

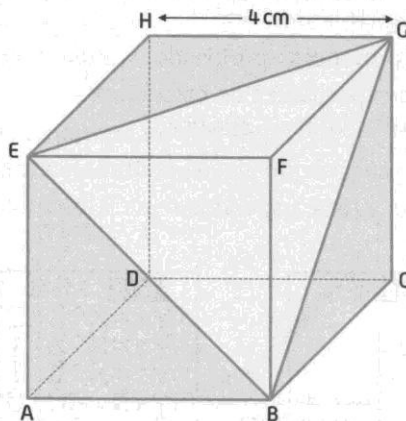
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Funções

Ficha de Trabalho nº 7

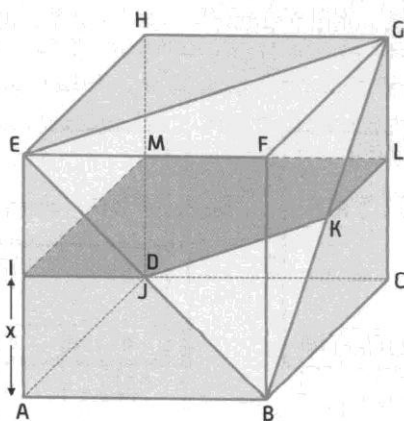
10º Ano

1 Consideremos o cubo $[ABCDEFGH]$ de 4 cm de aresta. Observe-se o sólido $[ABCDEGH]$, obtido retirando ao cubo a pirâmide triangular $[BEFG]$.



1.1 Pretende-se calcular, em cm^3 , o volume V_0 do sólido $[ABCDEGH]$.

1.2 Um plano paralelo à face $[ABCD]$ corta o sólido $[ABCDEGH]$ segundo o pentágono $[IJKLM]$.



Designa-se por x a distância $\overline{AI}$ (em cm).

Pretende-se:

a) mostrar que $\overline{IJ} = \overline{KL} = 4 - x$;

b) mostrar que a área $A(x)$ de $[IJKLM]$ é igual a $16 - \frac{x^2}{2}$.

1.3 Considere-se o sólido $[ABCDIJKLM]$.

Pretende-se:

a) determinar, em cm^3 , o volume V deste sólido, em função de x ;

b) esboçar o gráfico dessa função no intervalo $]0,4[$;

c) sendo V_0 o volume do sólido $[ABCDEGH]$, mostrar que existe um único número real α pertencente ao intervalo $]0,4[$, tal que

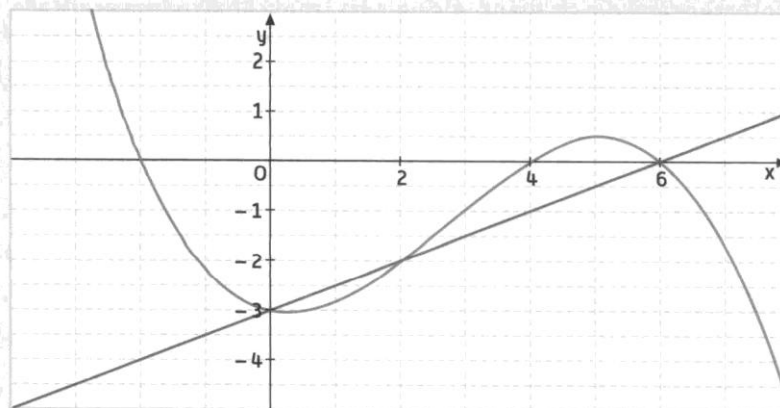
$V(\alpha) = \frac{1}{2}V_0$ e que α é solução da equação $x^3 - 96x + 160 = 0$;

d) apresentar um enquadramento de α , a menos de 1 mm, explicando o método utilizado.

- 2 Um artesão ficou a saber que o lucro (ou a perda) resultante da venda de x estatuetas, esculpidas à mão, quando $10 \leq x \leq 27$, era dado por $l(x) = -x^3 + 34x^2 - 220x$, em euros.
- Para que valores de x o artesão trabalha e perde?
 - Para que valores de x obtém lucro máximo? Qual é, então, esse lucro?

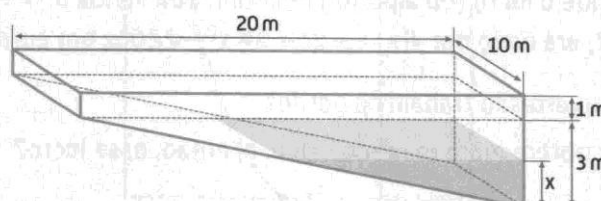
- 3 Na figura seguinte, apresentam-se os gráficos de uma função afim f , e de uma função polinomial, g , do 3.º grau.

Recorrendo aos dados fornecidos pelo gráfico:



- Escreva a equação cartesiana da recta que é gráfico de f .
 - Encontre uma expressão que represente analiticamente $g(x)$ e apresente-a como polinómio do 3.º grau na forma reduzida.
 - Indique, a partir do gráfico, os valores que satisfazem a condição $g(x) \leq f(x)$.
 - A função g tem um máximo relativo.
Utilize a calculadora para pesquisar o seu valor e a sua localização (com aproximação às centésimas, se necessário).
- 4 Uma piscina rectangular tem 20 m de comprimento por 10 m de largura e tem 4 m de profundidade de um lado e 1 m de profundidade no lado oposto. A água para encher a piscina é bombeada na parte mais profunda.

- Encontre a função que exprima o volume v da água, em função da altura x .
- Determine o volume da água quando tem 1 m de altura.
- Determine o volume da água quando tem 2 m de altura.
- Determine a altura de água quando o seu volume é de 20 m^3 .
E quando é de 100 m^3 ?



- 5 O custo total da produção de uma máquina numa empresa comporta encargos fixos e encargos que dependem da qualidade do produto.

Supõe-se que para uma dada máquina, o custo total diário é dado pela expressão:

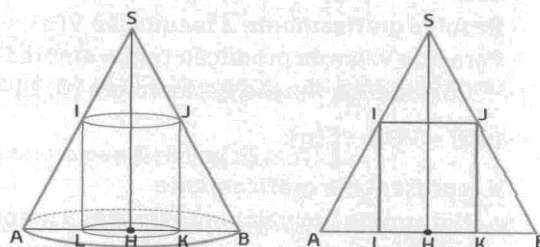
$$C(q) = \frac{1}{36} q^3 - \frac{1}{6} q^2 + \frac{1}{3} q + 0,1 \text{ e } 0 \leq q \leq 5$$

em que q designa os milhares de unidades fabricadas e $C(q)$ é expresso em milhares de euros.

- Qual é o custo total, em euros, da produção de 3000 unidades?
Qual é o montante dos encargos fixos, em euros?
- A empresa vende a 30 centimos cada unidade fabricada.
Supondo que toda a produção é vendida, designe por $V(q)$ o preço de venda, em milhares de euros.
- 1) Exprima $V(q)$ em função de q e trace os gráficos de $y_1 = C(q)$ e $y_2 = V(q)$ no mesmo referencial.
- 2) Determine um valor aproximado, a menos de 10^{-3} da abcissa do ponto comum aos dois gráficos.
- 3) Resolva graficamente a inequação $V(q) \geq C(q)$, em $[0, 5]$.
Para que valor da produção tem a empresa lucro?
- 1) Considere a função L – lucro em $[0, 5]$ – definida por
 $L(q) = V(q) - C(q)$
e represente-a graficamente.
- 2) Determine um valor aproximado a menos de 10^{-3} do valor de q , para o qual L apresenta um máximo. Indique um valor aproximado do lucro máximo.

- 6 Considere um cone de revolução de secção plana $[SAB]$, de altura $\overline{SH} = 12$ e cujo raio da base é 5. As medidas são expressas em centímetros.

Pretende-se estudar as variações do volume do cilindro de secção plana $[IJKL]$ e de raio variável $HK = x$ e determinar a posição dos pontos I e J para os quais o volume do cilindro seja máximo.



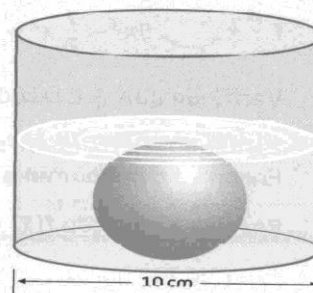
- 7 O gás propano é, muitas vezes, armazenado num tanque de forma cilíndrica com duas semi-superfícies esféricas de cada lado.

O volume do tal tanque é a soma do volume do cilindro com o volume de uma esfera.

Pretende-se determinar um valor aproximado a menos de 10^{-2} do raio x de um tanque de gás propano, cujo volume é 3 m^3 tendo, o cilindro 3 m de comprimento.

- 8 Numa aula de Física, dois jovens depositaram num recipiente cilíndrico, de 10 cm de diâmetro interior, uma esfera metálica com 2 cm de raio. Seguidamente, deitaram água no recipiente até que a água ficasse tangente à esfera.

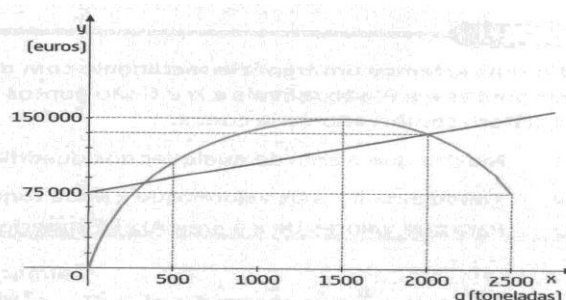
- Que quantidade de água tiveram de deitar no recipiente?
- Um dos jovens sugeriu que se substituísse aquela esfera por outra maior, de modo que, sem variar a quantidade de água, a superfície desta ainda ficasse tangente à nova esfera.
Será isto possível? Caso afirmativo, determine um valor aproximado do raio da nova esfera, a menos de 0,1 cm.



- 9 A curva, abaixo representada a vermelho, diz respeito à receita $R(q)$, em euros, de uma exploração agrícola, em função da quantidade de batatas produzida, em toneladas.

A recta representa o custo da produção $C(q)$, em euros, em função da quantidade, q , recolhida.

- Descreva a variação da função R , quando $0 \leq q \leq 2500$.
- A receita tem um máximo? Qual?
- Descreva a variação da função que a q associa $C(q)$, quando $0 \leq q \leq 2500$.
- Determine para que quantidades recolhidas a receita iguala o custo de produção. Qual é, então, o lucro obtido?
- Determine a zona de rentabilidade, ou seja, as quantidades de batatas produzidas para os quais a receita é superior ao custo.



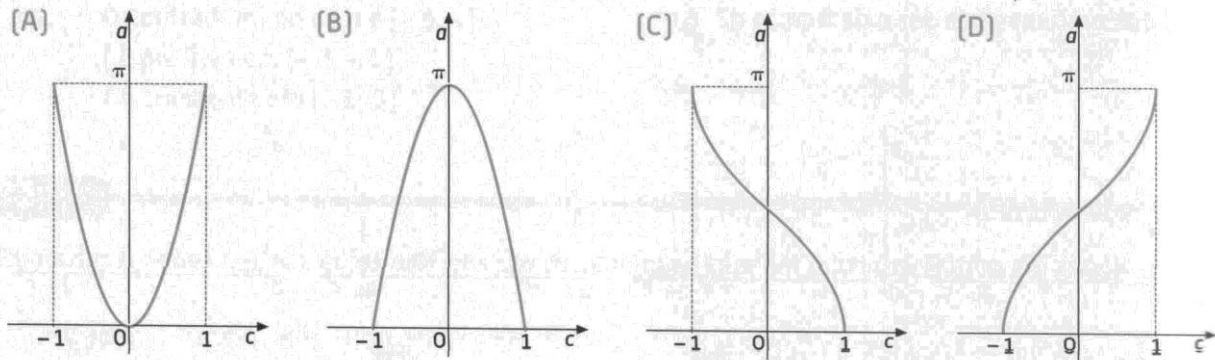
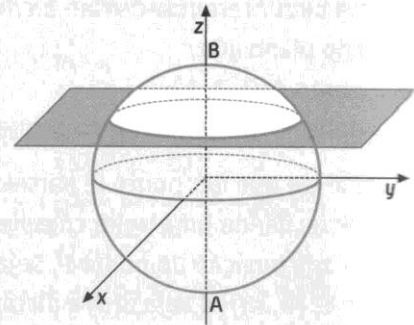
10 Considere, num referencial o.n. Oxyz, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro [AB], que está contido no eixo Oz.

Para cada posição do ponto P, considere o plano que contém P e que é paralelo ao plano xOy.

Seja g a função que faz corresponder, à cota c do ponto P, a área a da secção produzida na esfera pelo referido plano.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g?



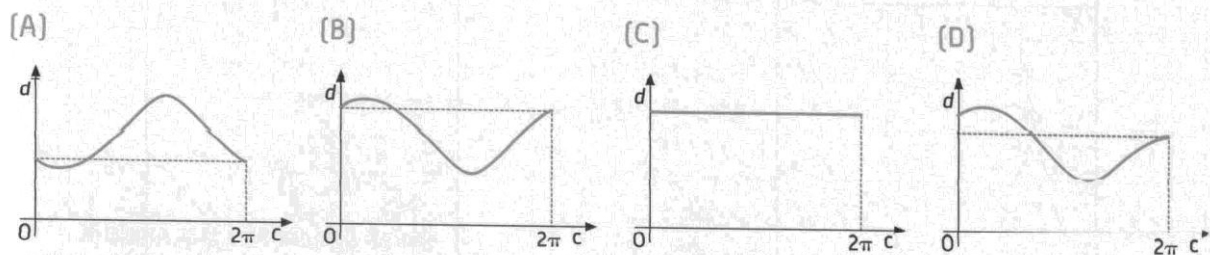
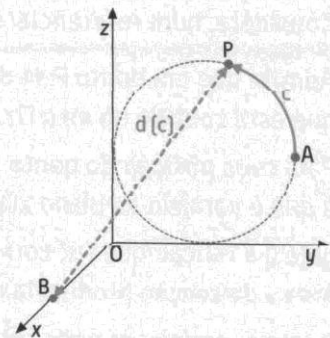
11 Na figura estão representados, em referencial o.n. Oxyz:

- uma circunferência de raio 1 cm, centrada no ponto $(0, 1, 1)$ e contida no plano yOz;
- o ponto $A(0, 2, 1)$;
- o ponto B, pertencente ao semieixo positivo Ox.

Considere que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre essa circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado na figura.

Para cada posição do ponto P, seja c o comprimento, em cm, do arco AP $[c \in [0, 2\pi]]$ e seja $d(c)$ a distância de P ao ponto B, em cm.

Qual dos gráficos pode ser o da função d?



Sol: 1.1) $\frac{160}{3}$; 1.3.a) $V(x) = 16x - \frac{1}{6}x^3$; 2.a) 26 ou 27; b) 19; 1235€; 3.a) $y = \frac{1}{2}x - 3$; b) $g(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - 3$
 c) $[0, 2] \cup [6, +\infty[$; d) 0,44; 5,07; 4.a) $V(x) = \frac{100}{3}x^2$, $[0, 3]V(x) = 300 + 200(x - 3)$, $]3, 4[$; b) $\frac{100}{3}$; c) $\frac{400}{3}$; d) 0,77; 1,73;
 5.a) 350; 100; b.1) $V(q) = 0,39q$; b.2) 0,974; b.3) $0,974 \leq q \leq 5$; c.2) $q = 3,897$; $L = 0,657$; 6) $V = 139,6$; $x = 3,3$; 7) 0,51
 8.a) $\frac{268\pi}{3}$; b) 4,9; 9.b) 150000; d) 300 ou 2000; e) $]300, 2000[$; 10) B; 11) B