Pág. 8

1. $h^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow h^2 = 169 - 25 \Leftrightarrow h^2 = 144 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = 12$

$A = 21 \times 12 = 252$

$A = 252 \text{ cm}^2$

Resposta: **(C)**

2.1. $A\hat{O}B = 360° : 6 = 60°$

Como $\overline{OA} = \overline{OB}$, vem que $B\hat{A}O = O\hat{B}A$ pois, num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais. Então

$$B\hat{A}O = O\hat{B}A = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$$

Logo, se o triângulo $[BOA]$ tem os três ângulos iguais, também tem os três lados iguais. Portanto, o triângulo $[BOA]$ é equilátero.

2.2.

$$= \frac{1}{6}\left(A_{\text{círculo}} - A_{\text{hexágono}}\right) \approx \frac{1}{6}\left(\pi \times 6^2 - \frac{6 \times 6 \times 5,196}{2}\right) \approx 3,26$$

$A \approx 3,26 \text{ cm}^2$

Resposta: **(C)**

3. Os triângulos $[ADC]$ e $[BCD]$ são semelhantes.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

$$\frac{2}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{6} \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 2 \times 6 \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{12} \Leftrightarrow \overline{CD} = 2\sqrt{3}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{(2+6) \times 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

$A_{[ABC]} = 8\sqrt{3}\text{cm}^2$

Resposta: **(A)**

4. $\overline{AB} = 2 \times \overline{OC} = 2 \times 6,2 = 12,4$

$$A_{[OCDA]} = \frac{\overline{OA} + \overline{CD}}{2} \times \overline{OC} = \frac{6,2 + 12,4}{2} \times 6,2 = 57,66$$

$$A = 57,66 - \frac{1}{4} \times \pi \times 6,2^2 = 57,66 - 9,61\pi \approx 27,47$$

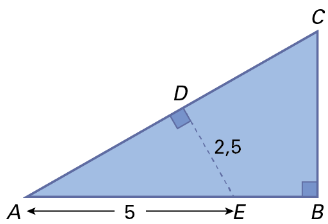
$A \approx 27,47\text{cm}^2$

Resposta: **(D)**

5. $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$

$$\overline{AD}^2 + (2,5)^2 = 5^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \overline{AD}^2 = 25 - \frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 = \frac{75}{4} \left(\overline{AD} > 0\right) \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{\sqrt{75}}{2} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$



$$A_{[AED]} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2} \times 2,5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{8}$$

Os triângulos $[AED]$ e $[ABC]$ são semelhantes pelo critério AA (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum). A razão de semelhança da ampliação é

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{8}{5}$$

$$A_{[ABC]} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 \times A_{[AED]} = \frac{64}{25} \times \frac{25\sqrt{3}}{8} = 8\sqrt{3}$$

A área do quadrilátero $[EBCD]$ é igual a

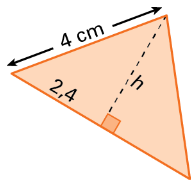
$$A = 8\sqrt{3} - \frac{25}{8}\sqrt{3} = \frac{39}{8}\sqrt{3} \approx 8,4$$

$A \approx 8,4\text{cm}^2$
Resposta: **(A)**

Pág. 9

6.1. $V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{3\times3}{2} \times 2,4\text{cm}^3 = (4,5 \times 2,4)\text{cm}^3 = 10,8\text{cm}^3$

6.2. $V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{6\times2}{2} \times 8\text{cm}^3 = 48\text{cm}^3$



6.3. 4,8 : 2 = 2,4

$h^2 + 2,4^2 = 4^2 \Leftrightarrow h^2 = 16 - 5,76 \Leftrightarrow h^2 = 10,24 \overset{h>0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{10,24} \Leftrightarrow h = 3,2$

$V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{4,8\times3,2}{2} \times 4\text{cm}^3 = 30,72\ \text{cm}^3$

7.1. Como $6^2 + 8^2 = 10^2$, pelo teorema recíproco do Teorema de Pitágoras, o triângulo da base é retângulo. Portanto,

$$A_{\text{base}} = \frac{8 \times 6}{2}\ \text{cm}^2 = 24\ \text{cm}^2$$

7.2. $V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = 24 \times 12\ \text{cm}^3 = 288\ \text{cm}^3$

7.3. $A_{\text{lateral}} = P_{\text{base}} \times \text{altura} = = (6 + 8 + 10) \times 12\ \text{cm}^2 = 288\ \text{cm}^2$

7.4. $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \times A_{\text{base}} = (288 + 2 \times 24)\text{cm}^2 = 336\ \text{cm}^2$

8.

$$V = A_{\text{base}} \times \text{altura} \approx \frac{8 \times 6 \times 7,243}{2} \times 8\ \text{cm}^3 \approx 1390,656\ \text{cm}^3$$

$V \approx 1391\ \text{cm}^3$

9. Caixa A:
$A_{\text{base}} = 93,6\text{cm}^2$
$P_{\text{base}} = 36\text{cm}$

Caixa B:
$A_{\text{base}} = 25\text{cm}^2$
$V_B = 375\text{cm}^3$

9.1.

$$A_{\text{base}} = \frac{P_{base} \times ap}{2}$$

$$93,6 = \frac{36 \times ap}{2} \Leftrightarrow 2 \times 93,6 = 36 \times ap \Leftrightarrow 36 \times ap = 187,2 ap = \frac{187,2}{36} \Leftrightarrow ap = 5,2$$

$ap = 5,2\text{cm}$

9.2. $V_B = A_{\text{base}} \times \text{altura}$

$$375 = 25 \times h \Leftrightarrow h = \frac{375}{25} \Leftrightarrow h = 15$$

As caixas têm 15 cm de altura.
$V_A = A_{\text{base}} \times h = 93,6 \times 15 \text{ cm}^3 = 1404 \text{ cm}^3$
$V_A - V_B = (1404 - 375) \text{ cm}^3 = 1029 \text{ cm}^3$

9.3. O cilindro de volume máximo tem altura igual à do prisma e raio da base igual ao apótema da base do prisma (é tangente às faces laterais do prisma)

a) A base do prisma é um quadrado de lado 5 cm. Logo, o apótema da base é igual a 2,5 cm.
$V = \pi \times 2,5^2 \times 15 \text{ cm}^3 = 93,75\pi \text{ cm}^3 \approx 294,5 \text{ cm}^3$

b) $V = \pi \times (5,2)^2 \times 15 \text{ cm}^3 = 405,6\pi \text{ cm}^3 \approx 1274,2 \text{ cm}^3$

Pág. 10

1. A: Pirâmide pentagonal
B: Pirâmide triangular
C: Pirâmide hexagonal
D: Pirâmide quadrangular

2. As pirâmides B, C e D não são regulares.

Pág. 11

Questão 1 Base: 4,2 : 2 = 2,1

$$h^2 + 2,1^2 = 3,5^2 \Leftrightarrow h^2 = 3,5^2 - 2,1^2 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{7,84} \Leftrightarrow h = 2,8$$

$$A_{\text{base}} = \frac{4,2 \times 2,8}{2} = 5,88$$

Face 1:

$$h^2 + 2,1^2 = 7,5^2 \Leftrightarrow h^2 + 7,5^2 - 2,1^2 \Leftrightarrow h^2 = 51,84 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{51,84}$$

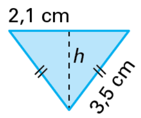
$h = 7,2$

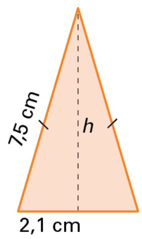
$$A_{\text{face 1}} = \frac{4,2 \times 7,2}{2} = 15,12$$

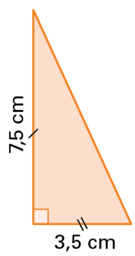
Face 2 e 3

$$A_{\text{faces 2 3}} = \frac{3,5 \times 7,5}{2} = 13,125$$

$$A_{\text{total}} = (5,88 + 15,12 + 2 \times 13,125) \text{ cm}^2 = 74,25 \text{ cm}^2$$







Pág. 12

Questão 2

$$V = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{5 \times 3}{2} \times 5\right) \text{ cm}^2 = 12,5 \text{ cm}^2$$

Questão 3

3.1. Volume da pirâmide $[ABDV] = \left(\frac{1}{3} \times \frac{8\times 8}{2} \times 9\right)\text{cm}^3 = (3 \times 4 \times 8)\ \text{cm}^3 = 96\ \text{cm}^3$
Volume da pirâmide $[ABCDV] = 2 \times 96\ \text{cm}^3 = 192\ \text{cm}^3$

3.2.

$$\frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{ altura} = \left[\frac{1}{3} \times (8 \times 8) \times 9\right]\ \text{cm}^3 = 192\ \text{cm}^3$$

1.1.

$$V = \frac{1}{3} \times 8 \times 6 \times 6 = 96$$

$V = 96\ \text{cm}^3$

1.2. Comprimento do retângulo x:

$$x^2 + 8^2 = 17^2 \Leftrightarrow x^2 = 289 - 64 \Leftrightarrow x^2 = 225 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = 15$$

$$V = \frac{1}{3} \times 15 \times 10 \times 8 = 400$$

$V = 400\ \text{cm}^3$

2.1. Aresta do cubo: $a = 2 \times 5$ cm $= 10$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \times 10 \times 10 \times 5 = \frac{500}{3}$$

$$V = \frac{500}{3}\ \text{cm}^3$$

2.2. $V_{\text{cubo}} = 10^3 = 1000$
$V = 1000\ \text{cm}^3$

3.1. A reta IJ é concorrente oblíqua com o plano ABC.
Resposta: **(B)**

3.2. A reta HD é paralela ao plano ABC.
Resposta:**(D)**

3.3. $V = V_{\text{prisma}} + V_{\text{pirâmide}}$
Altura da pirâmide:

$$\overline{IK}^2 + \overline{KJ}^2 = \overline{IJ}^2\}$$

$$\overline{IK}^2 + 0,6^2 = 1^2 \Leftrightarrow \overline{IK}^2 = 1 - 0,36 \Leftrightarrow \overline{IK}^2 = 0,64 \Leftrightarrow \left(\overline{IK} > 0\right) \overline{IK} = 0,8$$

$$V = 1,2 \times 1,2 \times 1,5 + \frac{1}{3} \times 1,2 \times 1,2 \times 0,8 = 2,16 + 0,384 = 2,544$$

$V = 2,544\ \text{m}^3 = 2544000\ \text{cm}^3$

4.

$$V_{[DEFG]} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times 6 = 9$$

Os triângulos $[ACG]$ e $[DFG]$, tal como os triângulos $[CBG]$ e $[FEG]$ são semelhantes.

A razão de semelhança (ampliação) é:

$$r = \frac{\overline{CG}}{\overline{FG}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Então,

$$\overline{AC} = \overline{CB} = \frac{5}{3} \times 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

$$V_{[ABCG]} = \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 5}{2} \times 10 = \frac{125}{3}$$

$$V = \frac{125}{3} \text{ cm}^3 \approx 41,7 \text{ cm}^3$$

5.1. Por exemplo:

a) a reta AB e o plano BCF

b) os planos ABC e ABF

5.2.

$$V_{\text{casa}} = V_{\text{prisma}} + V_{\text{pirâmide}} = 6 \times 6 \times 2 + \frac{1}{3} \times 8 \times 8 \times 4,5 = 72 + 96 = 168$$

$$V_{\text{casa}} = 168 \text{ m}^3$$

6.

$$V_{\text{tronco}} = V_{[EFGH]} - V_{[ABCD]} = \frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times 24 - \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 8 = 1152 - \frac{128}{3} \approx 1109,3$$

$$V \approx 1109,3 \text{ cm}^3$$

Pág. 16

1. Resposta: **(C)**

2.1.

$$\hat{x} = \left(\frac{360°}{2}\right) = 180°$$

2.2. $\hat{x} = 360° - 92° = 268°$

2.3. $\hat{x} = 360° - 302° = 58°$

3.1. Área do círculo $= \pi \times 10^2 = 100 \times \pi$

$$C_1 : \frac{100 \times \pi}{2} = 50\pi$$

$$C_2 : \frac{100\pi}{4} = 25\pi$$

$$C_3 : \frac{100\pi}{8} = 12,5\pi$$

Amplitude do ângulo ao centro (em graus)	180	90	45
Área do setor circular (cm^2)	50π	25π	$12,5\pi$

3.2.

$$\frac{50\pi}{180} = \frac{5}{18}\pi \; ; \qquad \frac{25\pi}{90} = \frac{5}{18}\pi \; ; \qquad \frac{12,5\pi}{45} = \frac{5}{18}\pi \; ; \qquad \frac{50\pi}{180} = \frac{25\pi}{90} = \frac{12,5\pi}{45}$$

Questão 4

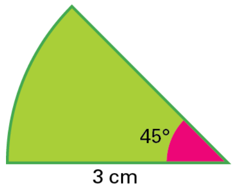
4.1.

$$\begin{array}{ccc} \pi \times 9^2 & — & 360° \\ x & — & 45° \end{array}$$

$$x = \frac{\pi \times 9^2 \times 45}{360} = \frac{81}{8}\pi$$

$$A = \frac{81}{8}\pi \text{ cm}^2$$

4.2. Por exemplo:



Questão 5

$$A_{\text{cone}} = A_{\text{e}} + A_{\text{base}} = \left(\pi \times 5 \times 10 + \pi \times 5^2\right) \text{ cm}^2 = (50\pi + 25\pi) \text{ cm}^2 = 75\pi \text{ cm}^2$$

Questão 6

6.1.

$$V \approx \frac{1}{3} \times 3,1416 \times 3^2 \times 5 \approx 47,1$$

$$V \approx 47,1\text{cm}^3$$

6.2.

$$V \approx \frac{1}{3} \times 3,1416 \times 2^2 \times 6 \approx 25,1$$

$$V \approx 25,1\text{cm}^3$$

1.1.

$$\begin{array}{ccc} 360° & — & \pi \times 6^2 \\ 30° & — & A \end{array}$$

$$A = \frac{30 \times \pi \times 6^2}{360} = \frac{30 \times 3,1416 \times 36}{360} \approx 9,4$$

$$A \approx 9,4\text{cm}^2$$

$$\begin{array}{ccc} 360° & — & 2\pi \times 6 \\ 30° & — & C \end{array}$$

$$C = \frac{30 \times 2 \times \pi \times 6}{360} \approx \frac{360 \times 3,1416}{360} \approx 3,1$$

$$C \approx 3,1 \text{ cm}$$

1.2.

$$\begin{array}{ccc} 360° & — & \pi \times 6^2 \\ 150° & — & A \end{array}$$

$$A = \frac{150 \times \pi \times 6^2}{360} \approx \frac{5400 \times 3,1416}{360} \approx 47,1$$

$$A \approx 47,1 \text{ cm}^2$$

$$\begin{array}{ccc} 360° & — & 2\pi \times 6 \\ 150° & — & C \end{array}$$

$$C = \frac{150 \times 2 \times \pi \times 6}{360} \approx \frac{1800 \times 3,1416}{360} \approx 15,7$$

$$C \approx 15,7 \text{ cm}$$

1.3. $360° - 120° = 240°$

$$\begin{array}{ccc} 360° & — & \pi \times 6^2 \\ 240° & — & A \end{array}$$

$$A = \frac{240 \times \pi \times 6^2}{360} \approx \frac{8640 \times 3,1416}{360} \approx 75,4$$

$$A \approx 75,4 \text{ cm}^2$$

$$\begin{array}{ccc} 360° & — & 2\pi \times 6 \\ 240° & — & C \end{array}$$

$$C = \frac{240 \times 12\pi}{360} \approx \frac{2880 \times 3,1416}{360} \approx 25,1$$

$$C \approx 25,1 \text{ cm}$$

2.1.
$$\begin{array}{ccc} 360° & — & 2\pi \times 14 \\ 50° & — & C \end{array}$$

$$C = \frac{50 \times 2 \times \pi \times 14}{360} \approx \frac{1400 \times 3,1416}{360} \approx 12,2$$

$C \approx 12,2$ cm

2.2. $360° - 50° = 310°$
$$\begin{array}{ccc} 360° & — & 2\pi \times 14 \\ 310° & — & C \end{array}$$

$$C = \frac{310 \times 2 \times \pi \times 14}{360} \approx \frac{8680 \times 3,1416}{360} \approx 75,7$$

$P = (75,7 + 2 \times 14)$ cm$\approx 103,7$ cm

2.3.
$$\begin{array}{ccc} 360° & — & \pi \times 14^2 \\ 50° & — & A \end{array}$$

$$A = \frac{50 \times \pi \times 14^2}{360} \approx \frac{9800 \times 3,1416}{360} \approx 85,5$$

$A \approx 85,5$ cm^2

3.
$$\begin{array}{ccc} 360° & — & \pi \times 10^2 \\ 45° & — & A_1 \end{array}$$

$$A_1 = \frac{45 \times \pi \times 10^2}{360} = \frac{4500\pi}{360} = \frac{25\pi}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} 360° & — & \pi \times 4^2 \\ 45° & — & A_2 \end{array}$$

$$A_2 = \frac{45 \times \pi \times 4^2}{360} = 2\pi$$

$$A = \frac{25\pi}{2} - 2\pi = \frac{21\pi}{2} \approx \frac{21}{2} \times 3,1416 \approx 33,0 \text{ m}^2$$

4.1. $g^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow g^2 = 100$
Como $g > 0$, vem $g = 10$ cm

4.2. a) $A = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = \pi \times 6 \times 10 + \pi \times 6^2 = 60\pi + 36\pi = 96\pi \approx 96 \times 3,1416 \approx 301,6$
$A \approx 301,6$ cm^2

b)

$$V = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 \approx 96 \times 3,1416 \approx 301,6$$

$V \approx 301,6$ cm^3

5.1.

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} V_{\text{cilindro}}$$

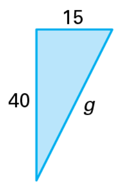
$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cone}}; \qquad V_{\text{sólido}} = V_{\text{cilindro}} - \frac{1}{3} V_{\text{cilindro}} = \frac{2}{3} V_{\text{cilindro}}$$

5.2. $r = 15$ cm ; $h = 40$ cm
a)

$$V_{\text{sólido}} = \frac{2}{3} V_{\text{cilindro}} = \frac{2}{3} \times \pi \times 15^2 \times 40 = 6000\pi$$

$V_{\text{sólido}} = 6000\pi$ cm^3

b) $A_{\text{base}} = \pi \times 15^2 = 225\pi$
Área lateral do cilindro:
$A_{\text{cilindro}} = 2 \times \pi \times 15 \times 40 = 1200\pi$
Área lateral do cone $= \pi \times r \times g$
$g^2 = 15^2 + 40^2$
$g = \sqrt{1825}$
$A_{\text{cone}} = \pi \times 15 \times \sqrt{1825}$
$A = 225\pi + 1200\pi + 15\sqrt{1825}\pi \approx 6490$
$A \approx 6490 \text{ cm}^2$



6.

$$V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} = \pi(0,5)^2 \times 12 + \frac{1}{3} \times \pi \times (0,5)^2 \times 2,5 \approx 3 \times 3,1416 + \frac{1}{3} \times 0,625 \times 3,1416 \approx 10,1$$

$V \approx 10,1 \text{ cm}^3$

7.1. Os triângulos $[OVB]$ e $[O'VD]$ são semelhantes pelo critério AA (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum). Logo:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{O'D'}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{O'V}}$$

$$\frac{10}{6,25} = \frac{15 + \overline{O'V}}{\overline{O'V}}$$

Seja $x = \overline{O'V}$; 10 : 6,25 = 1,6

$$1,6 = \frac{15 + x}{x} \Leftrightarrow 1,6x = 15 + x \Leftrightarrow 1,6x - x = 15 \Leftrightarrow 0,6x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{0,6} \Leftrightarrow x = 25$$

Logo, $\overline{O'V} = 25$ cm

7.2.

$$V_{\text{cone grande}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times (15 + 25) = \frac{1}{3} \times \pi \times 100 \times 40 \approx \frac{4000}{3} \times 3,1416 \approx 4188,8$$

$$V_{\text{cone pequeno}} = \frac{1}{3} \times \pi \times (6,25)^2 \times 25 \approx \frac{1}{3} \times 3,1416 \times (6,25)^2 \times 25 \approx 1022,7$$

$V \approx (4188,8 - 1022,7) \text{ cm}^3 \approx 3166,1 \text{ cm}^3 \approx 3,1661 \text{ dm}^3 \approx 3,17$ L

Pág. 22

1. São necessários 3 cones para encher o cilindro.

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} V_{\text{cilindro}}$$

2. Se $V_{\text{semiesfera}} = 2 \times V_{\text{cone}}$, então $V_{\text{esfera}} = 4 \times V_{\text{cone}}$
Logo:

$$V_{\text{esfera}} = 4 \times V_{\text{cone}} = 4 \times \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = 4 \times \frac{1}{3} \times \pi \times \text{r}^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pág. 24

Questão 7
7.1.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3} \times 3,1416 \times (9,5)^3 \approx 3591$$

$V = 3591 \text{ cm}^3$

7.2. $A = 4\pi r^2 \approx 4 \times 3,1416 \times (9,5)^2 \approx 1134$
$A = 1134 \text{ cm}^2$

1.1. $r = 10$ cm

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 \approx \frac{2}{3} \times 3,1416 \times 10^3 \approx 2094$$

$V \approx 2094 \text{ cm}^3 = 2{,}094 \text{ dm}^3$
Como a capacidade da jarra é de aproximadamente 2 L, a garrafa de água não é suficiente.

1.2.

$$A = \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 \approx 2 \times 3,1416 \times 10^2 \approx 628,3$$

$A \approx 628,3 \text{ cm}^2$

2. $r = 9$ cm
2.1.

$$V = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{1}{6} \times 3,1416 \times 9^3 \approx 381,7$$

$V \approx 381,7 \text{ cm}^3$

2.2.

$$A = \frac{1}{8} \times 4\pi r^2 \approx \frac{1}{2} \times 3,1416 \times 9^2 \approx 127,2$$

$A \approx 127,2 \text{ cm}^2$

Pág. 25

3. Aresta: a cm ; $r = \frac{a}{2}$ cm
$V_{\text{caixa}} = a^3$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{a^3}{8} = \frac{1}{6}\pi a^3$$

$$\frac{a^3}{a^3 - \frac{1}{6}\pi a^3} = \frac{a^3}{a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{6-\pi}{6}} = \frac{6}{6-\pi}$$

Resposta: **(C)**

4.1. a) $h = 4 \times (2r) = 8r$

b) $V = A_{\text{base}} \times h = \pi r^2 \times 8r = 8\pi r^3$

c)

$$V = 4 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{16}{3}\pi r^3$$

4.2.

$$\frac{\frac{16}{3}\pi r^3}{8\pi r^3} = \frac{16}{3 \times 8} = \frac{2}{3}$$

As bolas ocupam $\frac{2}{3}$ do cilindro.

5.

$$A_{\text{semiesfera}} = \frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 7,5^2 \text{cm}^2 \approx 353,429 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{coroa circular}} = \pi \times (6+7,5)^2 - \pi \times 7,5^2 \text{ cm}^2 \approx 395,841 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{chapéu}} \approx (353,429 + 395,841) \text{ cm}^2 \approx 749,3 \text{ cm}^2$$

Pág. 26

Agora é a tua vez

$$A = 4\pi r^2 \approx 4 \times 3,1416 \times (6300)^2 \approx 498760416$$

$A \approx 498760416 \text{ km}^2$

Pág. 27

1.1. 3 ha = 3 hm^2 = 30000 m^2
Resposta: **(B)**

1.2. 10 m^3 = 10 000 dm^3 = 10 000 L
Resposta:**(C)**

1.3. 2500 ml = 2500 cm^3 = 2,5 dm^3
Resposta: **(A)**

2.1. Os triângulos são semelhantes pelo critério AA (são triângulos retângulos com um ângulo comum).
2.2.

$$\overline{CD} = \frac{1}{3}\overline{CA} \Leftrightarrow 3\overline{CD} = \overline{CA} \Leftrightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = 3$$

A razão de semelhança que transforma o triângulo $[DEC]$ no triângulo $[ABC]$ é 3.

$$A_{[ABC]} = A_{[DEC]} \times 3^2 = \left(10 \times 3^2\right) \text{ cm}^2 = 90 \text{ cm}^2$$

Resposta: **(D)**

3.

$$r = \frac{1}{3}$$

3.1. $V = 9^3 = 729$
$V = 729 \text{ cm}^3$
Resposta: **(A)**

3.2.

$$9cm \times \frac{1}{3} = 3cm$$

Resposta: **(A)**

3.3. $V = 3^3 = 27$
$V = 27 \text{ cm}^3$
Resposta: **(C)**

4. $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$

4.1. $a \times b \times c = 3000 \text{ cm}^3$

$$\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b \times \frac{1}{2}c = a \times b \times c \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3000 \times \frac{1}{8} = 375$$

$V = 375 \text{ cm}^3$
Resposta: **(C)**

4.2. $3000 : 200 = 15$

$$15 \times \frac{1}{2} = 7,5$$

O paralelogramo da figura 5 tem 7,5 cm de altura.
Resposta: **(D)**

5. A e B: $7\pi \approx 7 \times 3,1416 \approx 22 \neq 44$
C: $1,6\pi \approx 1,6 \times 3,1416 \approx 5$
A planificação B não representa um cilindro.

6. $r = 10$ cm
$h = 14$ cm

6.1. $V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \pi \times 10^2 \times 14 = 1400\pi$
$V = 1400\pi \text{ cm}^3$
Resposta: **(A)**

6.2.
$V_{\text{cubo}} = \left(2^3\right) \text{ cm}^3 = 8 \text{ cm}^3$
$A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi \times 10^2 = 100\pi$
$A_{\text{base}} = 100\pi \text{ cm}^2$

$$100\pi \times h = 8 \Leftrightarrow h = \frac{8}{100\pi}$$

Resposta: **(D)**

7.1. Não. Nenhuma das faces é um quadrado.

7.2. a) $V = (7 \times 3 \times 6) \text{ cm}^3 = 126 \text{ cm}^3$

b) $A_{\text{base}} = (7 \times 3 \times 2 + 6 \times 3 \times 2 + 7 \times 6 \times 2) \text{ cm}^2 = 162 \text{ cm}^2$

8.1.

$$V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{3 \times 4}{2} \times 6 = 36$$

$V = 36 \text{ cm}^3$

8.2. Hipotenusa da base: a
$a^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow a^2 = 25 \overset{a \geq 0}{\Leftrightarrow} a = 5$
$A_{\text{lateral}} = (3 + 4 + 5) \times 6 = 12 \times 6 = 72$
$A_{\text{lateral}} = 72 \text{ cm}^2$

8.3.

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = \left(72 + 2 \times \frac{4 \times 3}{2}\right) \text{ cm}^2 = 84 \text{ cm}^2$$

Pág. 29

9.1. $A_{\text{total}} = (20 \times 20 \times 2 + 20 \times 15 \times 4) \text{ cm}^2 = 2000 \text{ cm}^2$

9.2. m.d.c. $(20 , 15) = 5$
$20 : 5 = 4$
$15 : 5 = 3$
$4 \times 4 \times 3 = 48$
Na caixa cabem 48 cubos.

10. 50 cm = 5 dm ; 20 cm = 2 dm
5 L = 5 dm^3
$5 \times 2 \times h = 0 \Leftrightarrow h = 0,5$
h = 0,5 dm = 5 cm

11. 20 degraus são equivalente a 10 paralelepípedos retângulos de dimensões 0,3 m, 0,2 m e 3 m
$V = (10\times, 03 \times 0,2 \times 3)$ m^3 = 1,8 m^3

12.1. Os planos são concorrentes oblíquos.

12.2. Volume do prisma triangular
Altura do triângulo: h

$$h^2 + (0,5)^2 = 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 1 - 0,25 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{0,75}$$

$$V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1 \times \sqrt{0,75}}{2} \times 1,2 = 0,6\sqrt{0,75}$$

Volume do paralelepípedo:
$V = 1 \times 1 \times 1,2 = 1,2$
$V_{\text{casa}} = \left(0,6\sqrt{0,75} + 1,2\right)$ m$^3 \approx 1,72$ m^3

13.1. $V = \left(20^3 - 17 \times 17 \times 16\right)$ cm^3 = 3376 cm^3

13.2. Por exemplo:

a) a reta AE

b) a reta EF

c) os planos ABF e DCG

d) os planos ABF e ABG

e) a reta JN

14.1. $6 \times 1^2 = 6$
$6 \times 2^2 = 24$
$6 \times 3^2 = 54$
A: 6 cm^2 ; B: 24 cm^2 ; C: 54 cm^2

14.2. a) A área total é multiplicada por 4.

b) A área total é multiplicada por $3^2 = 9$

14.3. $V_A = 1^3$ cm^3 = 1 cm^3
$V_B = 2^3$ cm^3 = 8 cm^3
$V_C = 3^3$cm^3 = 27 cm^3

14.4. a) $V_a = a^3$
$V_{2a} = (2a)^3 = 2^3a^3 = 8a^3$
O volume é multiplicado por $2^3 = 8$.

b) $V_a = a^3$
$V_{3a} = (3a)^3 = 3^3a^3 = 27a^3$
O volume é multiplicado por $3^3 = 27$.

15.1. Por exemplo:

a) os planos ABF e DCG

b) os planos ILK e IBC

c) os planos EFG e BCF

d) as retas AB e CF

e) as retas BC e FG

f) as retas BC e BF

g) o plano EFG e a reta BF

15.2. A reta é estritamente paralela (HGF e ADC são planos estritamente paralelos porque contêm faces opostas de um paralelepípedo).

15.3. É perpendicular porque $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo retângulo.

15.4. São estritamente paralelas porque contêm faces opostas de um paralelepípedo.

15.5. São perpendiculares porque $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo retângulo.

15.6.

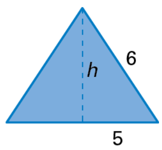
$$V = \left(10 \times 20 \times 1,7 - \frac{1,2 \times 10}{2} \times 10\right)\ \text{m}^3 = (340 - 60)\ \text{m}^3 = 280\ \text{m}^3 = 280\ 000\ \text{dm}^3$$

São necessários 280 000 litros de água.

Pág. 31

16.1. Prisma quadrangular.

16.2. Prisma triangular.



16.3. Altura do triângulo $[EFI]$:

$h^2 + 5^2 = 6^2 \Leftrightarrow h^2 = 36 - 25h^2 = 11 \overset{h>0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{11}$

$$V = \left(10 \times 10 \times 15 + \frac{10\sqrt{11}}{2} \times 10\right)\ \text{cm}^3 = \left(1500 + 50\sqrt{11}\right)\ \text{cm}^3 \approx 1666\ \text{cm}^3$$

17.1. O semicilindro tem 12,5 cm de raio e 16 cm de altura.

$V = \left(25 \times 16 \times 20 + \frac{1}{2} \times \pi \times (12,5)^2 \times 16\right)\ \text{cm}^3 \approx (8000 + 1250 \times 3,1416)\ \text{cm}^3 \approx 11927\ \text{cm}^3$

17.2.

$$A = 25 \times 20 \times 2 + 16 \times 20 \times 2 + 25 \times 16 + \pi \times 12,5^2 + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 12,5 \times 16 \approx$$

$$\approx (1000 + 640 + 400 + 156,25 \times 3,1416 + 200 \times 3,1416)\ \text{cm}^2 \approx 3159\ \text{cm}^2$$

18.1. Por exemplo:

a) as retas AE e BC

b) as retas AB e CD

c) as retas AB e BF

d) as retas AB e AC

18.2.

$$V = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 5\right) \text{ m}^3 = \frac{10}{3} \text{ m}^3 \approx 3,3 \text{ m}^3$$

19.1.

$$V = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \left(\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 4\right) \text{ cm}^3 = 48 \text{ cm}^3$$

19.2. $(ap)^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow ap = \sqrt{25} \overset{ap \geq 0}{\Leftrightarrow} ap = 5$

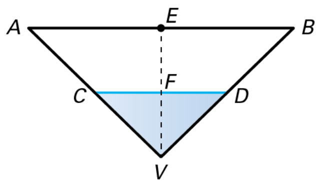
$ap = 5$ cm

19.3.

$$A_{\text{lateral}} = 4 \times \frac{6 \times 5}{2} \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2$$

19.4. $A_{\text{total}} = \left(60 + 6^2\right) \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2$

20.



$$V_{\text{recipiente}} = \left(\frac{1}{3} \times 20 \times 20 \times 9\right) \text{ cm}^3 = 1200 \text{ cm}^3$$

Volume da água:

Consideremos o esquema seguinte de um corte na pirâmide perpendicular à base e que passa no vértice:

Os triângulos $[AVB]$ e $[CVD]$ são semelhantes pelo critério AA (têm um ângulo comum e ângulos agudos paralelos são iguais).

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EV}}{\overline{FV}}$$

$$\frac{20}{\overline{CD}} = \frac{9}{4,5} \Leftrightarrow 20 - \overline{CD} \times 2 \Leftrightarrow \overline{CD} = 10$$

$$V_{\text{água}} = \left(\frac{1}{3} \times 10 \times 10 \times 4,5\right) \text{ cm}^3 = 150 \text{ cm}^3$$

Volume		Tempo (s)
150	——	5
1200	——	x

$$x = \frac{1200 \times 5}{150} = 40$$

40 s − 5 s = 35 s

Resposta: **(B)**

21.1. $A_{\text{base}} = \pi \times 3^2 \text{ cm}^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

21.2. $A_{\text{lateral}} == (\pi \times 3 \times 5) \text{ cm}^2 = 15\pi \text{ cm}^2$

21.3. $A_{\text{total}} = (9\pi + 15\pi) \text{ cm}^2 = 24\pi \text{ cm}^2$

21.4. $h^2 + 3^2 = 5^2 \Leftrightarrow h^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow h^2 = 16 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = 4$

$h = 4$ cm

21.5.

$$V_{\text{cone}} = \left(\frac{1}{3} \times 9\pi \times 4\right) \text{ cm}^3 = 12\pi \text{ cm}^3$$

22.1. Altura do cone:
$h^2 + (1,5)^2 = (2,5)^2 \Leftrightarrow h^2 = 6,25 - 2,25 \Leftrightarrow h^2 = 4 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = 2$

$$V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} = \pi \times (1,5)^2 \times 3,2 + \frac{1}{3} \times \pi \times (1,5)^2 \times 2 \approx 7,2 \times 3,1416 + 1,5 \times 3,1416 \approx 27,3$$

$V_{\text{moinho}} \approx 27,3 \text{ m}^3$
<u>Resposta</u>: **(A)**

22.2. $A = A_{\text{cilindro}} + A_{\text{cone}} = P_{\text{base}} \times h + = 2\pi \times 1,5 \times 3,2 + \pi \times 1,5 \times 2,5 \approx 9,6 \times 3,1416 + 3,75 \times 3,1416 \approx 41,9$
$A \approx 41,9 \text{ m}^2$
<u>Resposta</u>: **(A)**

23.

$$V_{\text{depósito}} = V_{\text{semiesfera}} + V_{\text{cone}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 + \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h \approx \frac{2}{3} \times 2,1416 \times 10^3 + \frac{1}{3} \times 3,1416 \times 10^2 \times 10 \approx 3141,6$$

$V_{\text{depósito}} \approx 3141,6 \text{ cm}^3$
$30 \text{ L} = 30 \text{ dm}^3 = 30\ 000 \text{ cm}^3$
$1 \text{ min } 40 \text{ s} = (60 + 40) \text{ s} = 100 \text{ s}$

100 s	——	30 000 cm^3
x	——	3141,6

São necessários 10 segundos, aproximadamente.

Pág. 33

24.1.

$$C = \frac{1}{2} \times 2\pi r$$

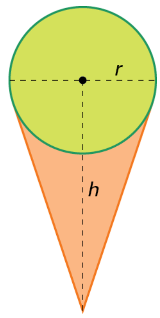
$$1,8 = \pi r \Leftrightarrow r = \frac{1,8}{\pi}$$

24.2.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{1,8}{\pi}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{1,8^3}{\pi^3} = \frac{4}{3} \times \frac{1,8^3}{\pi^2} \approx 0,787\ 873\ 52$$

$0,787\ 873\ 52 m^3 = 787\ 873{,}52 \text{ cm}^3 \approx 787\ 873,5 \text{ cm}^3$

25.



$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

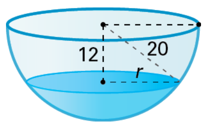
$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{cone}} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Leftrightarrow 4r^3 = r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{4r^3}{r^2} \Leftrightarrow h = 4r$$

26. O volume da água com h cm de altura é igual ao volume da esfera: $V_{\text{água}} = V_{\text{esfera}}$

$$\pi \times 5^2 \times h = \frac{4}{3} \times \pi \times (1,5)^3 \Leftrightarrow 3 \times 25h = 4 \times 3,375 \Leftrightarrow 75h = 13,5 \Leftrightarrow h = \frac{13,5}{75} \Leftrightarrow h = 0,18$$

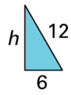
27. $20 - 8 = 12$

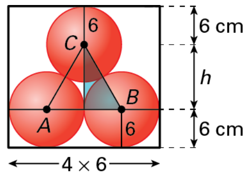


$$12^2 + r^2 = 20^2 \Leftrightarrow r^2 = 400 - 144 \Leftrightarrow r^2 = 256 \overset{r \geq 0}{\Leftrightarrow} r = \sqrt{256} \Leftrightarrow r = 16$$

$r = 16 \text{ cm}$

28. $r = 6$ cm





$$h^2 + 6^2 = 12^2 \Leftrightarrow h^2 = 144 - 36 \Leftrightarrow h^2 = 108 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{108}$$

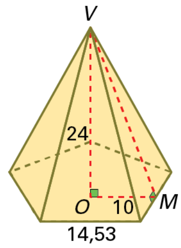
Comprimento: (4×6) cm $= 24$ cm
Largura: $(6 + 6 + h)$ cm$= \left(12 + \sqrt{108}\right)$ cm

Pág. 34

1.

$$V = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \left(\frac{1}{3} \times 7 \times 4 \times 9\right) \text{ cm} = 84 \text{ cm}^3$$

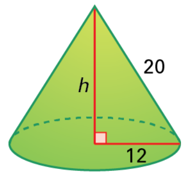
2. $\overline{VM}^2 = 10^2 + 24^2$
$\overline{VM} = \sqrt{676} \Leftrightarrow \overline{VM} = 26$



$$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + 5 \times A_{\text{face}} \approx \frac{5 \times 14,53 \times 10}{2} + 5 \times \frac{14,53 \times 26}{2} \approx 363,25 + 944,45 \approx 1307,7$$

$A_{\text{total}} \approx 1308$ cm^2

3.



$$h^2 + 12^2 = 20^2 \Leftrightarrow h^2 = 400 - 144 \Leftrightarrow h^2 = 256 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{256} \Leftrightarrow h = 16$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 16 = 768\pi \approx 768 \times 3,1416 \approx 2412,75$$

$V_{\text{cone}} \approx 2413$ cm^3 columnbreak

4.1. $r = 10$ cm
$360° \quad — \quad 2 \times \pi \times 10$
$216° \quad — \quad x$

$$x = \frac{216 \times 2 \times \pi \times 10}{360} = 12\pi$$

O comprimento do arco AB é igual a 12π cm.

4.2. Seja r o raio da base do cone.
A geratriz do cone é $g = 10$ cm.
O comprimento do arco AB é igual ao perímetro da base do cone:
$12\pi = 2 \Leftrightarrow r = 6$
$r = 6$ cm
$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = \pi r g + \pi r^2 = \pi \times 6 \times 10 + \pi \times 6^2 = 60\pi + 36\pi = 96\pi$
$A_{\text{cone}} = 96\pi$ cm^2

Pág. 35

5.1.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 5000 \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 15\ 000 \Leftrightarrow r^3 = \frac{15\ 000}{4\pi} \Rightarrow r \approx \sqrt[3]{\frac{15\ 000}{4 \times 3,1416}} \Rightarrow r \approx 10,6078$$

$r \approx 10,61$ m

5.2. $A = 4\pi r^2 \approx 4 \times \pi \times (10,6078)^2$ m$^2 \approx 1414$ m^2

6. $r = (27 : 2)$ cm $= 1{,}35$ cm

6.1.

$$V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} = \pi \times (1,35)^2 \times 1,4 + \frac{1}{3} \times \pi \times \left(1,35^2\right) \times 1,2 \approx 3,1416 \times 2,5515 + 0,729 \times 3,1416 \approx 10,306$$

$V_{\text{areia}} \approx$ cm^3

6.2.

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{2}{3} \times 3,1416 \times (1,35)^3 \approx 5,153$$

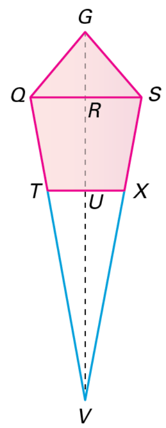
$V_{\text{areia}} = V_{\text{semiesfera}} + V_{\text{parte do cilindro}}$

$$10,306 = 5,153 + \pi \times (1,35)^2 \times h \Leftrightarrow 5,153 = \pi \times (1,35)^2 \times h \Rightarrow h \approx \frac{5,153}{3,1416 \times (1,35)^2} \Leftrightarrow h \approx 0,900$$

$h \approx 0,9$ cm

7.1. A reta AD é estritamente paralela GHI porque os planos ADC e GHI são estritamente paralelos.

7.2. Na figura está representado, em esquema, o corte do modelo da figura 8 pelo plano que passa em V e nos pontos médios dos lados $[AB]$ e $[DC]$.



Os triângulos $[RVS]$ e $[UVX]$ são semelhantes pelo critério AA (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum)

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{UX}} = \frac{\overline{RV}}{\overline{UV}} \Leftrightarrow \frac{9}{\overline{UX}} = \frac{15+30}{30} \Leftrightarrow \frac{9}{\overline{UX}} = \frac{45}{30} \Leftrightarrow \frac{9}{\overline{UX}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 18 = 3 \times \overline{UX} \Leftrightarrow \overline{UX} = 6$$

$\overline{HI} = 2 \times \overline{UX} = 12\text{cm}$

$V_{\text{prisma}} = \frac{18\times10}{2} \times 18 \text{ cm}^3 = 1620 \text{ cm}^3$

$$V_{\text{tronco}} = \left(\frac{1}{3} \times 18 \times 18 \times 45 - \frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times 30\right) \text{ cm}^3 = (4860 - 1440) \text{ cm}^3 = 3420 \text{ cm}^3$$

$V_{\text{casa}} = (1620 + 3420) \text{ cm}^3 = 5040 \text{ cm}^3$

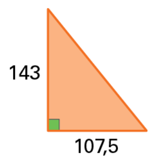
Pág. 36

1. $215 : 2 = 107{,}5$

Apótema da pirâmide

$ap^2 = 143^2 + 107,5^2$

$ap = \sqrt{143^2 + 107,5^2} \approx 178,900$ m



$$A_{\text{lateral}} \approx 4 \times \frac{215 \times 178,9}{2} \approx 76\ 927$$

$A_{\text{lateral}} \approx 76\ 927 \text{ m}^2$

2.1.

$360° \quad — \quad 2 \times \pi \times 8$

$120° \quad — \quad x$

$$x = \frac{120 \times 16\pi}{360} = \frac{16\pi}{3} \approx \frac{16 \times 3,1416}{3} \approx 16,756$$

O arco AB tem aproximadamente 16,8 cm de comprimento.

2.2.

$360° \quad — \quad \pi \times 8^2$

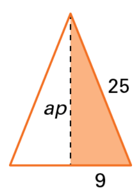
$120° \quad — \quad x$

$$x = \frac{120 \times 64\pi}{360} = \frac{64\pi}{3} \approx \frac{64 \times 3,1416}{3} \approx 67,021$$

A área da figura é aproximadamente $67{,}0 \text{ cm}^2$

3.1. Face da pirâmide:

$$ap^2 + 9^2 = 25^2 \Leftrightarrow ap^2 = 625 - 81 \overset{ap \geq 0}{\Leftrightarrow} ap = \sqrt{544} \Leftrightarrow ap = \sqrt{16 \times 34} \Leftrightarrow ap = 4\sqrt{34}$$

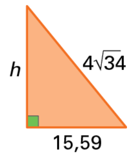


3.2.

$$A = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \approx \frac{18 \times 6 \times 15,59}{2} + 6 \times \frac{18 \times 4\sqrt{34}}{2} \approx 841,86 + 1259,49 \approx 2101$$

$A \approx 2101\ \text{cm}^2$

3.3. Altura do cone = altura da pirâmide (h)
$h^2 + (15,588)^2 = \left(4\sqrt{34}\right)^2$
$h = \sqrt{\left(4\sqrt{34}\right)^2 - (15,588)^2}$
$h \approx 17,35$



Raio da base do cone = apótema da base da pirâmide $\approx 15,588$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi \times (15,588)^2 \times 17,35 \approx 4414,87$$

$V_{\text{cone}} \approx 4414,8\ \text{cm}^3$

4.

$$V = V_{\text{prisma}} - V_{\text{cone}} = 3 \times 3 \times 5 - \frac{1}{3} \times \pi \times (1,5)^2 \times 5 \approx 45 - 3,75 \times 3,1416 \approx 33,219$$

$V \approx 33,2\ \text{cm}^3$

Pág. 37

5. $r = 10$ cm ; $h = 25$ cm
5.1.

$$V = V_{\text{semiesfera}} + V_{\text{cilindro}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 + \pi \times r^2 \times h = \frac{2}{3} \times \pi \times 10^3 + \pi \times 10^2 \times 25 =$$

$$= \frac{2000}{3}\pi + 2500\pi = \left(\frac{2000}{3} + 2500\right)\pi = \frac{9500\pi}{3}$$

$$V = \frac{9500\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

5.2. $A_{\text{lateral}} = 2\pi r \times h = 2 \times \pi \times 10 \times 25 = 500\pi$
$A_{\text{lateral}} = 500\pi\ \text{cm}^2$

5.3.

$$A = \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 = 2\pi \times 10^2 = 200\pi$$

$A = 200\pi\ \text{cm}^2$

6. $A = 6 \times 2 \times 5 + 6 \times \frac{2 \times 4}{2} = 60 + 24 = 84$
$A = 84\ \text{cm}^2$

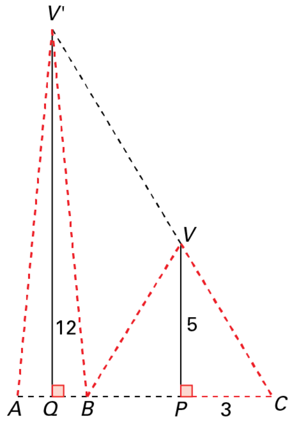
7. Seja a a aresta do cubo.
$V_{\text{cubo}} = a^3$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \frac{a \times a}{2} \times a = \frac{1}{6}a^3$$

$$\frac{V_{\text{pirâmide}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{1}{6}$$

Resposta: **(C)**

8. Os triângulos $[V'QC]$ e $[UPC]$ são semelhantes, pelo critério AA (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum).



$$\frac{\overline{V'Q}}{\overline{VP}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{PC}}$$

$$\frac{12}{5} = \frac{\overline{QC}}{3} \Leftrightarrow 3 \times 12 = 5 \times \overline{QC} \Leftrightarrow \overline{QC} = \frac{36}{5} \Leftrightarrow \overline{QC} = 7,2$$

$$\overline{QB} = \overline{QC} - \overline{BC} = 7,2 - 2 \times 3 = 1,2$$

Volume do cone de raio da base:

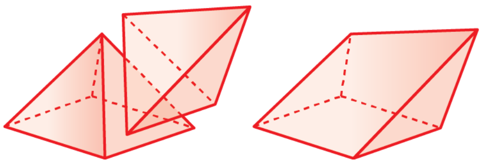
$$\overline{QB}: \ V = \left(\frac{1}{3} \times \pi \times (1,2)^2 \times 12\right) \text{ cm}^3 = 5,76\pi \text{ cm}^3$$

Volume do conde de raio da base:

$$\overline{PC}: \ V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 = 15\pi \text{ cm}^3$$

1.1. A resposta esperada é sete faces.
(5 faces da pirâmide quadrangular + 4 faces da pirâmide triangular − 2 faces que ficam sobrepostas).

1.2. O sólido fica com cinco faces (das nove faces há duas que ficam sobrepostas e duas faces de um sólido que ficam, cada uma, no mesmo plano de duas faces do outro sólido).



2.1. $V_A = \pi \times 3^2 \times 10 \approx 3,1416 \times 90 \approx 283 \text{ cm}^3$
$V_B = 5,32 \times 5,32 \times 10 \approx 283 \text{ cm}^3$
$A_A = (2 \times \pi \times 3 \times 10 + 2 \times \pi \times 9) \text{ cm}^2 = (60 \times 3,1416 + 18 \times 3,1416) \text{ cm}^2 \approx 245 \text{ cm}^2$
$A_B = 5,32 \times 2 + 4 \times 5,32 \times 10 \text{ cm}^2 \approx 269 \text{ cm}^2$

---

3. Seja r o raio da bola.
$V_A = \pi r^2 \times 8r = 8\pi r^3$
$V_B = \pi r^2 \times 4r + 2r \times 2r \times 4r = 4\pi r^3 + 16r^3 = 4(\pi + 4)r^3$
$V_C = 4r \times 4r \times 2r = 32r^3$

$$V_D = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \times 6r = \left(\frac{4}{3}\pi + 6\pi\right) r^3$$

$V_D < V_A < V_B < V_C$

6. Trigonometria no triângulo retângulo

Pág. 42

1.1. Critério AA. Os triângulos são semelhantes porque dois ângulos internos de um são iguais a dois ângulos internos de outro (são triângulos retângulos com um ângulo agudo igual).

1.2.

$$\frac{6}{3} = \frac{3}{1,5} = \frac{4}{2}$$

Critério LLL. Os triângulos são semelhantes porque os comprimentos dos lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados do outro.

1.3.

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Critério LAL. Os triângulos são semelhantes porque os comprimentos de dois lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos de dois lados do outro e os ângulos por eles firmado em cada triângulo são iguais.

2. Os triângulos $[ABE]$ e $[ACD]$ são semelhantes pelo critério AA (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum).

Logo,

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}$$

$$\frac{x}{35} = \frac{y+40}{40} = \frac{27+45}{45} \Leftrightarrow \frac{x}{35} = \frac{72}{45} \text{ e } \frac{y+40}{40} = \frac{72}{45}$$

$$x = 35 \times \frac{8}{5} \quad \text{e} \quad y + 40 = 40 \times \frac{8}{5}$$

$x = 56$ e $y = 24$

<u>Resposta:</u> **(C)**

3.

$$A_{[BCD]} = \frac{4,5 \times 2}{2} \text{ m}^2 = 4,5 \text{ m}^2$$

Os triângulos $[ABE]$ e $[CDE]$ são semelhantes pelo critério AA, pois $C\hat{B}E = E\hat{B}C$ e $B\hat{A}E = D\hat{C}B$.

A razão de semelhança (da ampliação) é $r = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{5}{2}$.

Então,

$$A_{[ABE]} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times A_{[BCD]} = \frac{25}{4} \times 4,5 \text{ m}^2 = 28,125 \text{ m}^2$$

$A_{\text{secção}} = (4,5 + 28,125) \text{ m}^2 = 32,625 \text{ m}^2$

4. Atendendo à semelhança dos triângulos, temos

$$\frac{h}{2} = \frac{56+4}{4} \Leftrightarrow 4h = 120 \Leftrightarrow h = 30$$

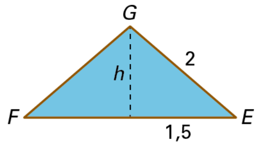
$h = 30$ cm

Pág. 43

5.1. $DC \parallel AB$ e AB está contida no plano ABE. Logo, a reta DC é paralela ao plano ABE.

<u>Resposta:</u> **(C)**

5.2. Altura do triângulo $[FEG]$



$h^2 + 1,5^2 = 2^2 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{4 - 2,25} \Leftrightarrow h = \sqrt{1,75}$

$$V = \left(\frac{3 \times \sqrt{1,75}}{2} \times 6 + 3 \times 3 \times 6 \right) \text{ m}^3 = \left(9\sqrt{1,75} + 54\right) \text{ m}^3 \approx 65,9 \text{ m}^3$$

6.1. Se o triângulo $[SLT]$ é isósceles, a altura relativa à base $[ST]$ é igual ao raio da circunferência (3 cm)
Logo,

$$V = \left(\frac{1}{3} \times \frac{6 \times 3}{2} \times 5 \right) \text{ cm}^3 = 15 \text{ cm}^3$$

6.2.

$$V_{\text{semicilindro}} = \left(\frac{\pi \times 3^2}{2} \times 5 \right) \text{ cm}^3 = \frac{45\pi}{2} \text{ cm}^3$$

$$\frac{\frac{45\pi}{2}}{15} = \frac{45\pi}{15 \times 2} = \frac{3\pi}{2}$$

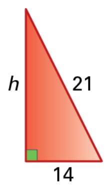
7.1. Área da superfície lateral do cone

$360° \quad — \quad \pi \times 21^2$
$240° \quad — \quad x$

$$x = \frac{240 \times \pi \times 21^2}{360} = 294\pi$$

$\text{A} = 294\pi \text{ cm}^2$

7.2. Área da superfície lateral do cone $= \pi \times r \times g$ sendo
r o raio da base e g a geratriz

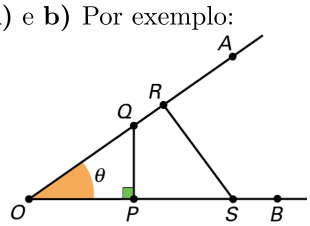


$\pi \times r \times g = 294\pi$
$r \times 21 = 294 \Leftrightarrow r = 14$
Seja h a altura do cone
$h^2 + 14^2 = 21^2 \Leftrightarrow \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{441 - 196} \Leftrightarrow h = \sqrt{245}$

$$V_{\text{cone}} = \left(\frac{1}{3} \times \pi \times 14^2 \times \sqrt{245} \right) \text{ cm}^3 \approx \left(\frac{1}{3} \times 3,1416 \times 169 \times \sqrt{245} \right) \text{ cm}^3 \approx 3212,7 \text{ cm}^3$$

Pág. 44

1. a) e **b)** Por exemplo:



c) Os triângulos $[OPQ]$ e $[OSR]$ são semelhantes pelo critério AA dado que $P\hat{O}Q = S\hat{O}R = \theta$ e $Q\hat{P}O = O\hat{R}S = 90°$.

d) Os triângulos são semelhante pelo critério AA pois têm dois ângulos internos de um iguais a dois ângulos internos de outro: o ângulo reto e o ângulo agudo θ.

2.

$[ABG]$	$[ACF]$	$[ADE]$
$\frac{\overline{GB}}{\overline{GA}} = \frac{3}{5}$	$\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	$\frac{\overline{ED}}{\overline{EA}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
$\frac{\overline{BA}}{\overline{GA}} = \frac{4}{5}$	$\frac{\overline{CA}}{\overline{FA}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	$\frac{\overline{DA}}{\overline{EA}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$
$\frac{\overline{GB}}{\overline{GA}} = \frac{3}{4}$	$\frac{\overline{FC}}{\overline{CA}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	$\frac{\overline{ED}}{\overline{DA}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

3. a)

$$\frac{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

b)

$$\frac{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

c)

$$\frac{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{3}{4}$$

Pág. 46

Questão 1

1.1. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

1.2. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

1.3. $\tan\alpha = \frac{4}{3}$

1.4. $\sin\beta = \frac{3}{5}$

1.5. $\cos\beta = \frac{4}{5}$

1.6. $\tan\beta = \frac{3}{4}$

Pág. 47

Questão 2

2.1. Os triângulos são semelhantes (critério AA)

$$\frac{x}{3,75} = \frac{7,5}{5} \Leftrightarrow x = 3,75 \times 1,5 \Leftrightarrow x = 5,625$$

$x = 5{,}625$ m

2.2. Cálculo da hipotenusa
$h^2 = 3,75^2 + 5^2 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{39,0625} \Leftrightarrow h = 6,25$

$$\sin\alpha = \frac{3,75}{6,25} = \frac{375:125}{625:125} = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{5}{6,25} = \frac{500:125}{625:125} = \frac{4}{5} \qquad \tan\alpha = \frac{3,75}{5} = \frac{375:125}{500:125} = \frac{3}{4}$$

1.1. a) m **b)** r

1.2. a) r **b)** m

1.3. a) $\sin\alpha = \frac{m}{a}$

b) $\cos\alpha = \frac{\pi}{a}$

c) $\tan\alpha = \frac{m}{r}$

d) $\sin\beta = \frac{r}{a}$

e) $\cos\beta = \frac{m}{a}$

f) $\tan\beta = \frac{r}{m}$

Pág. 48

2.1. 202 + 212 = 400 + 441 = 841
292 = 841
202 + 212 = 292
82 + 62 = 64 + 36 = 100
102 = 100
82 + 62 = 102
52 + 122 = 25 + 144 = 169
132 = 169
52 + 122 = 132

2.2.

Triângulo	Hipotenusa	Cateto oposto	Cateto adjacente
$[ABC]$	29	21	20
$[DEF]$	10	6	8
$[IGH]$	13	5	12

2.3. Triângulo $[ABC]$:

$\sin\alpha = \dfrac{21}{29}$ $\cos\alpha = \dfrac{20}{29}$ $\tan\alpha = \dfrac{21}{20}$

Triângulo $[DEF]$:

$\sin\alpha = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ $\cos\alpha = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ $\tan\alpha = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

Triângulo $[IGH]$:

$\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$

3.1.
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
$24^2 + \overline{AC}^2 = 25^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 625 - 576 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 49 \Leftrightarrow \overline{AC} = 7 \ \left(\overline{AC} > 0\right)$

3.2. a) $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$ **b)** $\cos\alpha = \dfrac{24}{25}$ **c)** $\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$ **d)** $\sin\beta = \dfrac{24}{25}$ **e)** $\cos\beta = \dfrac{7}{25}$ **f)** $\tan\beta = \dfrac{24}{7}$

4. I) A soma das amplitudes dos três ângulos internos é um ângulo raso, ou seja, é igual a dois ângulos retos. Logo a soma dos dois ângulos não retos é igual a um ângulo reto.

Portanto, cada um destes dois ângulos tem uma amplitude inferior à de um ângulo reto pelo que são dois ângulos agudos.

II) Se um dos ângulos agudos tem amplitude então o outro ângulo agudo tem a mesma amplitude porque a soma dos dois é um ângulo reto.

Como num triângulo, a ângulos iguais, opõem-se lados iguais, o triângulo tem dois lados iguais. Logo, é isósceles.

5.1. $0 < \sin x < 1$ pelo que $\sin x \neq \frac{5}{4}$

5.2. Num triângulo retângulo, se A é o comprimento da hipotenusa e se b e c são o comprimento dos catetos então $0 < b < a$ e $0 < c < a$, dado que a hipotenusa é o maior dos lados.

Então, $0 < \frac{b}{a} < 1$ e $0 < \frac{c}{a} < 1$, ou seja, se α é um dos ângulos agudos do triângulo, então $0 < \sin\alpha < 1$ e $0 < \cos\alpha < 1$.

5.3. A tangente de um ângulo agudo pode tomar qualquer valor real positivo.

Pág. 49

6.1. Os triângulos $[ADC]$ e $[CDB]$ são semelhantes

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

$$\frac{2}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{8} \Leftrightarrow \overline{CD} \times \overline{CD} = 2 \times 8 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 16 \overset{\overline{CD}>0}{\Leftrightarrow} \overline{CD} = 4$$

$\overline{CD} = 4$ cm

6.2. $\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 20 \overset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{4 \times 5} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{5}$
$\overline{BC}^2 = 4^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 80 \overset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = \sqrt{16 \times 5} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4\sqrt{5}$
$P = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 10 = 10 + 6\sqrt{5}$
$P = \left(10 + 6\sqrt{5}\right)$ cm

6.3. **a)**

$$\sin\left(D\hat{A}C\right) = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b)

$$\cos\left(D\hat{A}C\right) = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

c)

$$\tan\left(D\hat{A}C\right) = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2$$

6.4. a)

$$\sin\left(C\hat{B}D\right) = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

b)

$$\cos\left(C\hat{B}D\right) = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

c)

$$\tan\left(C\hat{B}D\right) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

7.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[AED]$ são semelhantes pelo critério AA (são triângulos retângulos com um lado agudo comum).

7.2. Da semelhança dos triângulos $[ABC]$ e $[AED]$ resulta que $A\hat{C}B = D\hat{E}A$.

a)

$$\sin\left(A\hat{C}B\right) = \sin\left(D\hat{E}A\right) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{3}{5}$$

b)

$$\cos\left(A\hat{C}B\right) = \cos\left(D\hat{E}A\right) = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{4}{5}$$

c)

$$\tan\left(A\hat{C}B\right) = \tan\left(D\hat{E}A\right) = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{3}{4}$$

8.1.

$$\sin\alpha = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{\overline{BC}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\times\overline{BC} = 5\times 4 \Leftrightarrow \overline{BC} = 10$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 4^2 + \overline{AB}^2 = 10^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 100 - 16 \overset{\overline{AB}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AB} = \sqrt{84} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{4\times 21} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{21}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{2\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

8.2. a)

$$\sin\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2\sqrt{21}}{10} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

b)

$$\cos\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

c)

$$\tan\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2\sqrt{21}}{4} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Pág. 50

1. A soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso. Logo, $\alpha+\beta$ é um ângulo reto pelo que α e β são complementares.

2.1. a)

$$\sin\alpha = \frac{c}{a}$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}$$

c)

$$\tan\alpha = \frac{c}{b}$$

2.2. a)

$$\sin\beta = \frac{b}{a}$$

b)

$$\cos\beta = \frac{c}{a}$$

c)

$$\tan\beta = \frac{b}{c}$$

3.1. $\sin\alpha = \cos\beta$

3.2. $\cos\alpha = \sin\beta$

3.3.

$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$$

4.1.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}}=\frac{c}{a}\times\frac{a}{b}=\frac{c}{b}$$

4.2.

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{a}\times\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$$

5.1.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

5.2.

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\tan\beta$$

Pág. 51

Questão 3

3.1. a) $\sin 20^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\cos 70^\circ$

b) $\cos 45^\circ=\sin(90^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ$

c) $\cos a=\sin(90^\circ-a)$

d) $\cos(a-20^\circ)=\sin[90^\circ-(a-20^\circ)]=\sin(90^\circ-a+20^\circ)=\sin(110^\circ-a)$

3.2. $\tan\alpha=\frac{7}{24}$; $\sin\alpha=0,28$; $\cos\alpha=x$

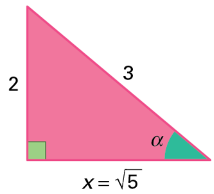
$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{7}{24}=\frac{0,28}{x}\Leftrightarrow 7x=24\times 0,28\Leftrightarrow x=\frac{24}{7}\times\frac{28}{100}\Leftrightarrow x=\frac{24\times 4}{100}\Leftrightarrow x=0,96$$

$\cos\alpha=0,96$

Pág. 52

Questão 4



$$\sin\alpha=\frac{2}{3}$$

1.° processo

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{4}{9}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{5}{9}$$

Como $\cos\alpha>0$, temos $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

2.° processo

$2^2+x^2=3^2\Leftrightarrow x^2=9-4\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{5}$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\qquad\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Pág. 53

1.1. $\sin 30^\circ=\cos(90^\circ-30^\circ)=\cos 60^\circ$ (verdadeira)

1.2. $\cos 30^\circ=\sin(90^\circ-30^\circ)=\sin 60^\circ$ (verdadeira)

1.3.

$$\tan 30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}$$

(falsa)

1.4. $\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$ (verdadeira)

1.5. $(\sin 60°)^2 = \sin^2 60°$ (verdadeira)

1.6. $(\sin 6°)^2 = \sin^2 6° \neq \sin\left(6^2\right)^°$ (falsa)

2. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

2.1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$$

Como $\sin\alpha > 0$, temos:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2.2.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \times 3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

3. $\tan\alpha = 2$
$x^2 = 1^2 + 2^2 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{5}$

$$\text{Se } \tan\alpha = 2, \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\alpha + 3\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} + 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

4.1. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 1 = 2$

4.2.

$$\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \underset{(\sin\alpha)}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} + \underset{(\cos\alpha)}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} + \underset{(1)}{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2 + 1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1+1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

4.3.

$$\frac{1}{\tan\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{\tan\theta}$$

5.1.

$$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2} = 1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

5.2.

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

6.1.

$$\tan^2\alpha + 1 = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

6.2. $\tan\alpha = 3$

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$3^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 10 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{10}$$

Como $\cos\alpha > 0$, vem:

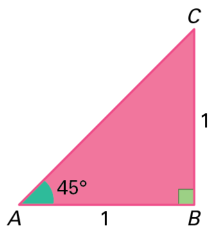
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Pág. 54

1.1. Num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais. Logo, $B\hat{A}C = A\hat{C}B$.
Como $B\hat{A}C + A\hat{C}B + C\hat{B}A = 180°$, $B\hat{A}C = A\hat{C}B$ e $C\hat{B}A = 90°$ vem
$B\hat{A}C + B\hat{A}C + 90° = 180° \Leftrightarrow 2B\hat{A}C = 90° \Leftrightarrow B\widehat{A}C = 45°$

1.2. $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2 \overset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{2}$$



a)

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

b)

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c)

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2.1. a) Cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero tem amplitude $180° : 3 = 60°$.

b)

$$A\hat{C}M = \frac{A\hat{C}B}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

2.2. $\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = 1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{MC}^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{MC}^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \overline{MC}^2 = \frac{3}{4}$$

Como $\overline{MC} > 0$,

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a)

$$\sin 60° = \frac{\overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b)

$$\cos 60° = \frac{\overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

c)

$$\tan 60° = \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

d)

$$\sin 30° = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

e)

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

f)

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Pág. 55

Questão 5
5.1.

$$\sin 30^\circ - 2\tan 45^\circ - \cos^2 60^\circ = \frac{1}{2} - 2 \times 1\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\underset{(2)}{2}} - \underset{(4)}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2-8+1}{4} = -\frac{5}{4}$$

5.2.

$$(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ) - \frac{\sqrt{6}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{4} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5}{4}$$

5.3. $\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + \tan 45^\circ = 1 + 1 = 2$

Questão 6 (100 – 1,5) m = 98,5 m

$$\tan\alpha = \frac{98,5}{200}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{98,5}{200}\right) \approx 26,220^\circ$$

$\alpha \approx 26,220^\circ$
$0,220 \times 60 = 13,2$
$\alpha \approx 26^\circ 13'$

Pág. 56

Questão 7

7.1.

$$\frac{x}{10} = \cos 31^\circ$$

$$\frac{x}{10} \approx 0,8572 \Leftrightarrow x \approx 8,572$$

$x \approx 8,57$ cm

7.2.

$$\sin\alpha = \frac{1}{8}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) \approx 7,18^\circ$$

7.3.

$$\cos\alpha = \frac{3}{7}$$

$$\sin\alpha + \tan\alpha = \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)\right) + \tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)\right) \approx 3,01$$

Pág. 57

1.1. $C\hat{B}A = B\hat{C}A$ porque $\overline{AB} = \overline{AC}$
Portanto, $C\hat{B}A + C\hat{B}A + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2C\hat{B}A = 90^\circ \Leftrightarrow C\hat{B}A = 45^\circ$

1.2.

$$\frac{\overline{AB}}{5} = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \overline{AB} = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{cm}$$

1.3.

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{25 \times 2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{4}$$

$A_{[ABC]} = 6{,}25 \text{ cm}^2$

2.

$$\overline{BC} = \frac{24}{6} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

2.1.

$$B\hat{O}C = \frac{360°}{6} = 60°$$

Como $\overline{OC} = \overline{OB}$, temos $C\hat{B}O = O\hat{C}B$.
Portanto,
$B\hat{O}C + C\hat{B}O + O\hat{C}B = 180° \Leftrightarrow C\hat{B}O + C\hat{B}O + 60° = 180° 2 \times C\hat{B}O = 120° \Leftrightarrow C\hat{B}O = 60°$

2.2.

$$\overline{PB} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{4}{2} \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PB}} = \tan\left(C\hat{B}O\right) \Leftrightarrow \frac{\overline{OP}}{2} = \tan\left(60°\right)$$

$\overline{OP} = 2 \times \sqrt{3}$
$\overline{OP} = 2\sqrt{3}$ cm

2.3.

$$A = \left(\frac{24}{2} \times 2\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

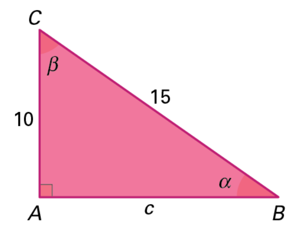
3.1. $10^2 + c^2 = 15^2 \Leftrightarrow c^2 = 225 - 100 \Leftrightarrow c^2 = 125 \overset{c \geq 0}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{125} \Leftrightarrow c = 5\sqrt{5}$
$c = 5\sqrt{5}$ cm $\approx 11,2$ cm

$$\sin\alpha = \frac{10}{15} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41,8°$$

$$\cos\beta = \frac{10}{15} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{2}{3}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48,2°$$



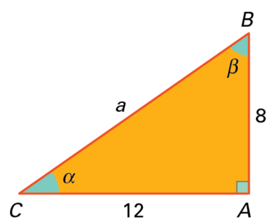
3.2. $a^2 = 12^2 + 8^2 \Leftrightarrow a^2 = 208 \overset{a \geq 0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{208}$
$a = \sqrt{208}$ cm $\approx 14,4$ cm

$$\tan\alpha = \frac{8}{12} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33,7°a]$$

$$\tan\beta = \frac{12}{8} \Leftrightarrow \tan\beta = \frac{3}{2}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56,3°$$



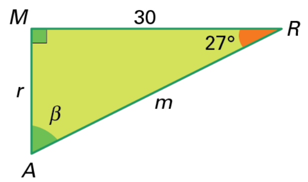
3.3. $\beta = 180° - 90° - 27° = 63°$

$$\frac{r}{30} = \tan 27° \Leftrightarrow r = 30 \times \tan 27°$$

$$r \approx (30 \times 05095)\ \text{cm} \approx 15,3\ \text{cm}$$

$$\frac{30}{m} = \cos 27° \Leftrightarrow m = \frac{30}{\cos 27°}$$

$$m \approx \frac{30}{0,8910}\ \text{cm} \approx 33,7\ \text{cm}$$



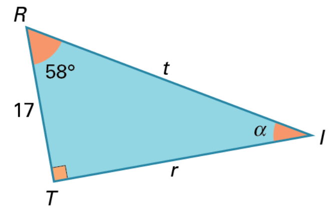
3.4. $\alpha = 180° - 90° - 58° = 32°$

$$\frac{r}{17} = \tan 58° \Leftrightarrow r = 17 \times \tan 58°$$

$$r \approx 17 \times 1,600\ \text{cm} \approx 27,2\ \text{cm}$$

$$\frac{17}{t} = \cos 58° \Leftrightarrow t = \frac{17}{\cos 58°}$$

$$t \approx \frac{17}{0,5299}\ \text{cm} \approx 32,1\ \text{cm}$$



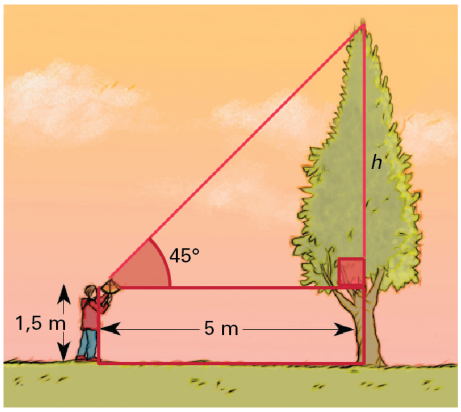
Pág. 58

1.

$$\frac{h}{5} = \tan 45°$$

$$h = 5 \times \tan 45° = 5 \times 1 = 5$$

Altura da árvore = (5 + 1,5) m = 6,5 m



Questão 8

$$\frac{\overline{AC}}{6} = \sin 30° \Leftrightarrow \overline{AC} = 6 \times \sin 30°$$

$$\overline{AC} = \left(6 \times \frac{1}{2}\right)\ \text{m} = 3\ \text{m}$$

Pág. 59

Questão 9

$360° : 5 = 72°$

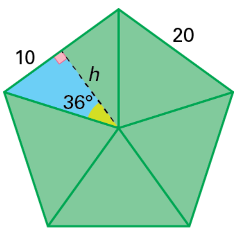
$72° : 2 = 36°$

$20 : 2 = 10$

$$\frac{10}{h} = \tan 36° \Leftrightarrow h = \frac{10}{\tan 36°}$$

$$A = 5 \times \frac{20 \times \frac{10}{\tan 36°}}{2} = \frac{500}{\tan 36°}$$

$$A \approx 688,2\ \text{m}^2$$



1.

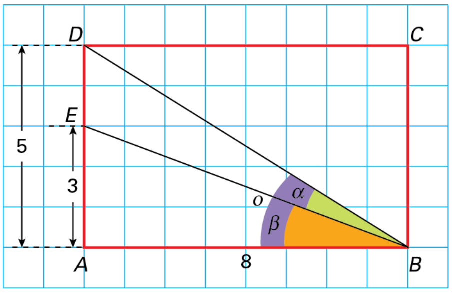
$$\frac{500}{\overline{AG}} = \sin 10° \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{500}{\sin 10°}$$

$\overline{AG} \approx \frac{500}{0{,}1736}$ m $\approx 2879,4$ m

---

Pág. 60

2.



$$\tan \beta = \frac{3}{8}$$

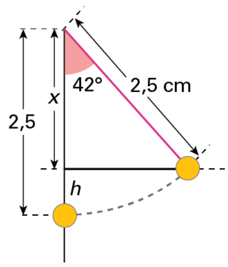
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) \approx 20,556°$$

$$\tan \theta = \frac{5}{8}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 32,005°$$

$$\alpha = \theta - \beta \approx (32,005 - 20,556)° \approx 11,4°$$

3.



$$\frac{x}{2,5} = \cos 42°$$

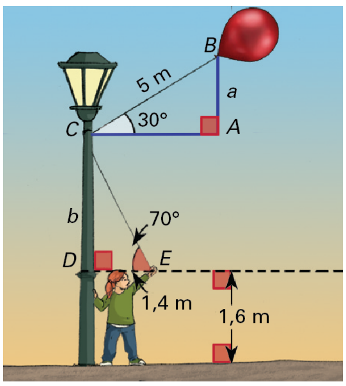
$x = 2,5 \cos 42°$
$h = 2,5 - x$
$h = (2,5 - 2,5\cos 42°)$ cm $\approx 0,6$ cm

4.

$$\frac{h}{10} = \sin 70°$$

$h = (10 \sin 70°)$ m $\approx$ 9,4 m

5.



$$\frac{a}{5} = \sin 30° \Leftrightarrow \frac{a}{5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2,5$$

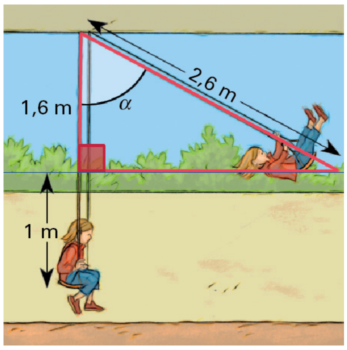
$$\frac{b}{1,4} = \tan 70° \Leftrightarrow b = 1,4\tan 70°$$

$$a + b + 1,6 = 2,5 + 1,4\tan 70° + 1,6 \approx 7,9 \text{ m}$$

6. $(2,6-1)\ \text{m} = 1,6\ \text{m}$

$$\cos\alpha = \frac{1,6}{2,6}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1,6}{2,6}\right) \approx 52,0°$$



7.1. Se a reta AB é tangente à circunferência no ponto B então $AB \perp BC$.

7.2. $D\hat{C}B = 180° - 90° - 20° = 70°$ O arco DB tem 70° de amplitude.

7.3. a)

$$\frac{7}{\overline{AC}} = \sin 20°$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = \left(\frac{7}{\sin 20°} - 7\right)\ \text{cm} \approx 13,5\ \text{cm}$$

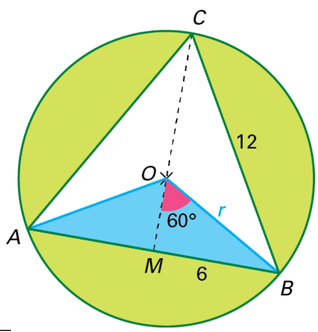
b) $360° - 70° = 290°$

$$\begin{array}{ccc} 360° & \text{———} & \pi \times 7^2 \\ 290° & \text{———} & x \end{array}$$

$$x = \frac{290 \times \pi \times 49}{360} \approx \frac{14210 \times 3,1416}{360} \approx 124,0$$

$A \approx 124{,}0\ \text{cm}^2$

8.1. $\overline{CM}^2 + 6^2 = 12^2 \Leftrightarrow \overline{CM}^2 = 144 - 36$
$\overset{\overline{CM}>0}{\Leftrightarrow} \overline{CM} = \sqrt{108} \Leftrightarrow \overline{CM} = \sqrt{36 \times 3}$
$\Leftrightarrow \overline{CM} = 6\sqrt{3}$
$\overline{CM} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$



8.2. $A\hat{O}B = 360° : 3 = 120°$
$M\hat{O}B = 120° : 2 = 60°$

$$\frac{6}{r} = \sin 60° \Leftrightarrow \frac{6}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 = \sqrt{3}r \Leftrightarrow r = \frac{12}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow r = \frac{12 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \Leftrightarrow r = \frac{12 \times \sqrt{3}}{3}$$

$r = 4\sqrt{3}\ \text{cm}$

8.3.

$$A = \left(\pi \times \left(4\sqrt{3}\right)^2 - \frac{12 \times 6\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{cm}^2 = \left(48\pi - 36\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$$

9.1. a)

$$A\hat{E}D = 180° - \frac{360°}{5} = 108°$$

$$\beta = \frac{180° - 108°}{2} = 36° \text{ (o triângulo } [AED] \text{ é isósceles)}$$

Resposta: $\beta = 36°$.

b) $\alpha = ?$

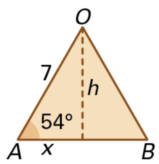
$$A\hat{O}E = \frac{360°}{5} = 72°$$

$\overline{AO} = \overline{EO}$, porque são raios da circunferência, logo o triângulo $[AOE]$ é isósceles.

$$O\hat{E}A = O\hat{A}E = \frac{180° - 72°}{2} = 54$$

$\alpha = 54° - 36° = 18°$
Resposta: $\alpha = 18°$.

9.2.



$$\sin 54° = \frac{h}{7} \Leftrightarrow h = 7 \times \sin 54°$$

$\overline{AB} = ?$

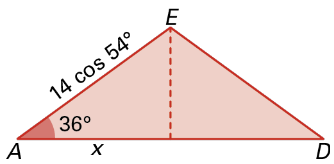
$$\cos 54° = \frac{x}{7} \Leftrightarrow x = 7 \times \cos 54°$$

$$\overline{AB} = 2 \times 7 \times \cos 54° = 14 \cos 54°$$

$=5\times\frac{\overline{AB}\times h}{2} = 5 \times \frac{14\times\cos 54°\times 7\times\sin 54°}{2} \approx 116,5 \text{ cm}^2$

Resposta: A área pedia é, aproximadamente, 116,5 cm^2.

9.3.



$$\cos 36° = \frac{x}{14 \times \cos 54°}$$

$x = 14 \times \cos 54° \times \cos 36°$
$\overline{AD} = 2 \times x = 2 \times 14 \times \cos 54° \times \cos 36° \approx 13,3$
Resposta: 13,3 cm

10. $A_{\text{base}} = 100 \text{ cm}^2$; $E\hat{B}A = 52°$

10.1. $\overline{AB} = \sqrt{100} = 10$ cm
Resposta: $\overline{AB} = 10$ cm

10.2 $\overline{AE} = ?$

$$\tan 52° = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AE} = 10 \times \tan 52° \Leftrightarrow \overline{AE} \approx 12,80 \text{ cm}$$

Resposta: $\overline{AE} \approx 12{,}80$ cm

10.3. $V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = 100 \times 12,80 = 1280 \text{ cm}^3 = 1{,}280 \text{ dm}^3$
1,280 dm^3 corresponde a 1,280 litros.
Logo, a Helena não tem razão (1,28 l < 1,5 l).

Pág. 63

11.1. Prisma triangular reto.

11.2. $V_{\text{sólido}} = ?$

$$A_{\text{base}[ABC]} = \frac{\overline{CB} \times \overline{AC}}{2} \approx \frac{37,7595 \times 45}{2} \approx 849,5888 \text{ m}^2$$

$V_{\text{sólido}} \approx 849,5888 \times 30 \approx 25487,7 \text{ m}^3$.
Cálculos auxiliares

$$\tan 50^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \tan 50^\circ = \frac{45}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{CB} = \frac{45}{\tan 50^\circ}$$

Logo, $\overline{CB} \approx 37,7595$
Resposta: O volume pedido é, aproximadamente, 25487,7 m^3

11.3. $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{bases}}$
$A_{\text{lateral}} = P_{[ABC]} \times 30$
$A_{\text{lateral}} = (45 + 37,7595 + 57,7433) \times 30 + 2 \times 849,589 \approx 5944,3 \text{ m}^2$
Cálculos auxiliares

$$\overline{BC} = \frac{45}{\tan 50^\circ} \approx 37,7595$$

$$\sin 50^\circ = \frac{45}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{45}{\sin 50^\circ}$$

Logo, $\overline{AB} = 58,7433$
Resposta: A área total pedida é, aproximadamente, 5944,3 m^2

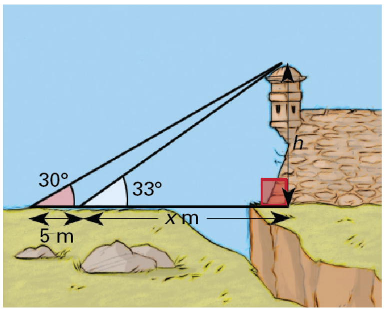
12.

$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} = \pi \times 1,5^2 \times 4 + \frac{1}{3}\pi \times 1,5^2 \times \overline{GE} = 9\pi + \frac{1}{3}\pi \times 1,5^3 \times \tan 60^\circ \approx 34,4\text{m}^3$$

Resposta: $V \approx 34{,}4 \text{ m}^3$

Pág. 64

Agora é a tua vez



$$\begin{cases} \tan 30^\circ = \frac{h}{x} \\ \tan 30^\circ = \frac{h}{5+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = x \times \tan 33^\circ \\ h = (5+x)\tan 30^\circ \end{cases}$$

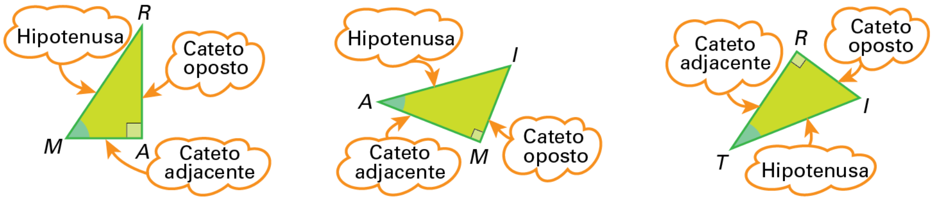
$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \tan 33^\circ \\ x \tan 33^\circ = 5 \tan 30^\circ + x \tan 30^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \tan 33^\circ \\ x(\tan 33^\circ - \tan 30^\circ) = 5 \tan 30^\circ \end{cases}$$

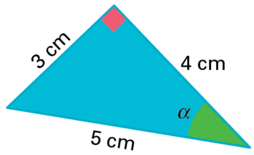
$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \tan 33^\circ \\ x = \frac{5 \tan 30^\circ}{\tan 33^\circ - \tan 30^\circ} \end{cases}$$

Logo, $x \approx 40,06$ e $h \approx 26,02$.
Resposta: O castelo tem, aproximadamente, 26,02 m de altura.

1.



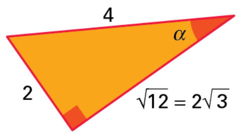
2.1. $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$



$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \tan\alpha = \frac{3}{4}$$

2.2. $\sqrt{2^2 + \left(\sqrt{12}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$

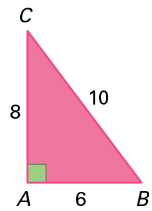


$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3.1. $\overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2$

$\overline{BC} = \sqrt{100}$

$\overline{BC} = 10$ cm



3.2. a)

$$\sin\left(C\hat{B}A\right) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

b)

$$\cos\left(C\hat{B}A\right) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

c)

$$\tan\left(C\hat{B}A\right) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

d) $\sin\left(A\hat{C}B\right) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

4.1. $0 < \sin\alpha < 1$

4.2. $0 < \cos\alpha < 1$

4.3. $\tan\alpha > 0$

5. A equação $\tan\theta = 2,7$ é possível.

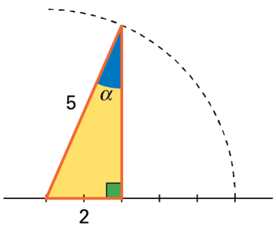
Resposta: **(B)**

6. $\cos x = 1 - 3m$

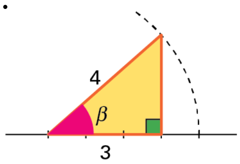
$0 < \cos x < 1$

$$0 < 1 - 3m < 1 \Leftrightarrow 1 - 3m > 0 \wedge 1 - 3m < 1 \Leftrightarrow -3m > -1 \wedge -3m < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3} \wedge m > 0 \Leftrightarrow m \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$$

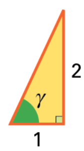
7.1.



7.2.



7.3.



8.1. Se $\tan\left(C\hat{B}A\right) = 1$ então $C\hat{B}A = 45°$

8.2. Se $C\hat{B}A = 45°$ então $B\hat{C}A = 90° - 45° = 45°$, pelo que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.
Então $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$
$\overline{BC}^2 = 4^2 + 4^2$
$\overline{BC} = \sqrt{4^2 \times 2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4\sqrt{2}$

$$\sin\left(C\hat{B}A\right) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(C\hat{B}A\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\sin\left(C\hat{B}A\right) = \cos\left(C\hat{B}A\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9.1. $\cos 32° = \sin(90° - 32°) = \sin 58°$

9.2. $\sin 65° = \cos(90° - 65°) = \cos 25°$

9.3. $\sin(x - 30°) = \cos(90° - (x - 30°)) = \cos(90° - x + 30°) = \cos(120° - x)$

10.1.

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pág. 66

11.1. $\cos(5x) = \sin 45°$
$\cos 5x = \cos(90° - 45°)$
$\cos 5x = 45° \Leftrightarrow x = 9°$

11.2. $\sin x = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(90° - x) = \cos(2x) \Leftrightarrow 90° - x = 2x \Leftrightarrow 3x = 90° \Leftrightarrow x = 30°$

11.3.

$$\cos\left(\frac{x - 30°}{3}\right) = \sin 80°$$

$$\cos\left(\frac{x - 30°}{3}\right) = \cos(90° - 80°)$$

$$\frac{x - 30°}{3} = 10° \Leftrightarrow x - 30° = 30° \Leftrightarrow x = 60°$$

12.1.

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

a)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}\cos^2\alpha = \frac{9}{25}\cos\alpha = \frac{3}{5} \ \ (\cos\alpha > 0)$$

b)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\tan\alpha + \frac{2}{\tan\alpha} = \frac{4}{3} + \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \times 2 \times \frac{3}{4} = \underset{(2)}{\frac{4}{3}} + \underset{(3)}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{6} + \frac{9}{6} = \frac{17}{6}$$

12.2. $\tan\alpha = 2$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 2^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
Logo,

$$4 = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 4\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

12.3.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin^2 a + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \frac{5}{25} \Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin a = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$(\sin a > 0) \Leftrightarrow \sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times 5}{5} = 2$$

$$5\sin^2 a - \tan a = 5 \times \frac{4}{5} - 2 = 2$$

13.1. $1 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - \left(\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right) = 1 - \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + 2\sin\theta\cos\theta$
$= 1 - 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

13.2.

$$\frac{\cos\theta}{\tan\theta} + \sin\theta = \cos\theta \times \frac{1}{\tan\theta} + \sin\theta = \cos\theta \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$$

14.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \tan 60^\circ$$

$$\frac{\overline{AC}}{15} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = 15\sqrt{3}$$

A distância entre o António e o Carlos é $15\sqrt{3}$ m

15.1.

$$\frac{\overline{CD}}{12\sqrt{2}} = \sin 45° \Leftrightarrow \frac{\overline{CD}}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{12\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{CD} = 12$$

$\overline{CD} = 12$ cm
$\overline{CB} = (12 + 3)$ cm $= 15$ cm

15.2. Os triângulos $[ABC]$ e $[EDC]$ são semelhantes pelo critério AA (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum). Então,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

Fazendo $\overline{AE} = x$

$$\frac{x + 12\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{15}{12} \Leftrightarrow \frac{x + 12\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4\left(x + 12\sqrt{2}\right) = 5 \times 12\sqrt{2}4x + 48\sqrt{2} = 60\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = 60\sqrt{2} - 48\sqrt{2} \Leftrightarrow 4x = 12\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$\overline{AE} = 3\sqrt{2}$cm

16.1.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{12}}{4} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $\alpha = 30°$

16.2.

$$\cos\alpha = \frac{2,5}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Logo, $\alpha = 60°$

16.3.

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \tan\alpha = 1$$

Logo, $\alpha = 45°$

17.

$$A\hat{C}B = \frac{66°}{2} = 33°$$

$$\frac{\overline{BC}}{100} = \cos 33° \Leftrightarrow \overline{BC} = 100 \times \cos(90° - 33°) \Leftrightarrow \overline{BC} = 100 \times \cos 57°$$

$\overline{BC} \approx (100 \times 0,54)$ cm $\approx$54 cm

18.1. $\overline{CB} = ?$

$$\sin 35^\circ = \frac{5}{\overline{BC}}$$

Logo,

$$\overline{BC} = \frac{5}{\sin 35^\circ} \approx 8,7$$

Resposta: $\overline{BC} \approx 8{,}7$ cm

18.2. $\overline{DF} = ?$

$$\cos 42^\circ = \frac{5}{\overline{DF}}$$

Logo,

$$\overline{DF} = \frac{5}{\cos 42^\circ} \approx 6,7$$

Resposta: $\overline{DF} \approx 6{,}7$ cm

18.3. $\overline{HI} = ?$

$$\sin 25^\circ = \frac{2}{\overline{HI}}$$

Logo,

$$\overline{HI} = \frac{2}{\sin 25^\circ} \approx 4,7$$

Resposta: $\overline{HI} \approx 4{,}7$ cm

18.4. $\overline{JK} = ?$

$$\cos 32^\circ = \frac{5}{\overline{JK}}$$

Logo,

$$\overline{JK} = \frac{5}{\cos 32^\circ} \approx 5,9$$

Resposta: $\overline{JK} \approx 5{,}9$ cm

19.1. $\overline{AB} = ?$

$$\cos 37^\circ = \frac{\overline{AB}}{10}$$

Logo, $\overline{AB} = 10 \times \cos 37^\circ \approx 8,0$
$\overline{AC} = ?$

$$\sin 37^\circ = \frac{\overline{AC}}{10}$$

Logo, $\overline{AC} = 10 \times \sin 37^\circ \approx 6,0$
Resposta: $\overline{AB} \approx 8,0$cm ; $\overline{AC} \approx 6,0$cm

19.2. $\overline{DE} = ?$

$$\cos 58^\circ = \frac{\overline{DE}}{8}$$

Logo, $\overline{DE} = 8 \times \cos 58^\circ \approx 4,2$
$\overline{EF} = ?$

$$\sin 58^\circ = \frac{\overline{EF}}{8}$$

Logo, $\overline{EF} = 8 \times \sin 58^\circ \approx 6,8$
Resposta: $\overline{DE} \approx 4,2$cm ; $\overline{EF} \approx 6,8$cm

19.3. $\overline{IG} = ?$

$$\cos 34^\circ = \frac{\overline{IG}}{70}$$

Logo, $\overline{IG} = 70 \times \cos 34^\circ \approx 58,0$
$\overline{HI} = ?$

$$\sin 34^\circ = \frac{\overline{HI}}{70}$$

Logo, $\overline{HI} = 70 \times \sin 34^\circ \approx 39,1$
Resposta: $\overline{HI} \approx 39,1$cm ; $\overline{IG} \approx 58,0$cm

19.4. $\overline{LK} = ?$

$$\cos 32^\circ = \frac{\overline{LK}}{200}$$

Logo, $\overline{LK} = 200 \times \cos 32^\circ \approx 169,6$
$\overline{LY} = ?$

$$\sin 32^\circ = \frac{\overline{LY}}{200}$$

Logo, $\overline{LY} = 200 \times \sin 32^\circ \approx 106,0$
Resposta: $\overline{LY} \approx 106,0$ cm ; $\overline{LK} \approx 169,6$ cm

20.1. $\alpha = ?$

$$\tan\alpha = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

Logo, $\alpha \approx 53,1°$
$\beta = ?$

$$\tan\beta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

Logo, $\beta \approx 36,9°$
<u>Resposta:</u> $\alpha \approx 53,1°; \beta \approx 36,9°$

20.2. $\alpha = ?$

$$\tan\ \alpha = \frac{18}{15} \Leftrightarrow \alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{18}{15}\right)$$

Logo, $\alpha \approx 50,2°$
$\beta = ?$

$$\tan\ \beta = \frac{15}{18} \Leftrightarrow \beta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{15}{18}\right)$$

Logo, $\beta \approx 36,8°$
<u>Resposta:</u> $\alpha \approx 50,2°;\ \beta \approx 39,8°$

20.3. $\alpha = ?$

$$\cos\alpha = \frac{10}{20} \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{20}\right)$$

Logo, $\alpha = 60°$
$\beta = ?$

$$\sin\beta = \frac{10}{20} \Leftrightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{10}{20}\right)$$

Logo, $\beta = 30°$
<u>Resposta:</u> $= \alpha 60°;\ \beta = 30°$

20.4. $\alpha = ?$

$$\sin\alpha = \frac{15}{18} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{15}{18}\right)$$

Logo, $\alpha \approx 56,4°$
$\beta = ?$

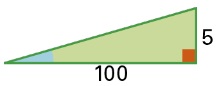
$$\cos\beta = \frac{15}{18} \Leftrightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{15}{18}\right)$$

Logo, $\beta \approx 33,6°$
<u>Resposta:</u> $\alpha \approx 56,4°;\ \beta \approx 33,6°$

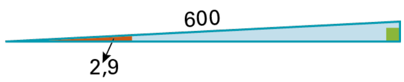
21.1.

$$\text{tg}^{-1}\left(\frac{5}{100}\right) = 2,9°$$

<u>Resposta:</u> A amplitude do ângulo é de aproximadamente 2,9°.



21.2. $\sin 2,9° = \frac{x}{600} \Leftrightarrow x = 600 \times \sin 2,9° \Leftrightarrow x \approx 30,0$
<u>Resposta:</u> Aproximadamente, 30,0 m.

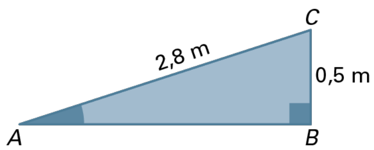


Pág. 68

22. $B\hat{A}C = ?$

$$\sin\left(B\hat{A}C\right) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow B\hat{A}C = \sin^{-1}\left(\frac{0,5}{2,8}\right)$$

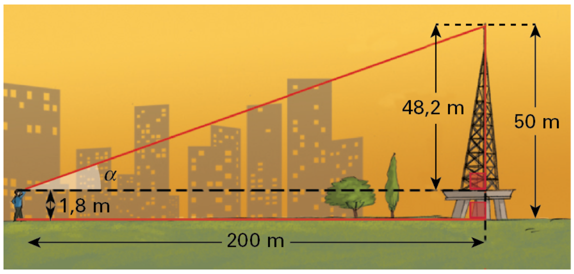
Logo, $B\hat{A}C \approx 10°$.
<u>Resposta:</u> A amplitude do ângulo BAC é aproximadamente, 10°.



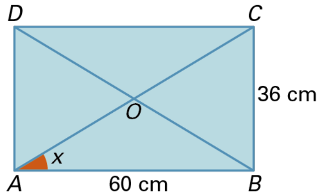
23.

$$\tan\alpha = \frac{48,2}{200} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{48,2}{200}\right)$$

Logo, $\alpha \approx 13,5°$
<u>Resposta:</u> 13,5°



24.1. a) $B\hat{A}C = ?$; $B\hat{A}C = x$



$$\tan x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \tan x = \frac{36}{60} \Leftrightarrow x = \tan^{-1}\left(\frac{36}{60}\right)$$

Logo, $x \approx 30,964°$

Resposta: $B\hat{A}C \approx 31°$

b) $\overline{AC} = ?$
$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 36^2 + 60^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{4896}$
Logo, $\overline{AC} \approx 70$ cm.
Resposta: $\overline{AC} \approx 70$cm

c) $\overline{OB} = ?$

$$\overline{OB} = \frac{\overline{AC}}{2} \approx \frac{70}{20} \approx 35$$

Resposta: $\overline{OB} \approx 35$cm

d) $A\hat{O}B = ?$
$\overline{AO} = \overline{OB}$ logo o triângulo $[AOB]$ é isósceles.
$O\hat{A}B = O\hat{B}A \approx 30,964°$
$A\hat{O}B = 180° - 2 \times 30,964°$
Resposta: $A\hat{O}B \approx 118°$

24.2.

$$A = \frac{\overline{BC} \times \left(\overline{AB} : 2\right)}{2} = \frac{36 \times 30}{2} = 540$$

Resposta: Área $= 540$ cm^2

25.1. $A\hat{C}B = 2 \times A\hat{C}D = 2 \times 31° = 62°$

$$C\hat{B}A = D\hat{A}C = \frac{180° - 62°}{2} = 59°$$

Resposta: $C\hat{B}A = 59°$

25.2. $\overline{CD} = ?$

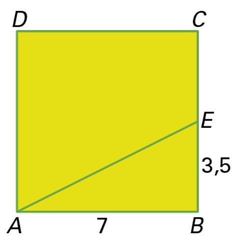
$$\tan\left(A\hat{C}D\right) = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \tan 31° = \frac{6}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{6}{\tan 31°}$$

$$\text{Área} = \frac{12 \times \frac{6}{\tan 31°}}{2} \approx 59,9$$

Resposta: A área é aproximadamente 59,9 cm^2

Pág. 69

26.1. a)
$B\hat{A}E = ?$



$$\tan\left(B\hat{A}E\right) = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow B\hat{A}E = \tan^{-1}\left(\frac{3,5}{7}\right)$$

Logo, $B\hat{A}E \approx 26,6°$
Resposta: $B\hat{A}E \approx 26,6°$

b) $B\hat{A}C = ?$

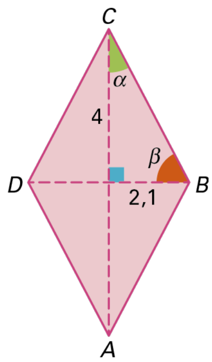
$$\tan\left(B\hat{A}C\right) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{7}{7} = 1$$

Logo,$B\hat{A}C = 45°$.
<u>Resposta:</u> $B\hat{A}C = 45°$

c) $E\hat{A}C = ?$
$E\hat{A}C = B\hat{A}C - B\hat{A}E \approx 45° - 26,6° \approx 18,4°$
<u>Resposta:</u> $E\hat{A}C \approx 18,4°$

26.2. $\dot{A}E$ não é bissetriz do ângulo BAC porque, $B\hat{A}E \neq E\hat{A}C$.

27. $\overline{AC} = 8$ cm ; $\overline{DB} = 4,2$ cm



27.1. $D\hat{C}B = ?$

$$\tan\alpha = \frac{2,1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2,1}{4}\right)$$

Logo, $\alpha \approx 27,699°$
$D\hat{C}B = 2 \times \alpha \approx 2 \times 27,699° \approx 55,4°$
<u>Resposta:</u> $D\hat{C}B \approx 55,4°$

27.2. $C\hat{B}A = ?$

$$\tan\beta = \frac{4}{2,1} \Leftrightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2,1}\right)$$

Logo, $\beta \approx 62,30°$
$C\hat{B}A = 2 \times \beta \approx 2 \times 62,30° \approx 124,6°$
<u>Resposta:</u> $C\hat{B}A \approx 124,6°$

27.3. $P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 4 \times \overline{AB} = 4 \times \sqrt{20,41} \approx 18,1$
Cálculo auxiliar:
$\overline{AB}^2 = 4^2 + 2,1^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{20,41}$
<u>Resposta:</u> 18,1 cm

28. $\overline{MC} = \overline{MB} + \overline{BC}$
$\overline{MB} = ?$

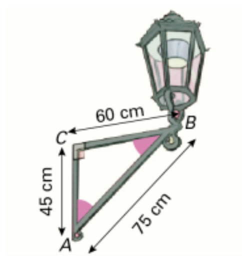
$$\tan 35° = \frac{\overline{MB}}{40} \Leftrightarrow \overline{MB} = 40 \times \tan 35°$$

$\overline{BC} = ?$

$$\tan 56° = \frac{\overline{BC}}{40} \Leftrightarrow \overline{BC} = 40 \times \tan 56°$$

$\overline{MC} = 40 \times \tan 35° + 40 \times \tan 56°$
$\overline{MC} \approx 87,3$
<u>Resposta:</u> $\overline{MC} \approx 87,3$ m.

29.1.
$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$
$75^2 = 45^2 + 60^2$
$5625 = 2025 + 3600$
$5625 = 5625$ c. q. m.



29.2. a) $C\hat{B}A = ?$

$$\tan\left(C\hat{B}A\right) = \frac{45}{60} \Leftrightarrow C\hat{B}A = \tan^{-1}\left(\frac{45}{60}\right)$$

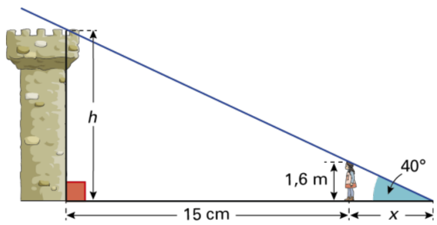
Logo, $C\hat{B}A \approx 37°$
Resposta: $C\hat{B}A \approx 37°$

b)

$$B\hat{A}C = ?; \tan\left(B\hat{A}C\right) = \frac{60}{45} \Leftrightarrow B\hat{A}C = \tan^{-1}\left(\frac{60}{45}\right)$$

Logo, $B\hat{A}C \approx 53°$
Resposta: $B\hat{A}C \approx 53°$

30.

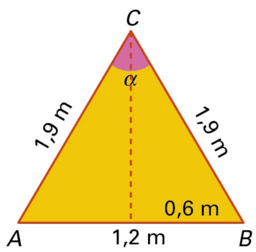


$$\tan 40° = \frac{1,6}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1,6}{\tan 40°} \Leftrightarrow x \approx 1,91$$

$$\tan 40° = \frac{h}{15 + 1,91} \Leftrightarrow h \approx 16,91 \times \tan 40°$$

Logo, $h \approx 14,2$ m
Resposta: A altura da torre é, aproximadamente, 14,2 m.

31.1. $\alpha = ?$



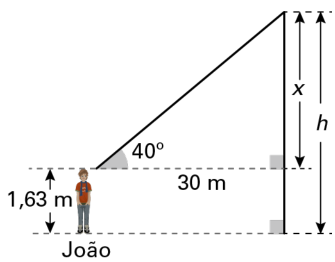
$$\sin\alpha = \frac{0,6}{1,9} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{0,6}{1,9}\right)$$

$\alpha \approx 18,4°$
$A\hat{C}B = 2 \times \alpha \approx 2 \times 18,4° \approx 36,8°$
Resposta: $A\hat{C}B \approx 36,8°$

31.2. Pelo teorema de Pitágoras:

$d^2 = 1,9^2 - 0,6^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{3,25}$. Logo, $d \approx 1,80$ m.
Resposta: A distância da escada ao solo é de 1,80 m aproximadamente.

32.



$$\tan 40° = \frac{x}{30} \Leftrightarrow x = 30 \times \tan 40°$$

$h = x + 1,63$ m
$h = 30 \times \tan 40° + 1,63$
$h \approx 26,8$ m
Resposta: A torre tem uma altura de, aproximadamente, 26,8 m.

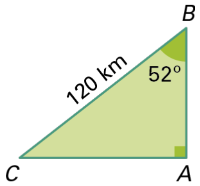
33.

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)} = \frac{1^2 - \cos^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)} \qquad \text{c. q. p.}$$

34.1. $\overline{AB} = ?$



$$\cos 52^\circ = \frac{\overline{AB}}{120} \Leftrightarrow \overline{AB} = 120 \times \cos 52^\circ$$

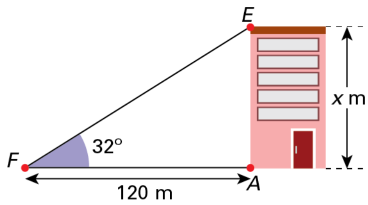
Logo, $\overline{AB} \approx 74$.
<u>Resposta:</u> $\overline{AB} \approx 74$ km

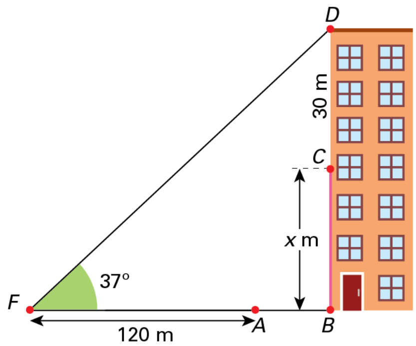
34.2. $\overline{AC} = ?$

$$\sin 52^\circ = \frac{\overline{AC}}{120} \Leftrightarrow \overline{AC} = 120 \times \sin 52^\circ$$

Logo, $\overline{AC} \approx 95$.
<u>Resposta:</u> $\overline{AC} \approx 95$ km

35. $\overline{EC} = ?$
$\overline{EA} = x$





$$\tan 32^\circ = \frac{x}{1200} \Leftrightarrow x = 120 \times \tan 32^\circ$$

Logo, $x \approx 74,984$
$\overline{EC} = \overline{AB}$

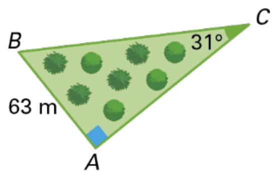
$$\tan 37^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{FB}}$$

$$\tan 37^\circ \approx \frac{74,984 + 30}{120 + \overline{AB}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 120 + \overline{AB} = \frac{104,984}{\tan 37^\circ} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{104,984}{\tan 37^\circ} - 120$$

Logo, $\overline{AB} \approx 19$
<u>Resposta:</u> $\overline{EC} \approx 19$ m

36. $\overline{BC} = ?$



$$\sin 31^\circ = \frac{63}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{63}{\sin 31^\circ}$$

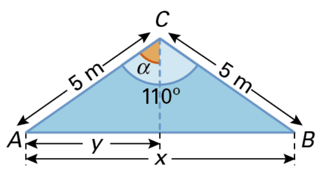
$\overline{CA} = ?$

$$\tan 31^\circ = \frac{63}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{63}{\tan 31^\circ}$$

$$\overline{BC} + \overline{CA} = \frac{63}{\sin 31^\circ} + \frac{63}{\tan 31^\circ} \approx 227,2$$

<u>Resposta:</u> O bernardo vai percorrer, aproximadamente, 227,2 m

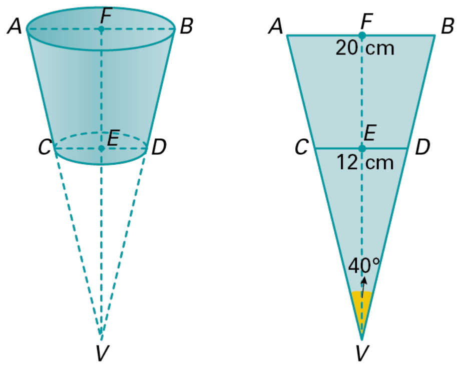
37.
$\overline{AB} = x$
$\alpha = 110^\circ : 2 = 55^\circ$
$y = ?$



$$\sin 55^\circ = \frac{y}{5} \Leftrightarrow y = 5 \times \sin 55^\circ$$

$x = 2 \times 5 \times \sin 55^\circ \Leftrightarrow x \approx 8,2$ m
<u>Resposta:</u> $x \approx 8,2$ m

38.1.



$$D\hat{V}E = \frac{D\hat{V}C}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$$

Resposta: $D\hat{V}E = 20°$

38.2. $\overline{EV} = ?$
$\overline{VF} = ?$

$$\tan 20° = \frac{\overline{ED}}{\overline{EV}} \Leftrightarrow \overline{EV} = \frac{6}{\tan 20°} \Leftrightarrow \overline{EV} \approx 16,4849$$

$$\tan 20° = \frac{\overline{FB}}{\overline{VF}} \Leftrightarrow \overline{VF} = \frac{10}{\tan 20°} \Leftrightarrow \overline{VF} \approx 27,4748$$

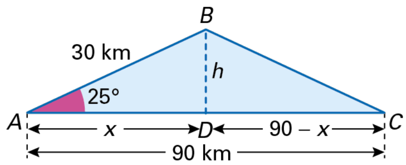
Resposta: $\overline{EV} \approx 16,48$ cm ; $\overline{VF} \approx 27,47$ cm

38.3.

$$V_{\text{balde}} = \frac{1}{3} \times 3,1416 \times 10^2 \times 27,4748 - \frac{1}{3} \times 3,1416 \times 6^2 \times 16,4849$$

$V_{\text{balde}} \approx 2255,7 \text{ cm}^3 \approx 2,3 \text{ dm}^3$
Resposta: A capacidade do balde é de aproximadamente 2,3 litros.

39.



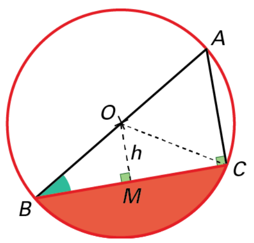
$$\sin 25° = \frac{h}{30} \Leftrightarrow h = 30 \times \sin 25°$$

Logo, $h \approx 12,679$

$$\cos 25° = \frac{x}{30} \Leftrightarrow x = 30 \times \cos 25°$$

Logo, $x \approx 27,189$
$\overline{DC} \approx 90 - 27,189 \approx 62,811$
$\overline{BC}^2 \approx \overline{DC}^2 + h^2$
$\overline{BC}^2 \approx 62,811^2 + 12,679^2$
$\overline{BC} \approx \sqrt{4105,979} \approx 64$
Resposta: $\overline{BC} \approx 64$ km

40.1.



$$\tan\left(C\hat{V}B\right) = \frac{\overline{CB}}{\overline{CV}} \Leftrightarrow \tan\left(C\hat{V}B\right) = \frac{0,65}{0,4} \Leftrightarrow C\hat{V}B = \tan^{-1}\left(\frac{0,65}{0,4}\right)$$

Logo, $C\hat{V}B \approx 58,39°$
Resposta: $C\hat{V}B \approx 58,39°$

40.2. $\overline{VB} = ?$
$\overline{VB}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{CB}^2 \Leftrightarrow \overline{VB}^2 = \sqrt{0,4^2 + 0,65^2}$
Logo, $\overline{VB} \approx 0,76$
Resposta: $\overline{VB} \approx 0,76$ m

40.3. Área lateral do cone = π × raio × geratriz = π × 0,65 × 0,76 ≈ 1,6 m^2
Resposta: A área lateral do cone é, aproximadamente, 1,6 m^2

41.1.

$$\cos\left(C\hat{B}A\right) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{6,4}{8} = 0,8$$

$C\hat{B}A = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,8700°$
$\overline{OB} = \overline{OC}$. Logo $O\hat{C}B = C\hat{B}O$
Então, como $C\hat{B}O = C\hat{B}A$, $B\hat{O}C = 180° - 2 \times C\hat{B}A \approx 180° - 2 \times 36,8700° \approx 106,2602 \approx 106,26°$

41.2.

$$\overline{BM} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{6,4}{2} = 3,2$$

$\overline{BO} = 4$
$\overline{OM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{BO}^2$
$h^2 + 3,2^2 = 4^2 \Leftrightarrow h^2 = 16 - 10,24 \overset{h \geq 0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{5,76} \Leftrightarrow h = 2,4$

$$A_{[BCO]} = \frac{\overline{BC} \times h}{2} = \frac{6,4 \times 2,4}{2} = 7,68$$

$A_{[BCO]} = 7{,}68 \text{ cm}^2$

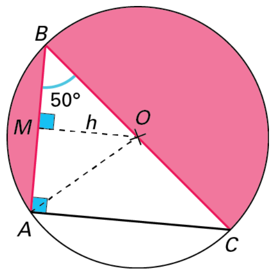
41.3. Área do setor circular BOC:

360°	——	$\pi - 4^2$
106,2602	——	x

$$x \approx \frac{106,2602 \times 3,1416 \times 16}{360}$$

$x \approx 17,837 \text{ cm}^2$
$A_{\text{colorida}} = A_{\text{setor } BOC} - A_{[BCO]} \approx 7,68 - 14,837 \approx 7,16 \text{ cm}^2$
$A_{\text{colorida}} \approx 7{,}16 \text{ cm}^2$

42.1.



$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \cos 50° \frac{7}{\overline{BC}} = \cos 50° \Leftrightarrow 7 = \overline{BC} \times \cos 50° \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{7}{\cos 50°}$$

$$r = \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{\cos 50°} \approx 5,4450$$

$r \approx 5,4450 \text{ cm}$

42.2.

Área do triângulo $[AOB]$

$\overline{AO} = \overline{OB}$ $\quad \overline{BM} = \frac{7}{2} = 3,5$ $\quad \frac{\overline{OM}}{\overline{BM}} = \tan 50°$

$$\frac{h}{3,5} = \tan 50° \Leftrightarrow h = 3,5 \times \tan 50°$$

$$A_{[AOB]} = \frac{7 \times 3,5 \times \tan 50°}{2} \text{ cm}^2 \approx 14,599 \text{ cm}^2$$

Área do setor circular AOC

$O\hat{A}B = A\hat{B}O = 50°$
$B\hat{O}A = 180° - 2 \times 50° = 80°$
$A\hat{O}C = 180° - 80° = 100°$

360°	——	$\pi \times r^2$
100°	——	x

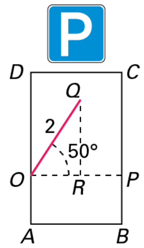
Como $\pi \approx 3,1416$ e $r \approx 5,445$, temos

$$x \approx \frac{100 \times 3,1416 \times (5,445)^2}{360} \text{ cm}^2 \approx 25,873 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{colorida}} = A_{\text{círculo}} - A_{[AOB]} - A_{\text{setor } AOC} \approx \left(3,1416 \times 5,445^2 - 14,599 - 25,873\right) \text{ cm}^2 \approx 52,67 \text{ cm}^2$$

$A \approx 52,7 \text{ cm}^2$

43.1.

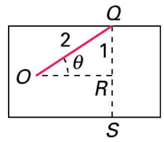


$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \cos 50^\circ$$

$$\frac{\overline{OR}}{2} = \cos 50^\circ$$

$\overline{OR} = 2 \times \cos 50^\circ$
$\overline{RP} = (2 - 2\cos 50^\circ)\ \text{ m} \approx 0,71 \text{ m} \approx 71 \text{ cm}$
$\overline{RP} \approx 71 \text{ cm}$

43.2.



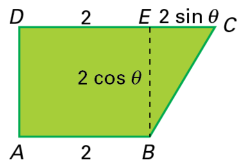
Se $\overline{QS} = 2$ m então $\overline{QR} = 1$ m

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QO}} = \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = 30^\circ$

44.1. 20 cm = 2 dm
1 m = 10 dm



$$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \sin\theta$$

$$\frac{\overline{EC}}{2} = \sin\theta \Leftrightarrow \overline{EC} = 2\sin\theta$$

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{BC}} = \cos\theta$$

$$\frac{\overline{EB}}{2} = \cos\theta \Leftrightarrow \overline{EB} = 2\cos\theta$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base + altura}} = A_{\text{trapézio}} \times 10 = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{EB} \times 10 = \frac{2 + (2 + 2\sin\theta)}{\times} \cos\theta \times 10 =$$

$$(4 + 2\sin\theta) \times 10\cos\theta = 40\cos\theta + 20\sin\theta\cos\theta$$

$$C\,(\theta) = 40\cos\theta + 20\sin\theta\cos\theta$$

44.2.

$$C\,(60^\circ) = 40\cos 60^\circ + 20\sin 60^\circ \times \cos 60^\circ = 40 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 20 + 5\sqrt{3} \approx 29$$

Resposta: A capacidade do bebedouro é aproximadamente igual a 29 litros.

Pág. 74

1.1. Hipotenusa $[MA]$.

1.2. Cateto oposto ao ângulo α : $[MR]$.

1.3. Cateto adjunto ao ângulo α: $[RA]$.

2.1. $\overline{AV}^2 = \overline{AU}^2 + \overline{UV}^2 \Leftrightarrow 7,5^2 = 4,5^2 + 6^2$
56,25 = 56,25 c. q. m.

2.2. a)

$$\sin\alpha = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5}$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{6}{7,5} = \frac{4}{5}$$

c)

$$\tan\alpha = \frac{4,5}{6} = \frac{3}{4}$$

d)

$$\sin\beta = \frac{6}{7,5} = \frac{4}{5}$$

e)

$$\cos\beta = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5}$$

f)

$$\tan\beta = \frac{6}{4,5} = \frac{4}{3}$$

3.1. $\overline{RI} = ?$
$\overline{RI}^2 = \overline{MI}^2 \Leftrightarrow \overline{RI}^2 = 6^2 - 3^2 \Leftrightarrow \overline{RI} = \sqrt{27}$
Logo, $\overline{RI} \approx 5,2$ cm

$\alpha = ?$;

$$\cos\alpha = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) \Leftrightarrow \alpha = 60°$$

$\beta = ?$
$\beta = 90° - 60° \Leftrightarrow \beta = 30°$

<u>Resposta:</u> $\overline{RI} \approx 5,2; \alpha = 60°$; $\beta = 30°$

3.2. $\overline{AB} = ?$

$$\cos 32° = \frac{\overline{AB}}{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = 5 \times \cos 32°$$

Logo $\overline{AB} \approx 4,2$

$\overline{BC} = ?$

$$\sin 32° = \frac{\overline{CB}}{5} \Leftrightarrow \overline{BC} = 5 \times \sin 32°$$

Logo, $\overline{BC} \approx 2,6$

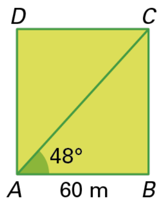
$\beta = ?$
$\beta = 90° - 32° \Leftrightarrow \beta = 58°$

<u>Resposta:</u> $\beta = 58°$; $\overline{BC} \approx 2,6$; $\overline{AB} \approx 4,2$

4. $\overline{BC} = ?$

$$\tan 48° = \frac{\overline{BC}}{60} \Leftrightarrow \overline{BC} = 60 \times \tan 48°$$

Área $= \overline{AB} \times \overline{BC} = 60 \times 60 \times \tan 48° \approx 3998,2$
<u>Resposta:</u> 3998,2 m^2

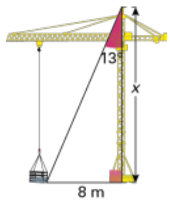


Pág. 75

5.1.

$$\tan 13° = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = \frac{8}{\tan 13°} \Leftrightarrow x \approx 34,7$$

<u>Resposta:</u> A altura da grua é de, aproximadamente, 34,7 m



6.

$$\sin\left(B\hat{A}C\right) = \frac{\sqrt{27}}{6} = \frac{\sqrt{9\times 3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

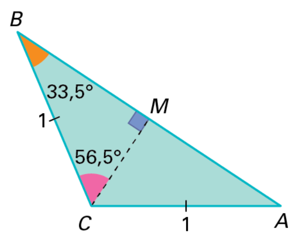
Se $\sin\left(B\hat{A}C\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $B\hat{A}C = 60°$

7. Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, vem $B\hat{A}C = C\hat{B}A$
$[CM]$ é a altura relativa à base $[AB]$, sendo M o ponto médio de $[AB]$.

7.1. $113° : 2 = 56,5°$
$C\hat{B}A = 90° - 56,5° = 33,5°$

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \cos(33,5°)$$

$\overline{BM} \approx 0,8339$ m
$\overline{AB} = 2 \times \overline{BM} \approx 1,668$
$\overline{AB} \approx 1,67$ m



7.2. $\overline{CM} = \sin(33,5°)$
$\overline{CM} \approx 0,5519$ m
$\overline{CM} \approx 0,552$ m

8.1.

$$\frac{\sin x}{\cos x \tan x} - (\sin x - \cos x)^2 = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\tan x} - \left(\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x\right) =$$

$$= \tan x \times \frac{1}{\tan x} - \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2\sin x \cos x = \frac{\tan x}{\tan x} - 1 + 2\sin x\cos x =$$

$$= 1 - 1 + 2\sin x\cos x = 2\sin x\cos x$$

8.2.

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

b)

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \times 4 = \sqrt{15}$$

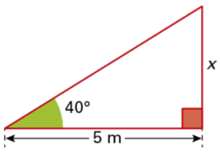
8.3.

$$\cos\left(\frac{1}{2}x + 60°\right) = \sin(x - 30°) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{2}x + 60°\right) = \cos(90° - (x - 30°)) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 60° = 90° - x + 30°$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + x = 90° + 30° - 60° \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + x = 60° \Leftrightarrow x + 2x = 120° \Leftrightarrow 3x = 120° \Leftrightarrow x = 40°$$

Pág. 76

1. $x = ?$

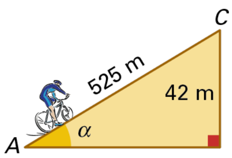


$$\tan 40° = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5 \times \tan 40°$$

Altura: $1{,}53 + 55 \times \tan 40° \approx 5{,}7$ m

Resposta: A altura é de aproximadamente 5,7 m.

2.1.

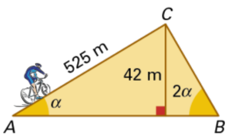


$$525^2 = x^2 + 42^2 \Leftrightarrow x^2 = 525^2 - 42^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{273\ 861}$$

$$\frac{42}{\sqrt{273\ 861}} \approx 0{,}08 = 8\,\%$$

Resposta: Como $8\,\% \neq 10\,\%$, o sinal de trânsito não está de acordo com o esquema.

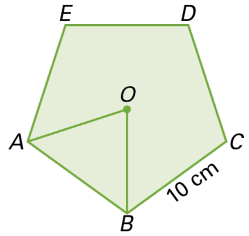
2.2. $\alpha = ?$



$$\sin\alpha = \frac{42}{525} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{42}{525}\right) \Leftrightarrow 2\alpha = 2\sin^{-1}\left(\frac{42}{525}\right) \Leftrightarrow 2\alpha \approx 9{,}177°$$

$$\sin 2\alpha = \frac{42}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \sin 9{,}177° \frac{42}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{CB} = \frac{42}{\sin 9{,}177°} \Leftrightarrow \overline{CB} \approx 263 \text{ m}$$

3. $\overline{VO} = 20$ cm



3.1.

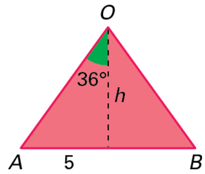
$$A\hat{O}B = \frac{360°}{5} = 72°$$

Resposta: A amplitude de AOB é $72°$.

3.2. $\overline{AB} : 2 = 10 : 2 = 5$
$72° : 2 = 36°$

$$\tan 36° = \frac{5}{h} \Leftrightarrow h = \frac{5}{\tan 36°} \approx 6,882$$

Resposta: A altura do triângulo é aproximadamente 6,9 cm.



3.3.

$$V = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$V \approx \frac{1}{3} \times 5 \times \frac{10 \times 6,882}{2} \times 20 \approx 1150$$

Resposta: O volume é de 1147 cm^3

4.1. $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 3 + 1 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \left(\overline{AC} > 0\right)$

$$\sin\left(B\hat{A}C\right) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

Resposta: **(D)**

4.2. Se $\sin\left(B\hat{A}C\right) = \frac{1}{2}$ então $B\hat{A}C = 30°$ $A\hat{C}B = 180° - 90° - 30° = 60°$

5.

$$\cos\beta = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Resposta: **(B)**

6.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \tan 30°$$

$$\frac{\overline{AB}}{\frac{15\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 7,5$$

A altura do edifício é de 7,5 m.

7. $A\hat{C}B = 180° - 120° - 30° = 30°$
Se $A\hat{C}B = B\hat{A}C$ então $\overline{AB} = \overline{BC}$
O triângulo $[ABC]$ é isósceles.
Logo, se $[BM]$ é a altura do triângulo relativa à base $[AC]$, M é o ponto médio de $[AC]$.
Então:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \sin 60° \Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{AM} = 10\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{AM} = 5\sqrt{3}$$

$$\overline{AC} = 2\overline{AM} = 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

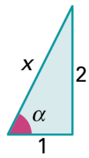
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{MB} = 5$$

$$A_{[ABC]} = \frac{10\sqrt{3} \times 5}{2} = 25\sqrt{3}$$

$A_{[ABC]} = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

8. $\tan\alpha = 2$

Por exemplo, $x^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$



$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5}\sin\alpha + \cos^2\alpha = \sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2 + \frac{1}{5} = \frac{10+1}{5} = \frac{11}{5} \qquad \text{c. q. m.}$$

1.1. A afirmação é verdadeira: $\overline{BO} = \overline{BV}$.

1.2. A afirmação é verdadeira. Num triângulo isósceles os ângulos adjacentes à base, considerando como base o lado $[OV]$, são iguais.

1.3. A afirmação é falsa. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° e, neste caso, $O\hat{B}V = 180° - (15° + 15°) = 180° - 30° = 150°$.

1.4. A afirmação é verdadeira. Os ângulos CBO e OBV são suplementares.
Portanto, $C\hat{B}O = 180° - O\hat{B}V$, ou seja, $C\hat{B}O = 180° - 150° = 30°$.

1.5. A afirmação é verdadeira. Os lados $[CO]$ e $[BO]$ do triângulo $[OBC]$ são raios e, portanto, são iguais.

1.6. A afirmação é verdadeira. Os ângulos CBO e OCB são adjacentes à base $[BC]$ do triângulo isósceles $[OBC]$ e, portanto, são iguais. Logo, $O\hat{C}B = C\hat{B}O = 30°$.

1.7. A afirmação é verdadeira. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° e, neste caso, $B\hat{O}C = 180° - (30° + 30°) = 120°$.

1.8. A afirmação é falsa. A soma das amplitudes dos ângulos AOB, BOC e COD é 180°.
Logo, $C\hat{O}D = 180° - 120° - 15° = 45°$.

2.1. A afirmação é verdadeira. Os ângulos BOC e COD são suplementares e, portanto, $C\hat{O}D = 180° - 60° = 120°$.

2.2. A afirmação é verdadeira. O triângulo $[OBC]$ é isósceles, pois dois dos lados, $[BO]$ e $[CO]$ são raios. Os ângulos adjacentes à base, CBO e OCB, são iguais. Logo, $C\hat{B}O = O\hat{C}B = \frac{180°-60°}{2} = 60°$.

2.3. A afirmação é verdadeira. O triângulo $[OBC]$ tem três ângulos internos iguais e, portanto, três lados iguais.

2.4. A afirmação é falsa. Como as diagonais $[AC]$ e $[BD]$ não são perpendiculares, o retângulo $[ABCD]$ não é quadrado. Logo, $\overline{DA} \neq \overline{AB}$, [DAB] é um triângulo retângulo e DB é a hipotenusa. Logo $\overline{DB} > \overline{DA}$ e $\overline{DB} > \overline{AB}$.

2.5. A afirmação é verdadeira. Um dos lados do ângulo COD, $[DO]$, é um prolongamento do lado $[BO]$ do triângulo e o outro lado do ângulo contém o lado $[CO]$ do triângulo.

2.6. A afirmação é falsa. O ponto D é o transformado do ponto B por uma rotação de centro O e amplitude 180°.

2.7. A afirmação é falsa. O ponto A é o transformado do ponto D por uma rotação de centro O e amplitude 60°.

2.8. A afirmação é verdadeira, pois $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

2.9. A afirmação é verdadeira, pois $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

2.10. A afirmação é falsa. $[AC]$ e $[BD]$ não são perpendiculares.

2.11. A afirmação é falsa. A imagem do ponto D por $T_{\overrightarrow{DO}}$ é o ponto O.

2.12. A afirmação é falsa. $A\hat{C}B \neq D\hat{C}A$ ($A\hat{C}B = 60°$ e $D\hat{C}A = 30°$).

3.1. a) A soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. Assim:
$F\hat{C}E = 360° - 90° - 45° - 100° = 125°$
Logo, a afirmação é verdadeira.

b) Os ângulos FCE e DCF são suplementares. Assim: $D\hat{C}F = 180° - 125° = 55°$
Logo, a afirmação é verdadeira.

c) A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, $F\hat{D}C = 180° - (90° + 55°) = 35°$, a afirmação é falsa.

d) Os ângulos ECB e DCF são verticalmente opostos. Assim:
$E\hat{C}B = D\hat{C}F = 55°$, a afirmação é verdadeira.

e) Os ângulos BEC e CEA são suplementares. Assim:
$B\hat{E}C = 180° - 100° = 80°$, a afirmação é falsa.

f) A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim:
$C\hat{B}E + E\hat{C}B + B\hat{E}C = 180°$ e, portanto, $C\hat{B}E = 180° - 55° - 80° = 45°$.
A afirmação é verdadeira.

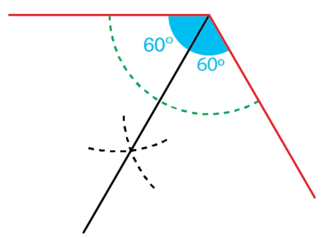
3.2. Pelo Teorema de Pitágoras, vem: $\overline{FC}^2 = 6^2 - 4,8^2 \Leftrightarrow \overline{FC}^2 = 12,96 \Leftrightarrow \overline{FC} = \pm\sqrt{12,96} \Leftrightarrow \overline{FC} = \pm 3,6$
Como $\overline{FC} > 0, \overline{FC} = 3,6$.
Resposta: $\overline{FC} = = 3{,}6$ cm.

4.1. $[ABCD]$ é um paralelogramo porque as suas diagonais se bissetam, uma vez que são as diagonais de duas circunferências concêntricas.

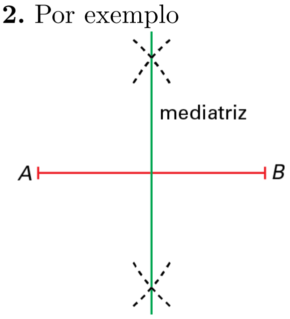
4.2. O transformado do paralelogramo através de uma rotação de centro em O do segmento de reta $[AB]$ nunca poderá originar um retângulo, uma vez que num retângulo as diagonais são iguais, o que não é o caso, pois as diagonais são diâmetros de duas circunferências concêntricas.

4.3. Se $[AB]$ e $[CD]$ fossem perpendiculares, tendo em conta que se bissetam, o quadrilátero obtido seria um losango.

5.1. Por exemplo



5.2. Por exemplo



6.1. Por exemplo, a translação de vetor $\overrightarrow{AB}$

6.2. Por exemplo, a rotação de centro A e amplitude – 120°

6.3. Por exemplo, rotação de centro A e amplitude 120° seguida da translação de vetor $\overrightarrow{AB}$.

Pág. 85

No desenho I está representada uma bissetriz de um ângulo, o que corresponde à descrição da Catarina (C).

No desenho II está representada uma circunferência de raio igual a 2 metros, o que corresponde à descrição do Francisco (F).

No desenho III está representada uma circunferência de raio igual a 2 metros e a região exterior a esta, o que corresponde à descrição da Maria (M).

No desenho IV está representada a mediatriz do segmento de reta $[FT]$, o que corresponde à descrição do Duarte (D).

No desenho V está representado um círculo de raio igual a 2 metros, o que corresponde à descrição do Tiago (T).

No desenho VI está representada a região formada pelo conjunto de pontos que estão à mesma distância de F e T (mediatriz de $[FT]$) ou mais próximos de F do que de T, o que corresponde à descrição da Inês (I).

Resposta: I – C; II – F; III – M; IV – D; V – T; VI – I.

Pág. 86

Questão 1

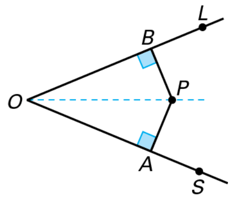
O triângulo $[ABC]$ é isóscele porque, se o ponto C pertence à mediatriz de $[AB]$, então $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Questão 2

2.1. a) Como $PB \perp OL$ e $PA \perp OS$, os triângulos $[OPB]$ e $[OAP]$ são retângulos.

Se o ponto P pertence ao ângulo SOL e é equidistante de OS e OL então P é equidistante dos pés das perpendiculares A e B.

Logo, $\overline{PA} = \overline{PB}$



colorblue) Pelo teorema de Pitágoras $\overline{OA}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{OP}^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{AP}^2$

Como $\overline{OA} > 0$, temos $\overline{OA} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{AP}^2}$

$\overline{OB}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{OP}^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{BP}^2$

Como $\overline{OB} > 0$, temos $\overline{OB} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{BP}^2}$

Logo, como $\overline{AP} = \overline{BP}$, vem $\overline{OA} = \overline{OB}$

c) Os triângulos $[OPB]$ e $[OAP]$ são iguais pelo critério LLL ($\overline{PA} = \overline{PB}, \overline{OA} = \overline{OB}$ e o lado $[OP]$ é comum aos dois triângulos).

d) $A\hat{O}P = P\hat{O}B$ porque, em triângulos iguais a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

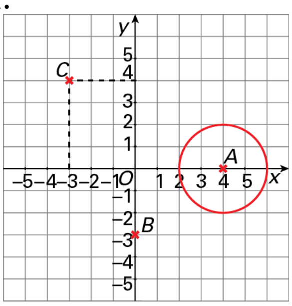
2.2. P é um ponto da bissetriz do ângulo AOB porque a semirreta OP divide o ângulo em dois ângulos geometricamente iguais.

Pág. 88

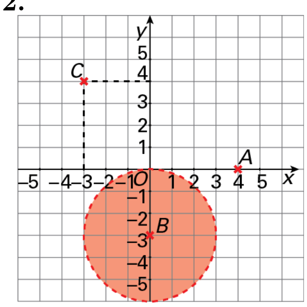
Questão 3

Conjunto dos pontos do retângulo $[ABCD]$ cuja distância a A é igual ou superior a$\overline{AD}$ e que estão a menos distância de D do que B.

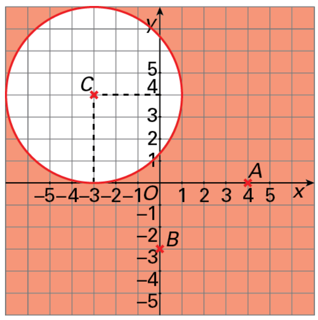
1.1.



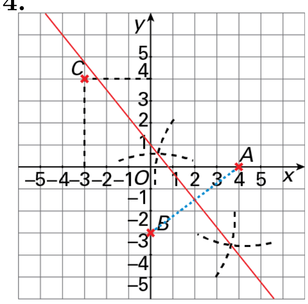
1.2.



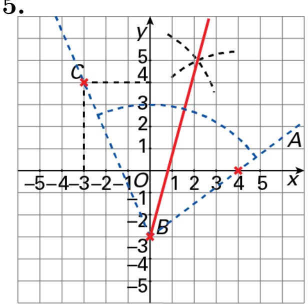
1.3.



1.4.



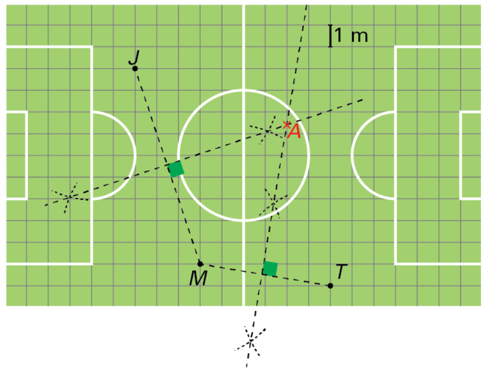
1.5.



2. Na figura, a parte colorida representa o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao ponto O é maior ou igual a 3 cm e menor ou igual a 3,5 cm.

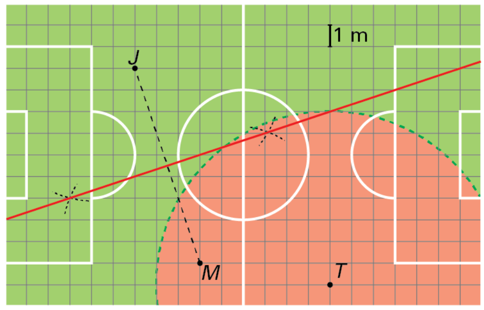
3.1. A posição do árbitro corresponde ao ponto de interseção das mediatrizes dos segmento de reta $[JM]$ e $[MT]$.

Resposta:



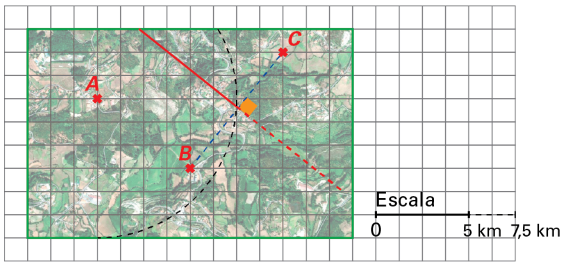
3.2. O local onde pode estar a bola situa-se no interior de uma circunferência de centro no ponto T e raio 8 metros ou na mediatriz do segmento de reta $[JM]$, pertencentes ao retângulo de jogo.

Resposta:

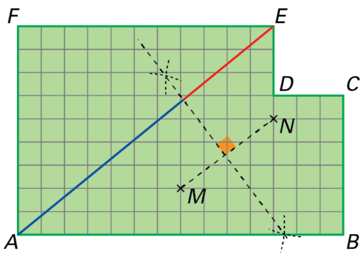


4. A quarta antena localiza-se dentro do retângulo $[ABCD]$, no ponto de interseção da mediatriz do segmento de reta $[QR]$ com a circunferência de centro no ponto P e raio com 5 km de comprimento.

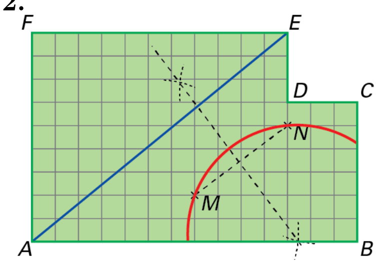
5. A região do retângulo pretendida pertence à parte da mediatriz do segmento de reta $[BC]$ contida no círculo de centro A e raio 7,5 km.



6.1. A parte do caminho onde pode ser colocado o banco está contida na parte do retângulo limitado pela mediatriz do segmento de reta $[MN]$ que contém o ponto N.

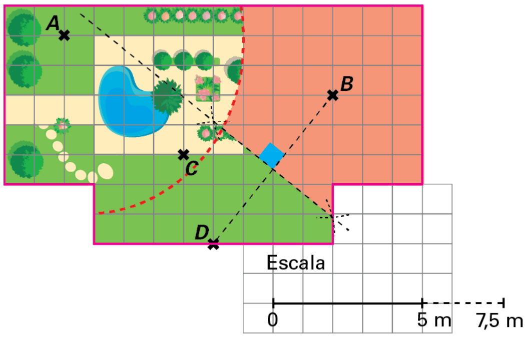


6.2.

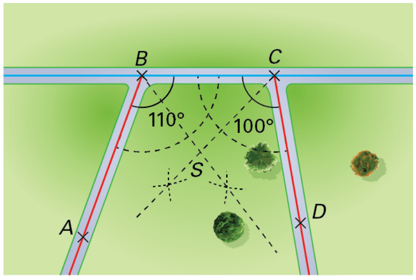


7. Para obter a região pretendida, é necessário desenhar a mediatriz do segmento de reta $[BD]$ e circunferência de centro em A e raio 7,5 m.

A zona a sombrear corresponde ao exterior da circunferência e ao semiplano definido pela mediatriz de $[BD]$, ao qual pertence o ponto B.



8. O ponto S é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos ABC e BCD.



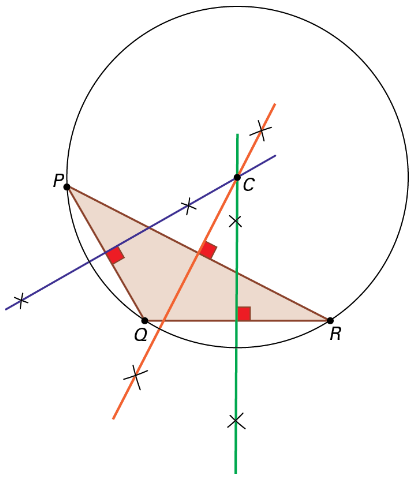
9.1. Lugar geométrico dos pontos do retângulo $[OABC]$ que distam três ou mais unidades do ponto O.

9.2. Lugar geométrico dos pontos do quadrado $[ABCD]$ que distam duas unidades ou menos de duas unidades do ponto D ou que estão à mesma distância dos ponto A e C ou mais próximos do ponto C do que do ponto A.

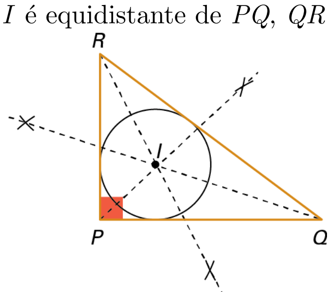
9.3. Lugar geométrico dos pontos do círculo de centro no ponto B e de raio igual a quatro unidades e que estão a menos distância do ponto B do que do ponto A.

1. Como o ponto C pertence às mediatrizes dos segmento $[PQ]$, $[QR]$ e $[RP]$ então $\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR}$.

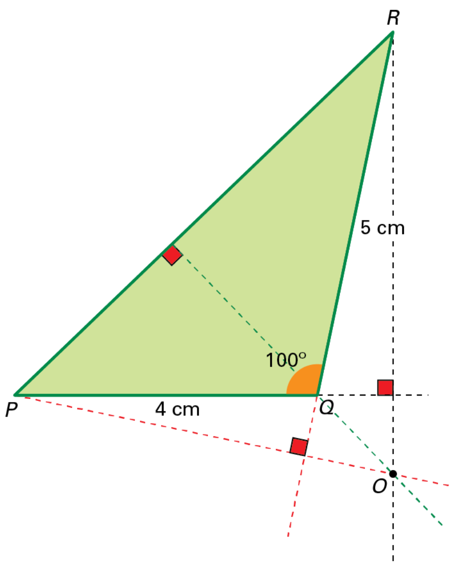
Portanto, C é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



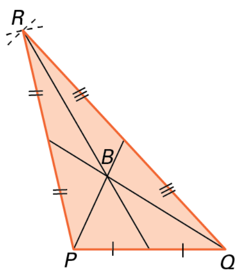
2. I é equidistante de PQ, QR e PR.



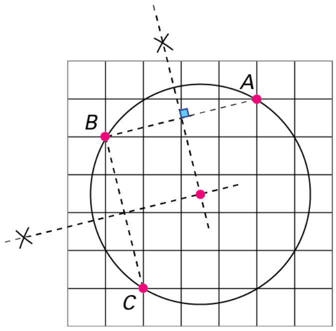
3.



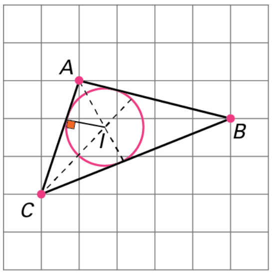
4.



Questão 4



Questão 5



Questão 6

6.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[MNC]$ são semelhantes pelo critério LAL de semelhança de triângulos dado que o vértice c é comum aos dois triângulos e os lados que formam este ângulo são proporcionais, pois, $\frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NC}} = 2$.

6.2. Como a razão da ampliação é 2 temos que $\overline{AB} = 2\overline{MN}$. Logo, $5 = 2\overline{MN}$ pelo que $\overline{MN} = 2,5$ cm.

Questão 7

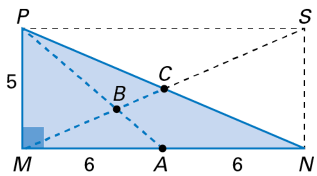
7.1.

$\overline{MN}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{NP}^2$

$36^2 + \overline{MP}^2 = 39^2$

Como $\overline{MP} > 0$, vem $\overline{MP} = \sqrt{1521 - 1296} = 15$

$\overline{MP} = 15$ cm



7.2.

$$\overline{MC} = \frac{1}{2}\overline{MS} = \frac{1}{2}\overline{PN} = \frac{1}{2} \times 39 = 19,5$$

$\overline{MC} = 19,5$ cm

7.3.

$$\overline{MB} = \frac{2}{3}\overline{MC} = \left(\frac{2}{3} \times 19,5\right) \text{ cm} = 13 \text{ cm}$$

7.4.

$$\overline{BC} = \frac{1}{3}\overline{MC} = \left(\frac{1}{3} \times 19,5\right) \text{ cm} = 6,5 \text{ cm}$$

7.5. $\overline{AP}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{MA}^2$

$\overline{AP}^2 = 5^2 + 6^2$

Como $\overline{AP} > 0$, vem $\overline{AP} = \sqrt{25 + 36}$

$\overline{AP} = \sqrt{61}$ cm

1. $A\hat{C}B = 2 \times I\hat{C}B = 2 \times 38° = 76°$

$B\hat{A}C = A\hat{C}B = 76°$ (o triângulo ABC é isósceles)

$$I\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{A}C = \frac{1}{2} \times 76° = 38°$$

$C\hat{I}A = 180° - 2 \times 38° = 104°$

2.

$$\overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 18 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$

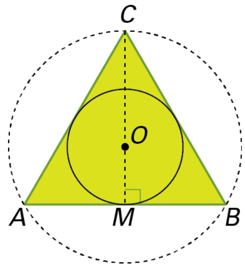
$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AI} = \frac{2}{3} \times 9 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

3.1.

$$r = \overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{MC} = \frac{1}{3} \times 8,1 \text{ cm} = 2,7 \text{ cm}$$

3.2.

$$d = 2 \times \overline{OC} = 2 \times \frac{2}{3}\overline{MC} = 2 \times \frac{2}{3} \times 8,1 \text{ cm} = 10,8 \text{ cm}$$



Pág. 98

3.1. *C, E, F* e *G* **3.2.** *C* **3.3.** *E* e *F*

Pág. 100

Questão 8

$\overset{\frown}{CD} = 360° - \overset{\frown}{DEC} = 360° - 295° = 65°$ $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ Logo, $\overline{CD} = \overline{AB}$ pelo que as cordas [AB] e [CD] são iguais.

Questão 9

9.1. O quadrilátero $[ABCD]$ é um trapézio porque se $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ então a reta DA é paralela à reta CB. Portanto, o quadrilátero tem dois lados paralelos.

9.2. Se $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, então $\overline{AB} = \overline{CD}$ Logo, $\overline{CD} = \overline{AB} = 10$ cm.

Pág. 101

Questão 10

10.1. A reta AC passa no centro da circunferência é perpendicular à corda $[DB]$. Logo $\overline{BE} = \overline{ED}$ e $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$, pelo que $\overline{BC} = \overline{CD}$. Os triângulos $[DEC]$ e $[EBC]$ são iguais pelo critério LLL. Portanto $B\hat{D}C = C\hat{B}D = 30°$.

10.2. $\overline{CB} = \overline{CD} = 4$ cm

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{CB}} = \cos 30° \Leftrightarrow \frac{\overline{EB}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{EB} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{EB} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Pág. 103

1.1. $x = 110°$ **1.2.** $x = (360 - 160)^{\circ} = 200°$ **1.3.** $x = (360 - 80)^{\circ} = 280°$

1.4. $x = 60°$ **1.5.** $x = (180 - 105)^{\circ} = 75°$ **1.6.** $x = (180 - 50)^{\circ} = 130°$

1.7. $x = (180 - 2 \times 30)^{\circ} = 120°$ **1.8.** $x = 6$ cm

2.1. a) Arcos compreendidos entre retas paralelas são iguais.

b) Os lados opostos de um triângulo são iguais.

2.2. $\overset{\frown}{CD} = (180 - 70)^{\circ} = 110°$

3.1. $x = (180 - 70)^{\circ} = 110°$ **3.2.**

$$y = \left(\frac{180 - 110}{2}\right)^{\circ} = 35°$$

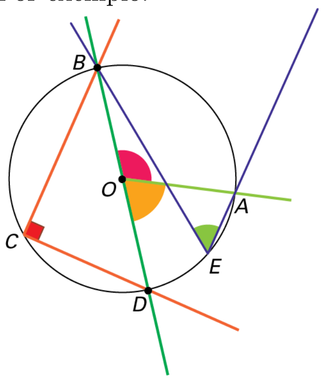
3.3. $z = (90 - 35)^{\circ} = 55°$

Pág. 104

1. Ângulo ao centro é um ângulo com o vértice no centro da circunferência.

2. Ângulo inscrito num arco de circunferência ABC é um ângulo de vértice no arco e distinto dos extremos e com os lados passando por eles.

3. Por exemplo:



Pág. 106

Questão 11

11.1. $2 \times 70 = 140$
Resposta: $x = 140°$

11.2.

$$\frac{60}{2} = 30$$

Resposta: $x = 30°$

11.3.

$$\frac{80}{2} = 40$$

Resposta: $x = 40°$

11.4. $2 \times 35 = 70$
Resposta: $x = 70°$

11.5. $2 \times 30 = 60$
Resposta: $x = 60°$

Pág. 107

Questão 12

12.1. $C\hat{B}D = C\hat{A}D = 20°$
Resposta: **(B)**

12.2. $C\hat{O}D = 2 \times 20° = 40°$
Resposta: **(C)**

12.3.

$$B\hat{D}C = \frac{180° - 40°}{2} = \frac{140°}{2} = 70°$$

Resposta: **(B)**

Pág. 109

1.

$$D\hat{C}O = \frac{180° - 40°}{2} = 70° \qquad C\hat{B}D = \frac{40°}{2} = 20°$$

$A\hat{D}C = 90°$, pois é ângulo inscrito numa semicircunferência.

$$C\hat{A}D = \frac{40°}{2} = 20° \neq 40°$$

Resposta: A opção correta é a **(D)**.

2.1.

$$B\hat{A}C = B\hat{D}C = \frac{B\hat{O}C}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$$

2.2. $B\hat{O}C = 2 \times B\hat{A}C = 2 \times 42° = 84°$ e $B\hat{D}C = B\hat{A}C = 42°$

2.3. $B\hat{O}C = 2 \times B\hat{D}C = 2 \times 40° = 80°$ e $B\hat{A}C = B\hat{D}C = 40°$

3.1. $BC = B\hat{O}C = 180° - 160° = 20°$

3.2.

$$B\hat{D}C = \frac{BC}{2} = \frac{20°}{2} = 10°$$

3.3.

$$A\hat{D}B = \frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{160°}{2} = 80°$$

4.1.

$$E\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{EA}}{2}$$

$$A\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

Como

$$E\hat{C}A + A\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{EA}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{EA} + \overset{\frown}{AC}}{2}$$

e $\overset{\frown}{EA} + \overset{\frown}{AC} = 180°$, então $E\hat{C}A + A\hat{E}C = \frac{180°}{2} = 90°$.
Logo, os ângulos ECA e AEC são complementares.
ou
$C\hat{A}E + A\hat{E}C + E\hat{C}A = 180°$
$90° + A\hat{E}C + E\hat{C}A = 180° \Leftrightarrow A\hat{E}C + E\hat{C}A = 90°$

4.2.

$$A\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$$

$$D\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{DA}}{2}$$

Ora,

$$A\hat{E}D + D\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DA}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Logo, os ângulos AED e DCA são suplementares.

4.3.

$$D\hat{B}E = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2}$$

$$C\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$$

Ora,

$$D\hat{B}E + C\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

Logo, os ângulos DBE e CED são complementares.

$$D\hat{B}E + C\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

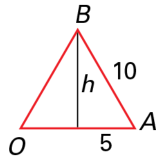
Pág. 110

5.1. $\overset{\frown}{AB} = A\hat{O}B = 60°$ porque o triângulo $[AOB]$ é equilátero.

5.2. Área do triângulo $[AOB]$

$h^2+5^2=10^2 \overset{h>0}{\Leftrightarrow} h=\sqrt{100-25} \Leftrightarrow h=\sqrt{75}$

$A_1=\dfrac{10\times\sqrt{75}}{2}=5\sqrt{25\times 3}=5\times 5\sqrt{3}=25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$



Área do setor circular:

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \text{———} & \pi\times 10^2 \\ 60^\circ & \text{———} & x \end{array}$$

$$x=\frac{60\times\pi\times 100}{360}=\frac{100\pi}{6}=\frac{50\pi}{3}$$

$$A_2=\frac{50\pi}{3}$$

$$A=A_2-A_1=\left(\frac{50\pi}{3}-25\sqrt{3}\right)\approx 9,1\ \text{cm}^2$$

5.3. $\overline{AB}=10$ cm

Comprimento do arco AB

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \text{———} & 2\pi\times 10 \\ 60^\circ & \text{———} & x \end{array}$$

$$x=\frac{60\times 2\times\pi\times 10}{360}=\frac{10\pi}{3}$$

$$P=10+\frac{10\pi}{3}\approx 20,5$$

$P\approx 20,5$ cm

Pág. 111

Questão 13

13.1. $x=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$

13.2.

$$T\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \qquad \overset{\frown}{AB}=180^\circ-\overset{\frown}{BC}=180^\circ-2\times 30^\circ=120^\circ$$

$$T\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$$

Pág. 112

Questão 14

14.1.

$$A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{100^\circ}{2}=50^\circ$$

14.2.

$$B\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}}{2}=\frac{(180^\circ-100^\circ)+180^\circ}{2}=130^\circ$$

Pág. 113

Questão 15

15.1.

$$C\hat{B}D=\frac{30^\circ}{2}=15^\circ$$

15.2.

$$A\hat{C}B=\frac{100^\circ}{2}=50^\circ$$

15.3. $A\hat{V}B=C\hat{B}V+A\hat{C}B=$
$=15^\circ+50^\circ=65^\circ$

Questão 16

16.1.

$$C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{100°}{2} = 50°$$

16.2.

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$$

16.3. $C\hat{A}D = A\hat{C}B + B\hat{V}A$
$50° = 15° + B\hat{V}A \Leftrightarrow B\hat{V}A = 50° - 15° \Leftrightarrow B\hat{V}A = 35°$

1.1.

$$x = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CB}}{2} = \frac{360° - 170°}{2} = 95°$$

1.2.

$$x = \frac{\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{60° + 2 \times 20°}{2} = 50°$$

1.3.

$$x = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{80° - (360° - 130° - 80° - 110°)}{2} = \frac{80° - 40°}{2} = 20°$$

1.4. $x = 180° - 2 \times 35° = 110°$ (o triângulo $[EAD]$ é isósceles)

2.1. a) Por exemplo, OTC.

b) Por exemplo, TOA

c) Por exemplo, ATO

d) Por exemplo, TCA

2.2. a) $B\hat{O}T = 90° - 42° = 48°$

b) $T\hat{O}A = 180° - 48° = 132°$

c)

$$A\hat{T}O = \frac{180° - 132°}{2} = \frac{48°}{2} = 24°$$

3.1.

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{180° - 90°}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$

3.2.

$$A\hat{D}V = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$

3.3.

$$B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{45° + 90°}{2} = \frac{135°}{2} = 67,5°$$

3.4.

$$D\hat{V}A = \frac{180° - 45°}{2} = \frac{135°}{2} = 67,5°$$

ou
$D\hat{V}A = 180° - -45° - -67,5° = 67,5°$

4. Por exemplo,

4.1. a) BAE

b) EBA

c) EFA

d) EVA

e) DFE e AFB.

f) AEB e BED.

g) DFE e EFA.

h) BAF e FAE.

4.2. a) $\overset{\frown}{EA} = 2 \times E\hat{B}A = 2 \times 50° = 100°$

b) $E\hat{D}A = E\hat{B}A = 50°$

c)

$$\frac{\overset{\frown}{EA} - \overset{\frown}{CD}}{2} = 30° \Leftrightarrow 100° - \overset{\frown}{CD} = 60° \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 40°$$

Logo,

$$C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$$

5.

$$D\hat{E}A = \frac{\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{BC}}{2}$$

$\overset{\frown}{BC} = 2 \times 15° = 30°$
Por outro lado,

$$C\hat{V}B = 35° \Leftrightarrow \frac{\overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{BC}}{2} = 35° \Leftrightarrow \frac{\overset{\frown}{DA} - 30°}{2} = 35° \Leftrightarrow \overset{\frown}{DA} - 30° = 70° \Leftrightarrow \overset{\frown}{DA} = 100°$$

Logo,

$$D\hat{E}A = \frac{100° + 30°}{2} = \frac{130°}{2} = 65°$$

Pág. 118

1. Os polígonos A e D são convexos.
Qualquer segmento de reta que une dois pontos do polígono está nele contido.

2. Um polígono regular tem os lados e os ângulos iguais.

3.1. a) $6 \times 180° = 1080°$

b) $360°$

c) $1080° - 360° = 720°$

3.2. $(n-2) \times 180° = (6-2) \times 180° = 720°$ $(n-2) \times 180°$ é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono de n lados.

Pág. 119

Questão 17

17.1. $n = 15$
$(15 - 2) \times 180° = 2340°$

17.2. a)

$$(n-2) \times 180 = 2160° \Leftrightarrow n - 2 = \frac{2160°}{180} \Leftrightarrow n - 2 = 12 \Leftrightarrow n = 14$$

O polígono tem 14 lados.

b)

$$(n-2) \times 180 = 4500n - 2 = \frac{4500}{180} \Leftrightarrow n - 2 = 25 \Leftrightarrow n = 27$$

O polígono tem 27 lados.

1.1. Determinação de x

Os ângulos EDC e CDF são suplementares. Logo, $E\hat{D}C = 180° - 80° = 100°$

Determinação de y

$(5-2)\times 180° = 540°$. A soma dos ângulos internos de um pentágono é igual a 540°.

$110° + y + y - 12° + 100° + 98° = 540° \Leftrightarrow y + y = 540° - 110° + 12° - 100° - 98° \Leftrightarrow 2y = 244° \Leftrightarrow y = 122°$

<u>Resposta</u>: $x = 100°$; $y = 122°$.

1.2. Determinação de x

O triângulo $[ABE]$ é equilátero ($\overline{BE} = \overline{CD} = \overline{AB} = \overline{EA}$).

Logo, $x = B\hat{A}E = 60°$.

Determinação de y

A soma dos ângulos internos de um pentágono é igual a 540°.

$60° + y + 90° + 90° + y = 540° \Leftrightarrow y + y = 540° - 60° - 90° - 90° \Leftrightarrow 2y = 300° \Leftrightarrow y = 150°$

<u>Resposta</u>: $x = 60°$; $y = 150°$.

2.1. $(n-2)\times 180 = 1800 \Leftrightarrow n - 2 = 10 \Leftrightarrow n = 12$

2.2. $(n-2)\times 180 = n \times 140 \Leftrightarrow 180n - 360 = 140n \Leftrightarrow 180n - 140n = 360 \Leftrightarrow 40n = 360 \Leftrightarrow n = 9$

2.3.

$$\frac{360}{n} = 20 \Leftrightarrow 20n = 360 \Leftrightarrow n = 18$$

3. Num polígono regular de n lados (n é um número natural maior ou igual que 3), a amplitude de um ângulo externo é igual a $360° : n$.

Logo, o quociente entre 360° e a amplitude do ângulo externo é um número natural maior ou igual que 3.

$$\frac{360°}{72°} = 5 \qquad \frac{360°}{18°} = 20$$

$$\frac{360°}{23°} = 15,652 \qquad \frac{360°}{15°} = 24$$

$$\frac{360°}{45°} = 8 \qquad \frac{360°}{13°} = 27,692$$

Logo, as amplitudes que não podem representar amplitudes de ângulos externos de polígonos regulares são 13° e 23°.

4. Determinação de x

x representa a amplitude de um dos ângulos internos do pentágono regular $[ABCDE]$.

$(5-2)\times 180° = 540°$. A soma dos ângulos internos do pentágono regular é 540°.

Logo,

$$x = \frac{540°}{5} = 108°$$

Determinação de y

A soma das amplitude dos ângulos internos do pentágono regular, do quadrado e do triângulo é 360°. Logo, $y = 360° - 108° - 90° - 90° = 72°$.

Determinação de z

Os triângulos são isósceles. Os ângulos adjacentes à base são congruentes.

Logo,

$$z = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$$

<u>Resposta</u>: $x = 108°$, $y = 72°$, $z = 54°$

5.

$$C\hat{B}A = \frac{180° - 38°}{2} = 71°$$

A amplitude dos ângulos adjacentes à base $[AB]$ é igual a $71°$.

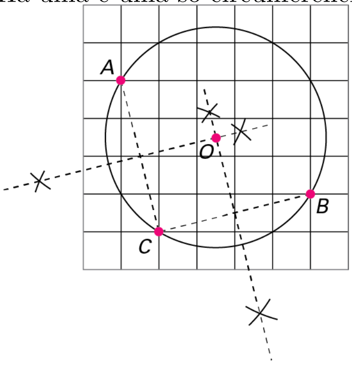
$$\frac{360°}{8} = 45°$$

$180° - 45° = 135°$
A amplitude de um dos ângulo externos do octógono regular é $45°$, pelo que a amplitude de um dos seus ângulos internos é $135°$.
Como $D\hat{B}C + C\hat{B}A + A\hat{B}D = 360°$, então, $D\hat{B}C = 360° - 135° - 71° = 154°$.

Pág. 122

1. Há um número infinito de circunferências que passam em A e B.

2. Há uma e uma só circunferência.



3.

$$a + b = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CDA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{CDA}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Pág. 123

Questão 18

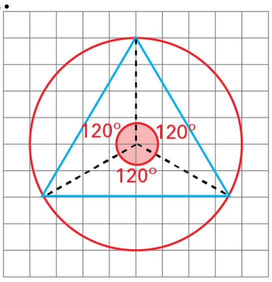
x e y são amplitudes de dois ângulos de um quadrilátero inscrito numa circunferência.
Como a soma das amplitudes de dois ângulos opostos é $180°$, vem:

1. $x = 180° - 73° = 107°$
2. $y = 180° - 82° = 98°$

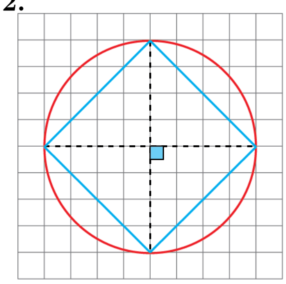
Os ângulos de amplitudes y e z são suplementares.
Assim, temos que $z = 180° - 98° = 82°$.
Resposta: $x = 107°$, $y = 98°$ e $z = 82°$.

Pág. 124

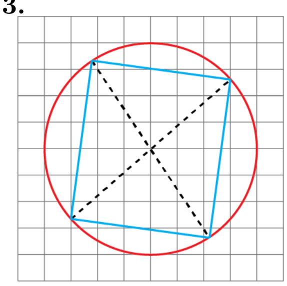
1.1.



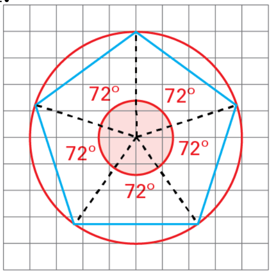
1.2.



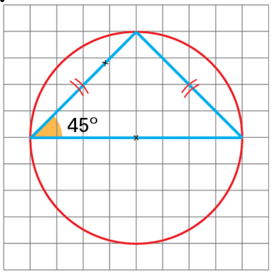
1.3.



1.4.



1.5.



2. Um quadrilátero é inscritível numa circunferência se a soma de dois dos ângulos opostos é 180°.

2.1. $105° + 75° = 180°$
<u>Resposta</u>: O quadrilátero pode ser inscrito numa circunferência.

2.2. $39° + 90° = 129° \neq 180°$
<u>Resposta</u>: O quadrilátero não pode ser inscrito numa circunferência.

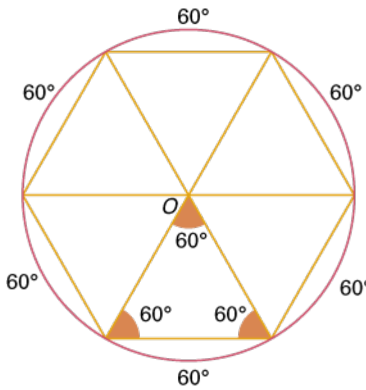
2.3. $90° + 110 = 200° \neq 180°$
<u>Resposta</u>: O quadrilátero não pode ser inscrito numa circunferência.

3. Um hexágono regular pode ser inscrito numa circunferência, sendo os lados do hexágono cordas da circunferência iguais às quais correspondem arcos de circunferência iguais.

O hexágono pode ser decomposto em seis triângulos iguais, cujos lados são raios e cujas bases são os lados do hexágono.

Relativamente a cada triângulo, a amplitude do ângulo ao centro é 60° ($360° : 6 = 60°$) e a amplitude de cada um dos ângulos inscritos, adjacentes à base é 60° ($120° : 2 = 60°$).

Logo, cada um dos triângulos é equilátero, pelo que o lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência é igual ao raio da circunferência, como queríamos mostrar.



4.1. Dado que as cordas $[MI]$ e $[AR]$ são paralelas e numa circunferência cordas e arcos compreendidos entre retas paralelas são iguais, temos que $\overline{IR} = \overline{AM}$ e $\overset{\frown}{IR} = \overset{\frown}{AM}$.

Deste modo, conclui-se que $\overset{\frown}{IRA} = \overset{\frown}{RAM}$ pelo que os ângulos RIM e IMA são iguais.
Logo, $I\hat{M}A = R\hat{I}M = 72°$ (como queríamos mostrar).

4.2. Sabemos que $A\hat{R}I + I\hat{M}A = 180°$. Logo, $A\hat{R}I = 180° - 72° = 108°$.
<u>Resposta</u>: $A\hat{R}I = 108°$.

5.1. Um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto. Logo, $x = 90°$.

A soma de ângulos suplementares é igual a 180° e num triângulo, a soma das amplitudes dos ângulos internos é 180°.

Logo, $y = 180° - 91° - 40° = 49°$ e $z = 180° - 90° - 49° = 41°$
<u>Resposta</u>: $x = 90°$, $y = 49°$ e $z = 41°$.

5.2. Ângulos inscritos com o mesmo arco compreendido entre os seus lados são iguais. Logo, $z = 55°$.

Num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais e a soma das amplitudes dos ângulos internos é 180°. Logo, $x = 180° - 55° - 55° = 70°$

A amplitude de um ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. Logo,

$$y = \frac{70°}{2} = 35°$$

<u>Resposta</u>: $x = 70°$, $y = 35°$ e $z = 55°$.

5.3. Os ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm a mesma amplitude.

Logo, $y = 30°$.

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° e ângulos verticalmente opostos são congruentes. Logo, $x = 180° - 30° - 40° = 110°$

A soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é 180°.

Logo, $z + y + 40° + 60° = 180°$ e, portanto $z = 180° - 30° - 40° - 60° = 50°$

Resposta: $x = 110°$, $y = 30°$ e $z = 50°$.

Pág. 125

6. O quadrilátero $[OACB]$ pode ser inscrito numa circunferência porque OBC e CAO são ângulos opostos de um quadrilátero e $O\hat{B}C + C\hat{A}O = 90° + 90° = 180°$ (as retas tangentes à circunferência e as retas que contêm o centro da circunferência e o ponto de tangência são perpendiculares).

7.1. $B\hat{A}D = 180° - 66° = 114°$

Resposta: A amplitude do ângulo BAD é 114°.

7.2. Os ângulos DBA e ADB são congruentes, pois, num triângulo, a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes.

Logo,

$$D\hat{B}A = A\hat{D}B = \frac{180° - 114°}{2} = \frac{66°}{2} = 33°$$

Resposta: A amplitude do ângulo DBA é 33°.

8.1. $A\hat{N}O = N\hat{A}O$, pois os lados $[NO]$ e $[AO]$ são raios.

Logo, $A\hat{O}N = 180° - 63° - 63° = 54°$.

Resposta: A amplitude do ângulo AON é 54°.

8.2. A amplitude de um ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente.

$$A\hat{I}N = \frac{A\hat{O}N}{2} = \frac{54°}{2} = 27°$$

Resposta: A amplitude do ângulo AIN é 27°.

8.3. $A\hat{N}B + O\hat{N}A + I\hat{N}O = 180°$. Logo, $A\hat{N}B = 180° - 63° - 27° = 90°$

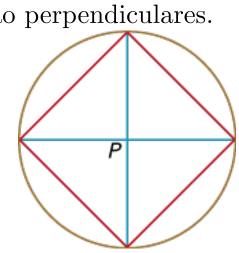
Resposta: A amplitude do ângulo ANB é 90°.

8.4. ATI é um ângulo inscrito numa semicircunferência. Logo, $A\hat{T}I = 90°$.

Resposta: A amplitude do ângulo ATI é 90°.

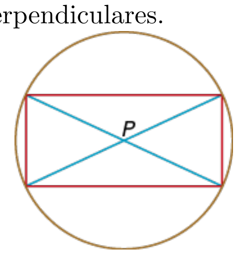
9.1. Num quadrado, as diagonais bissetam-se e são perpendiculares.

Logo, o ponto P coincide com o centro da circunferência e as cordas são perpendiculares.

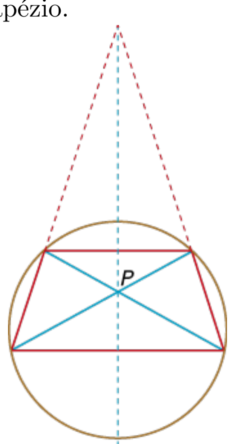


9.2. Num retângulo não quadrado, as diagonais bissetam-se e não são perpendiculares.

Logo, o ponto P coincide com o centro da circunferência e as cordas não são perpendiculares.

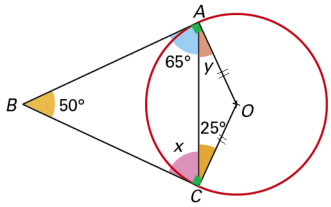


9.3. O ponto P não coincide com o centro O da circunferência e a reta OP é bissetriz dos lados paralelos do trapézio.



Agora é a tua vez

$B\hat{A}O = O\hat{C}B = 90°$ (BA e BC são tangentes à circunferência)



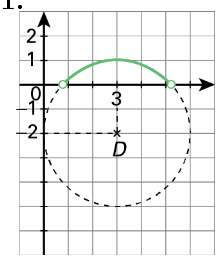
$C\hat{B}A + B\hat{A}O + A\hat{O}C + O\hat{C}B = 360°$ (A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°)

$50° + 90° + A\hat{O}C + 90° = 360° \Leftrightarrow A\hat{O}C = 130°$

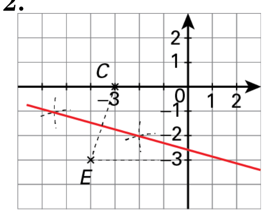
Logo, $\overset{\frown}{AC} = 130°$. A amplitude de um ângulo de segmento é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os lados:

$x = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 65°$ $\qquad y = 90° - 65° = 25°$

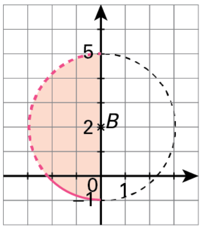
1.1.



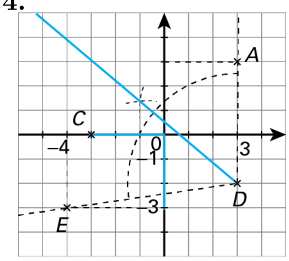
1.2.



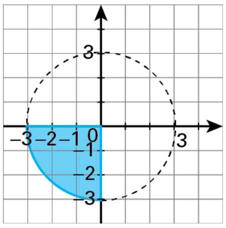
1.3.



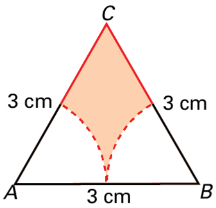
1.4.



1.5.



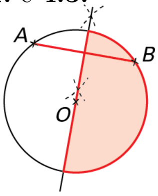
2.



3.1. Desenha-se a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
Qualquer ponto desta reta fica igualmente distanciado de A e de B.
Logo, a árvore pode ser plantada em qualquer ponto desta linha.

3.2. Desenha-se a mediatriz de dois segmentos de reta: $[AB]$, $[BC]$ ou $[CD]$.
O ponto de interseção das duas mediatrizes é o ponto onde deve ser plantada a quarta árvore.

4.1. e **4.3.**

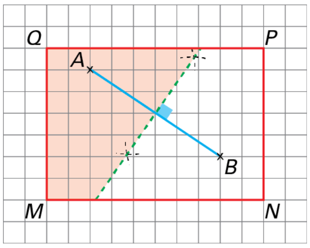


4.2. $[OA]$ e $[OB]$ são raios da circunferência e, portanto, $\overline{OA} = \overline{OB}$, pelo que o ponto O dista igualmente de A e de B.

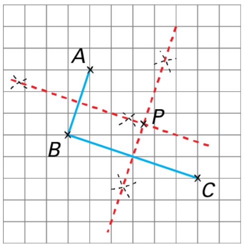
Logo, a mediatriz de $[AB]$ contém o centro da circunferência.

Pág. 128

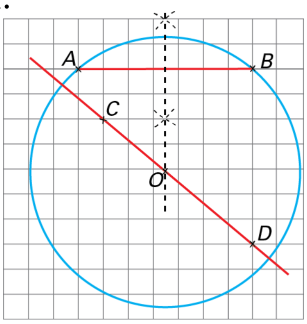
5.



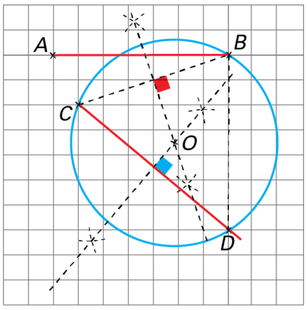
6.



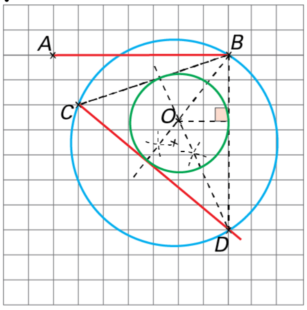
7.1.



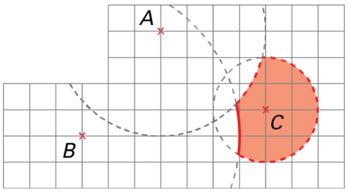
7.2.



7.3.



8.

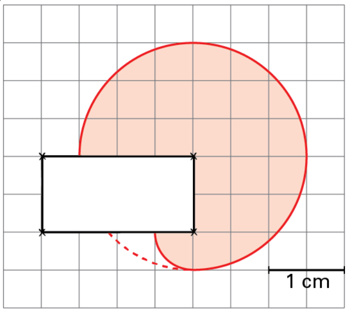


Pág. 129

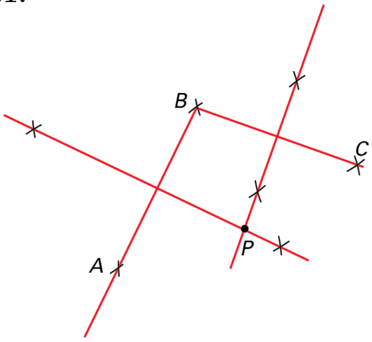
9.1. Conjunto dos pontos do retângulo $[ABCD]$ que distam três centímetros ou menos do lado $[AB]$.

9.2. Conjunto dos pontos do retângulo $[ABCD]$ que estão a igual distância de $[AB]$ e de $[AD]$ ou mais perto de $[AB]$ do que de $[AD]$ e distam quatro unidades ou mais do ponto C.

10.



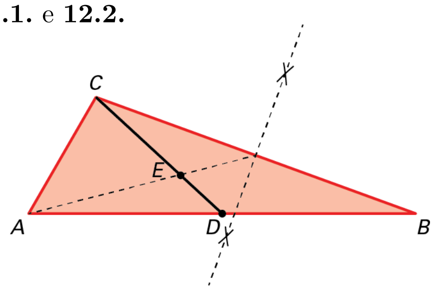
11.1.



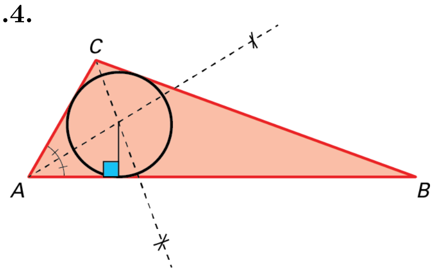
11.2. São todos os pontos da circunferência de centro em P e raio $\overline{PA}$.

11.3. Círculo de centro P e raio $\overline{PA}$.

12.1. e **12.2.**



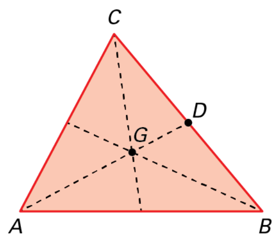
12.4.



12.3. $\overline{AD} = \overline{DB}$ e os dois triângulos têm a mesma altura relativamente a estas bases (distância do ponto C à reta AB).

13.

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AD} \Leftrightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{AD}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \frac{3}{2}$$



Resposta: **(B)**

Pág. 130

14.1. Retas-suporte das alturas do triângulo $[ATC]$: TI, JC e AK
O ortocentro de $[ATC]$ é o ponto B.

14.2. Retas-suporte das alturas do triângulo $[ABC]$: TI, TK e TJ
O ortocentro de $[ABC]$ é o ponto T.

14.3. Retas-suporte das alturas do triângulo $[ABT]$: TK, BJ e AI
O ortocentro de $[ABT]$ é o ponto C.

14.4. Retas-suporte das alturas do triângulo $[BCT]$: TJ, CI e BK
O ortocentro de $[BCT]$ é o ponto A.

14.5. Retas-suporte das alturas do triângulo $[JTB]$: TJ e BJ
O ortocentro de $[JTB]$ é o ponto J.

14.6. Retas-suporte das alturas do triângulo $[ABJ]$: AJ e BJ
O ortocentro de $[ABJ]$ é o ponto J.

15.1. Os triângulos $[OBA]$ e $[ODC]$ são semelhantes pelo critério LAL

$$\left(\text{o ângulo de vértice } C \text{ é comum aos dois triângulos e } \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{4}{2} = 2\right)$$

Então

$$\frac{OC}{OA} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BA}}$$

donde, pelo teorema recíproco do teorema de Tales, as retas AB e CD são paralelas.

15.2. Da alínea anterior,

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

$$\frac{\overline{DC}}{3} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \overline{DC} = 6$$

$\overline{DC} = 6$ cm

16. O ponto P é equidistante dos pontos A, B e C. P é o circuncentro do triângulo $[ABC]$.

17.1. A amplitude de um ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. Logo,

$$x = A\hat{C}B = \frac{120°}{2} = 60°$$

Resposta: $x = 60°$.

17.2. $x = B\hat{O}C = 2 \times B\hat{A}C$. Logo, $x = 2 \times 70° = 140°$
Resposta: $x = 140°$.

17.3.

$$x = C\hat{B}A = \frac{C\hat{O}A}{2}$$

Logo,

$$x = \frac{222°}{2} = 111°$$

Resposta: $x = 111°$.

17.4. $x = A\hat{C}B = A\hat{D}B$. Logo, $x = 60°$
Resposta: $x = 60°$.

17.5.

$$x = B\hat{A}C = \frac{B\hat{O}C}{2}$$

$B\hat{O}C = 360° - 140° = 220°$. Logo,

$$x = \frac{220°}{2} = 110°$$

Resposta: $x = 110°$.

17.6.

$$x = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \qquad \overset{\frown}{AD} = 180° - \overset{\frown}{DB} = 180° - 12° = 168°$$

Logo,

$$x = \frac{168°}{2} = 84°$$

Resposta: $x = 84°$.

18.1. $x = A\hat{C}B = A\hat{D}B$. Logo, $x = 50°$
$y = C\hat{B}D = C\hat{A}D$. Logo, $y = 60°$
Resposta: $x = 50°$ e $y = 60°$.

18.2.

$$x = C\hat{O}A = 360° - 120° = 240° \qquad y = C\hat{B}A = \frac{C\hat{O}A}{2} = \frac{240°}{2} = 120°$$

Resposta: $x = 240°$ e $y = 120°$.

Pág. 131

18.3.

$$x = E\hat{O}F = 2 \times E\hat{A}F = 2 \times 20° = 40° \qquad y = C\hat{B}D = \frac{C\hat{O}D}{2} = \frac{72°}{2} = 36°$$

Resposta: $x = 40°$ e $y = 36°$.

18.4. $x = O\hat{C}B = C\hat{B}O = 63°$ e $y = B\hat{A}C = 90° - 63° = 27°$
Resposta: $x = 63°$ e $y = 27°$.

19. $B\hat{C}D = 180° - O\hat{C}B$

$O\hat{C}B = \dfrac{70°}{2} = 35°$ e $B\hat{C}D = 180° - 35° = 145°$

Resposta: $B\hat{C}D = 145°$.

20.

$$\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{DA}}{2}$$

$\overset{\frown}{DA} = 180° - \overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{CD} = 2 \times C\hat{B}D = 2 \times 70° = 140°$

Logo, $\overset{\frown}{DA} = 180° - 140° = 40°$ e $D\hat{C}A = \dfrac{40°}{2} = 20°$

Resposta: $D\hat{C}A = 20°$.

21.1.

$$D\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{DA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CA} - \overset{\frown}{CD}}{2} \qquad \text{e} \qquad \overset{\frown}{CD} = 2 \times C\hat{B}D = 2 \times 20° = 40°$$

Logo,

$$D\hat{B}A = \frac{180° - 40°}{2} = \frac{140°}{2} = 70°$$

Resposta: $D\hat{B}A = 70°$

21.2. $C\hat{A}D = C\hat{B}D = 20°$
Resposta: $C\hat{A}D = 20°$

21.3. $A\hat{D}B = A\hat{D}C - B\hat{D}C = 90° - 38° = 52°$
Resposta: $A\hat{D}B = 52°$

22.1.

$$A\hat{B}D = \frac{A\hat{O}D}{2} = \frac{140°}{2} = 70°$$

Resposta: $A\hat{B}D = 70°$

22.2. $A\hat{B}C = 90°$ (ângulo inscrito numa semicircunferência)
Resposta: $A\hat{B}C = 90°$

22.3. $D\hat{B}C = A\hat{B}C - A\hat{B}D = 90° - 70° = 20°$
Resposta: $D\hat{B}C = 20°$

Pág. 132

23.1. O triângulo $[ACD]$ é um triângulo retângulo, porque está inscrito numa semicircunferência $\left(A\hat{D}C = 90°\right)$.

23.2. Os ângulos DCA e DBA são iguais, porque têm o mesmo arco compreendido entre os seus lados.
Logo, $D\hat{C}A = D\hat{B}A$.

23.3. a)

$$D\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{DA}}{2} = \frac{128°}{2} = 64°$$

Resposta: $D\hat{B}A = 64°$

b)

$$C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{180° - \overset{\frown}{DA}}{2} = \frac{180° - 128°}{2} = \frac{52°}{2} = 26°$$

Resposta: $C\hat{A}D = 26°$

23.4. Por exemplo, a rotação de centro O e amplitude 52° $(CD = 2 \times 26° = 52°)$ ou amplitude – 308°.

24.1. O arco DA está compreendido entre os lados do ângulo inscrito DCA, cuja amplitude é 40°.
O ângulo OBA também tem 40° de amplitude e um dos lados contém o ponto A.
Logo,

$$O\hat{B}A = D\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{DA}}{2}$$

pelo que, necessariamente, os pontos B, O e D pertencem à mesma reta (como queríamos mostrar).

24.2. Por exemplo, a rotação de centro O e amplitude $- 80°$ $\left(\overset{\frown}{DA} = 2 \times D\hat{C}A = 2 \times 40° = 80°\right)$ ou amplitude 280°.

25.1. a) $C\hat{E}D = 180° - D\hat{E}A = 180° - 150° = 30°$
Resposta: $C\hat{E}D = 30°$

b)

$$D\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{DFA}}{2} = \frac{360° - \overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{360° - A\hat{O}D}{2} = \frac{360° - 140°}{2} = \frac{220°}{2} = 110°$$

Resposta: $D\hat{C}A = 110°$

c) $B\hat{D}C = 180° - D\hat{C}A - C\hat{E}D = 180° - 110° - 30° = 40°$
Resposta: $B\hat{D}C = 40°$

d) $B\hat{A}C = B\hat{D}C = 40°$
Resposta: $B\hat{A}C = 40°$

25.2. $\overset{\frown}{BC} = 2 \times B\hat{D}C = 2 \times 40° = 80°$
Resposta: $BC = 80°$

26.1. O triângulo $[ABC]$ é retângulo porque está inscrito numa semicircunferência $\left(A\hat{C}B = 90°\right)$.

26.2. $C\hat{A}T = 90° - B\hat{A}C$ e $B\hat{A}C = 90° - C\hat{B}A = 90° - 23° = 67°$, $C\hat{A}T = 90° - 67° = 23°$ **ou**

$$C\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} = C\hat{B}A = 23° \qquad (CAT \text{ é um ângulo de segmento})$$

Resposta: $C\hat{A}T = 23°$

Pág. 133

27.1. $B\hat{A}Q = 90° - Q\hat{B}A = 90° - 57° = 33°$
Resposta: $B\hat{A}Q = 33°$

27.2. BQT é um ângulo de um segmento.

$$B\hat{Q}T = \frac{\overset{\frown}{BQ}}{2} = \frac{2 \times B\hat{A}Q}{2} = \frac{2 \times 33°}{2} = 33°$$

Resposta: $B\hat{Q}T = 33°$

28.1. ATR é um ângulo de um segmento.

$$A\hat{T}R = \frac{\overset{\frown}{AT}}{2} = \frac{2 \times A\hat{B}T}{2} = A\hat{B}T = 46°$$

Resposta: $A\hat{T}R = 46°$.

28.2.

$$T\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{TB}}{2} \qquad \text{e}$$

$\overset{\frown}{TB} = 360° - \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CA} - \overset{\frown}{AT} = 360° - 2 \times B\hat{A}C - 2 \times C\hat{B}A - 2 \times A\hat{B}T =$
$= 360° - 2 \times 20° - 2 \times 60° - 2 \times 46° = 108°$
Logo,

$$T\hat{C}B = \frac{108°}{2} = 54°$$

Resposta: $T\hat{C}B = 54°$.

29.1. $C\hat{B}D = 90°$ (ângulo inscrito numa semicircunferência).
Resposta: $C\hat{B}D = 90°$.

29.2. $B\hat{D}C = B\hat{A}C = 60°$
Resposta: $B\hat{D}C = 60°$.

29.3. $D\hat{C}B = 180° - 90° - 60° = 30°$ **ou**

$$D\hat{C}B = \frac{A\hat{C}B}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

Resposta: $D\hat{C}B = 30°$.

30.1. a) O triângulo $[ABC]$ é retângulo porque está inscrito numa semicircunferência.
b) $\overline{BC} = \overline{CD}$ porque, numa circunferência, cordas compreendidas entre arcos de circunferência iguais são iguais. Logo, o triângulo $[BCD]$ é isósceles.

30.2. DFA é um ângulo excêntrico com o vértice no interior da circunferência.

$$D\hat{F}A = \frac{DA + BC}{2} = \frac{180° + 60°}{2} = \frac{240°}{2} = 120°$$

Resposta: $D\hat{F}A = 120°$

30.3. Sabemos que $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$. Logo, o ponto D transforma-se no ponto B.
Resposta: É o ponto B.

Pág. 134

31. Sabe-se que $A\hat{C}B = A\hat{D}B = 55°$. Deste modo, $C\hat{B}A = 180° - 55° - 35° = 90°$.
Logo, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo.

32.1. O triângulo $[ABC]$ é isósceles e $\overline{BC} = \overline{CA}$.
Logo, $y = B\hat{A}C = C\hat{B}A$, donde $A\hat{C}B = 180° - 2y$.
De forma análoga conclui-se que $x = B\hat{D}A = A\hat{C}B$.
Assim, temos que: $180° - 2y = x \Leftrightarrow x + 2y = 180°$
Ângulo com vértice no exterior da circunferência:

$$C\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{CA} - \overset{\frown}{AB}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Leftrightarrow x = C\hat{B}A - A\hat{C}B \Leftrightarrow x = y - x$$

Logo, temos que

$$\begin{cases} 180° = x + 2y \\ y - x = x \end{cases} \qquad \text{c. q. m}$$

32.2.

$$\begin{cases} 180° = x + 2y \\ y - x = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 180° = x + 2 \times 2x \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 180° = 5x \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36° \\ y = 72° \end{cases}$$

Resposta: $x = 36°$.

33.1. $\overline{EB} = \overline{EC}$ porque as cordas $[EB]$ e $[EC]$ estão compreendidas entre arcos de circunferência iguais

$$\left(\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{CE} = \frac{2}{5} \times 360° = 144°\right)$$

33.2. a) CFD é um ângulo excêntrico com o vértice no interior da circunferência.

$$C\hat{F}D = \frac{\overset{\frown}{EB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{144° + 72°}{2} = \frac{216°}{2} = 108°$$

Resposta: $C\hat{F}D = 108°$

b)

$$D\hat{B}E = F\hat{B}E = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{72°}{2} = 36° \qquad B\hat{E}F = B\hat{E}C = \frac{72°}{2} = 36°$$

$E\hat{F}B = C\hat{F}D = 108°$
Resposta: $F\hat{B}E = B\hat{E}F = 36°$ e $E\hat{F}B = 108°$.

c) TEB é um ângulo de um segmento.

$$T\hat{E}B = \frac{\overset{\frown}{EB}}{2} = \frac{144°}{2} = 72°$$

Resposta: $T\hat{E}B = 72°$.

33.3. a) Como $\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{AB}$, então $\overline{AE} = \overline{AB}$.
Por outro lado, o triângulo $[EBF]$ é isósceles, pois $B\hat{E}F = B\hat{D}E$. Logo, $\overline{EF} = \overline{BF}$.
Portanto, os pontos A e F pertencem à mediatriz de $[BE]$, como queríamos mostrar.

b) $\overline{BO} = \overline{EO}$, pois $[BO]$ e $[EO]$ são raios da circunferência.
Logo, a mediatriz de $[BE]$ contém necessariamente o centro da circunferência, como queríamos mostrar.

33.4. Podem observar-se cinco simetrias de rotação e cinco simetrias de reflexão.

33.5. Rotação de centro O e amplitude 144° ou amplitude – 216°.

33.6. O eixo de reflexão é a reta EO.

34.1.

$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{97° + 33°}{2} = \frac{130°}{2} = 65° \qquad y = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{97° - 33°}{2} = \frac{64°}{2} = 32°$$

Resposta: $x = 65°$; $y = 32°$.

34.2.

$$C\hat{A}D = \frac{45°}{2} = 22,5°$$

Logo, $x = 180° - C\hat{A}D = 180° - 22,5° = 157,5°$

$$y = \frac{\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{BC}}{2} \qquad \text{e} \qquad \overset{\frown}{BC} = 180° - 75° - 45° = 60°$$

Logo,

$$y = \frac{180° + 60°}{2} = 120°$$

Resposta: $x = 157{,}5°$ e $y = 120°$.

34.3.

$$x = T\hat{A}C = 180° - B\hat{A}T \qquad \text{e} \qquad B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{BT}}{2} = \frac{160°}{2} = 80°$$

Logo, $x = 180° - 80° = 100°$.

$$y = \frac{\overset{\frown}{BT} - \overset{\frown}{TA}}{2} = \frac{160° - 88°}{2} = \frac{72°}{2} = 36°$$

Resposta: $x = 100°$ e $y = 36°$.

34.4. O triângulo $[ABC]$ é isósceles e $\overline{AC} = \overline{BC}$.
Assim,

$$C\hat{B}A = B\hat{A}C = \frac{180° - 56°}{2} = \frac{124°}{2} = 62°$$

Logo, $x = 180° - C\hat{B}A = 180° - 62° = 118°$.
$D\hat{A}C = 90°$ e $D\hat{A}B = 90° - B\hat{A}C = 90° - 62° = 28°$
Logo, $y = 180° - D\hat{A}B = 180° - 28° = 152°$
Resposta: $x = 118°$ e $y = 152°$

35.1. Os ângulos BAD e DCB são ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência.
Logo, $B\hat{A}D = 180° - 100° = 80°$.

35.2. $D\hat{A}E = 180° - F\hat{A}B - B\hat{A}D$
Logo, $D\hat{A}E = 180° - 30° - 80° = 70°$.

36.1. O ângulo TAB é um ângulo de um segmento. Logo, $\overset{\frown}{AB} = 2 \times 70° = 140°$. Por outro lado,

$$A\hat{C}B = \frac{140°}{2} = 70°$$

ou
$B\hat{A}C = 90° - 70° = 20°$ e $A\hat{C}B = 180° - 90° - 20° = 70°$ porque $C\hat{B}A = 90°$.

36.2. Sabemos que $C\hat{A}D = 90° - 30° = 60°$.
Assim,

$$B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{360° - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{DA}}{2}$$

Logo, $B\hat{A}D = \dfrac{360° - 140° - 60°}{2} = 80°$

Pág. 136

37. $x = D\hat{C}B = 180° - B\hat{A}D$ e $B\hat{A}D = 180° - 108° = 72°$.
Logo, $x = 180° - 72° = 108°$
$y = 180° - A\hat{D}C$ e $A\hat{D}C = 180° - 105° = 75°$.
Logo, $x = 180° - 72° = 108°$
Logo, $y = 180° - 75° = 105°$
Resposta: $x = 108°$ e $y = 105°$.

38. A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é 360°.
$x = 360° - 72° - 84° - 61° - 67° = 76°$
Resposta: $x = 76°$

39.

$$\frac{(8-2) \times 180°}{8} = 135° \quad \text{e} \quad \frac{(6-2) \times 180°}{6} = 120°$$

A amplitude de um dos ângulos internos de um octógono regular é 135° e a amplitude de um dos ângulos internos de um hexágono regular é 120°. Logo, $x = 360° - 135° - 120° = 105°$.

40.1. Não. Não há informação quanto ao comprimento dos lados.

40.2. $4 \times 60° + 2x = 360° \Leftrightarrow 2x = 360° - 240° \Leftrightarrow x = 60°$.

41.1. a) x representa a amplitude de um dos ângulos externos do polígono regular.

$$\frac{360°}{9} = 40°$$

Resposta: $x = 40°$

b) y representa a amplitude de um dos ângulos internos do polígono regular.
$y = 180° - 40° = 140°$
Resposta: $y = 140°$

41.2. $D\hat{O}F = 2 \times 40° = 80°$

$$F\hat{E}D = \frac{7 \times 40°}{2} = y = 140°$$

$$O\hat{F}E = E\hat{D}O = \frac{360° - 80° - 140°}{2} = 70°$$

41.3. O polígono regular pode ser inscrito numa circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$.
O ângulo BDC é um ângulo inscrito numa circunferência entre cujos lados está compreendido um arco de circunferência de amplitude 40°
Logo,

$$B\hat{D}C = \frac{40°}{2} = 20°$$

ou
O triângulo $[BCD]$ é isósceles, porque $\overline{DC} = \overline{CB}$ e $D\hat{C}B = y = 140°$.

Logo, $B\hat{D}C = \dfrac{180° - 140°}{2} = 20°$

42.1. a) $C\hat{B}A = 90°$

b)

$$C\hat{D}H = \frac{(6-2)\times 180°}{6} = 120°$$

c) $H\hat{D}A = 360° - 120° - 90° = 150°$

Pág. 137

42.2. a) $(6-2)\times 180° = 720°$ e $720° : 6 = 120°$.

A amplitude de cada um dos ângulos internos do hexágono regular é 120°.

Assim, a amplitude de cada um dos ângulos internos da figura obtida é:

$360° - 120° - 90° = 150°$ e a amplitude de cada um dos ângulos externos é $180° - 150° = 30°$.

Como $\frac{360°}{30°} = 12$, o polígono obtido (linha a vermelho) forma um polígono regular e, desta forma, a figura 37 forma uma figura fechada sem sobreposição de figuras.

b) Como $\frac{360°}{30°} = 12$ a figura interior (colorida a vermelho) forma um polígono regular com 12 lados.

43.

$$x = \frac{\overset{\frown}{DFA} - \overset{\frown}{ABD}}{2} = \frac{\left(\overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{FA}\right) - \left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD}\right)}{2} = \frac{120° + 90° - \left(\overset{\frown}{FAB} - \overset{\frown}{FA} + 120°\right)}{2} =$$

$$= \frac{120° + 90° - 120° + 90° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

44. $\overset{\frown}{BC} = 2x$ $\quad\quad$ $\overset{\frown}{DA} = 2y$ $\quad\quad$ $A\hat{E}D = 180° - 80° = 100°$

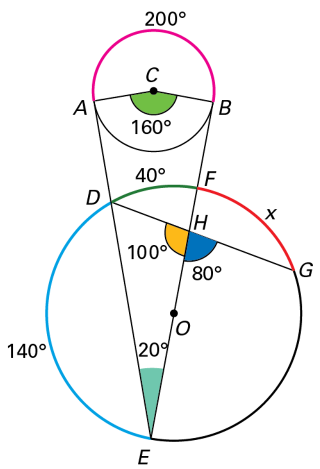
$$B\hat{V}C = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DA}}{2} \quad \text{e} \quad A\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}}{2}$$

$$30 = \frac{2x - 2y}{2} \quad \text{e} \quad 100 = \frac{2x + 2y}{2}$$

Logo, $\begin{cases} x - y = 30 \\ x + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 30 \\ y + 30 + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 30 \\ 2y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 65 \\ y = 35 \end{cases}$

$x = 65°$ e $y = 35°$

45.



$$G\hat{H}F = \frac{\overset{\frown}{GF} + \overset{\frown}{DE}}{2}$$

x é a solução da equação

$$G\hat{H}F = \frac{x + \overset{\frown}{DE}}{2} \quad (1)$$

$G\hat{H}F = 180° - 80° = 100°$

$$B\hat{E}A = \frac{200° - 160°}{2} = 20°$$

Se $B\hat{E}A = 20°$ então $\overset{\frown}{FD} = 2 \times 20° = 40°$

Como $[EF]$ é um diâmetro, temos

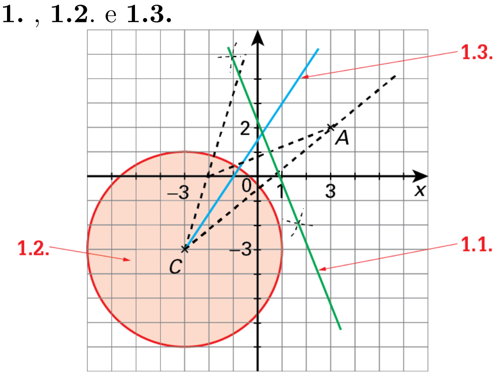
$\overset{\frown}{DE} = 180° - \overset{\frown}{FD} = 180° - 40° = 140°$

Voltando à equação (1), temos

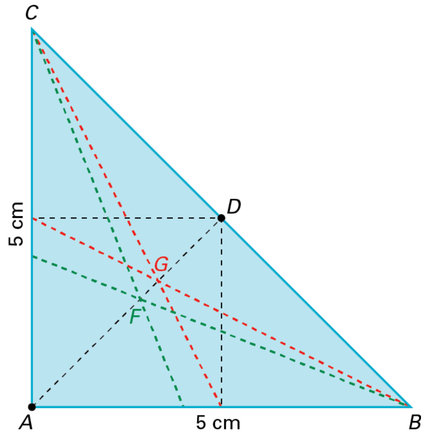
$$100 = \frac{x + 140}{2} \Leftrightarrow x + 140 = 200 \Leftrightarrow x = 60$$

$\overset{\frown}{GF} = 60°$

1.1. , **1.2.** e **1.3.**

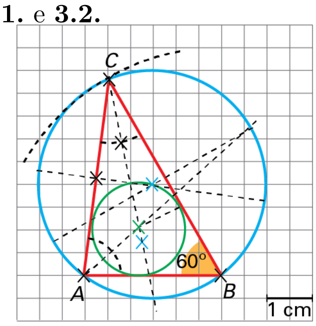


2.



Circuncentro: D
Incentro: F
Baricentro: G
Ortocentro: A

3.1. e **3.2.**

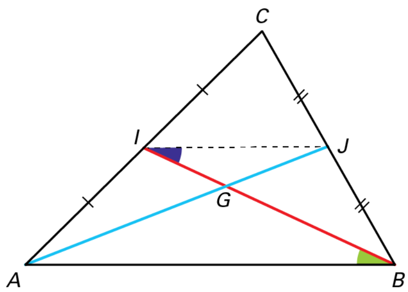


4.1. Os triângulos $[IJC]$ e $[ABC]$ são semelhantes pelo critério LAL. O ângulo IJC é comum aos dois triângulos e os lados que os formam são proporcionais, pois

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{JC}} = 2$$

Os ângulos CJI e CBA são iguais por serem ângulos correspondentes em triângulos semelhantes.

Como os ângulos são ângulos correspondentes determinados pela reta secante CB nas retas IJ e AB e como são iguais então as retas IJ e AB são paralelas.



4.2. Os ângulos GIJ e GBA são iguais por serem ângulos alternos internos determinados pela reta IB no par de retas paralelas IJ e AB.

Os ângulos JGI e AGB também são iguais por serem verticalmente opostos.

Logo, pelo critério AA os triângulos $[ABG]$ e $[IGJ]$ são semelhantes.

Sabemos de **4.1.** que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{IJ}} = 2$

Então, como $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GJ}} = \dfrac{\overline{BG}}{\overline{GI}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{IJ}}$

temos que $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GJ}} = 2$, ou seja, $\overline{AG} = 2\overline{GJ}$

Se $\overline{AG} = 2\overline{GJ}$ então $\overline{AG} = \dfrac{2}{3}\overline{AJ}$

5.1. Numa circunferência são iguais os ângulos e os arcos compreendidos entre retas paralelas.
Então $B\hat{O}C = A\hat{O}D$. Portanto, $C\hat{O}M = 90° - B\hat{O}C = = 90° - A\hat{O}D = M\hat{O}D$

5.2. a) Sabe-se $\overset{\frown}{CD} = 95°$ e

$$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DA} = \frac{180° - 95°}{2} = 42,5°$$

Assim, $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = 95° + 42,5° = 137,5°$
Resposta: $\overset{\frown}{CA} = 137,5°$

b) $B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC} = 42,5°$

6.1. $E\hat{O}B = 2 \times E\hat{C}B = 2 \times 53° = 106°$
Resposta: $E\hat{O}B = 106°$

6.2. Sabe-se que $\overset{\frown}{AB} = 2 \times 32° = 64°$ (ângulo de um segmento)

$$\text{Logo, } A\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{64°}{2} = 32°$$

Resposta: $A\hat{D}B = 32°$

7.1. A corda $[BC]$ corresponde ao arco de circunferência BC.
Como $[BC]$ é o lado do triângulo equilátero inscritível na circunferência, então $\overset{\frown}{BC} = 120°$.

$$\text{Logo, } B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Resposta: $B\hat{A}C = 60°$

7.2. $C\hat{A}D = 180° - B\hat{A}C = 180° - 60° = 120°$
Resposta: $C\hat{A}D = 120°$

8.

$$\frac{360°}{36°} = 10$$

Logo, o polígono regular tem 10 lados.

9. Os lados de um pentágono regular correspondem a 5 arcos de circunferência iguais, os quais têm 72° de amplitude.
Assim, para desenhar o pentágono regular desenham-se 5 ângulos adjacentes com 72° de amplitude cada um, cujos lados intersetam a circunferência em 5 pontos.
Obtém-se o pentágono regular unindo os cinco pontos com segmentos de reta.

10. Os seus ângulos opostos são suplementares.

1. A semirreta $\dot{C}P$ é a bissetriz do ângulo ACB porque o divide em dois ângulos com a mesma amplitude.
$B\hat{A}C = 180° - 110° - 2 \times 15° = 40°$
Logo a semirreta $\dot{A}P$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ dado que $B\hat{A}P = P\hat{A}C = 20°$
Portanto P é o incentro do triângulo $[ABC]$ dado que é o ponto de interseção das bissetrizes.

2.1. $P\hat{Q}R = S\hat{Q}R = 90°$ porque os triângulos $[RQP]$ e $[PQS]$ são inscritos numa semicircunferência.
Logo, são triângulos retângulos.

2.2. $S\hat{Q}R = S\hat{Q}P + P\hat{Q}R = 90° + 90° = 180°$. SQR é um ângulo raso. Logo, S, Q e R pertencem à mesma reta.

3.1.

$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Resposta: **(A)**

3.2.

$$B\hat{G}D = \frac{B\hat{O}D}{2} = \frac{2 \times 45^\circ}{2} = 45^\circ$$

4.1. $D\hat{C}B = 180^\circ - B\hat{A}D = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ porque os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência são suplementares.

4.2. Como AP e BP são retas tangentes à circunferência, então $\overline{AP} = \overline{BP}$ e, portanto, o triângulo $[ABP]$ é isósceles. Assim, $P\hat{A}B = A\hat{B}P = 70^\circ$.

Logo, $B\hat{P}A = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$

4.3. Os triângulos $[BCD]$ e $[ABD]$ são retângulos e, portanto, podem ser inscritos em semicircunferência. Desta forma, conclui-se que os arcos DB e BD são semicircunferências. Logo, $[BD]$ é um diâmetro da circunferência.

5. O centro da circunferência é o circuncentro do triângulo $[ABC]$.

6.1. $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$

$\overline{AC}^2 + 4,2^2 = 15^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 207,36$

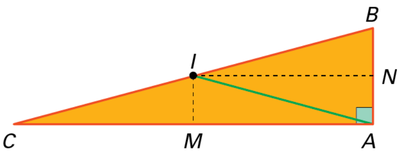
Como $\overline{BC} > 0$, temos $\overline{BC} = \sqrt{207,36} = 14,4$

$\overline{BC} = 14,4$ cm

6.2.

$$\overline{IM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{4,2}{2} = 2,1$$

$$\overline{IN} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{14,4}{2} = 7,2$$



a)

$$A_{[ABI]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{IN}}{2} = \frac{4,2 \times 7,2}{2} = 15,12$$

$A_{[ABI]} = 15,12$ cm^2

b)

$$A_{[AIC]} = \frac{\overline{AC} \times IM}{2} = \frac{14,4 \times 2,1}{2} = 15,12$$

$A_{[AIC]} = 15,12$ cm^2

$A_{[ABI]} = A_{[AIC]} = 15,12$ cm^2

7.

Altura do triângulo: $h^2 + 2,5^2 = 5^2 \Leftrightarrow h^2 = 18,75$

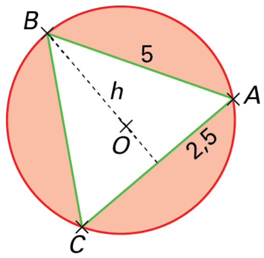
Como $h > 0, h = \sqrt{18,75}$

Raio do círculo: $r = \overline{OC} = \frac{2}{3}h$

(Num triângulo equilátero, a altura coincide com a mediana)

Portanto,

$$r = \frac{2}{3}\sqrt{18,75}$$



$$A_{\text{colorida}} = \pi r^2 - \frac{5 \times \sqrt{18,75}}{2} \approx 3,1416 \times \left(\frac{2}{3}\sqrt{18,75}\right)^2 - 2,5\sqrt{18,75} \approx 15,4 \text{ cm}^2$$

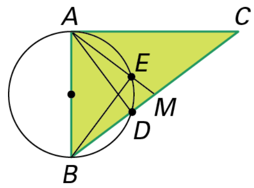
8.1. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4,5^2 + 6^2 = 56,25$

$\overline{BC}^2 = 7,5^2 = 56,25$

Pelo teorema recíproco do teorema de Pitágoras, como $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A.

8.2. $[ABD]$ e $[ABE]$ são triângulos inscritos numa semicircunferência.

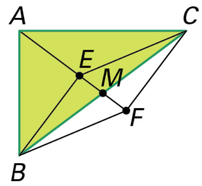
Logo, são triângulos retângulos.



8.3. F é a imagem de E por uma reflexão central de centro M. Logo M é o ponto médio de $[EF]$

M é o ponto médio de $[BC]$.

Logo, o quadrilátero $[EBFC]$ é um paralelogramo porque as diagonais se bissetam.



9. $A_{[ABC]} = 14,4 \text{ cm}^2$

$$A_{[JPIC]} = \left(\frac{2}{6} \times 14,4\right) \text{ cm}^2 = 4,8 \text{ cm}^2$$

Pág. 146

1.1. *A, J, K*

1.2. *B, C, D, E, F, G, H, I*

2. A soma de todos os valores que aparecem no diagrama de Venn (número total de pessoas inquiridas) deverá ser igual a 20.

$20 - (7 + 3 + 5) = 20 - 15 = 5$

Logo, o número em falta é 5.

Resposta: A opção correta é **(B)**.

Pág. 147

3. A afirmação **(A)** é falsa porque na turma do Duarte há mais raparigas do que rapazes.

A afirmação **(B)** e **(C)** são falsas porque na turma do Duarte há alunos que usam óculos.

A afirmação **(D)** é verdadeira porque dos 24 alunos da turma do Duarte há somente três raparigas que usam óculos.

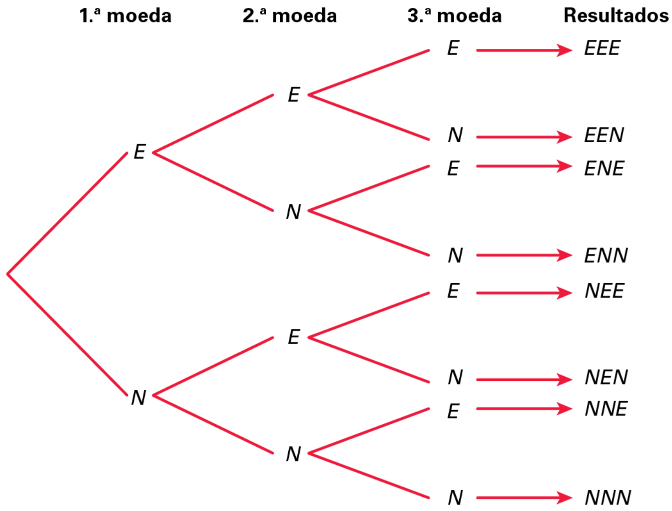
Resposta: A opção correta é **(D)**.

4.

		Dado 2			
Dado 1	↱+	1	2	3	4
	1	2	3	4	5
	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8

5.1. É possível obter quatro resultados: *EE, EN, NE* e *NN.*

5.2. É possível obter oito resultados: *EEE, EEN, ENE, ENN, NEE, NEN, NNE* e *NNN.*



Pág. 148

Classes | Altura (cm)	n_i	f_i
[175 , 183[	2	$\frac{2}{16} = 0,125$
[183 , 191[	4	$\frac{4}{16} = 0,25$
[191 , 199[	5	$\frac{5}{16} = 0,3125$
[199 , 207[	3	$\frac{3}{16} = 0,1875$
[207 , 215[	2	$\frac{2}{16} = 0,125$

Pág. 149

Questão 1

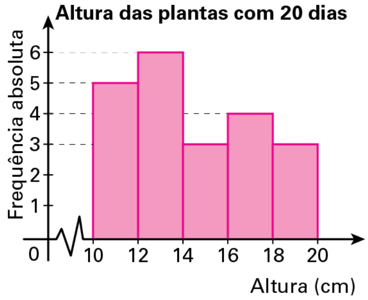
N° de golos	n_i	f_i
[11 , 18[	5	0,25
[18 , 25[	2	0,10
[25 , 32[	3	0,15
[32 , 39[	4	0,20
[39 , 46[	2	0,10
[46 , 53[	4	0,20
	20	1

Questão 2

$19 - 10 = 9$

$9 : 5 = 1,8 \approx 2$

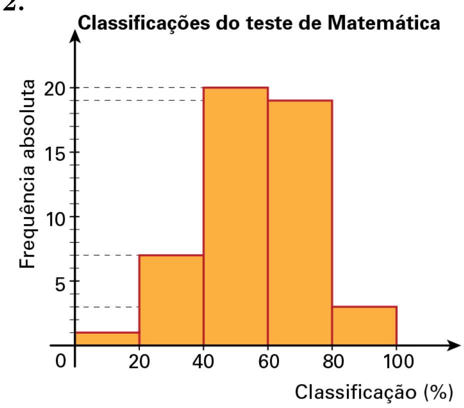
Classes	Freq. absoluta
[10 , 12[	5
[12 , 14[	6
[14 , 16[	3
[16 , 18[	4
[18 , 20[	3
Total	21



1. A opção **(A)** é de rejeitar porque, por exemplo, não é a classe [20 , 25[que corresponde a maior frequência.
A opção **(B)** é rejeitada porque as classes [0 , 5[e [20 , 25[têm a mesma frequência.
A opção **(D)** é de rejeitar porque a frequência da classe
[5 , 10[é maior do que a frequência da classe [15 , 20[
Resposta: **(C)**

2.1. $1 + 7 = 8$
8 alunos obtiveram menos de 40.

2.2.



3.1. Estiveram estacionados menos de 1 hora 10 automóveis.

3.2. $50 + 30 + 10 = 90$
Estiveram estacionados duas ou mais horas, 90 automóveis.

3.3.

Classes	Freq. absoluta	Freq. relativa
[0 , 1[	10	0,06
[1 , 2[	60	0,38
[2 , 3[	50	0,31
[3 , 4[	30	0,19
[4 , 5[	10	0,06
Total	160	1

4.1. Variável quantitativa discreta

4.2. $4 + 6 + 3 + 2 + 1 = 16$
$6 + 3 = 9$

$$\frac{9}{16} \times 100 = 56,25\,\%$$

4.3.

Classes	Freq. absoluta	Freq. relativa
[30 , 40[	4	25 %
[40 , 50[	6	37,5 %
[50 , 60[	3	18,75 %
[60 , 70[	2	12,5 %
[70 , 80[	1	6,25 %
	16	100 %

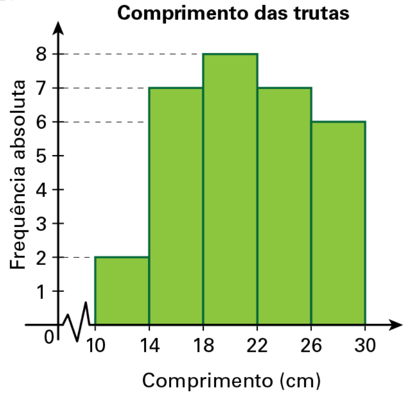
5.1. Valor mínimo: 10 ; Valor máximo: 28

$28 - 10 = 18$

$18 : 5 = 3,6 \approx 4$

Classes	Freq. absoluta	Freq. relativa
[10 , 14[	2	$\frac{1}{15}$
[14 , 18[	7	$\frac{7}{30}$
[18 , 22[	8	$\frac{4}{15}$
[22 , 26[	7	$\frac{7}{30}$
[26 , 30[	6	$\frac{1}{5}$
	30	1

5.2.



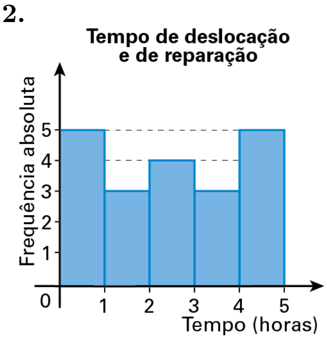
6.1. Valor mínimo: 0,3 ; Valor máximo: 5

$5 - 0,3 = 4,7$

$4,7 : 5 = 0,94 \approx 1$

Classes	Freq. absoluta	Freq. relativa
[0 , 1[	5	0,25
[1 , 2[	3	0,15
[2 , 3[	4	0,20
[3 , 4[	3	0,15
[4 , 5]	5	0,25
	20	1

6.2.



6.3.

0	30 60 70 80 90
1	25 30 50
2	12 50 70 70
3	00 10 50
4	10 20 20 50
5	00

2|50 representa 2,5 horas

7.1. a)

$$\bar{x} = \frac{1,7 + 1,9 + 2,3 + ... + 4,2}{19} = 3$$

b) $Mo = 2,9$

c) Número de dados: 19 (ímpar)

A mediana é o dado de ordem $\frac{19+1}{2} = 10$

$\tilde{x} = 2,9$

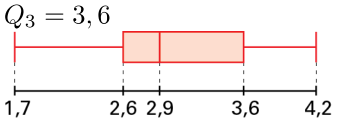
Pág. 153

7.2. O primeiro quartil é a mediana dos dados de ordem inferior a 10. É o dado de ordem $\frac{9+1}{2} = 5$.

$Q_1 = 2,6$

O terceiro quartil é a mediana dos dados de ordem superior a 10. É o dado de ordem 15.

$Q_3 = 3,6$

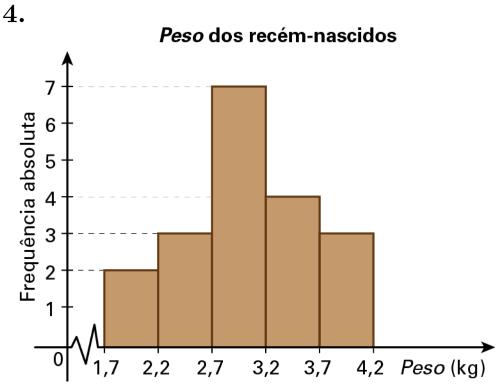


7.3. $4,2 - 1,7 = 2,5$

$2,5 : 5 = 0,5$

Classes	Freq. absoluta
[1,7 ; 2,2[	2
[2,2 ; 2,7[	3
[2,7 ; 3,2[	7
[3,2 ; 3,7[	4
[3,7 ; 4,2]	3
Total	19

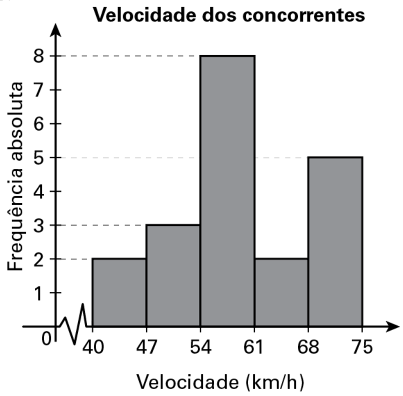
7.4.



8.1.

Classes	Freq. absoluta
[40 , 47[	2
[47 , 54[	3
[54 , 61[	8
[61 , 68[	2
[68 , 75[	5
Total	20

8.2.



9.1. a) Rio A

Classes	Freq. absoluta
[10 , 15[	3
[15 , 20[	6
[20 , 25[	3
[25 , 30[	0
[30 , 35[	2
Total	14

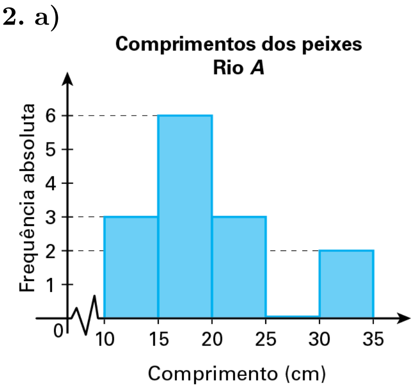
b) Rio B

Classes	Freq. absoluta
[15 , 20[	8
[20 , 25[	0
[25 , 30[	0
[30 , 35]	3
Total	11

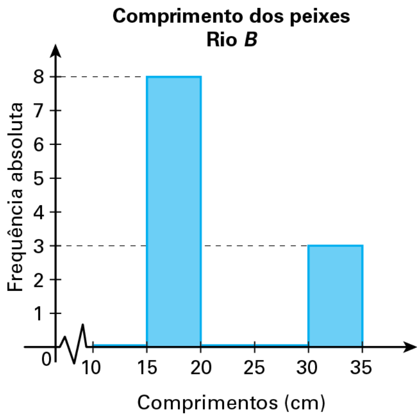
c) Rio A e Rio B

Classes	Freq. absoluta
[10 , 15[	3
[15 , 20[	14
[20 , 25[	3
[25 , 30[	0
[30 , 35]	5
Total	25

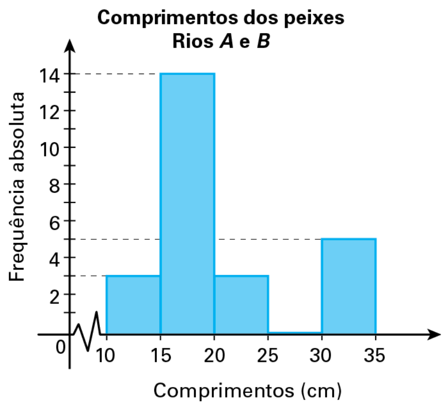
9.2. a)



b)



c)



Pág. 154

1. Sair a face europeia ou a face nacional tem a mesma probabilidade (supondo que a moeda é equilibrada).

2. Todas as chaves têm a mesma probabilidade de ganhar o primeiro prémio.

Pág. 155

Questão 3

3.1. Por exemplo:
"Lança um dado com todas as faces numeradas com o número 6 e registar o número que sai."

3.2.

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 8, 10 \right\}$$

Pág. 157

Questão 4

$E = \{1, 2, 3, 4\}$; acontecimento certo
$F = \{3\}$; acontecimento elementar
$G = \{2, 3\}$; acontecimento composto
$H = \{1, 2, 4\}$; acontecimento composto

Questão 5 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

5.1. $B \cap C = \varnothing$ e $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\} \neq S$
B e C são incompatíveis e não complementares.

5.2. $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = S$
A e B são complementares.

5.3. $A \cap C = \{3, 5\} \neq \varnothing$
A e C são compatíveis.

1.1. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

1.2. $S = \{V, A, R, L\}$

2.1. $S = \{L, V, A, R\}$

2.2. Por exemplo $A = \{L, V\}$ e $B = \{A, R\}$ **ou** $C = \{L, V, A\}$ e $D = \{R\}$

3.1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

3.2. a) $A = \{2, 4, 6\}$ **b)** $B = \{1, 3, 5, 7\}$ **c)** $C = \{2, 3, 5, 7\}$

d) $D = \{1, 2, 3, 6\}$ **e)** $E = \{2, 4, 6\} = A$ **f)** $F = \{1, 4\}$

g) $G = \{1\}$ **h)** $H = \varnothing$ **i)** $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = S$

3.3. Acontecimento elementar: G
Acontecimento impossível: H
Acontecimento certo: I
Acontecimento composto: $A = E$, B, C, D, F e I

3.4. a) C e F
$C \cap F = \varnothing$ e $C \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \neq S$

b) A e B
$A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = S$

c) Por exemplo, A e F

$A \cap F = \{4\} \neq \varnothing$

Figura 1 Deve escolher o frasco 1 porque a proporção de bolas azuis relativamente ao total de bolas é maior neste frasco:

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

Figura 2 Neste caso deve escolher o frasco 2

$$\left(\frac{3}{4} > \frac{5}{7} \text{ pois } \frac{3}{4} = \frac{21}{28} \text{ e } \frac{5}{7} = \frac{20}{28}\right)$$

Questão 6

6.1. Número de casos possíveis: $20 + 8 = 28$
Número de casos favoráveis: 20

$$P = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

6.2. a) Número de casos possíveis: $28 - 1 = 27$
Número de casos favoráveis: 8

$$P = \frac{8}{27}$$

b) Número de casos possíveis: $28 - 1 = 27$
Número de casos favoráveis: $8 - 1 = 7$

$$P = \frac{7}{27}$$

Questão 7

7.1. a) O acontecimento E é certo porque $P(E) = 1$

b) O acontecimento D é impossível porque $P(E) = 0$

c) Por exemplo, o acontecimento E é possível porque $P(E) \neq 0$.

d) A e C são equiprováveis porque $P(A) = P(C)$

7.2. Se $P(C) = P(A)$ e $P(A) > P(B)$ então $P(C) > P(B)$.
Logo, o acontecimento C é mais provável do que o acontecimento B.

Questão 8

Seja x o número de rifas que a Lurdes teria de comprar.

$$\frac{x}{200} = 5\,\% \Leftrightarrow \frac{x}{200} = \frac{5}{\underset{(2)}{100}} \Leftrightarrow x = 10$$

A Lurdes teria de comprar 10 rifas.

1.1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

1.2. a) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 6 $\{2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12\}$

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

b) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 5 $\{2 , 3 , 5 , 7 , 11\}$

$$P = \frac{5}{12}$$

c) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 2 $\{6 , 12]$

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

d) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 6 $\{1 , 3 , 3 , 4 , 6 , 12\}$

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

e) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 2 $\{1 , 2\}$

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

f) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 12

$$P = \frac{12}{12} = 1 \qquad \text{(É o acontecimento certo)}$$

g) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 11 ;
$\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11\}$

$$P = \frac{11}{12}$$

h) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 1
(O número 1 não é primo nem composto)

$$P = \frac{1}{12}$$

1.3. a) A afirmação é falsa porque sendo os acontecimentos:
A: "sai um número ímpar";
$A = \{1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11\}$
B: "sai um número primo";
$B = \{2 , 3 , 5 , 7 , 11\}$

$$P(\text{sair um número ímpar}) = \frac{6}{12}$$

$$P(\text{sair um número primo}) = \frac{5}{12}$$

b)

$$P(\text{sair divisor de 12}) = \frac{6}{12}$$

$$P(\text{sair número ímpar}) = \frac{6}{12}$$

Logo, a afirmação é verdadeira.

2. Número de raparigas: 18
Número de rapazes: x
Total de alunos 18 + x
Número de casos possíveis: 18 + x
Número de casos favoráveis: x

$$\frac{x}{18+x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = 18 + x \Leftrightarrow 3x - x = 18 \Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = 9$$

18 + 9 = 27
A turma tem 27 alunos.

Pág. 164

3. Azuis: 2 ; Cor-de-rosa: 3 ; Verdes: $\frac{5}{10}$

3.1. Por exemplo

a) Qual é a probabilidade de a chupeta retirada ser azul?

b) Qual é a probabilidade de a chupeta retirada ser cor-de-rosa?

c) Qual é a probabilidade de a chupeta retirada ser verde?

d) Qual é a probabilidade de a chupeta retirada não ser cor-de-rosa?

3.2. Número de casos possíveis: 10
Número de casos favoráveis: 2 + 3 = 5 **ou** 10 – 5 = 5

$$P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

3.3. É necessário colocar na caixa três chupetas azuis para que fiquem na caixa tantas chupetas azuis como verdes.

4.1. Número de casos possíveis: 10 + 0 + 8 + 7 = 25
Número de casos favoráveis: 10 + 0 = 10

$$P = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

4.2. Número de casos possíveis: 25
Número de casos favoráveis: 8 + 7 = 15

$$P = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

4.3. Número de casos possíveis: 25
Número de casos favoráveis: 0 + 7 = 7

$$P = \frac{7}{25}$$

4.4. Número de casos possíveis: 25
Número de casos favoráveis: 7

$$P = \frac{7}{25}$$

5.1. Número de casos possíveis: 200
Número de casos favoráveis: 40 + 20 = 60

$$P = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}$$

5.2. Número de casos possíveis: 200
Número de casos favoráveis: 60 + 20 = 80

$$P = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$$

5.3. Número de casos possíveis: 200
Número de casos favoráveis: 80

$$P = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$$

5.4. Número de casos possíveis: 200
Número de casos favoráveis: 40 + 20 +60 = 120

$$P = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$$

6. 5.3. Número de casos possíveis: 25
Número de casos favoráveis: 5

$$P = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

7.1. a) P (gravata ser azul) $= \frac{1}{5}$ significa que a quinta parte das gravatas que estão na gaveta são azuis.
Logo, há na gaveta, pelo menos, cinco gravatas sendo uma azul e quatro vermelhas.
b) Se na gaveta havia, pelo menos três gravatas azuis então havia, pelo menos $5 \times 3 = 15$ gravatas sendo 3 azuis e 12 vermelhas.

7.2. A gaveta tem 20 gravatas; $\frac{3}{5}$ das gravatas são verdes

$$\frac{3}{5} \times 20 = 12$$

12 gravatas são verdes
$20 - 12 = 8$
Há na gaveta 8 gravatas sendo pelo menos uma de cor azul. Logo, há no máximo sete gravatas lilases.

1.1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1.2. $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$

1.3. $A = \{2,\ 3\ , 5\}$; $B = \{4\}$; $C = \{2, 4\}$; $D = \{1, 3, 5\}$

1.4.1. a)

$$P(C) = \frac{2}{5}$$

b)

$$P(D) = \frac{3}{5}$$

c) $C \cup D = \{2, 4\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = S$
$C \cap D = \varnothing$

d)

$$P(C \cup D) = \frac{5}{5} = 1$$

e)

$$P(C) + P(D) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

1.4.2. a)

$$P(B) = \frac{1}{5}$$

b) $B \cup C = \{4\} \cup \{2, 4\} = \{2, 4\}$
$B \cap C = \{4\}$

c)

$$P(B \cup C) = \frac{2}{5}$$

d)

$$P(B) + P(C) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

1.4.3. a)

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

b)

$$P(D) = \frac{3}{5}$$

c) $A \cup D = \{2, 3, 5\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$
$A \cap D = \{3, 5\}$

d)

$$P(A \cup D) = \frac{4}{5}$$

e)

$$P(A) + P(D) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

Questão 9: Verdes: 3 ; Vermelhos: 5 ; Amarelos: $\frac{4}{12}$

9.1.

$$P(C) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

9.2. A e B são disjuntos (não há nenhum pimento verde e vermelho).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

9.3. B e C são disjuntos

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

9.4. A, B e C são disjuntos, dois a dois

$$P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = 1$$

1. A probabilidade de um acontecimento é um número maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1.
Como $\frac{8}{7} > 1$, a resposta que o Dinis deu está necessariamente errada.

2.1. Os acontecimentos «tirar um cartão com uma rosácea do tipo A» e «tirar um cartão com uma rosácea do tipo B» são acontecimentos complementares.

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

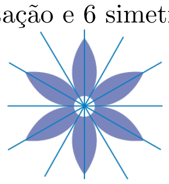
A probabilidade de tirar um cartão com uma rosácea do tipo B é $\frac{3}{5}$.

2.2.

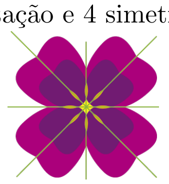
$\frac{2}{5} \times 35 = 14 \rightarrow$ tipo A $\qquad$ $35 - 14 = 21 \rightarrow$ tipo B

Há 14 rosáceas do tipo A e 21 rosáceas do tipo B.

2.3. A rosácea do tipo A tem 6 simetrias de rotação e 6 simetrias de reflexão.



A rosácea do tipo B tem 4 simetrias de rotação e 4 simetrias de reflexão.



3.1. a) A e B são disjuntos (não há no horto uma gerbéria com duas cores)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{8}{15}$$

b) $(A \cup B) \cup C$ é o acontecimento certo (o vaso selecionado tem uma flor cor de laranja ou cor-de-rosa ou amarela).
Então $P[(A \cup B) \cup C] = 1$

3.2. a) O acontecimento "ser amarela" é o complementar de "ser cor de laranja ou cor-de-rosa", ou seja,

$$P(C) + P(A \cup B) = 1 \Leftrightarrow P(C) + \frac{8}{15} = 1 \Leftrightarrow P(C) = 1 - \frac{8}{15} \Leftrightarrow P(C) = \frac{7}{15}$$

b) P (não ser amarela) $= 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$

4.1. Número de funcionários com vencimento entre:
1000 e 1500 $\longrightarrow$ 8 ; 1500 e 2000 $\longrightarrow$ 5 ; 2000 e 2500 $\longrightarrow$ 4 ; 2500 e 3000 $\longrightarrow$ 1
$8 + 5 + 4 + 1 = 18$
Logo, conclui-se que a empresa tem 18 funcionários.

4.2. a) Há 8 funcionários em 18 cujo salário pertence à classe A.

$$P(A) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Há 5 funcionários em 18 cujo salário pertence à classe B.

$$P(B) = \frac{5}{18}$$

Resposta: $P(A) = \frac{4}{9}$ e $P(B) = \frac{5}{18}$

b) Os acontecimentos A e B são disjuntos porque não pode haver funcionários cujo salário pertença, simultaneamente, às classes A e B.

c) Como os acontecimento A e B são disjuntos,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{18} + \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

d) $P(B) + P\left(\bar{B}\right) = 1$

$$\frac{5}{18} + P\left(\bar{B}\right) = 1 \Leftrightarrow P\left(\bar{B}\right) = 1 - \frac{5}{18} \Leftrightarrow P\left(\bar{B}\right) = \frac{13}{18}$$

e) $\bar{A} \cup B$ é o acontecimento "o salário não pertence à classe A ou o salário pertence à classe B"
Pretende-se a probabilidade de o salário pertencer a uma das classes B, C ou D, ou seja, a probabilidade do acontecimento complementar de A. Logo,

$$P\left(\bar{A} \cup B\right) = \frac{5}{18} + \frac{4}{18} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

ou

$$P\left(\bar{A} \cup B\right) = P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

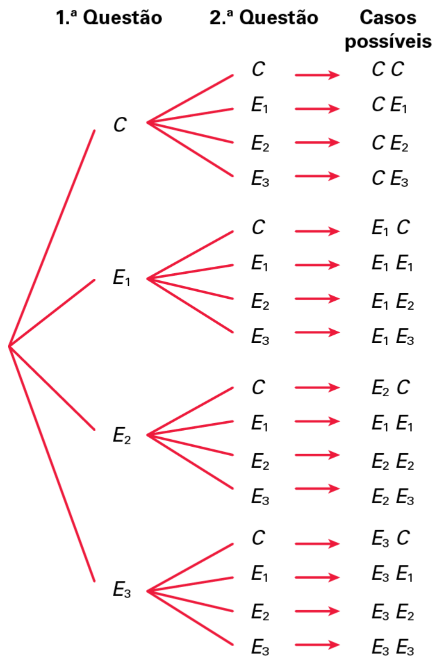
Pág. 170

Questão 10

10.1. Logo, há 12 refeições diferentes com uma entrada, um prato e uma sobremesa.

10.2. Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 6

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



Pág. 171

Questão 11

		2.ª									
		1		2		3		4		5	
1.ª	1	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5
	2	2	1	2	2	2	3	2	4	2	5
	3	3	1	3	2	3	3	3	4	3	5
	4	4	1	4	2	4	3	4	4	4	5
	5	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5

Número de casos possíveis: $5 \times 5 = 25$
Número de casos favoráveis: 9

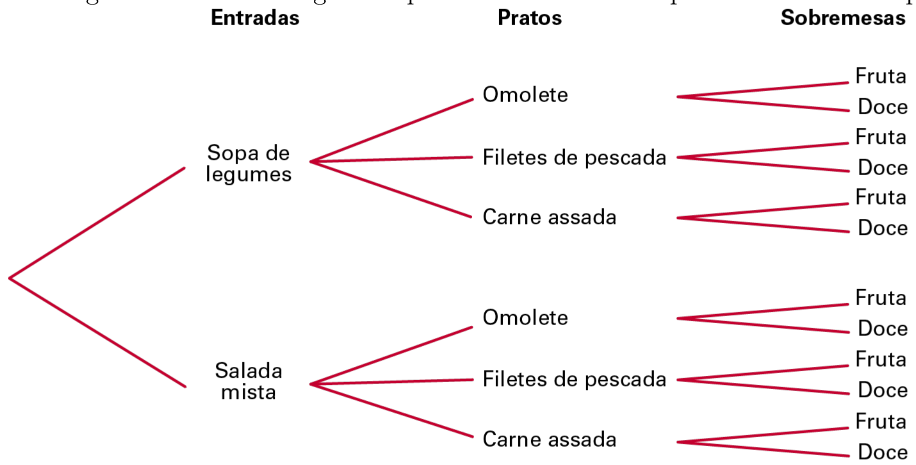
$$P = \frac{9}{25}$$

Pág. 172

1.1. Na primeira questão de escolha múltipla há 4 possibilidades de resposta, das quais apenas uma está correta:

$$P(C) = \frac{1}{4} \text{ e } P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

1.2. Em cada questão há uma resposta certa (C) e três erradas (E_1, E_2 e E_3).
No diagrama em árvore seguinte apresentam-se todas as possibilidades de resposta às duas questões:



1.3. Do diagrama em árvore, podemos concluir:
Número de casos possíveis: 16

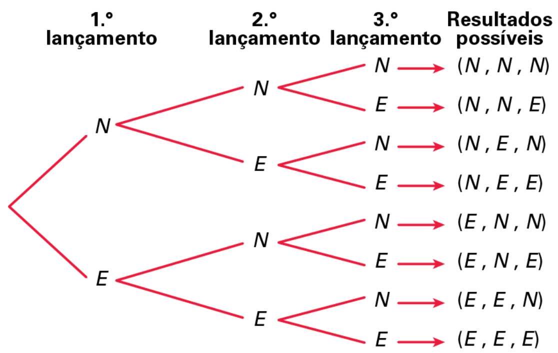
a) Número de casos favoráveis: 1 (CC)

$$P = \frac{1}{16}$$

b) Número de casos favoráveis: 7
$(CC,\ CE_1,\ CE_2,\ CE_3,\ E_1C,\ E_2C \text{ e } E_3C)$

$$P = \frac{7}{16}$$

2.1.



2.2. Conforme se observa no diagrama em árvore, temos:
Número de casos possíveis: 8
Número de casos favoráveis: 1 (apenas o resultado NNN conduz a que o Duarte ganhe 3 pontos)

$$P = \frac{1}{8}$$

2.3. Número de casos possíveis: 8
Número de casos favoráveis: 3 (NEE, ENE e EEN)

$$P = \frac{3}{8}$$

Pág. 173

3.1. Consideramos que D, A, B e T representam o Dinis, o Alex, a Beatriz e a Tita.

Como dos quatro nomes vamos selecionar dois, as situações possíveis são as seguintes: DA, DB, DT, AB, AT e BT.

Logo, há 6 casos possíveis, como queríamos mostrar.

3.2. Número de casos possíveis: 6

Número de casos favoráveis: 1 (BT)

$$P = \frac{1}{6}$$

3.3. Número de casos possíveis: 6

Número de casos favoráveis: 4 (DB, DT, AB e AT)

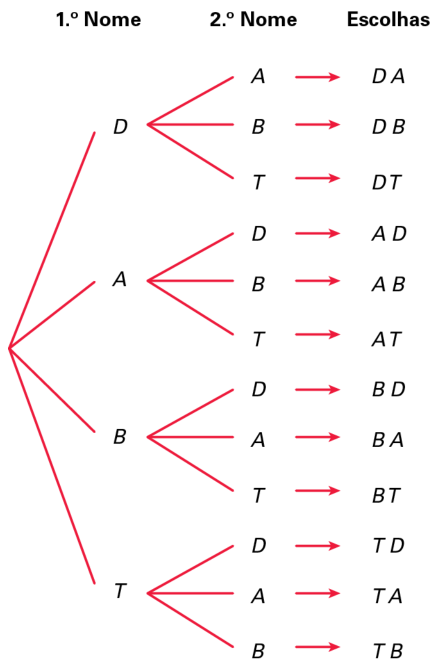
$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3.4. Número de casos possíveis: 6

Número de casos favoráveis: 3 (DA, AB e AT)

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3.5. a) O espaço de resultados tem 12 elementos.



b) Probabilidade de duas raparigas fazerem parte da comissão:

– Número de casos possíveis: 12

– Número de casos favoráveis: 2 (BT e TB)

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Probabilidade de a comissão ser constituída por um aluno de cada género.

– Número de casos possíveis: 12

– Número de casos favoráveis: 8

(DB, DT, AB, AT, BD, BA, TD e TA)

$$P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Probabilidade de o Alex fazer parte da comissão:

– Número de casos possíveis: 12

– Número de casos favoráveis: 6

(DA, AD, AB, AT, BA e TA)

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Os valores obtidos são iguais.

4.

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Ganha A

Ganha B

Ganha C

$P\ (A \text{ ganhar}) = \frac{13}{36}$; $P\ (B \text{ ganhar}) = \frac{11}{36}$;

$P\ (C \text{ ganhar}) = \frac{12}{36}$

O jogo não é justo:

$$P\,(A)\,\frac{13}{36} > P\,(C) = \frac{12}{36} > P\,(B) = \frac{11}{36}$$

Pág. 174

0,6 × 5 = 3

0,4 × 5 = 2

É previsível que o saco do grupo 1 tenha 3 fichas verdes e 2 fichas azuis.

Pág. 175

Questão 12

À medida que o número de experiências aumenta, a frequência relativa de sair bola vermelha tende para 0,2.

Pela definição de probabilidade frequencista, podemos inferir que 0,2 (ou 20 %) das 10 bolas existentes no saco são vermelhas. $0{,}2 \times 10 = 2$. Logo, é previsível que o saco tenha 2 bolas vermelhas.

Pág. 176

1. O número de experiências realizadas não é significativo, pelo que nada pode concluir-se relativamente à probabilidade de sair cada uma das cores. Para se tirar qualquer conclusão, minimamente rigorosa, seria necessário realizar um número relativamente elevado de experiências.

2.1. Número de experiências: $10 \times 20 = 200$

Número de fósforos que ficam sobre uma linha: 56

A frequência relativa do número de fósforos que ficaram sobre uma linha é:

$$\frac{56}{200} = \frac{7}{25} = 0,28 = 28\,\%$$

A probabilidade pedida é $\frac{7}{25}$ ou 0,28 ou 28 %.

2.2. $20 \times 50 = 1000$. No total, a Eduarda lançou 1000 fósforos, 28 % dos quais se estima que caíram sobre uma linha.

$1000 \times 28\,\% = 280$

Estima-se que, no total, caíram cerca de 280 fósforos sobre as linhas.

Pág. 177

3.1. O grupo cujos resultados permitem melhor estimativa para o cálculo da probabilidade é o grupo 2, uma vez que efetuou um maior número de lançamentos.

3.2. Número total de lançamentos: 600

Número de vezes em que as faces são diferentes: 342

A frequência relativa correspondente é:

$$\frac{342}{600} = \frac{57}{100} = 0,57 = 57\,\%$$

A probabilidade pedida é $\frac{57}{100}$ ou 0,57 ou 57 %

3.3.

$$\frac{5}{9} \times 600 \approx 333 \qquad \frac{5}{12} \times 600 = 250 \qquad \frac{1}{36} \times 600 \approx 17$$

Número de lançamentos	Resultados teóricos		
	Todas diferentes	Duas iguais	Três iguais
600	333	250	17

3.4. Se os dados forem equilibrados, os resultados teóricos são os valores para os quais tendem os valores obtidos experimentalmente, à medida que o número de experiências aumenta.

Pág. 179

Agora é a tua vez

a) Número de casos possíveis: $4 \times 4 = 16$

Número de casos favoráveis: $3 \times 3 = 9$

$$P = \frac{9}{16}$$

b) Número de casos possíveis: $4 \times 4 = 16$

Número de casos favoráveis: $1 \times 1 = 1$

$$P = \frac{1}{16}$$

c) Número de casos possíveis: $4 \times 4 = 16$

Número de casos favoráveis: $1 \times 3 + 3 \times 1 = 6$

$$P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

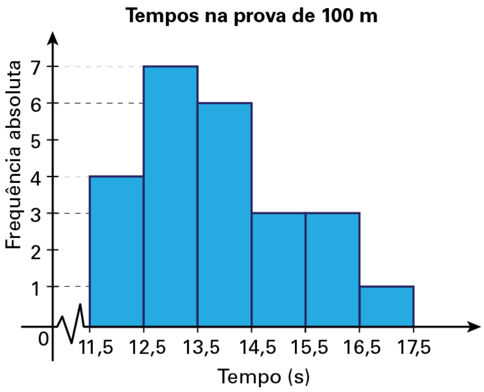
d) Número de casos possíveis: $4 \times 4 = 16$

Número de casos favoráveis: $3 \times 1 = 3$

$$P = \frac{3}{16}$$

1.

Classes	Freq. absoluta
[11,5 ; 12,5[	4
[12,5 ; 13,5[	7
[13,5 ; 14,5[	6
[14,5 ; 15,5[	3
[15,5 ; 16,5[	3
[16,5 ; 17,5[	1
Total	24



2.

Saco I: $P = \dfrac{2}{3} \approx 0,67$

Saco II: $P = \dfrac{5}{8} = 0,625$

Saco III: $P = \dfrac{3}{5} = 0,6$

É mais provável tirar uma bola vermelha do saco I .

3. A – Impossível B – Possível e Certo C – Possível D – Possível

4.1. Não há na caixa elásticos de duas cores. Logo, os acontecimento "sair vermelho", "sair azul", "sair verde" e "sair amarelo" são disjuntos dois a dois.

S = {Vermelho , Azul , Verde , Amarelo}
P (verde) = P (amarelo) = x
$P(S) = 1$
0,3 + 0,4 + x + x = 1
$2x = 1 - 0,7 \Leftrightarrow 2x = 0,3 \Leftrightarrow x = 0,15$

a) P (amarelo) = 0,15

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,15 + 0,3 = 0,45$

c) Na caixa há n elásticos dos quais 88 são azuis

$$\frac{88}{n} = 0,4 \Leftrightarrow 0,4n = 88 \Leftrightarrow n = \frac{88}{0,4} \Leftrightarrow n = 220$$

Na caixa há 220 elásticos.

5.1.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

5.2. Como P $(S) = 1$, temos

$$P(C) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Logo, $P(C) = P(B) = \frac{3}{8}$

6.

$-\dfrac{2}{3}$ não pode ser porque $-\dfrac{2}{3} < 0$

$\dfrac{7}{6}$ não pode ser porque $\dfrac{7}{6} > 0$

$\dfrac{1}{6}$ não é de esperar que seja porque $\dfrac{1}{6} \approx 16\,\%$

A probabilidade de não fazer um bom jogo poderá ser $\frac{5}{8} \approx 63\,\%$

Os valores pedidos são $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{7}{6}$ e $-\dfrac{2}{3}$

Pág. 181

7.1. A: "sair um número primo"
$A = \{2, 3, 5\}$
B: "sair um múltiplo de 3"
$B = \{3, 6\}$
$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
É mais provável sair um número primo.

7.2. a) é certo que sai um número natural;

b) é impossível que saia 7;

c) é provável que saia um número maior que 1;

d) é improvável que saia 1.

8.

$\dfrac{5}{12}$ das 60 azeitonas são verdes

$\dfrac{5}{12} \times 60 = 25$

25 azeitonas são verdes
$60 - 25 = 35$
Há no frasco 35 azeitonas pretas e castanhas.
Como há pelo menos uma azeitona castanha, há, no máximo, 34 azeitonas pretas.

9.1. Acontecimento A
Número de casos possíveis = 10 (Há 10 rebuçados no chapéu)
Número de casos favoráveis = 2 (No chapéu há 2 rebuçados azuis)

$P(A) = \dfrac{2}{10} = 0,2$

Acontecimento V
Número de casos possíveis = 10 (há 10 rebuçados no chapéu)
Número de casos favoráveis = 5 (No chapéu há 5 rebuçados verdes)

$P(V) = \dfrac{5}{10} = 0,5$

Resposta: $P(A) = 0,2$ e $P(V) = 0,5$

9.2. No chapéu, cada rebuçado tem uma única cor, pelo que os acontecimentos A e V não podem ocorrer simultaneamente. Assim, A e V são acontecimentos incompatíveis ou disjuntos.

9.3. Como A e B são disjuntos, temos
$P(A \cup V) = P(A) + P(V) = 0,2 + 0,5 = 0,7 = 70\,\%$

9.4.

Acontecimento	Sair verde	Sair azul	Sair vermelho	Sair amarelo
Probabilidade	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

9.5. O acontecimento é impossível, pois no chapéu não há qualquer rebuçado cor roxa, a probabilidade é igual a 0.

10.1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
Há 10 casos possíveis.

10.2. a) $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ **b)** $B = \{1, 5\}$ **c)** $C = \{8, 9, 10\}$

d) $D = \{3, 7\}$ **e)** $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

10.3.

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \qquad P(C) = \frac{3}{10}$$

$$P(D) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \qquad P(E) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

11.1. Número de casos possíveis: 13
Número de casos favoráveis: 1

$$P(A) = \frac{1}{13}$$

11.2. B e C são disjuntos

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

ou $B \cup C = \{8, 9\}$ $\quad P(B \cup C) = \frac{2}{13}$

11.3.

$$P(D) = \frac{1}{13}$$

$$P(\bar{D}) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

12.1. Não. O número de lançamentos efetuados é reduzido.

12.2. Como 2000 já é um número de lançamentos significativo, caso o dado fosse equilibrado as frequências relativas associadas aos diferentes acontecimentos (sair 1, 2, 3, 4, 5 ou 6) não deveriam de ser muito díspares, o que não acontece nesta situação. Deste modo, podemos inferir que o dado é imperfeito.

12.3. A melhor aposta serio no número 6, uma vez que a respetiva frequência relativa é substancialmente superior às frequências relativas da saída dos outros números.

13.1. a)

$$\bar{x} = \frac{4 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 7 \times 5 + 3 \times 6 + 2 \times 7}{4 + 4 + 5 + 7 + 3 + 2} = \frac{107}{25} = 4,28$$

b) O número de dados é ímpar ($n = 25$)
A ordem de referência para o cálculo dos quartis é $\frac{25+1}{2} = 13$.
A mediana é o elemento de ordem 13 na sequência ordenada dos dados. $\tilde{x} = 4$

c) $R = 7 - 2 = 5$

d) O 3.° quartil é a mediana dos dados de ordem superior a 13
14°, 15°, 16°, 17°, 18°, 19°, 20°, 21°, 22°, 23°, 24°, 25°.
O 3.° quartil é a média dos elementos de ordem 19 e 20 da sequência de dados.

$$Q_3 = \frac{5 + 5}{2} = 5$$

13.2. $Mo = 5$

13.3. Número de casos possíveis: 25
Número de casos favoráveis: 3 + 2 = 5

$$P = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

14.

x_i	n_i
14	7
15	6
16	7
17	10
Total:	30

14.1.

$$\frac{7}{30} \times 100\,\% \approx 23,33\,\%$$

Pág. 183

14.2.

$$\frac{7 \times 14 + 6 \times 15 + 7 \times 16 + 10 \times 17}{7 + 6 + 7 + 10} = \frac{470}{30} \approx 15,7$$

14.3. O número de dados é par ($n = 30$). A mediana é a média aritmética dos dois valores centrais da sequência ordenada de dados (15 e 16).

$$\tilde{x} = \frac{16 + 16}{2} = 16$$

14.4. a)

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

b) $P = 0$

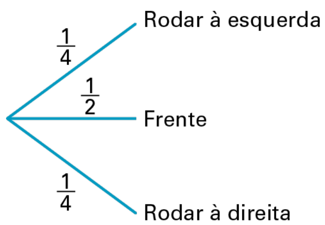
c)

$$P = \frac{7 + 6 + 10}{30} = \frac{23}{30} \text{ ou } P = 1 - \frac{7}{30} = \frac{23}{30}$$

15. Cálculos auxiliares

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$



15.1. A probabilidade de seguir em frente é $\frac{1}{2}$.

15.2. A probabilidade de rodar para a direita é $\frac{1}{4}$.

15.3. A probabilidade de rodar para a esquerda é $\frac{1}{4}$.

16. A probabilidade de qualquer acontecimento é um número maior ou igual a zero e menor ou igual a 1. Assim, as resposta erradas foram –0,3 ; 1,2 e $\frac{8}{3}$.

17.1. P (rebuçado) = 1 – (0,1 + 0,35 + 0,25) = 0,3

17.2. $200 \times 0,1 = 20$
Estima-se que a Adriana ganhe 20 bonecas.

18.1. P(o comboio não chegar atrasado) $= 1 - P$(o comboio chegar atrasado) $= 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

18.2. $0{,}2 \times 20 = 4$
Espera-se que o comboio chegue atrasado quatro vezes.

19.1. a) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 13

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

b) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: $12 - 3 = 9$

$$P = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

c) Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 6

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

19.2. Número de casos possíveis: 9
Número de casos favoráveis: 3

$$P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

A probabilidade pedida é $\frac{1}{3}$.

19.3. a) $1 - 0{,}7 = 0{,}3$

b) $0{,}7 \times 10 = 7$
A Joana tem 7 iogurtes de morango.

c) Ana:
Número de casos possíveis: 12
Número de casos favoráveis: 3

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Joana:
Número de casos possíveis: 10
Número de casos favoráveis: 3

$$P = \frac{3}{10}$$

É menos provável a Ana tirar um iogurte de banana porque $\frac{1}{4} < \frac{3}{10}$.

20.1. Número de casos possíveis: 5
Número de casos favoráveis: 2

$$P = \frac{2}{5}$$

20.2. Na caixa não há qualquer cubo azul.

O acontecimento é impossível.

$P = 0$

20.3. A probabilidade de sair um cubo vermelho é $\frac{1}{5}$. $100 \times \frac{1}{5} = 20$
Estima-se que, em 100 vezes, o cubo vermelho saia 20 vezes.

20.4. a)

↱	**A**	**A**	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{V}_2$
A	(A , A)	(A , A)	(A , V_1)	(A , V_1)	(A , V_2)
A	(A , A)	(A , A)	(A , V_1)	(A , V_1)	(A , V_2)
$\mathbf{V}_1$	(V_1 , A)	(V_1 , A)	(V_1 , V_1)	(V_1 , V_1)	(V_1 , V_2)
$\mathbf{V}_1$	(V_1 , A)	(V_1 , A)	(V_1 , V_1)	(V_1 , V_1)	(V_1 , V_2)
$\mathbf{V}_2$	(V_2 , A)	(V_2 , A)	(V_2 , V_1)	(V_2 , V_1)	(V_2 , V_2)

b) Números de casos possíveis: $5 \times 5 = 25$
Número de casos favoráveis: 16 (contados na tabela)

$$P = \frac{16}{25}$$

21.1.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

21.2. Tem 4 elementos:
(1 + 6 , 2 + 5 , 3 + 4 e 4 + 3)

21.3. Número de casos possíveis: 24
Número de casos favoráveis: 4

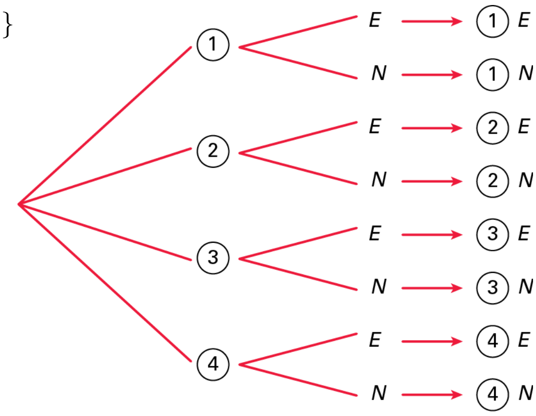
$$P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

21.4.

$$P(\text{soma } 7) = \frac{4}{24} \qquad P(\text{soma } 9) = \frac{2}{24}$$

É mais provável obter soma 7. $\left(\frac{4}{24} > \frac{2}{24}\right)$

22.1. $S = \{(1,\mathrm{E})\,;(1,\mathrm{N})\,;(2,\mathrm{E})\,;(2,\mathrm{N})\,;(3,\mathrm{E})\,;(3,\mathrm{N})\,;(4,\mathrm{E})\,;(4,\mathrm{N})\}$



22.2. Cada acontecimento elementar tem igual probabilidade de ocorrer. Logo, a probabilidade de cada acontecimento elementar é $\frac{1}{8}$

22.3. Número de casos possíveis: 8
Número de casos favoráveis: 3
((1 , N); (2 , N); (3 , N))

$$P = \frac{3}{8}$$

23. Chapéus verdes: 8
Chapéus roxos: 6
8 + 6 = 14

23.1. A probabilidade de escolher um chapéu vermelho é $\frac{1}{2}$.
Logo, metade dos chapéus são vermelhos. Portanto, há 14 chapéus vermelhos num total de 28.

$$P(\text{escolher chapéu verde}) = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

$$P(\text{escolher chapéu roxo}) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

Cor do chapéu	**Número de chapéus**	**Probabilidade**
Verde	8	$\frac{2}{7}$
Vermelho	14	$\frac{1}{2}$
Roxo	6	$\frac{3}{14}$

23.2. A probabilidade de sair um chapéu vermelho passa de para $\frac{14}{28}$ para $\frac{14}{29}$. Logo, a probabilidade diminui.
<u>Resposta</u>: **(B)**

24. Na tabela seguinte apresentam-se todos os casos possíveis:

		Saco 2							
		V		A		B		B	
Saco 1	V	V	V	V	A	V	B	V	B
	V	V	V	V	A	V	B	V	B
	V	V	V	V	A	V	B	V	B
	V	V	V	V	A	V	B	V	B
	A	A	V	A	A	A	B	A	B
	A	A	V	A	A	A	B	V	B

Número de casos possíveis: 24
Número de casos favoráveis a A: 18
Número de casos favoráveis a B: 18

$$P\,(A) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$P\,(B) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Logo, $P\,(A) = P\,(B) = \frac{3}{4}$

25. A soma das probabilidades dos três acontecimentos elementares é 1.
P (morango) + P (banana) + P (ananás) = 1

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+P\,(\text{anan á s})=1 \Leftrightarrow P\,(\text{anan á s})=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{3} \Leftrightarrow P\,(\text{anan á s})=\frac{7}{15}$$

A probabilidade de tirar ao acaso uma gelatina de ananás é $\frac{7}{15}$. Então, $\frac{14}{n}=\frac{7}{15}$

$$\frac{14}{n}=\frac{7}{15} \Leftrightarrow 14\times 15=7n \Leftrightarrow n=\frac{14\times 15}{7} \Leftrightarrow n=30$$

Ao todo, há 30 gelatinas no frigorífico.

26. Dos quatro ingredientes, a Inês vai escolher dois. Vamos contar todos os casos possíveis.

- *Presunto + cogumelos*
- *Presunto + ananás*
- *Presunto + camarão*
- *Cogumelos + ananás*
- *Cogumelos + camarão*
- *Ananás + camarão*

6 casos possíveis
Número de casos favoráveis: 1
A probabilidade pedida é $\frac{1}{6}$

27. Vamos organizar os dados numa tabela de dupla entrada.
Número de casos possíveis: 36
Número de casos favoráveis: 8

$$P=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

–	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

28. Na tabela apresentam-se todos os resultados possíveis:

	–1	0	0	1	3
–1	–2	–1	–1	0	2
3	2	3	3	4	6
3	2	3	3	4	6
3	2	3	3	4	6

Número de casos possíveis: 20

28.1. Número de casos favoráveis: 4

$$P=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

28.2. Número de casos favoráveis: 6

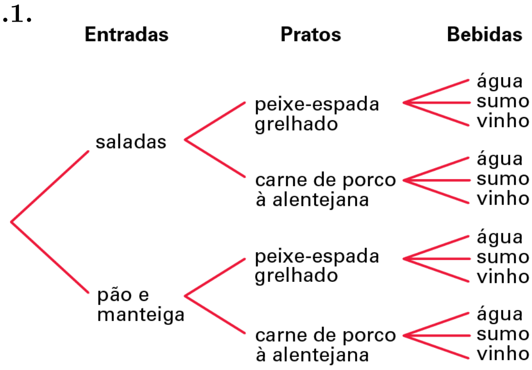
$$P=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

28.3. Número de casos possíveis: 20 – 1 = 19

$$P=\frac{19}{20}$$

Pág. 187

29.1.



29.2. N.º de casos possíveis para entrada e prato: 4
Número de casos favoráveis: 1

$$P=\frac{1}{4}$$

29.3. Número de casos possíveis: 12

a) Número de casos favoráveis: 1

$$P=\frac{1}{12}$$

b) Número de casos favoráveis: 4

$$P=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

30.1. Número de casos possíveis: 279
Número de casos favoráveis: 76

$$P = \frac{76}{279}$$

30.2. Número de casos possíveis: 76
Número de casos favoráveis: 1

$$P = \frac{1}{76}$$

30.3. Há 3 bilhetes, um de cada cor, com o número 20.
Número de casos possíveis: 3
(20 azul, 20 amarelo e 20 verde)
Número de casos favoráveis: 1

$$P = \frac{1}{3}$$

31.1. Número de casos possíveis: 1 + 3 + 5 + 3 + 2 + 1 = 15
Número de casos favoráveis: 5

$$P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

31.2. Número de casos possíveis: 15
Número de casos favoráveis: 6

$$P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

31.3. Número de casos possíveis: 400
Número de casos favoráveis:
$1 \times 0 + 3 \times 1 + 5 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 5 = 35$

$$P = \frac{35}{400} = \frac{7}{80}$$

32.1. Pode colocar as ventoinhas de 6 maneiras diferentes:
VRA VAR RAV
RVA ARV AVR

32.2. a) Número de casos possíveis: 6
Número de casos favoráveis: 3

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Número de casos possíveis: 6
Número de casos favoráveis: 4

$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

33.1. A Patrícia está errada porque na realização das 13 experiências estas decorrem nas mesmas condições, uma vez que o laço era reposto após ter sido retirado, e portanto, não representa o número de laços de cor vermelha que estavam no saco, simplesmente, o número de vezes que estes saíram durante a realização das 13 experiências.

33.2. Em duas das 13 experiências saiu um laço de cor verde.
Logo, concluir-se que há, no mínimo, um laço de cor verde no saco.

33.3. A Patrícia está errada, porque, apesar de não ter saído qualquer laço de cor roxa, não é impossível que exista no interior do saco, uma vez que nas 13 experiências realizadas pode, eventualmente, não ter sido retirado.

34.1. a) $14 - 10 = 4$

b)

$$\bar{x} = \frac{2 \times 10 + 4 \times 11 + 6 \times 12 + 3 \times 13 + 14}{2 + 4 + 6 + 3 + 1} = \frac{189}{16} \approx 11,8$$

c) O número de dados é par.
A mediana é a média dos dados de ordem central (8.° e 9.°)

$$\tilde{x} = \frac{12 + 12}{2} = 12$$

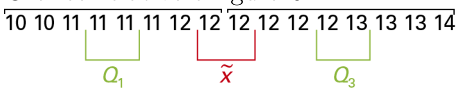
d) $Mo = 12$

34.2. Para construir o gráfico de extremos e quartis é necessário conhecer os valores do mínimo, máximo, mediana e quartis. Para calcular os quartis, vamos organizar os dados por ordem crescente.

$$\tilde{x} = \frac{12+12}{2} = 12$$

$$Q_1 = \frac{11+11}{2} = 11 \qquad Q_3 = \frac{12+13}{2} = 12,5$$

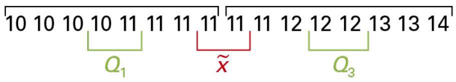
Gráfico relativo à figura 5:



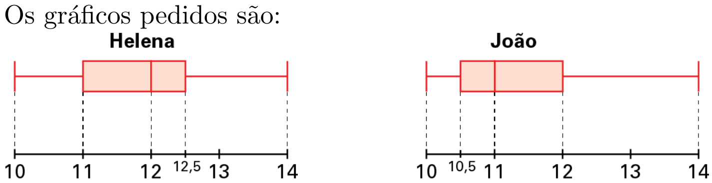
$$\tilde{x} = \frac{11+11}{2} = 11$$

$$Q_1 = \frac{10+11}{2} = 10,5 \qquad Q_3 = \frac{12+12}{2} = 12$$

Gráfico relativo à figura 6:



Os gráficos pedidos são:



34.3.

$$P \approx \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

34.4.

$$P \approx \frac{3}{16}$$

35. Vamos começar por organizar os dados numa tabela de dupla entrada.

Observando a tabela, verifica-se que o produto é negativo, nulo ou positivo em três situações.

Assim, a Ana, a Adriana e o Alexandre têm igual probabilidade de ganhar o jogo.

Logo, o jogo é justo.

×	–1	0	1
–3	3	0	–3
2	–2	0	2
4	–4	0	4

36.1. a) Número de casos possíveis: 13

Número de casos favoráveis: 8

$$P = \frac{8}{13}$$

b) Número de casos possíveis: 13

Número de casos favoráveis: 5

$$P = \frac{5}{13}$$

36.2. Para termos a certeza de tirar um peixe amarelo, é necessário garantir a saída de cinco peixes vermelhos.

Assim, para sair de certeza um peixe amarelo é necessário tirar 6 peixes.

43.1.

$y \mid x$	1	2	3	4	5
1	0	− 1	− 2	− 3	− 4
2	1	0	− 1	− 2	− 3
3	2	1	0	− 1	− 2
4	3	2	1	0	− 1
5	4	3	2	1	0

43.2. Número de casos possíveis: 25

a) $x = y \Leftrightarrow x - y = 0$

Número de casos favoráveis: 5

$$P = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

b) $y \geq x \Leftrightarrow x - y \leq 0$

Número de casos possíveis: 15

$$P = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

c) A soma é 10 se e só se $x = 5$ e $y = 5$

Número de casos possíveis: 1

$$P = \frac{1}{25}$$

43.3. Se o João escreveu o número 3 sabe que os casos possíveis para $x - y$ são 2, 1, 0, –1, –2.
Entre estes 5 casos há três (1, 0 e –1) cujo módulo é inferior a 2.

$$P = \frac{3}{5}$$

44. Os casos possíveis que, que o João, quer a Joana, apresentam não são equiprováveis. Por isso, as suas respostas estão, provavelmente erradas.
Na tabela seguinte apresentam-se todos os resultados possíveis (equiprováveis)

		2.º saco					
		B		B		P	
1.º saco	P	P	B	P	B	P	P
	P	P	B	P	B	P	P
	B	B	B	B	B	B	P

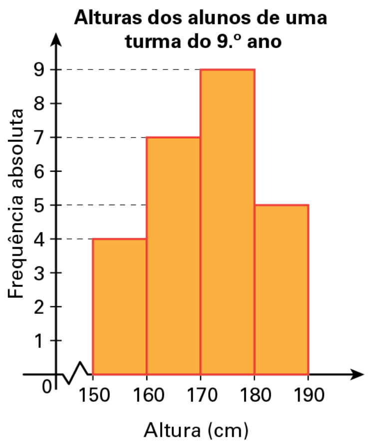
Número de casos possíveis: 9
Número de casos favoráveis: 4

$$P(A) = \frac{4}{9}$$

Pág. 190

1.1.

Classes	Freq. absoluta
[150 , 160[	4
[160 , 170[	7
[170 , 180[	9
[180 , 190[	5
Total	25



2. Atirar uma pedra ao rio e verificar se vai ao fundo é uma experiência determinista.
Resposta: **(C)**

3. $S = \{(N , 1) , (N , 2) , (N , 3) , (N . 4) , (N , 5) , (N , 6) ; (E , 1) , (E , 2) , (E , 3) , (E , 4) , (E , 5) , (E , 6)\}$

4.1. a) $C = \{D\}$, por exemplo

b) $D = \{R, D, P\}$

4.2. Por exemplo

a) E: "sair a letra X"

b) $F = \{R, T, D, P\}$

c) $G = \{R\}$

d) $A = \{R, P\}$

5. P (sair bola amarela) $= 1 - 0,4 - \frac{1}{3} - 0,1 = \frac{1}{6}$

6.1. Número de casos possíveis: 8 + 2 + 6 + 10 = 26
Número de casos favoráveis: 2 + 8 = 10

$$P = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

6.2. Número de casos possíveis = 26
Número de casos favoráveis = 14

$$P = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$$

6.3. Número de casos possíveis = 26
Número de casos favoráveis = 10

$$P = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

7.1. Número de casos possíveis = 2 + 3 + 1 = 6
Número de casos favoráveis = 2

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

7.2. Número de casos possíveis = 6
Número de casos favoráveis = 2 + 1 = 3

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ou

$$P = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

7.3. Número de casos possíveis = 6
Número de casos favoráveis = 6 − 2 = 4

$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

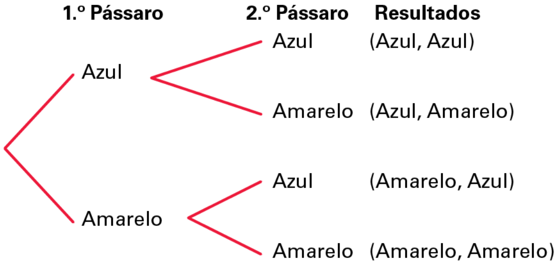
ou $P = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

7.4. Número de casos possíveis = 6
Número de casos favoráveis = 6 − 3 = 3

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ou $P = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

8.1.



8.2. Número de casos possíveis: 4
a) Número de casos favoráveis: 1

$$P = \frac{1}{4}$$

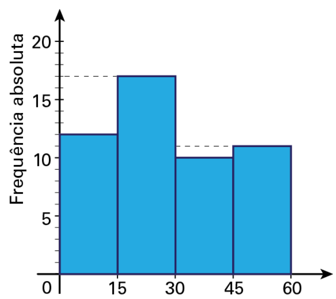
b) Número de casos favoráveis: 2

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Pág. 192

1. $0,34 \times 0,50 = 17$
$12 + 17 + 10 = 39$
$50 - 35 = 11$

Classes	Freq. absoluta	Freq. relativa(%)
[0 , 15[	12	24 %
[15 , 30[	17	34 %
[30 , 45[	10	20 %
[45 , 60[	11	22 %
Total	50	100 %



2.1. a)

$$\frac{39}{420} \approx 0,09$$

b) $A = \{2, 3, 5\}$
$67 + 62 + 55 = 184$

$$\frac{184}{420} \approx 0,44$$

c) $B = \{5, 6\}$
$55 + 86 = 141$

$$\frac{141}{420} = 0,34$$

2.2.

$$P = \frac{1}{6}$$

3. A probabilidade do acontecimento impossível é 0.
Resposta: **(C)**

4. Número de casos possíveis: 6

4.1. Número de casos favoráveis: 1

$$P = \frac{1}{6}$$

4.2. {2 , 3 , 5}
Número de casos possíveis: 3

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4.3. {2 , 4}
Número de casos favoráveis: 2

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4.4. O acontecimento é impossível
$P = 0$

5.1. Número de casos possíveis: 12 + 8 + 16 + 14 = 50
Número de casos favoráveis: 12 + 8 = 20

$$P = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

5.2. Número de casos favoráveis: 14

$$P = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

5.3. Número de casos favoráveis: 50 – 12 = 38

$$P = \frac{38}{50} = \frac{19}{25}$$

ou

$$P = 1 - \frac{12}{50} = \frac{19}{25}$$

5.4. Número de casos favoráveis:
50 – (8 + 14) = 50 – 22 = 28

$$P = \frac{28}{50} = \frac{14}{25}$$

ou

$$P = 1 - \frac{8+14}{50} = \frac{14}{25}$$

Pág. 193

6. Para cada par de calças, o João pode escolher uma de 7 camisas.
No total, pode vestir-se de 10 × 7 = 70 maneiras diferentes.
Resposta: **(C)**

7. Vermelhas: 8 ; Azuis: n ; Brancas: m

$$P(B) = \frac{2}{5} \qquad P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(V) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

Seja x o número total de bolas

$$\frac{4}{15} \times x = 8 \Leftrightarrow 4x = 15 \times 8 \Leftrightarrow x = \frac{120}{4} \Leftrightarrow x = 30$$

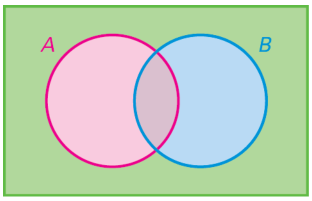
O saco tem 30 bolas

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} \times 30 = 12$$

O saco tem 12 bolas brancas.

8. Se A e B são disjuntos.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,5 = 0,8$
$P(A \cup B) \leq 0,8$
$P(A \cup B) \geq P(A)$ e $P(A) = 0,3$
$P(A \cup B) \geq P(B)$ e $P(B) = 0,5$
Logo, $0,5 \leq P(A \cup B) \leq 0,8$.
Resposta: **(C)**



9. Rapazes (M): 2
Raparigas (F): 3
Na tabela ao lado apresentam-se todos os casos possíveis.
Número de casos possíveis: 10
Número de casos favoráveis: 6

$$P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

	M_1	M_2	F_1	F_2	F_3
M_1		M_1M_2	M_1F_1	M_1F_2	M_1F_3
M_2			M_2F_1	M_2F_2	M_2F_3
F_1				F_1F_2	F_2F_3
F_2					F_2F
F_3	(a)				(b)

(a) A equipa F_3M_1 é a mesma que $M1_{F3}$
(b) Não é possível escolher duas vezes a mesma pessoa.

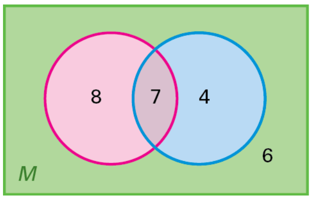
10. Vamos organizar os dados num diagrama de Venn.

$15 - 7 = 8$

$11 - 7 = 4$

$25 - (8 + 7 + 4) = 25 - 19 = 6$

$P = \frac{6}{25}$



3.1.

Soma 9	Soma 10
$1 + 2 + 6$	$1 + 3 + 6$
$1 + 3 + 5$	$1 + 4 + 5$
$1 + 4 + 4$	$2 + 2 + 6$
$2 + 2 + 5$	$2 + 3 + 5$
$2 + 3 + 4$	$2 + 4 + 4$
$3 + 3 + 3$	$3 + 3 + 4$