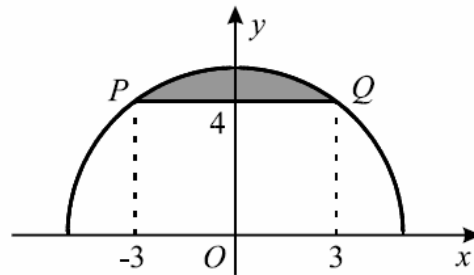


AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA
Ficha de Trabalho de Geometria nº 6 – Matemática - 10º Ano
Exercícios dos Testes Intermédios 2008 – 2012

- 1** Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , uma semicircunferência de centro na origem e que passa nos pontos P e Q .
O ponto P tem coordenadas $(-3, 4)$ e o ponto Q tem coordenadas $(3, 4)$.
Na figura está também representado o segmento de recta $[PQ]$.



Qual das condições seguintes define o domínio plano sombreado?

- (A) $x^2 + y^2 \leq 25 \wedge -3 \leq x \leq 3$
(B) $x^2 + y^2 \leq 25 \wedge y \geq 4$
(C) $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge -3 \leq x \leq 3$
(D) $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \geq 4$
- 2** Considere, em referencial o.n. xOy , a recta r que intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa 2 e que intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 6.
Qual é a equação reduzida da recta r ?

- (A) $y = -3x + 6$ (B) $y = 3x + 6$
(C) $y = -2x + 3$ (D) $y = 2x + 3$

- 3** Em referencial o.n. $Oxyz$, considere:
- a esfera E definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$
 - a recta r de equação vectorial $(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(0, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
- A intersecção da esfera E com a recta r é

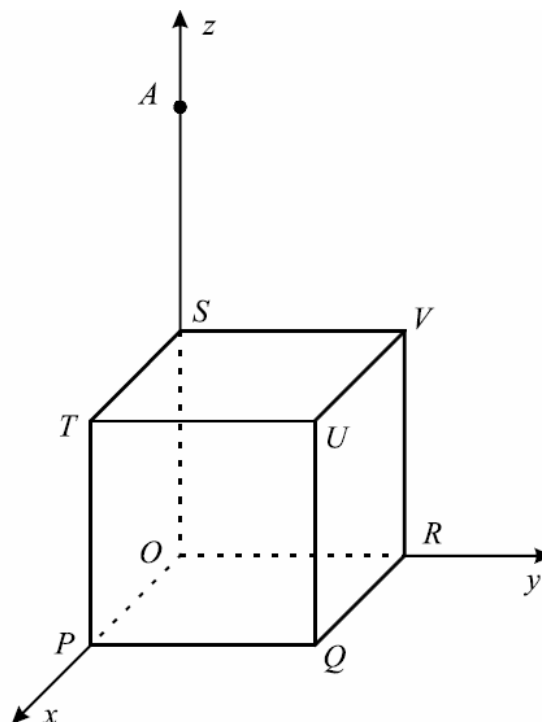
- (A) um segmento de recta de comprimento 2
(B) um segmento de recta de comprimento 4
(C) um ponto
(D) o conjunto vazio

- 4 Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[OPQRSTU]$

A aresta $[OP]$ está contida no semieixo positivo Ox , a aresta $[OR]$ está contida no semieixo positivo Oy e a aresta $[OS]$ está contida no semieixo positivo Oz .

O ponto U tem coordenadas $(2, 2, 2)$

No eixo Oz está representado um ponto A , cuja cota é 4



4.1 Defina, por meio de uma condição, a aresta $[UQ]$

4.2 Averigúe se o ponto T pertence ao plano mediador do segmento $[AV]$

4.3 Na figura acima **desenhe**, a lápis, a secção produzida no cubo pelo plano PQA e, na sua folha de prova, **determine** o seu perímetro.

- 5 Qual das condições seguintes define, em referencial o.n. $Oxyz$, uma recta paralela ao eixo Oz ?

(A) $(x, y, z) = (7, 0, 0) + k(1, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(0, 0, 7), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(7, 0, 0), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (0, 0, 7) + k(1, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

- 6 Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$ define uma esfera. Qual das equações seguintes define um plano que divide essa esfera em dois sólidos com o mesmo volume?

(A) $x = 0$

(B) $x = 1$

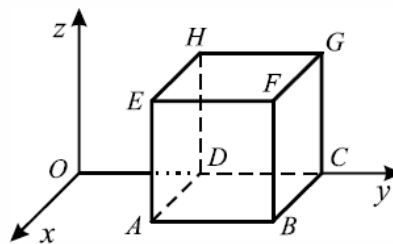
(C) $x = 2$

(D) $x = 3$

- 7 Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo de aresta 2.

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- a aresta $[DC]$ está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas $(0, 2, 0)$



Os pontos de coordenadas $(2, 2, 0)$ e $(0, 4, 0)$ são vértices do cubo.

Qual é o plano mediador do segmento de recta cujos extremos são estes dois vértices?

- (A) ABC (B) ACG (C) BDH (D) BCF

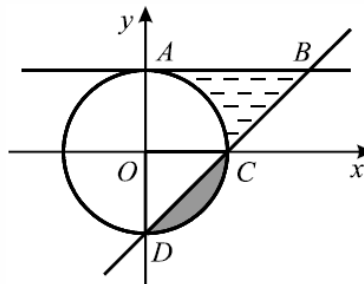
- 8 Num certo prisma, cada uma das bases tem n vértices.

Quantas faces e quantas arestas tem esse prisma?

- (A) $2n$ faces e $2n$ arestas (B) $2n$ faces e $3n$ arestas
(C) $n + 2$ faces e $2n$ arestas (D) $n + 2$ faces e $3n$ arestas

- 9 Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy :

- os pontos A e D , pertencentes ao eixo Oy
- o ponto C , pertencente ao eixo Ox
- a circunferência de centro na origem do referencial e raio 3, que contém os pontos A , C e D
- a recta BD , que contém o ponto C
- a recta AB , paralela ao eixo Ox



O ponto B tem coordenadas $(6, 3)$

Estão assinaladas na figura duas regiões:

- uma, tracejada, no primeiro quadrante
- outra, sombreada, no quarto quadrante

9.1 Mostre que uma equação da mediatriz do segmento $[BC]$ é $y = -x + 6$

9.2 Defina, por meio de uma condição, a região **sombreada**, incluindo a fronteira.

9.3 Determine a área da região **tracejada**. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

- 10 Na figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , a recta r , que intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa 2 e o eixo Oy no ponto de ordenada 2

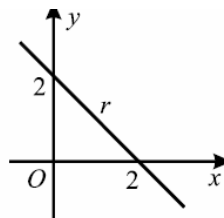


Figura 1

- Qual é a equação reduzida da recta r ?
- (A) $y = 2x + 2$ (B) $y = -2x + 2$
(C) $y = -x + 2$ (D) $y = x + 2$

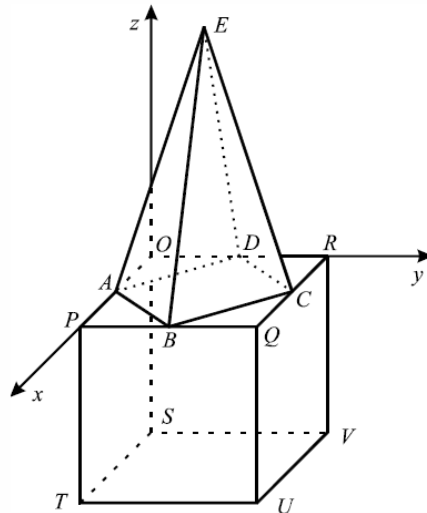
- 11** Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

A origem do referencial é um dos vértices do cubo, o vértice P pertence ao eixo Ox e o vértice R pertence ao eixo Oy .

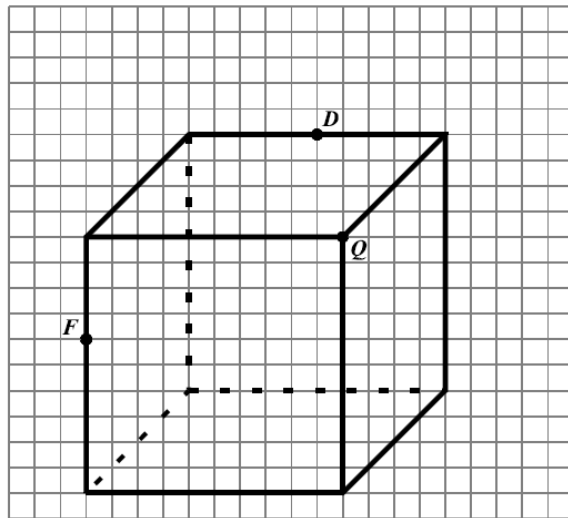
Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado $[OPQR]$.

O ponto Q tem coordenadas $(2, 2, 0)$.

O volume do sólido é igual a 10.



- 11.1** Determine a cota do ponto E .
- 11.2** Determine uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto T e que contém o ponto C .
- 11.3** Na figura abaixo está representado o cubo, em papel quadriculado. Nesta figura, desenhe, a lápis, a secção produzida no cubo pelo plano FQD . Em seguida, assinale com um X a opção correcta, quanto à forma da secção.



A secção obtida é um

- ☐ triângulo
- ☐ rectângulo
- ☐ losango
- ☐ trapézio
- ☐ pentágono
- ☐ hexágono

- 12** Na figura 1 está representada, em referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro no ponto $P(2, -1)$

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

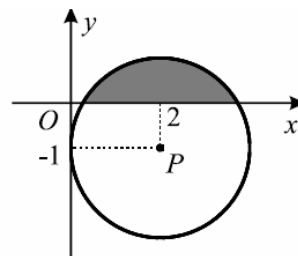
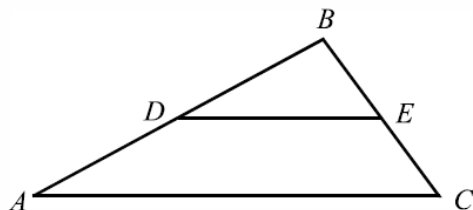


Figura 1

- (A) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \wedge x \geq 0$
- (B) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \wedge y \geq 0$
- (C) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \wedge y \geq 0$
- (D) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \wedge x \geq 0$

- 13** Na figura está representado um triângulo $[ABC]$. Os pontos D e E são os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[BC]$, respectivamente.



Utilizando cálculo vectorial, prove que as rectas AC e DE são paralelas.

Sugestão

Percorra as seguintes etapas:

- Exprima o vector $\overrightarrow{AC}$ à custa dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$
- Relacione o vector $\overrightarrow{AB}$ com o vector $\overrightarrow{DB}$
- Relacione o vector $\overrightarrow{BC}$ com o vector $\overrightarrow{BE}$
- Mostre que $\overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{DE}$
- Utilize a igualdade anterior para justificar que as rectas AC e DE são paralelas

- 14** Na figura 4 está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular não regular $[ABCDEF]$

Sabe-se que:

- as bases são triângulos isósceles ($\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{DE} = \overline{DF}$)
- a base $[ABC]$ está contida no plano xOy
- as arestas laterais do prisma são perpendiculares às bases
- o ponto A tem coordenadas $(4, 0, 0)$
- o ponto E tem coordenadas $(0, 3, 8)$
- o ponto F é o simétrico do ponto E , relativamente ao plano xOz

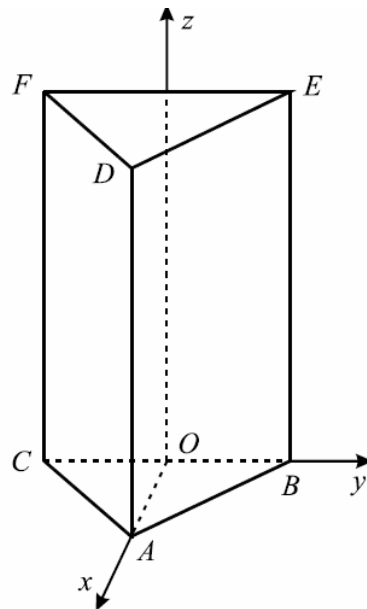


Figura 4

- 14.1** Determine uma equação vectorial da recta DF

- 14.2** Determine a área lateral do prisma.

- 15 Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência de equação

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Qual das equações seguintes define uma recta tangente a esta circunferência?

- (A) $x = -3$ (B) $x = 1$ (C) $y = -4$ (D) $y = 1$

- 16 Uma pirâmide tem 31 vértices. Quantas arestas tem?

- (A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60

- 17 Na figura 2, está representada uma planificação de um cubo.

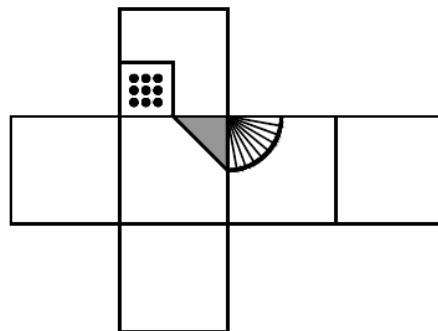
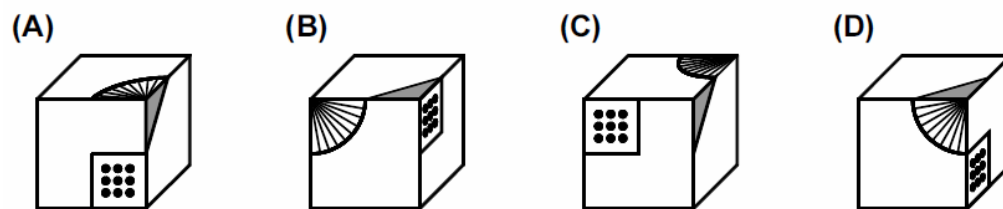


Figura 2

Em qual das opções seguintes pode estar representado esse cubo?



- 18 Na figura 3, estão representados um triângulo isósceles $[ABC]$ e um quadrado inscrito nesse triângulo.

A altura relativa à base $[AB]$ é o segmento de recta $[CD]$, representado a tracejado.

Sabe-se que $\overline{AB} = 4\text{ cm}$ e que $\overline{CD} = 8\text{ cm}$

Quanto mede, em centímetros, o lado do quadrado?

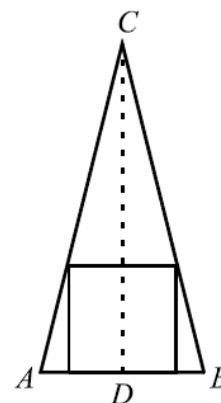


Figura 3

- (A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{11}{4}$

- 19 Na figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência que tem centro no ponto $A(4, 7)$ e que contém o ponto $D(8, 10)$

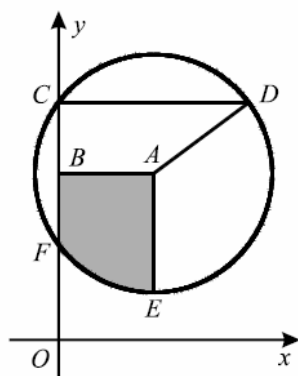


Figura 4

Sabe-se que:

- $[CF]$ é a corda da circunferência contida no eixo Oy
- $[CD]$ é uma corda da circunferência, paralela ao eixo Ox
- $[AE]$ é um raio da circunferência, paralelo ao eixo Oy
- $[ABCD]$ é um trapézio rectângulo.

19.1 Determine a área do trapézio $[ABCD]$

19.2 Determine a equação reduzida da mediatriz do segmento $[AD]$

19.3 Defina, por uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

- 20 Na Figura 3, está representado um sólido que se pode decompor no cubo $[ABCDEFGH]$ e na pirâmide triangular não regular $[GIJK]$

Sabe-se que:

- o cubo tem aresta 6
- o ponto I é o ponto de intersecção do segmento $[BK]$ com a aresta $[GF]$
- o ponto J é o ponto de intersecção do segmento $[DK]$ com a aresta $[GH]$
- o ponto G é o ponto médio do segmento $[CK]$

Qual é o valor do volume da pirâmide $[GIJK]$?

- (A) 36 (B) 27 (C) 18 (D) 9

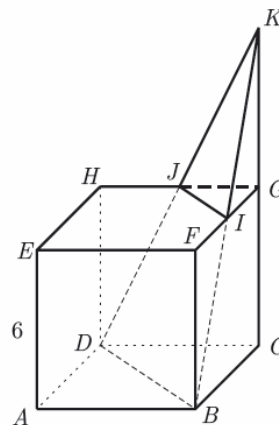


Figura 3

- 21** Na figura 5, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).

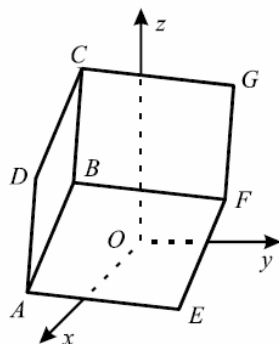


Figura 5

- 21.1** Preencha cada um dos espaços seguintes, utilizando a designação de um ponto ou de um vector, de modo a obter afirmações verdadeiras.

Copie as afirmações obtidas para a sua folha de respostas.

$$\dots\dots\dots + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC}$$

$$F + \overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots$$

$$D + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \dots\dots\dots$$

- 21.2** Admita agora que:

- o ponto A tem coordenadas $(11, -1, 2)$
- o ponto B tem coordenadas $(13, 2, 8)$
- o ponto E tem coordenadas $(8, 5, 0)$

- 21.2.1** Determine a área da secção produzida no cubo pelo plano ABG

- 21.2.2** Defina, por uma condição, a recta que contém o ponto F e é paralela ao eixo Oz

- 22** Considere, num referencial o.n. xOy , a recta r que intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa 2 e que intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 8

Qual é a equação reduzida da recta r ?

(A) $y = -4x + 8$

(B) $y = 4x + 8$

(C) $y = -2x + 4$

(D) $y = 2x + 4$

- 23** Na figura 2, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide.

A base da pirâmide, $[OPQR]$, está contida no plano xOy e coincide com a base inferior do prisma.

O ponto W , vértice da pirâmide, coincide com o centro da base superior, $[STUV]$, do prisma.

O ponto P tem coordenadas $(5, 0, 0)$

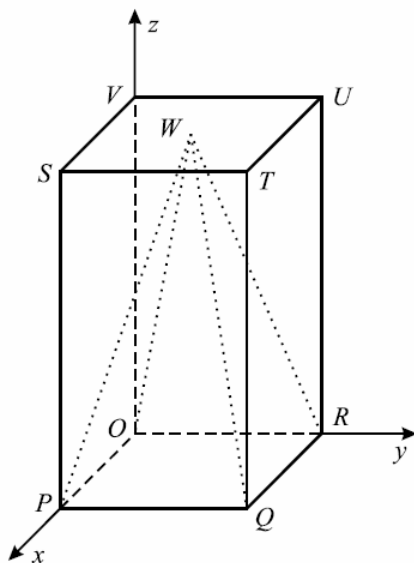


Figura 2

- 23.1** Defina, por uma condição, a superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O

- 23.2** Sabe-se que o volume da **pirâmide** é igual a 75

Determine as coordenadas do ponto W , vértice da pirâmide.

- 24** Na Figura 7, está representado um cilindro de altura h e raio da base r

Sejam A e B os centros das bases do cilindro.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento $[AB]$, nunca coincidindo com o ponto A , nem com o ponto B

Cada posição do ponto P determina dois cones cujos vértices coincidem com o ponto P e cujas bases coincidem com as bases do cilindro.

Mostre que a soma dos volumes dos dois cones é constante, isto é, não depende da posição do ponto P

Sugestão – Designe por a a altura de um dos cones.

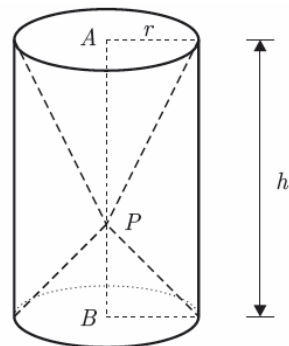


Figura 7

25

Na Figura 2, está representado um cubo de aresta 4

Os pontos A , B e C são vértices da mesma face do cubo.

O ponto D pertence a uma das arestas do cubo e $\overline{DC} = 3$

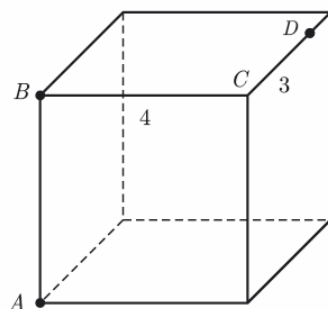


Figura 2

Qual é o valor da área da secção produzida no cubo pelo plano ABD ?

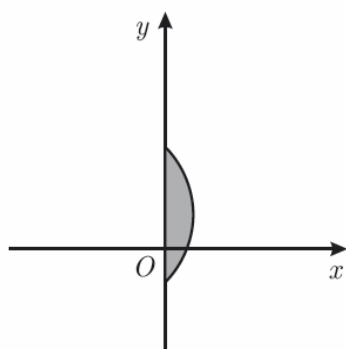
- (A) 10
- (B) 12
- (C) 20
- (D) 25

26

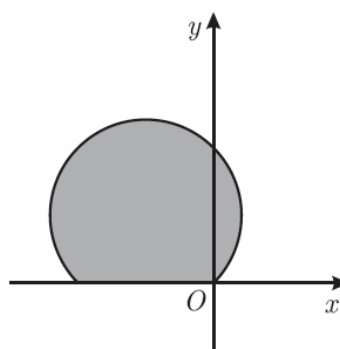
Considere a condição $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \wedge x \geq 0$

Em qual das opções seguintes está representado, em referencial o.n. xOy , o conjunto de pontos definido por esta condição?

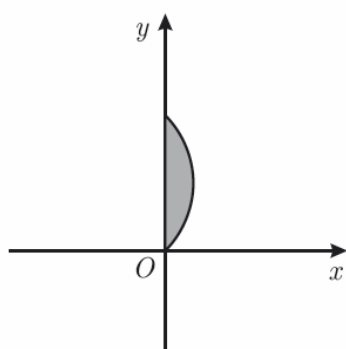
(A)



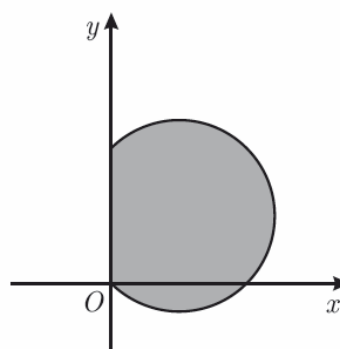
(B)



(C)



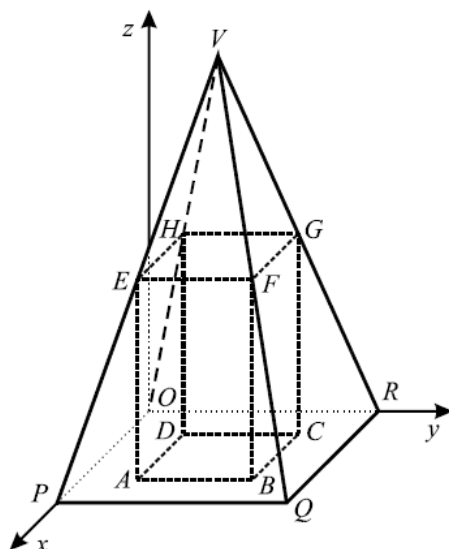
(D)



- 27** Na figura 6, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[VOPQR]$ e o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- os vértices P e R da pirâmide pertencem aos eixos coordenados Ox e Oy , respectivamente;
- uma das bases do prisma está contida na base da pirâmide e cada vértice da outra base pertence a uma aresta da pirâmide.



- 27.1** Preencha cada um dos espaços seguintes, de modo a obter afirmações verdadeiras quanto à posição relativa das rectas e/ou dos planos.

Copie as afirmações obtidas para a sua folha de respostas.

As rectas DQ e VF são

As rectas EH e são não complanares.

A recta PQ e o plano HGB são

A recta FQ e o plano ADH são

Os planos BQV e são perpendiculares.

- 27.2** Sabe-se que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 8z = 0$ é uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto V e que contém os quatro vértices da base da pirâmide $[VOPQR]$

Calcule o volume da pirâmide $[VOPQR]$

- 28** Na Figura 6, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$

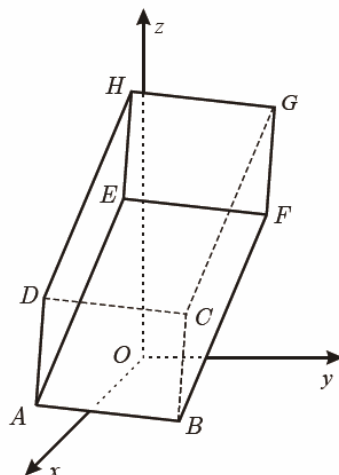


Figura 6

As coordenadas dos pontos A , B e G são $(11, -1, 2)$, $(8, 5, 0)$ e $(6, 9, 15)$, respectivamente.

- 28.1** Determine as coordenadas do ponto H
- 28.2** Escreva uma equação que defina a superfície esférica com centro no ponto A e que passa no ponto B
- 28.3** Escreva uma condição que defina a recta que passa no ponto G e que é paralela ao eixo Oy

- 29** Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OPQRSTU]$ de aresta 2. Os pontos P , R e T pertencem aos semieixos positivos.

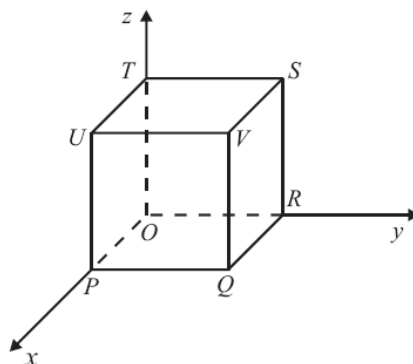


Figura 1

Numa das opções seguintes estão as coordenadas de um ponto pertencente a uma das arestas do cubo.

Em qual?

- (A) $(1, 1, 2)$ (B) $(1, 2, 0)$ (C) $(0, 1, 1)$ (D) $(1, 1, 1)$

- 30 Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta t definida por

$$(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(0, 1, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

Qual das condições seguintes também define a reta t ?

- (A) $x = -1 \wedge y = 2$ (B) $y = 2 \wedge z = 3$
(C) $x = -1 \wedge z = 3$ (D) $x = 0 \wedge z = 0$

- 31 Considere, num referencial o.n. xOy :

- a reta r , definida pela equação $y = 2x - 1$
- o ponto A de coordenadas $(0, -2)$

- a) Escreva uma equação vetorial da reta r
- b) Escreva a equação reduzida da reta paralela à reta r que passa no ponto A
- c) Na Figura 5, estão representados a reta r , o ponto A e a circunferência que tem centro no ponto A e que passa em O

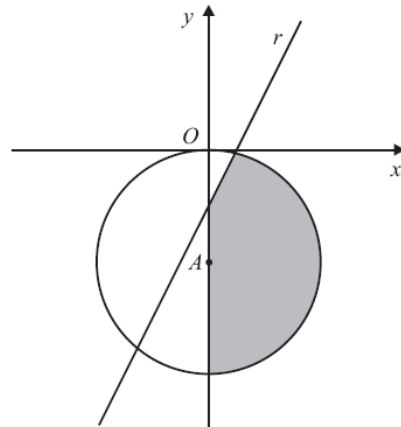


Figura 5

Defina, por uma condição, a região representada a sombreado, incluindo a sua fronteira.

- 32 Na Figura 6, está representada uma peça metálica plana na qual se marcou a tracejado um quadrado $[ABCD]$ com 3 dm de lado.

Na Figura 7, está representada a peça metálica que se obteve a partir da primeira peça, cortando e retirando o quadrado $[EFGH]$

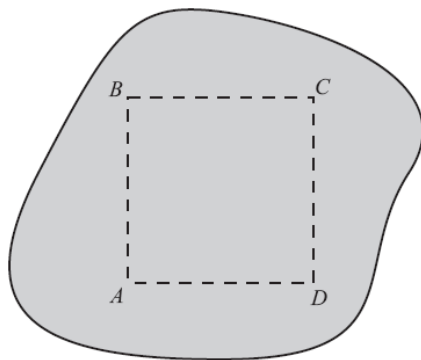


Figura 6

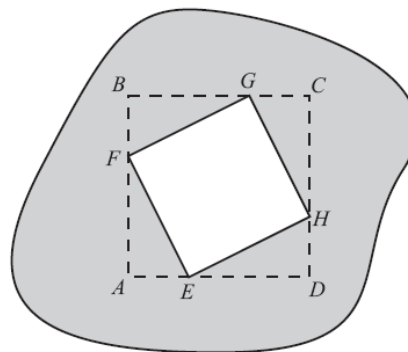


Figura 7

Relativamente à Figura 7, sabe-se que:

- cada vértice do quadrado $[EFGH]$ pertence a um lado do quadrado $[ABCD]$
- os quatro triângulos retângulos $[EDH]$, $[HCG]$, $[GBF]$ e $[FAE]$ são geometricamente iguais e, em cada um deles, o cateto maior é igual ao dobro do cateto menor.

- a) Mostre que a área do quadrado $[EFGH]$ é 5 dm^2

- b) Na Figura 8, está representada uma pirâmide quadrangular regular $[IJKLV]$ cuja base tem 45 dm^2 de área e cuja altura é 12 dm

Sobre esta pirâmide deixou-se descair a peça metálica representada na Figura 7, de tal modo que esta peça ficou paralela à base da pirâmide e os vértices do quadrado $[EFGH]$ ficaram sobre as arestas laterais da pirâmide.

Determine a distância, d , em dm , entre a peça metálica e a base da pirâmide.

Nota – Admita que a espessura da peça metálica é desprezável e tenha em conta que a área do quadrado $[EFGH]$ é 5 dm^2

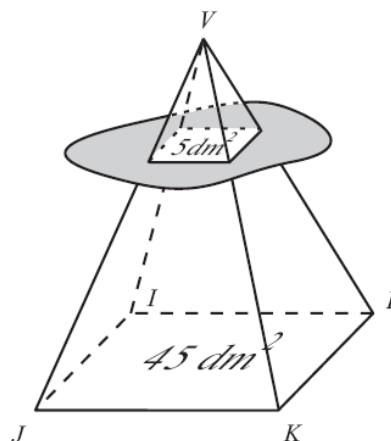


Figura 8

Soluções : 1) B; 2) A; 3) C; 4.1) $x = 2 \wedge y = 2 \wedge 0 \leq z \leq 2$; 4.2) sim; 4.3) $4 + 2\sqrt{5}$; 5) B; 6) A; 7) C; 8) D; 9.2) $x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \leq x - 3$; 9.3) 6, 43; 10) C; 11.1) 3; 11.2) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$; 12) B; 14.1) $(x, y, z) = (4, 0, 8) + k(-4, -3, 0) \quad k \in \mathbb{R}$; 14.2) 128; 15) A; 16) D; 17) A; 18) C; 19.1) 18; 19.2) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{33}{2}$; 19.3) $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 \leq 25 \wedge x \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 7$; 20) D; 21.1) $\overline{AB}, E, F$; 21.2.1) $49\sqrt{2}$; 21.2.2) $(x, y, z) = (10, 8, 6) + k(0, 0, 1) \quad k \in \mathbb{R}$; 22) A; 23.1) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 50$; 23.2) $W\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 9\right)$; 25) C; 26) C; 27.1) conc, VF, est paral, conc, PQR; 27.2) $\frac{16}{3}$; 28.1) (9, 3, 17); 28.2) $(x - 11)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 49$; 28.3) $(x, y, z) = (6, 9, 15) + k(0, 1, 0) \quad k \in \mathbb{R}$; 29) B; 30) C; 31a) $(x, y) = (0, -1) + k(1, 2); k \in \mathbb{R}$; b) $y = 2x - 2$; c) $x^2 + (y + 2)^2 \leq 4 \wedge y \leq 2x - 1 \wedge x \geq 0$; 32b) 8