{n_y}y_i}{n_y}=600\Rightarrow\sum_{i=1}^{n_y}y_i=600n_y$ e $\frac{\sum_{i=1}^{n_z}z_i}{n_z}=800\Rightarrow\sum_{i=1}^{n_z}z_i=800n_z$

$n=n_y+n_z$

$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n_y}y_i+\sum_{i=1}^{n_z}z_i}{n}=750\Leftrightarrow\frac{600n_y+800n_z}{n_y+n_z}=750$

$\Leftrightarrow600n_y+800n_z=750n_y+750n_z\Leftrightarrow50n_z=150n_y$

$\Leftrightarrow n_z=3n_y$

Logo, o número de homens é triplo do número de mulheres:

Percentagem de homens: 75%

Percentagem de mulheres: 25%

Ficha para praticar 15

1. 4, 8, 9, 22 e 36

$\bar{x}=\frac{79}{5}=15,8$

$SS_x=\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=692,8$

$s_x^2=\frac{692,8}{4}=173,2\leftarrow$ variância

$s_x=\sqrt{173,2}\approx13,2$ (1 c. d.)

$s_x^2=173,2 \qquad s_x\approx13,2$

2.1. $\bar{x}=\frac{163}{10}=16,3$

$n=10$

$SS_x=\sum_{j=1}^{6}(x_j-\bar{x})^2\times n_j=20,1$

$s_x^2=\frac{20,1}{9}\approx2,23$ (2 c. d.)

$s_x\approx1,49$ (2 c. d.)

$s_x^2\approx2,23 \qquad s_x\approx1,49$

2.2. $\overline{x} = \frac{38}{104} \approx 0{,}37$ (2 c. d.)

$n = 104$

$SS_x = \sum_{j=1}^{6} \left(x_j - \overline{x}\right)^2 \times n_j \approx 154{,}12$ (2 c. d.)

$s_x^2 = \frac{154{,}12}{103} \approx 1{,}5$; $s_x \approx 1{,}22$ (2 c. d.)

$s_x^2 \approx 1{,}5$ $\quad s_x \approx 1{,}22$

2.3. $\overline{x} = \frac{3603}{14} \approx 257{,}36$ (2 c. d.)

$n = 14$

$SS_x = \sum_{j=1}^{4} \left(x_j - \overline{x}\right)^2 n_j \approx 6285{,}71$ (2 c. d.)

$s_x^2 = \frac{6285{,}71}{13} \approx 483{,}52$ (2 c. d.); $s_x \approx 21{,}99$ (2 c. d.)

$s_x^2 \approx 483{,}52$; $s_x \approx 21{,}99$

3.1. **Casal *A*:** 9 – 3 = 6 **Casal *B*:** 15 – 7 = 8

3.2. **Casal *A*:** $\overline{x} = \frac{30}{5} = 6$ **Casal *B*:** $\overline{y} = \frac{55}{5} = 11$

3.3. **Casal *A*:**

$d_1 = 3 - 6 = -3$

$d_2 = 4 - 6 = -2$

$d_3 = 6 - 6 = 0$

$d_4 = 8 - 6 = 2$

$d_5 = 9 - 6 = 3$

Casal *B*:

$d_1 = 7 - 11 = -4$

$d_2 = 9 - 11 = -2$

$d_3 = 11 - 11 = 0$

$d_4 = 13 - 11 = 2$

$d_5 = 15 - 11 = 4$

3.4. **Casal *A*:**

$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 26$; $s_x^2 = \frac{26}{4} = 6{,}5$

Casal *B*:

$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 45$; $s_x^2 = \frac{45}{4} = 11{,}25$

3.5. **Casal *A*:** $s_x = \sqrt{6{,}5} \approx 2{,}5$ (1 c. d.)

Casal *B*: $s_x = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}2$ (1 c. d.)

4. $n = 32$

4.1.

***Peso* do frutos (kg)**	**N.º de árvores**
17	3
18	3
19	2
20	6
21	4
22	4
23	3
24	3
25	2
26	2

A moda é 20.

4.2. $\overline{x} = \frac{678}{32} \approx 21{,}19$ (2 c. d.)

$SS_x = \sum_{j=1}^{10} \left(x_j - \overline{x}\right)^2 \times n_j = 229{,}12$

$s_x = \sqrt{\frac{229{,}12}{31}} \approx 2{,}62$ (2 c. d.)

$\overline{x} \approx 21{,}19$ $\quad s_x \approx 2{,}62$

5. $\underset{\sim}{x} = (3\,,6\,,2\,,1\,,7\,,5)$

$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + 4 = (7\,,10\,,6\,,5\,,11\,,9)$

$\overline{x} = \frac{24}{6} = 4$; $\overline{y} = \frac{48}{6} = 8$ $\qquad \overline{y} = \overline{x} + 4$, $\overline{y} \neq \overline{x}$

$SS_x = \sum_{i=1}^{6} \left(x_i - \overline{x}\right) = 28$; $s_x = \sqrt{\frac{28}{5}} \approx 2{,}366\ 432$

$SS_y = \sum_{i=1}^{6} \left(y_i - \overline{y}\right) = 28$; $s_y = \sqrt{\frac{28}{5}} \approx 2{,}366\ 432$

$s_x = s_y = 2{,}366\ 432$

6. $\underset{\sim}{x} = (3\,,6\,,2\,,1\,,7\,,5)$

$\underset{\sim}{z} = 2\underset{\sim}{x} + 4 \Rightarrow \underset{\sim}{z} = (10\,,16\,,8\,,6\,,18\,,14)$

$\overline{z} = \frac{72}{6} = 12$

$\overline{z} = 12 = 2 \times 4 + 4 = 2\overline{x} + 4$

$SS_z = \sum_{i=1}^{6} \left(z_i - \overline{z}\right) = 112$

$s_z = \sqrt{\frac{112}{5}} \approx 4{,}732864$

$s_z = 4{,}732864 = 2 \times 2{,}366432 = 2s_x$

$s_z = 2s_x$

7.1. António: 36 – 15 = 21 Carlos: 25 – 10 = 15

Francisco: 40 – 19 = 21 João: 52 – 3 = 49

7.2. Pela amplitude dos dados da amostra, ao João corresponderá o maior desvio-padrão e ao Carlos o menor.

Ou (máquina)

António: $\overline{x} = 23{,}4$ e $s_x = 6{,}66$

Carlos: $\overline{x} = 18{,}73$ e $s_x = 4{,}67$

Francisco: $\overline{x} = 31$ e $s_x = 7{,}64$

João: $\overline{x} = 38{,}8$ e $s_x = 12{,}81$

Pelo que ao João corresponde o maior desvio-padrão e ao Carlos, o menor.

7.3. Não; apesar de a amplitude dos dados relativos ao número de peças produzidas pelo João ser a mais elevada, é o João, no entanto, o aprendiz que em média mais produziu, pelo que a análise apenas da amplitude será uma medida injusta dos resultados obtidos.

7.4. **Máquina:**

António: 1.º Q = 17 ; 3.º Q = 28

Carlos: 1.º Q = 15 ; 3.º Q = 23

Francisco: 1.º Q = 25 ; 3.º Q = 38

João: 1.º Q = 35 ; 3.º Q = 49

António: em 25% dos dias produz 17 peças ou menos.
em 25% dos dias produz 28 peças ou mais.

Carlos: em 25% dos dias produz 15 peças ou menos.
em 25% dos dias produz 23 peças ou mais.

Francisco: em 25% dos dias produz 25 peças ou menos.
em 25% dos dias produz 38 peças ou mais.

João: em 25% dos dias produz 35 peças ou menos.
em 25% dos dias produz 49 peças ou mais.

Tudo indica que o João será o aprendiz mais produtivo, o Carlos o menos produtivo e ainda que o Francisco será mais produtivo do que o António.

8. $n = 70$

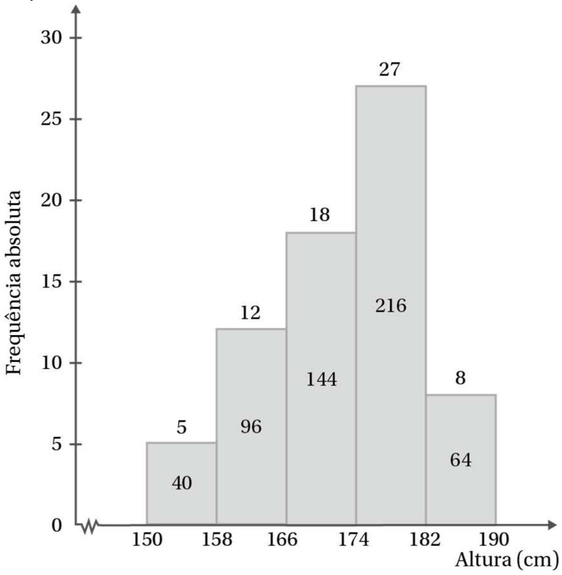
8.1. $\overline{x} = \dfrac{154\times5+162\times12+170\times18+178\times27+186\times8}{70}$

$= \dfrac{12\,068}{70} = 172,4$

172,4 cm

8.2. [174 , 182[

8.3. $A_t = 70 \times 8 = 560$



$Me = P_{50} = ?$

$\dfrac{50\times560}{100} = 280$ $\qquad P_{50} \in [174,\ 182[$

Como 40 + 96 + 144 = 280, $P_{50} = 174$.

$Me = 174$

8.4. $Q_1 = P_{25} = ?$

$\dfrac{25\times560}{100} = 140$ $\qquad P_{25} \in [166,\ 174[$

$(P_{25} - 166)\times18 = 140 - 136 \Leftrightarrow P_{25} \approx 166,2$

$Q_1 = 166,2$ cm

$Q_3 = P_{75} = ?$

$\dfrac{75\times560}{100} = 420$ $\qquad P_{75} \in [174,\ 182[$

$(P_{75} - 174)\times27 = 420 - 280 \Leftrightarrow P_{75} \approx 179,2$

$Q_3 = 179,2$ cm

8.5. $P_{10} = ?$

$\dfrac{10\times560}{100} = 56$ $\qquad P_{10} \in [158,\ 166[$

$(P_{10} - 158)\times12 = 56 - 40 \Leftrightarrow P_{10} \approx 159,3$

$P_{90} = ?$

$\dfrac{90\times560}{100} = 504$ $\qquad P_{90} \in [182,\ 190[$

$(P_{90} - 182)\times8 = 504 - 496 \Leftrightarrow P_{90} = 183$

8.6. $\overline{x} = 172,4$

Altura	Frequência absoluta	$x'i$	$(x'i - \overline{x})^2$
[150 , 158[	5	154	338,56
[158 , 166[	12	162	108,16
[166 , 174[	18	170	5,76
[174 , 182[	27	178	31,36
[182 , 190[	8	186	184,96
Total	70		

$s_x^2 = \sum_{j=1}^{5}(x'_j - x)^2 \times n_j = \dfrac{5420,8}{69} = 78,6$

$s_x \approx 8,9$ cm (1 c. d.)

Ficha para praticar 16

1.1. $\dfrac{14\times6+15\times10+16\times6+p\times2}{24} = 48,5 \Leftrightarrow 2p = 1164 - 330$

$\Leftrightarrow p = 417$

A Maria escreveu erradamente 417

1.2. <u>**Escola da Maria:**</u>

$n = 24$

$\overline{x} = \dfrac{0\times3+1\times6+2\times8+3\times3+4\times0+5\times4}{24} = 2,125$

$SS_x = \sum_{j=1}^{6}(x_j - \overline{x})\times n_j = 56,625$

$s_x = \sqrt{\dfrac{56,625}{23}}$

$s_x = 1,569$

<u>**Outra escola:**</u>

$n = 24$

$\overline{y} = \dfrac{0\times1+1\times4+2\times14+3\times4+4\times1+5\times0}{24} = 2$

$SS_y = \sum_{j=1}^{6}(y_j - \overline{y})\times n_j = 16$

$s_y = \sqrt{\dfrac{16}{23}}$

$s_x \approx 0,834$

De acordo com os resultados obtidos para as duas amostras, podemos afirmar que existe uma maior variabilidade na amostra escolhida pela Maria, pois o desvio-padrão é muito maior do que o desvio-padrão da outra amostra, apesar de as médias serem aproximadamente iguais.

2. $n = 40$

2.1. $\overline{x} = \dfrac{1\times10+2\times8+3\times6+7\times4+8\times3+10\times1+11\times3+12\times5}{40}$

$= \dfrac{199}{40} = 4,975$

$\overline{x} \approx 5$ livros

Este valor não é um bom indicador pois os dados estão muito dispersos, quer à direita, quer à esquerda da média.

2.2. **Máquina:**

Extremo inferior: 1

Extremo superior: 12

$Q_1 = 1{,}5$ $\quad Q_2 = Me = 3$ $\quad Q_3 = 8$

A distribuição é assimétrica positiva. Os valores concentram-se à esquerda, pois 50% dos alunos leram entre um e três livros.

2.3. Se o número de livros lidos por aluno for aumentado em uma unidade:

N.º de livros	N.º de alunos
2	10
3	8
4	6
8	4
9	3
11	1
12	3
13	5

Pelo que teremos $\overline{y} = 6$ e $Me = 4$ isto é, quer a média, quer a mediana, aumentarão uma unidade.

Ficha de teste 7

1.1.

Velocidade (km/h)	Frequência absoluta	$x'i$	$\left(x'i - \overline{x}\right)^2$
[30 , 40[	0	35	486,2025
[40 , 50[	18	45	145,2025
[50 , 60[	30	55	4,2025
[60 ,70[	35	65	63,2025
[70 , 80[	0	75	322,2025

$$\overline{x} = \frac{35\times 0 + 45\times 18 + 55\times 30 + 65\times 35 + 75\times 0}{83} = \frac{4735}{83} \approx 57{,}05$$

$$s_x = \sqrt{\frac{4951{,}8075}{82}} \approx 7{,}77$$

$x \approx 57{,}05$ km/h ; $s_x = 7{,}77$ km/h

1.2. Se a velocidade correta for acima de 5 km/h então:

$\overline{y} = \overline{x} + 5 = 57{,}05 + 5 = 62{,}05$ mas $s_y = s_x$.

2. $\underset{\sim}{x} = \left(4{,}1;5{,}2;6{,}1;4{,}7;5{,}0;3{,}6\right)$

2.1. $\overline{x} = \dfrac{28{,}7}{6} = 4{,}783$ (3 c. d.)

$s_x = 0{,}875$ m (máquina)

2.2. a) $\underset{\sim}{y} = \left(41, 52, 61, 47, 50, 36\right)$

$\underset{\sim}{y} = 10\underset{\sim}{x}$

$\Rightarrow \overline{y} = 10\overline{x} = 10\times 4{,}783 = 47{,}83$

Verificação:

$\overline{x} = 4{,}783$ e $\overline{y} = 47{,}83$ (máquina)

Logo, $\overline{y} = 10\times 4{,}783 = 10\overline{x}$.

b) $\underset{\sim}{z} = \left(4000, 5100, 6000, 4600, 4900, 3500\right)$

$\underset{\sim}{z} = 1000\underset{\sim}{x} - 100$

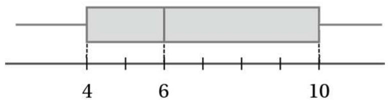
$\Rightarrow \overline{z} = 1000\overline{x} - 100 = 4683$

Verificação:

$\overline{x} = 4{,}783$ e $\overline{z} = 4688{,}(33)$ (máquina)

Pelo que, $\overline{z} = 1000\times 4{,}783 - 100 = 1000\overline{x} - 100$.

3. $Q_1 = 4$ $\quad Q_2 = 6$ $\quad Q_3 = 10$



Assimetrica positiva

$\overline{x} > Me > Mo$

(A) Falsa. Assimétrica positiva.

(B) Verdadeira

(C) Falsa

(D) Falso. $\overline{x} > Mo$

(E) Verdadeiro. $\overline{x} > Me$

(F) Verdadeiro. $Me > Mo$

4. $\underset{\sim}{x} = \left(3{,}43;3{,}45;3{,}43;3{,}48;3{,}52;3{,}50;\ 3{,}39;3{,}50;3{,}38;3{,}41\right)$

Máquina:

$\overline{x} = 3{,}449$

$s_x = 0{,}049$

$s_x^2 \approx 0{,}0024$

Como $s_x^2 = 0{,}0024 < 0{,}005$, a linha de produção não deve ser paralisada.

5.1.

N.º de filhos	Freq. absoluta acumulada	Freq. absoluta simples	Freq. relativa simples	Freq. relativa acumulada
1	78	78	0,39	0,39
2	166	88	0,44	0,83
3	196	18	0,09	0,92
4	196	12	0,06	0,98
5	200	4	0,02	1
Total		200	1	

5.2. Relativa aos valores da tabela 2

$\overline{x} = \dfrac{484}{200} = 2{,}42$

$s_x = 1{,}3$

Alterando os dados:

N.º de filhos	0	1	2	3	4
Freq. absoluta simples	66	46	38	38	12

$\overline{y} = \dfrac{284}{200} = 1{,}42$

$s_y = 1{,}3$

Como o número de filhos foi reduzido de uma unidade, a média também reduziu uma unidade.

O desvio-padrão não se alterou, uma vez que as diferenças em relação à média se mantiveram.

6. Empresa A:

Média = 1200

Desvio-padrão = 91,3

Empresa B:

Média = 900

Desvio-padrão = 76,8

8% de 1200 = 96

8% de 900 = 72

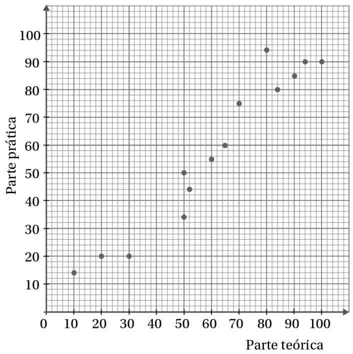
A empresa B apresenta uma variação em torno da média superior a 8% (76,8 > 72), pelo que deverá fazer uma revisão dos seus salários.

Ficha para praticar 17

1.1. Dois alunos

1.2. 65

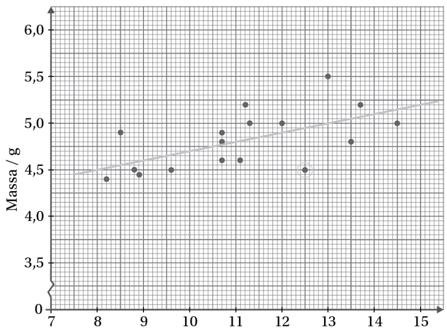
1.3.



2.1. 4,85 g

2.2. 0,2 g

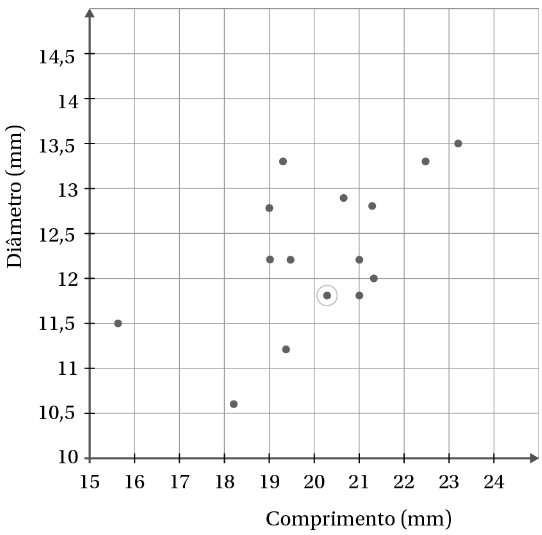
2.3.



É o ponto que se encontra mais afastado inferiormente da reta de regressão linear, pelo que poderá não ter aumentado suficientemente a massa, para sobreviver durante a noite.

3.1. [19 , 20[

3.2.



3.3. Diagrama *A*

Ficha para praticar 18

1.1. No gráfico B. A reta de regressão tem declive positivo.

1.2. Gráfico A. Os pontos encontram-se muito pouco dispersos ao longo de uma linha (reta de regressão linear).

2.1. Correlação linear positiva forte

2.2. Correlação nula

2.3. Correlação positiva fraca

2.4. Correlação negativa fraca

2.5. Correlação negativa forte

2.6. Correlação negativa forte

3.1. Aproximadamente 270 pontos

3.2. Nove países

3.3. Aproximadamente 25 milhões

Ficha de teste 8

1. $y = ax + b$ com $a = 0,84$ e $b = -0,14$

Logo, $y = 0,84x - 0,14$

$r \approx 0,96$

$\overline{x} = 4,33 \qquad \overline{y} = 3,5$

$3,5 = \underbrace{0,84 \times 4,33 - 0,14}_{3,4972 \approx 3,5}$

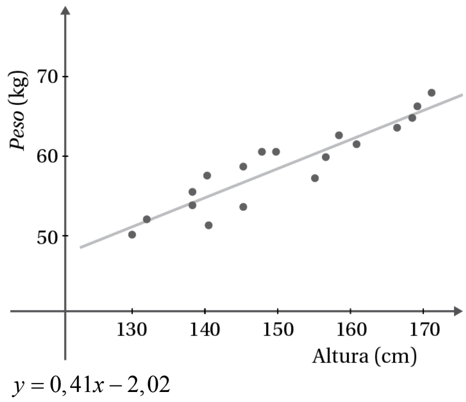
logo $\left(\overline{x}\ ,\ \overline{y}\right)$ pertence à reta de regressão

2.1. Correlação positiva

2.2. Correlação negativa

2.3. Correlação nula

3.1.



$y = 0,41x - 2,02$

Máquina: reta de regressão linear

$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ a = 0,41 \\ b = -2,02 \end{array}\right\} y = 0,41x - 2,02$

$r = 0,93$

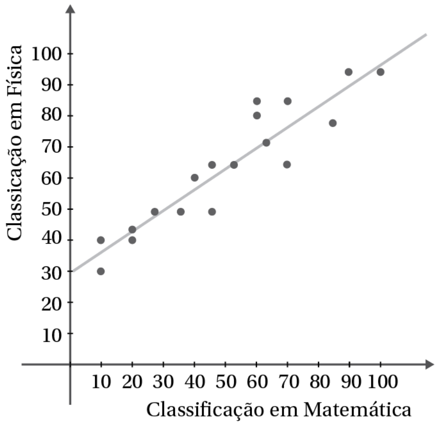
3.2. $65 = 0,41x - 2,02 \Leftrightarrow x \approx 163$

Aproximadamente 163 cm.

3.3. $y = 0,41 \times 146 - 2,02 \Leftrightarrow y = 57,84$

Aproximadamente 58 kg.

4.1.



$y = 0,68x + 29,36$

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ a \approx 0,68 \\ b \approx 29,36 \end{array}\right\} y = 0,68x + 29,36$$

4.2. $y = 0,68 \times 55 + 29,36$

$y = 66,76$

Aproximadamente 67%

4.3. $80 = 0,68 \times x + 29,36$

$x = 74,47$

Aproximadamente 74%

4.4. Uma correlação linear positiva, pois declive da reta de regressão é positiva.

5.1. Temperatura $\bar{x} = 16\ ^\circ\text{C}$; $s_x = 4\ ^\circ\text{C}$ Latitude N $\bar{y} = 48\ ^\circ\text{C}$; $s_y = 6\ ^\circ\text{C}$

5.2. **Máquina:**

$r = -0,94$

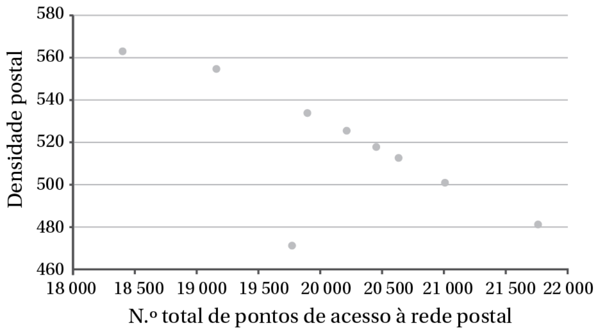
Existe uma correlação linear negativa (forte)

Ficha de teste 9

1. $$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ a = 8,2 \\ b = -3,5 \end{array}\right\} y = 8,2x - 3,5$$

2.1.

	N.º total de pontos de acesso à rede postal	Densidade postal (habitantes/ pontos de acesso)
2001	19 775	471,3
2002	21 758	481,4
2003	21 008	501,2
2004	20 630	512,5
2005	20 457	517,9
2006	20 215	525,5
2007	19 897	534,1
2008	19 155	554,8
2009	18 394	563,2
	L_1	L_2



Incluindo 2001:

$y = ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} a = -0,225 \\ b = 970,216 \end{array}\right\} y = -0,225x + 970,216$$

$r = -0,728$

Excluindo 2001:

$y = ax + b$

$a = -0,025$

$b = 1036,193$

$r = -0,992$

Quando se excluí o *outlier*, o coeficiente de correlação linear aproxima-se de – 1 , ou seja, a correlação torna-se quase perfeita, logo, o modelo encontrado é melhor para fazer previsões, facto que também se pode verificar através da reta de regressão, que se encontra mais ajustada aos pontos do diagrama de dispersão.

2.2. Sabendo que a média é 512,5 então:

$$512,5 = \frac{531 + 518 + 481 + 535 + 493 + 500 +}{12}$$
$$\frac{+490 + a + 525 + 502 + 493 + 550}{12}$$

$\Leftrightarrow a = 6150 - 5618 \Leftrightarrow a = 532$

Assim, vem:

531518	481	535	493	500	400
532	525	502	493	550	

Pela máquina:

$s_x = 22,04746945$, logo $s_x \approx 22$.

Ficha para praticar 19

1.1. Taxa de cilindrada: 56,50 €

Taxa de emissões de CO_2 : 86,55 €

Coeficiente do ano da matrícula: 1,15

$56,50 + 86,55 = 143,05$

$1,15 \times 143,05 \approx 164,51$

Valor anual do IUC: 164,51 €.

1.2. $0,23 \times 17\,200 = 3956$

Pagará 3956 € de IVA.

1.3. 5 anos = 60 meses

$60 \times 300 = 18\,000$

$18\,000 - 17\,200 = 800$

Pagará 800 € a mais.

2. 650 € ----- 121 %

x ----- 100 %

$x = \dfrac{650 \times 100}{121} \approx 537{,}19\,€$

Em 2011: $1{,}23 \times 537{,}19 \approx 660{,}74\,€$

Custa agora 660,74 €.

3. $V_t = 312{,}32 \times 1 \times 1{,}40 \times 1{,}10 \times 0{,}85 \times 603$

$= 246522{,}6086 \approx 246530\,€$

Aljezur: $\dfrac{0{,}35}{100} \times 246530 \approx 862{,}86\,€$

Valor do IMI a pagar em 2014: 862,86 €.

4.1. $45250 : 2 = 22625\,€$

Taxa de IRS: 37%

4.2. Parcela a abater: 2680 €

$0{,}37 \times 22625 - 2680 = 5691{,}25\,€$

$5691{,}25 \times 2 = 11382{,}50\,€$

Terão de pagar 11 382,50 €.

Ficha para praticar 20

1.1. $900 - \dfrac{0{,}4}{100} \times 900 = 896{,}40$

Passará a ganhar 896,40 €.

1.2. $900 + \dfrac{0{,}3}{100} \times 900 = 902{,}70$

Passará a ganhar 902,70 €.

2. Proposta 1: $20 + \dfrac{2}{100} \times 20 = 20{,}40\,€ \text{ / mês}$

Proposta 2: $12 \times 20 + 4 = 244\,€ \text{ / ano}$

$244 : 12 \approx 20{,}33\,€ \text{ / mês}$

Proposta 3: $17 + 1{,}23 \times 17 \times 11 = 247{,}01\,€ \text{ / ano}$

$247{,}01 : 12 \approx 20{,}58\,€\text{/mês}$

A proposta mais vantajosa é a 3.

3.

Cabaz	Preço (2010)	Preço (2011)	Preço (2012)
Massa	200	230	200
Pão	95	100	120
Arroz	125	130	125
Batatas	450	500	520
Leite	320	330	280
Custo do cabaz	1 190	1 290	1 245
IPC	100	108,4	104,6
Taxa de inflação	---	8,4 %	–3,5 %

A taxa de inflação em 2011 é positiva, pois houve um aumento de preços de 2010 (ano base) para 2011.
Em 2012 a inflação é negativa, pois o preço total do cabaz diminuiu em relação ao ano anterior (2011).

Cálculo do IPC

Ano 2011: $\dfrac{1290}{1190} \times 100 \approx 108{,}4$

Ano 2012: $\dfrac{1245}{1190} \times 100 \approx 104{,}6$

Cálculo da taxa de inflação

Ano 2011: $\dfrac{108{,}4 - 100}{100} \times 100 = 8{,}4\%$

Ano 2012: $\dfrac{104{,}6 - 108{,}4}{108{,}4} \times 100 \approx -3{,}5\%$

4. IPC(2012)=105,1

IPC(2013)=106,6

$\dfrac{106{,}6 - 105{,}1}{105{,}1} \times 100 \approx 1{,}4\%$

A taxa de inflação é de, aproximadamente, 1,4 %.

5.1. Após calcular a média dos IPC de 2009 e de 2010 obtemos:

IPC(médio, em 2009) = 101,2

IPC(médio, em 2010) = 102,3

$\dfrac{102{,}3 - 101{,}2}{101{,}2} \times 100 \approx 1{,}1\%$

A taxa de inflação é de, aproximadamente, 1,1%.

5.2. $IPC(\text{maio } 2010) = \dfrac{\text{preço (maio 2010)}}{\text{preço (data-base)}} \times 100$

$101{,}9 = \dfrac{x}{150{,}20} \times 100 \Leftrightarrow x = \dfrac{101{,}9 \times 150{,}20}{100}$

Então $x \approx 153{,}05$.

Teria de pagar 153,05 €.

Ficha para praticar 21

1. $C_0 = 8400\,€$; $i = 0{,}03$; $n = \dfrac{181}{365}$ anos

juro = $C_0 \times i \times n$

juro $= 8400 \times 0{,}03 \times \dfrac{181}{365} \approx 124{,}96$

124,96 €

2. $C_0 = 14\,000\,€$; $i = 0{,}045$; $n = ?$

juro = $C_0 \times i \times n$

$1260 = 14\,000 \times 0{,}045 \times n \Leftrightarrow n = \dfrac{1260}{14\,000 \times 0{,}045}$

$\Leftrightarrow n = 2$ anos

Então, $n = 2 \times 365 = 730$ dias.

Período de capitalização: 730 dias

3. $C_2 = 1680$; $C_0 = 1500$; $n = 2$

$i = ?$

$1680 = 1500 + 1500 \times 2 \times i \Leftrightarrow 180 = 3000 \times i$

$\Leftrightarrow i = \dfrac{180}{3000} \Leftrightarrow i = 0{,}06$

A instituição propõe uma taxa de juro trimestral de 6 %.

4.1. $C_2 = 6000(1+0,07\times 2) = 6840$

Teremos 6840 € no banco.

4.2. $C_2 = 6000(1+0,07)^2 = 6869,40$

Teremos 6869,40 € no banco.

5. $2C_0 = C_0(1+0,02n) \Leftrightarrow 2 = 1+0,02n \Leftrightarrow 0,02n = 1$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{1}{0,02} \Leftrightarrow n = 50$

50 quadrimestres = $50\times 3 = 150$ anos

Ao fim de 150 anos.

6. $10\ 000 = 5000(1+0,10)^n \Leftrightarrow 1,10^n = \dfrac{10\ 000}{5000} \Leftrightarrow 1,10^n = 2$

Note-se que: $1,10^7 \approx 1,95$ e $1,10^8 \approx 2,14$.

Serão necessários 8 anos.

7.1. $C_3 = 15\ 000(1+0,036)^3 \approx 16\ 679,02€$

16 679,02 €

7.2. $C_3 = 15\ 000\left(1+\dfrac{0,036}{12}\right)^{12\times 3} \approx 16\ 708,01€$

16 708,01 €

7.3. $C_3 = 15\ 000\left(1+\dfrac{0,036}{4}\right)^{4\times 3} \approx 16\ 702,65€$

16 702,65 €

7.4. $C_3 = 15\ 000\left(1+\dfrac{0,036}{365}\right)^{365\times 3} \approx 16\ 710,63€$

16 710,63 €

8. $n = 9\text{ meses} = \dfrac{9}{12}\text{anos} = \dfrac{3}{4}\text{anos}$

$3683,75 = C_0\left(1+0,07\times\dfrac{3}{4}\right) \Leftrightarrow C_0 = \dfrac{3683,75}{1+0,07\times\dfrac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow C_0 = 3500€$

Capital investido: 3500 €

9.1. $C_6 = 10\ 000(1+0,18)^6 \approx 26\ 995,54€$

Terão de pagar 26 995,54 €.

9.2. $C_6 = 10\ 000\left(1+\dfrac{0,18}{2}\right)^{2\times 6} \approx 28\ 126,65€$

Terão de pagar 28 126,65 €.

Ficha para praticar 22

1.

Mês	Início do mês	Fim do mês
1.º	1000,00	1005,00
2.º	1505,00	1512,53
3.º	2012,53	2022,59
4.º	2522,59	2535,20
5.º	3035,20	3050,38
6.º	3550,38	3568,13

No final do investimento possuía 3568,13 €.

2. Banco A: $365\times 1,20 = 438€$

(juro anual cobrado por um empréstimo de 1500 €)

Banco B: $C_1 = 1500(1+0,28\times 1) = 1920$

$1920 - 1500 = 420€$

(juro anual cobrado por um empréstimo de 1500 €)

Deve recorrer ao banco B.

3. $\dfrac{1}{8}\times 20\ 000 = 2500€$ por ano ($\dfrac{1}{8}$ do investimento)

Juro: $20\ 000\times 0,15\times 1 = 3000€$ por ano

2500 + 3000 = 5 500 €

Terá de pagar, por ano, 5500 €.

4. $n = 20$ anos

Mensalidade: 200 €

Taxa de juro mensal: $\dfrac{0,08}{12}$

Juro mensal: $\dfrac{0,08}{12}\times 200 \approx 1,33€$

Juro anual: $12\times 1,33 = 15,96€$

Juro ao fim de 20 anos: $20\times 15,96 = 319,20€$

Capital ao fim de 20 anos:
$20\times 12\times 200 + 319,20 = 49\ 319,20€$ **.**

5.1. No dia 10 de março terá de pagar 40% do valor das compras, ou seja, $0,40\times 79 = 31,60€$.

Valor debitado: 31,60 €.

5.2. $79 - 31,60 = 47,40€$ (valor a liquidar/em dívida)

$\dfrac{0,25}{365}\times 30\times 47,40 \approx 0,97€$

Valor dos juros pago: 0,97 €.

6.1. Final do 1.º semestre: $2500\times 1,02 = 2550€$

Início do 2.º semestre: $2550 + 1500 = 4050€$

Final do 2.º semestre: $4050\times 1,02 = 4131€$

Capital acumulado ao fim de 1 ano: 4131 €.

6.2. <u>2.º ano</u>

Início do 1.º semestre: $4131 + 1500 = 5631€$

Final do 1.º semestre: $5631\times 1,02 = 5743,62€$

Início do 2.º semestre: $5743,62 + 1500 = 7243,62€$

Final do 2.º semestre: $7243,62\times 1,02 = 7388,49€$

<u>3.º ano</u>

Início do 1.º semestre: $7388,49 + 1500 = 8888,49€$

Final do 1.º semestre: $8888,49\times 1,02 = 9066,26€$

Início do 2.º semestre: $9066,26 + 1500 = 10\ 566,26€$

Final do 2.º semestre: $10\ 566,26\times 1,02 = 10\ 777,32€$

Têm de decorrer 3 anos (6 semestres).

7.1. $M = 2000(1+0,06)\dfrac{(1+0,06)^5 - 1}{0,06} \approx 11\ 950,64€$

Terá no banco aproximadamente 11 950,64 €.

7.2. $20\ 000 = C(1+0,05)\dfrac{(1+0,05)^{10}-1}{0,05}$

$\Leftrightarrow C = \dfrac{20\ 000}{(1+0,05)\times\dfrac{(1+0,05)^{10}-1}{0,05}}$

$C \approx 1514,37\,€$

Deve depositar aproximadamente 1 514,37 €.

Ficha para praticar 23

1.1. Das 09:12 às 10:32 são 1 hora e 20 minutos.
Pagou 2,15 €.

1.2. Total: 23 horas
Primeiras duas horas: 2,15 €
Cada hora adicional: 1 €
$21\times1+2,15=23,15\,€$
Irá pagar 23,15 €.

1.3. Total: 1 dia + 15 minutos
20 € + 0,45 € =20,45 €
Pagou 20,45 €.
Comparativamente com a alínea anterior, apesar de ter ficado mais 1 hora e 15 minutos, acabou por pagar menos.

2. Anuidade: $11\times7,5=82,50\,€$
Taxa de inscrição: $0,30\times82,50=24,75\,€$
Seguro: 12 €
Fato de banho + touca + chinelos + robe: 45 €
$82,50+24,75+12+45=164,25\,€$
Valor pago pela mãe da Paula: 164,25 €.

3.1. $23\times24\times1,10=607,20\,€$
$607,20-549=58,20\,€$
Pouparia 58,20 €.

3.2. $\dfrac{607,20-549}{549}\times100\approx10,6\%$
Pagaria cerca de 10,6% a mais.

4. $10\times(5,50+3,20+5,80+6,50+5,50+5,50)=320\,€$
Com desconto de 35 %: $320-0,35\times320=208\,€$
Pagou 208 €.

Ficha de teste 10

1.1. <u>Forno</u>
290 € ------- 123 %
x ------- 100 %
$x=\dfrac{290\times100}{123}\approx235,77\,€$
<u>Desumidificador</u>
179 € ------- 123 %
x ------- 100 %
$x=\dfrac{179\times100}{123}\approx145,53\,€$
Forno: 235,77 €
Desumidificador: 145,53 €

1.2. Forno: $290-235,77=54,23\,€$
Desumidificador: $179-145,53=33,47\,€$
Valor total do IVA: $54,23+33,47=87,70\,€$
Valor total do IVA: 87,70 €

2. $1300-900=400\,€$
$0,05\times400=20\,€$
Vai pagar 20 € de imposto.

3. Cilindrada (1600 cm^3): 56,50 €
CO_2 (120 g/Km): 57,76 €
Ano (2013): 1,15
$(56,50+57,76)\times1,15=131,40\,€$
Vai pagar 131,40 € de IUC.

4. IPC(1999)=104,1
IPC(2000)=105,2
$\dfrac{105,2-104,1}{104,1}\times100\approx1,1\%$
Taxa de inflação: 1,1%.

5. "Spring": $12\times1200=14\ 400\,€\,/\,\text{ano}$
"Winter"
1.º trimestre: $3\times700=2100\,€$
2.º trimestre: $3\times(700\times1,20)=2520\,€$
3.º trimestre: $3\times(700\times1,20^2)=3024\,€$
4.º trimestre: $3\times(700\times1,20^3)=3628,80\,€$
1 ano: $2100+2520+3024+3628,80=11\ 272,80\,€\,/\,\text{ano}$
Deve aceitar a proposta da "Spring".

6.1. $5\text{ anos}=5\times12=60\text{ meses}$
$\dfrac{3000}{60}=50\,€\,/\,\text{mês}\ \ (\text{sem juros})$
Juros a pagar: $3000\times\dfrac{0,18}{12}=45\,€\,/\,\text{mês}$
Prestação mensal: 50 + 45 = 95 €

6.2. $60\times45=2700\,€$
Pagou um total de 2700 € em juros.

7.1

Semestre	Capital inicial	Taxa de juro	Juro	Capital acumulado
1.º	3 000,00 €	4 %	120 €	3 120,00 €
2.º	3 120,00 €	4,5 %	140,40 €	3 260,40 €
3.º	3 260,40 €	5 %	163,02 €	3 423,42 €
4.º	3 423,42 €	5,5 %	188,29 €	3 611,71 €

7.2. 3260,40 €

7.3. $3611,71-3000=611,71\,€$
611,71 €

7.4. 1.º semestre: $0,04 \times 3000 = 120$ €
2.º semestre: $0,045 \times 3000 = 135$ €
3.º semestre: $0,05 \times 3000 = 150$ €
4.º semestre: $0,055 \times 3000 = 165$ €
Total de juros: $120 + 135 + 150 + 165 = 570$ €

8.1. $n = 6$ meses $= 1$ semestre $= 0,5$ anos

$$C_{0,5} = 25\ 000\left(1 + \frac{0,02}{2}\right)^{2\times 0,5} = 25\ 250 \text{ €}$$

25250 €

8.2. $n = 18$ meses $= 1,5$ anos

$$C_{1,5} = 25\ 000\left(1 + \frac{0,02}{2}\right)^{2\times 1,5} \approx 25\ 757,53 \text{ €}$$

25 757,53 €

9.1. $21\ 200 \times 0,038 \times 4 = 3222,40$ €

3222,40 €

9.2. $21\ 200(1 + 0,038)^4 - 21\ 200 \approx 3410,77$ €

3410,77 €

10. $i = 0,03$ (trimestral)
$C_5 = 2100$
$n = 5$ anos $= 5 \times 4 = 20$ trimestres

$$2100 = C_0(1 + 0,03)^{20} \Leftrightarrow C_0 = \frac{2100}{(1 + 0,03)^{20}}$$

Então, $C_0 \approx 1162,72$ €.

Capital inicial: 1162,72 €

11. $C_0 = 4000$
$C_5 = 6262,72$
$n = 48$ meses

$$8173,91 = 4000(1 + i)^{48} \Leftrightarrow (1 + i)^{48} = \frac{8173,91}{4000}$$

$$\Leftrightarrow i = \sqrt[48]{\frac{8173,91}{4000}} - 1$$

$i \approx 0,015$
1,5 %

12. $450 + 50 + 21 + 35 + 6 + 15 + \frac{60}{12} + \frac{3 \times 52}{12} = 595$ € / mês

Como são 3 amigos: $595 : 3 \approx 198,33$ €

Cada um dos amigos gastará, em média, 198,33 € por mês.

13.1. $0,30 \times 330 = 99$ €

Valor debitado: 99 €

13.2. $330 - 99 = 231$ € (a liquidar)

$$\frac{0,25}{365} \times 30 \times 231 \approx 4,75 \text{ €}$$

Valor dos juros: 4,75 €

14. $n = \frac{300}{365}$

$$C_{\frac{300}{365}} = 400\left(1 + 0,18 \times \frac{300}{365}\right) \approx 459,18 \text{ €}$$

(valor do cheque aos 300 dias)
$300 - 100 = 200$ dias (para terminar o prazo)

$$459,18 = 400\left(1 + i \times \frac{200}{365}\right) \Leftrightarrow 1 + \frac{200}{365}i = \frac{459,18}{400}$$

$$\Leftrightarrow i = \left(\frac{459,18}{400} - 1\right) \times \frac{365}{200}$$

Então, $i \approx 0,27$.

O banco cobra uma taxa de 27%.

15.

Ano	Valor no início do ano	Valorização ao longo do ano	Valor no final do ano	Percentagem de valorização relativamente ao valor da compra
1.º	500 000	5 %	525 000	5 %
2.º	525 000	20 %	630 000	26 %
3.º	630 000	35 %	850 500	70,1 %

16.1. $3000 + 5500 + 7500 + 2000 = 18\ 000$ €

Recebeu 18 000 €.

16.2.

	Paga ao amigo	Lucro/prejuízo no investimento	Valor disponível
Fim do 1.º ano	3000	$0,25 \times 15\ 000 = 37\ 500$	$15\ 000 + 3750 - 3000 = 15\ 750$
Fim do 2.º ano	0	5000	$15\ 750 + 5000 = 20\ 750$
Fim do 3.º ano	5500	$0,05 \times 15\ 000 = 750$	$20\ 750 + 750 - 5500 = 16\ 000$
Fim do 4.º ano	7500	$-0,20 \times 16\ 000 = -3200$	$16\ 000 - 3200 - 7500 = 5300$
Fim do 5.º ano	2000	$-0,05 \times 5300 = -265$	$5300 - 265 - 2000 = 3035$

O Martinho teve um lucro de 3035 €.

17.1. $4 \times 48 = 192$ € (bilhetes para 4 dias)
$4 \times 40 = 160$ € (car camping para 4 dias)
$10 \times 4 = 40$ € (tenda para 4 dias)

Cada amigo: $192 + \frac{160}{5} + \frac{40}{5} = 232$ €

Cada um dos amigos pagará 232 €.

17.2. $95 + \frac{160}{5} = 127$ €

Cada um dos amigos pagará 127 €.