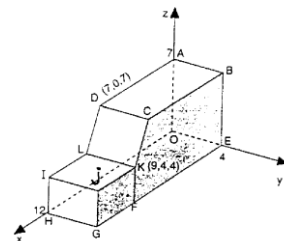


1) Observa a figura ao lado.

1.1. Indica, caso existam:

- a) dois planos perpendiculares; b) duas retas paralelas;
 c) uma reta aposta a um plano; d) uma reta secante ao plano FIH;
 e) duas retas não coplanares. f) as coordenadas dos vértices.

1.2. Qual a posição relativa da reta CK e do plano HGE ?



2) Considera os vetores $\vec{u} = (3, -4)$, $\vec{v} = (2, -1)$ e $\vec{w} = (3, 0)$ e os pontos $A = (1, -2)$ e $B = (-3, 4)$.

2.1. Represente cada um deles num referencial o.n. .

2.2. Define pelas suas coordenadas: a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $A + 2\vec{u}$ d) $\vec{AB} - \vec{w}$ e) $2\vec{u} - 3\vec{w}$

2.3. Determina : a) $\|\vec{u}\|$ b) $\|\vec{AB}\|$ c) $\|3\vec{u}\|$ d) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

3) Mostra que os pontos A (3,2), B (-1,-2) e C (7,6) são colineares.

4) Determina k de modo que os vetores (2,3) e (1,k-1) sejam colineares.

5) Determina $p \in \mathbb{R}$ de modo que os vetores (2,5) e (3,1+p) tenham o mesmo comprimento.

6) Seja num referencial o.n. o vetor $\vec{u} = (-2, 2)$. Determina:

- a) A norma e o versor de $\vec{u}$. b) As coordenadas de um vetor $\vec{x}$, paralelo a $\vec{u}$ e de norma $10\sqrt{2}$.

7) Determina as coordenadas de um vetor que tem norma 3 e é paralelo ao vetor (2,-3).

8) Obtenha, sempre que possível, a equação reduzida da reta que:

- a) É paralela a $\vec{u} = (2, 1)$ e passa pelo ponto $A = (3, -1)$.
 b) Passa pelos pontos (1,2) e (2,-5).
 c) Passa por (-3,5) e é paralela ao eixo das ordenadas.
 d) É paralela ao eixo das abcissas e contém o ponto (-5,3).
 e) Contém o ponto (7,-1) e é paralela à reta definida por $(x,y) = (1,2) + k(4,3)$, $k \in \mathbb{R}$.

f) É paralela à reta $y = \frac{4}{3}x + 1$ e contém o ponto (0,-2).

g) Tem declive 2 e contém o ponto (-3,6).

h) $\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -1 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$. i) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3}$.

9) Para cada reta do exercício anterior, determina as coordenadas de um ponto, distinto dos indicados, e de um vetor diretor. Averigua se o ponto (3,5) pertence a alguma delas.

10) Determina, analiticamente, as coordenadas dos pontos de interseção de cada uma das retas do exercício 8 com cada um dos eixos coordenados. Representa-as graficamente.

11) A reta s está definida pela equação $2x - 3y + 6 = 0$.

- a) Indica um vetor diretor da reta. b) Obtém o declive, a ordenada e a abcissa na origem.

12) Resolva os sistemas pelo método de redução (ou adição ordenada), indicando a posição relativa das retas.

$$a) \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 4x + 3y = -5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$$

13) Determina a posição relativa da reta e da circunferência em cada caso:

$$a) x^2 + y^2 = 1 \quad e \quad y = x$$

$$b) x^2 + y^2 = 1 \quad e \quad x + y = 4$$

14) Representa geometricamente as regiões do plano definidas pelas condições:

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + y \leq 1 \\ y \leq 0 \end{cases} \quad b) x^2 + y^2 \leq 4 \vee (y \geq \frac{1}{2}x \wedge y \leq \frac{3}{2}x)$$

$$c) x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 2x$$

$$d) y \geq -x + 3 \wedge y \leq -x + 8$$

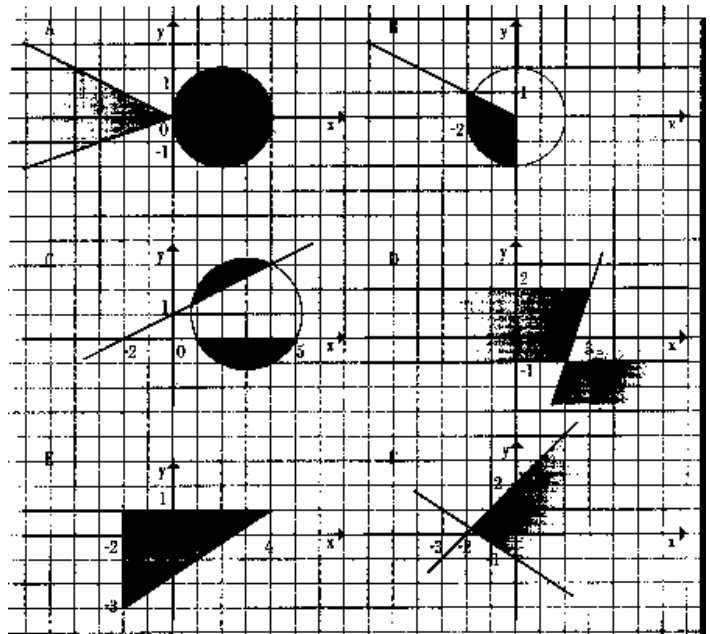
$$e) y < x + 5 \wedge x^2 + (y - 1)^2 \geq 1$$

$$f) 2x - y \leq 3$$

$$g) x + y \geq 5.$$

15) Determina uma condição que defina cada um dos conjuntos sombreados ao lado.

16) Mostra que se o ponto A, de coordenadas (3, 1), pertence a uma circunferência de centro na origem, o ponto B de coordenadas (1, 3) também pertence a essa circunferência. Indica, pelas suas coordenadas outros dois pontos dessa circunferência que, com os pontos A e B, sejam vértices de um retângulo. Indica as coordenadas de mais alguns pontos dessa circunferência. Com os pontos todos que obtiveste, que outras figuras consegues obter?



17) Considera as duas elipses de equações $2x^2 + y^2 = 3$ e $x^2 + 2y^2 = 3$.

a) Representa-as no mesmo referencial indicando as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados.

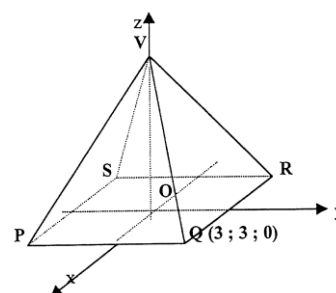
b) Obtém as coordenadas dos pontos de interseção das duas elipses.

18) Considera a superfície esférica de centro na origem e raio 2.

a) Que figura se obtém se cortarmos a superfície esférica por um plano?

- b) Em cada caso, caracteriza o corte da superfície esférica pelo plano definido por:
- b.1) $x = 0$ b.2) $y = 1$ b.3) $z = 3$
- c) Caracteriza, por equações, os planos tangentes à superfície esférica que são paralelos aos planos coordenados.

19) Considera, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide de base quadrada. O vértice V da pirâmide pertence ao semieixo Oz. A base da pirâmide está contida no plano XOY. A aresta [PQ] é paralela ao eixo Oy.



- a) Determina as coordenadas dos outros vértices da base.
- b) Sabendo que, na unidade considerada, o volume da pirâmide é igual a 108, mostra que o vértice V tem de coordenadas $(0, 0, 9)$.
- c) Determina a equação vetorial da reta que passa por P e é paralela a QV.
- d) Determina a área da secção produzida na pirâmide pelo plano $z=3$.

20) Considera os pontos A(1,2), B(-1,0) e C(3,0).

- a) Representa-os num referencial o.n. do plano. b) Os pontos são colineares? Porquê?
- c) Une os pontos e, em relação ao eixo dos XX, traça a figura simétrica da inicial.
- d) Classifica o triângulo $[ABC]$ quanto aos lados e quanto aos ângulos.
- e) Obtém a equação da circunferência que tem $[AB]$ como diâmetro.
- f) Qual a equação da mediatriz de $[BC]$? E de $[AB]$?

21) Sem efetuares qualquer cálculo analítico, relativamente ao segmento de reta $[RS]$ com R(-2,-3) e S(-2,5), indica:

- a) as coordenadas do seu ponto médio;
- b) a equação da sua mediatriz; c) o seu comprimento.

22) Considera a circunferência de equação $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$.

- a) Indica as coordenadas do seu centro e qual o raio.
- b) Representa num referencial o.n. o conjunto de pontos definido pela condição $(x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 9 \wedge y < 2 \wedge x \leq 0$.

23) Indica o centro e o raio da circunferência de equação:

- a) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$
- d) $(x+3)^2 + y^2 = 8$ e) $x^2 + x + y^2 + 2y + \frac{5}{4} = 0$ f) $x^2 + y^2 + 2x - y = \frac{23}{4}$

24) Obtém o centro e o raio da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z \leq 4$.

25) Qual a equação do plano mediador do segmento $[TU]$, sendo T(1,0,2) e U(2,1,2)?

26) Considera um referencial o.n. (Oxyz). Uma esfera de raio 3 cm e centro C é tangente aos 3 planos coordenados e encontra-se no 1º octante.

- a) Escreve uma equação da esfera.
- b) Escreve as equações dos planos paralelos aos planos coordenados que são tangentes à esfera.
- c) Qual é a distância de C à origem das coordenadas ?
- d) Indica as coordenadas do ponto A, sabendo que o plano YOZ é plano mediador de $[AC]$.
- e) Que figura geométrica é a interseção feita na esfera pelo plano $x = 4$?
Escreve a sua equação.

Soluções:

1.1a) ABC e ABE ; b) AB e DC ; c) AB e ABC ; d) IJ ; e) AB e CK ; f) $A(0,0,7)B(0,4,7)C(7,4,7)D(7,0,7)$

$E(0,4,0)F(9,4,0)G(12,4,0)H(12,0,0)I(12,0,4)J(12,4,4)K(9,4,4)L(9,0,4)O(0,0,0)$; 1.2) *Secante*;

2.2.a) $(5, -5)$; b) $(1, -3)$; c) $(7, -10)$; d) $(-7, 6)$; e) $(-3, -8)$; 2.3.a) 5; b) $\sqrt{52}$; c) 15; d) $\sqrt{50}$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) $-1 \pm \sqrt{20}$;

6.a) $\sqrt{8}$; $\left(\frac{-2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}\right)$; b) $(-10, 10)$ ou $(10, -10)$; 7) $\left(\frac{6}{\sqrt{13}}, -\frac{9}{\sqrt{13}}\right)$ ou $\left(-\frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}\right)$; 8.a) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$;

b) $y = -7x + 9$; c) *impossível*; d) $y = 3$; e) $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$; f) $y = \frac{4}{3}x - 2$; g) $y = 2x + 12$; h) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$;

i) $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$; 11.a) $(3, 2)$; b) $\frac{2}{3}$; 2; -3; 12.a) *Concorrentes* $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$; b) *Concorrentes* $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; c) *estrit paralelas*;

d) *coincidentes*; 13.a) *recta sec ante em* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; b) *exterior*; 15A) $\left(y \leq -\frac{1}{2}x \wedge y \geq \frac{1}{3}x\right) \vee$

$\vee (x-2)^2 + y^2 \leq 4$; B) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq -\frac{1}{2}x \wedge x \leq 0$; C) $\left((x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 5 \wedge y \geq \frac{1}{2}x + 1\right) \vee$

$\vee \left((x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 5 \wedge y \leq 0\right)$; D) $(y \leq 3x - 7 \wedge y \leq -1) \vee (y \geq 3x - 7 \wedge -1 \leq y \leq 2)$;

E) $y \geq \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \wedge x \geq -2 \wedge y \leq 1$; F) $y \leq x + 2 \wedge y \geq -\frac{2}{3}x - 1$;

17.a) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right), (0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0), \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(0, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; b) $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$;

18a) *Circunf*, ponto ou conjunto vazio; b.1) *circunf de centro* $(0, 0, 0)$ e raio 2 sobre o plano YOZ;

b.2) *circunf de centro* $(0, 0, 1)$ e raio $\sqrt{3}$ sobre o plano $y = 1$; b.3) *não existe int er sec ção*;

c) $z = 2, z = -2, x = 2, x = -2, y = 2, y = -2$; 19.a) $P(3, -3, 0)S(-3, -3, 0)R(-3, 3, 0)$;

c) $(x, y, z) = (3, -3, 0) + k(-3, -3, 9), k \in \mathbb{R}$; d) 16; 20.b) *não*; d) *isóceles, acutângulo*;

e) $x^2 + (y-1)^2 = 2$; f) $x = 1; y = -x + 1$; 21.a) $(-2, 1)$; b) $y = 1$; c) 8; 22.a) $C(-1, 3), r = 3$; 23.a) $C(2, -1), r = \sqrt{5}$;

b) $C(-2, 3), r = 3$; c) $C(3, 0), r = 4$; d) $C(-3, 0), r = \sqrt{8}$; e) *ponto* $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$; f) $C\left(-1, \frac{1}{2}\right), r = \sqrt{7}$; 24) $C(1, 0, 2), r = 3$;

25) $2x + 2y - 4 = 0$; 26.a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 \leq 9$; b) $x = 6, y = 6, z = 6$; c) $\sqrt{27}$; d) $(-3, 3, 3)$;

e) *círculo*, $(y-3)^2 + (z-3)^2 \leq 8 \wedge x = 4$

joseladeira@gmail.com
www.ladeiramat.no.sapo.pt