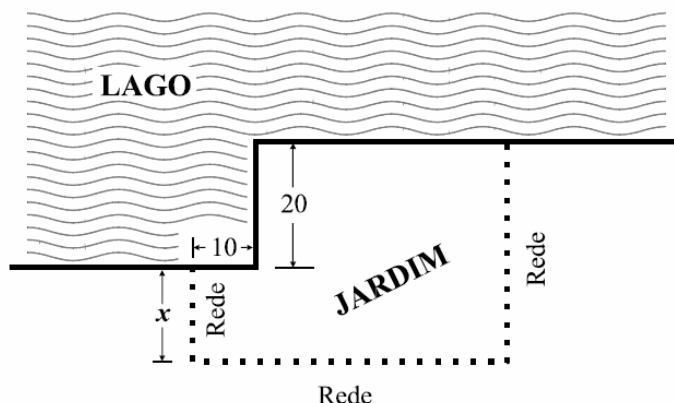


AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha de Trabalho de Funções nº 8 – Matemática - 10º Ano

Exercícios dos Testes Intermédios 2008 – 2012

- 1** Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme a figura ilustra. Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede. Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam sempre perpendiculares.



As dimensões indicadas na figura estão expressas em metros. Tal como a figura mostra, x é a medida, em metros, de um dos lados do jardim. Vão ser utilizados, na sua totalidade, 100 metros de rede.

- 1.1.** Mostre que a área, em m^2 , do jardim, é dada, em função de x , por

$$a(x) = -2x^2 + 40x + 1400$$

- 1.2.** Sem recorrer à calculadora, determine o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e determine essa área máxima.

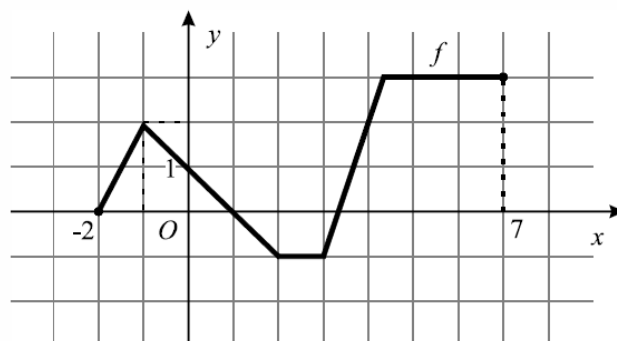
- 2** Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$. Sabe-se que o gráfico de f intersecta o eixo Ox em apenas dois pontos. Um deles tem abcissa -2 .

- 2.1.** Decomponha o polinómio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$ num produto de três polinómios, sendo dois do primeiro grau e um do segundo grau.

- 2.2.** O contradomínio de f é um intervalo da forma $[a, +\infty[$. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o valor de a , arredondado às décimas.

Reproduza, na sua folha de prova, o gráfico de f visualizado na calculadora, depois de ter escolhido uma janela que lhe permita visualizar o ponto relevante para a resolução do problema proposto. Assinale esse ponto no seu gráfico.

- 3** Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , o gráfico de uma função f , de domínio $[-2, 7]$

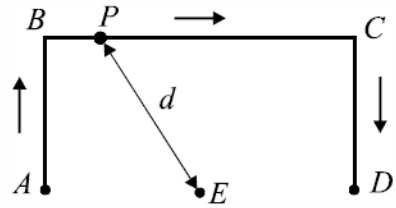


Indique o conjunto solução da condição $f(x) < 2$. Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

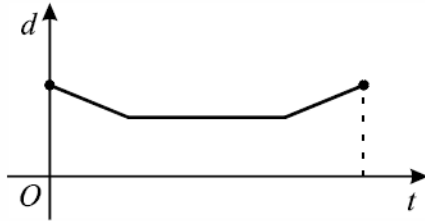
- 4 Na figura está representado o trajecto de um ponto P .

O ponto P iniciou o seu percurso em A e só parou em D , tendo passado por B e por C . Para cada posição do ponto P , seja t o tempo decorrido desde o início do percurso e seja d a distância do ponto P ao ponto E .

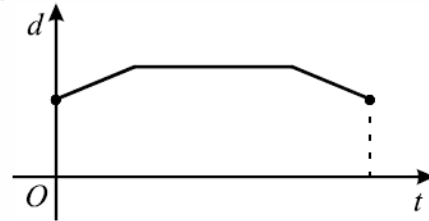
Qual dos gráficos seguintes pode relacionar correctamente as variáveis t e d ?



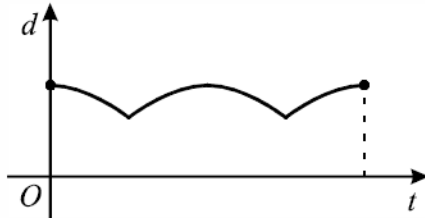
(A)



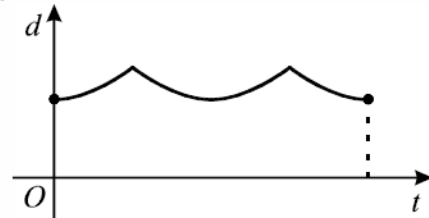
(B)



(C)



(D)



- 5 Na figura 2 está o gráfico de uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - a| + b$, em que a e b designam dois números reais.

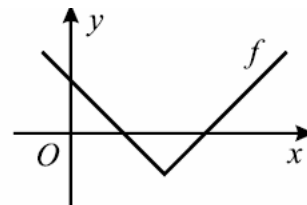


Figura 2

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $a > 0 \wedge b > 0$ (B) $a > 0 \wedge b < 0$
 (C) $a < 0 \wedge b > 0$ (D) $a < 0 \wedge b < 0$
- 6 Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x| + 7$. Qual das equações seguintes tem duas soluções distintas?
- (A) $g(x) = 3$ (B) $g(x) = 5$ (C) $g(x) = 7$ (D) $g(x) = 9$

- 7 Na figura 3 estão representadas, em referencial o.n. xOy , duas parábolas geometricamente iguais, que são os gráficos de duas funções quadráticas, f e g .

Os vértices das duas parábolas têm a mesma abscissa.

A ordenada de um dos vértices é igual a 3 e a ordenada do outro vértice é igual a 4.

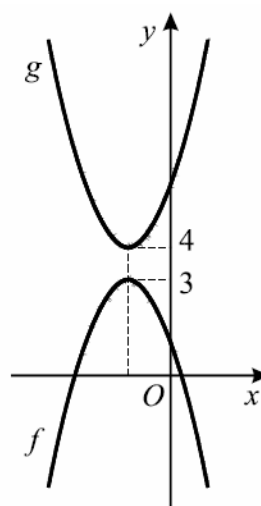


Figura 3

Qual das expressões seguintes define a função g ?

- (A) $-f(x) + 7$ (B) $-f(x) + 1$ (C) $-[f(x) + 1]$ (D) $-[f(x) + 7]$

- 8 Uma empresa de telecomunicações anuncia o seguinte plano de preços para as chamadas telefônicas feitas a partir de um telefone registado nessa empresa:

- 12 cêntimos pelo primeiro minuto de conversação (se a chamada durar menos de um minuto, o preço a pagar também é 12 cêntimos);
- 0,1 cêntimos por segundo, a partir do primeiro minuto.

Por exemplo, se uma chamada durar um minuto e meio, o preço a pagar é 15 cêntimos (12 cêntimos pelo primeiro minuto, mais 0,1 cêntimos por cada um dos trinta segundos seguintes).

Qual das expressões seguintes dá o preço a pagar, em cêntimos, por uma chamada feita a partir de um telefone registado nessa empresa, em função do tempo t de duração da chamada, medido em segundos?

(A) $\begin{cases} 12t & \text{se } t \leq 60 \\ 12 + 0,1(t - 60) & \text{se } t > 60 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 12t & \text{se } t \leq 60 \\ 12 + 0,1t & \text{se } t > 60 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 12 & \text{se } t \leq 60 \\ 12 + 0,1(t - 60) & \text{se } t > 60 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 12 & \text{se } t \leq 60 \\ 12 + 0,1t & \text{se } t > 60 \end{cases}$

- 9 Em $\mathbb{R}$, qual das condições seguintes é equivalente à inequação $x^2 < 4$?

- (A) $x < 2$ (B) $x < 4$ (C) $|x| < 2$ (D) $|x| < 4$

- 10** Na figura 6 está representado um rectângulo $[ABCD]$

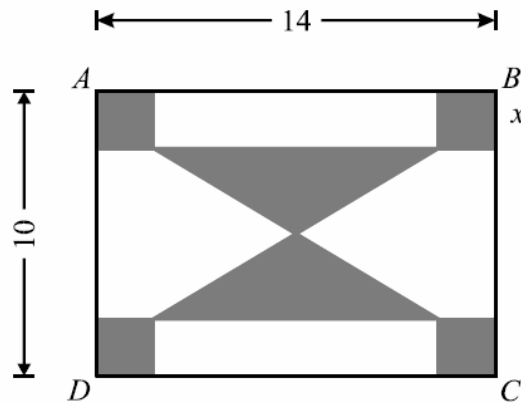


Figura 6

Este rectângulo é o esboço de uma placa decorativa de 14 cm de comprimento por 10 cm de largura e que será constituída por uma parte em metal (representada a cinzento) e por uma parte em madeira (representada a branco).

A parte em metal é formada por dois triângulos iguais e por quatro quadrados também iguais.

Cada triângulo tem um vértice no centro do rectângulo $[ABCD]$

Seja x o lado de cada quadrado, medido em cm ($x \in]0, 5[$)

Sem recorrer à calculadora, resolva os três itens seguintes.

- 10.1** Mostre que a área, em cm^2 , da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x , por

$$A(x) = 6x^2 - 24x + 70$$

- 10.2** Determine o valor de x para o qual a área da parte em metal é mínima e calcule essa área.

- 10.3** Determine o valor de x para o qual a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira.

- 11** Sejam a , b e c três números reais.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sabe-se que:

- $a > 0$
- a função f tem um único zero, que é o número real 5

Qual é o contradomínio de f ?

- (A) $] -\infty, 0]$ (B) $[0, +\infty[$ (C) $] -\infty, 5]$ (D) $[5, +\infty[$

- 12** Na figura 5 está representada uma circunferência de centro O e que contém os pontos R , S e T .

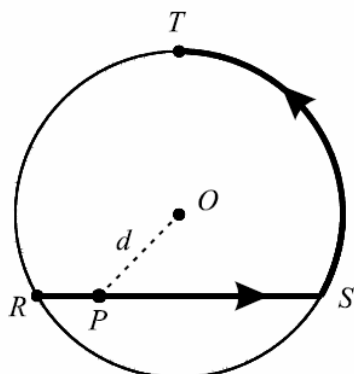
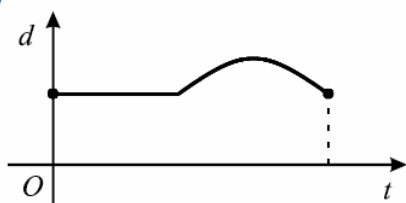


Figura 5

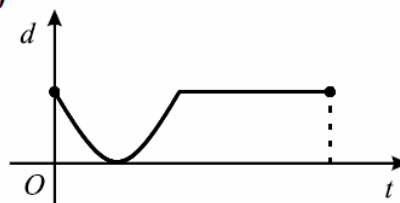
Um ponto P desloca-se ao longo do trajecto que a figura sugere: P inicia o percurso em R e termina-o em T , percorrendo, sucessivamente e sem parar, a corda $[RS]$ e o arco ST . Para cada posição do ponto P , seja t o tempo decorrido desde o início do percurso e seja d a distância do ponto P ao ponto O .

Apenas um dos gráficos a seguir representados pode relacionar correctamente as variáveis t e d .

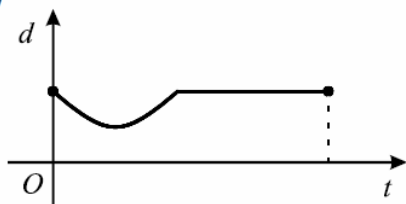
(A)



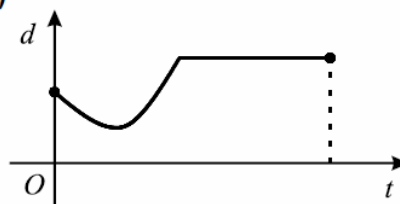
(B)



(C)



(D)



Numa pequena composição, indique o gráfico que pode relacionar correctamente as variáveis t e d e apresente, para cada um dos gráficos rejeitados, uma razão pela qual o considerou incorrecto.

- 13** Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x| + 3$

Qual das equações seguintes tem duas soluções distintas?

- (A) $g(x) = 1$ (B) $g(x) = 2$ (C) $g(x) = 3$ (D) $g(x) = 4$

14 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

14.1 **Sem recorrer à calculadora**, resolva a inequação $f(x) < 0$, sabendo que um dos zeros de f é 4.

Apresente o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

14.2 Sejam A e B os pontos do gráfico de f cujas abcissas são -3 e 0 , respectivamente.

A recta AB intersecta o gráfico de f em mais um ponto. Designemos esse ponto por C .

Determine as coordenadas do ponto C , percorrendo as etapas indicadas a seguir:

- determine a equação reduzida da recta AB
- **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, visualize o gráfico de f e a recta AB , escolhendo uma janela que lhe permita visualizar também o ponto C
- reproduza, na sua folha de prova, o que visualiza na calculadora, assinalando também os pontos A , B e C
- recorrendo à ferramenta adequada da calculadora, determine as coordenadas do ponto C e indique-as no gráfico que desenhou (as coordenadas do ponto C são números inteiros).

15 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

15.1 O gráfico da função f intersecta o eixo das abcissas em quatro pontos.

Designemos esses quatro pontos por A , B , C e D , sendo A o que tem menor abcissa e sendo D o que tem maior abcissa.

O ponto A tem abcissa -3 e o ponto C tem abcissa 1

Seja E o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas.

Determine a área do triângulo $[BED]$, **sem recorrer à calculadora**.

15.2 O contradomínio de f é um intervalo da forma $[a, +\infty[$

Determine o valor de a , arredondado às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**.

Obtenha o gráfico de f numa janela que lhe permita visualizar o ponto relevante para a resolução do problema. Reproduza, na sua folha de prova, o gráfico visualizado e assinale, nesse gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema.

- 16 Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 1.

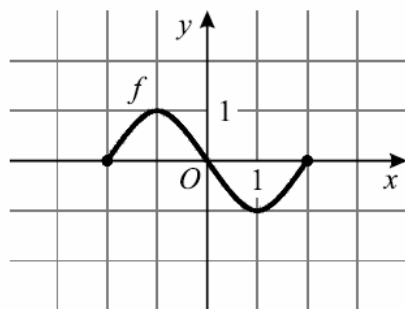
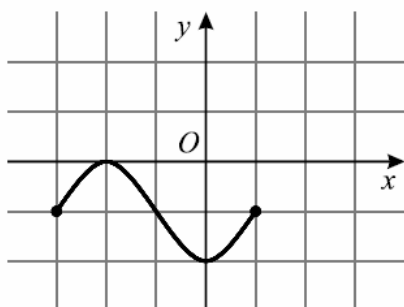


Figura 1

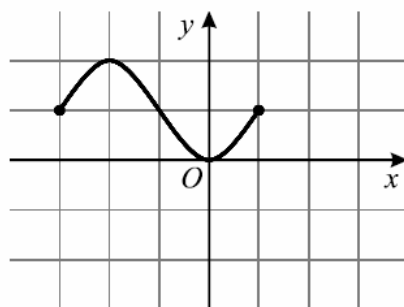
Seja h a função definida por $h(x) = f(x - 1) + 1$

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função h ?

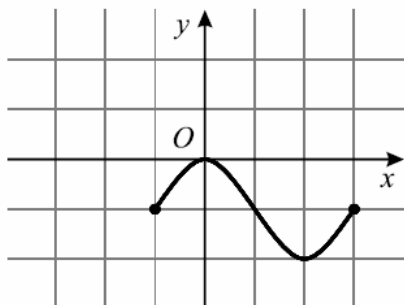
(A)



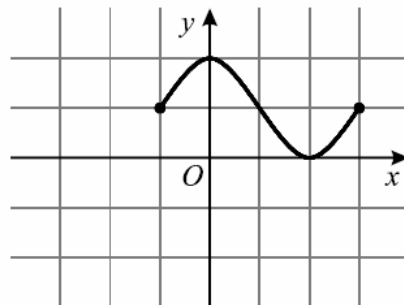
(B)



(C)



(D)



- 17 Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{6} & \text{se } x \leq 1 \\ x + \frac{1}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Qual é o valor de $g\left(\frac{2}{3}\right)$?

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{7}{6}$

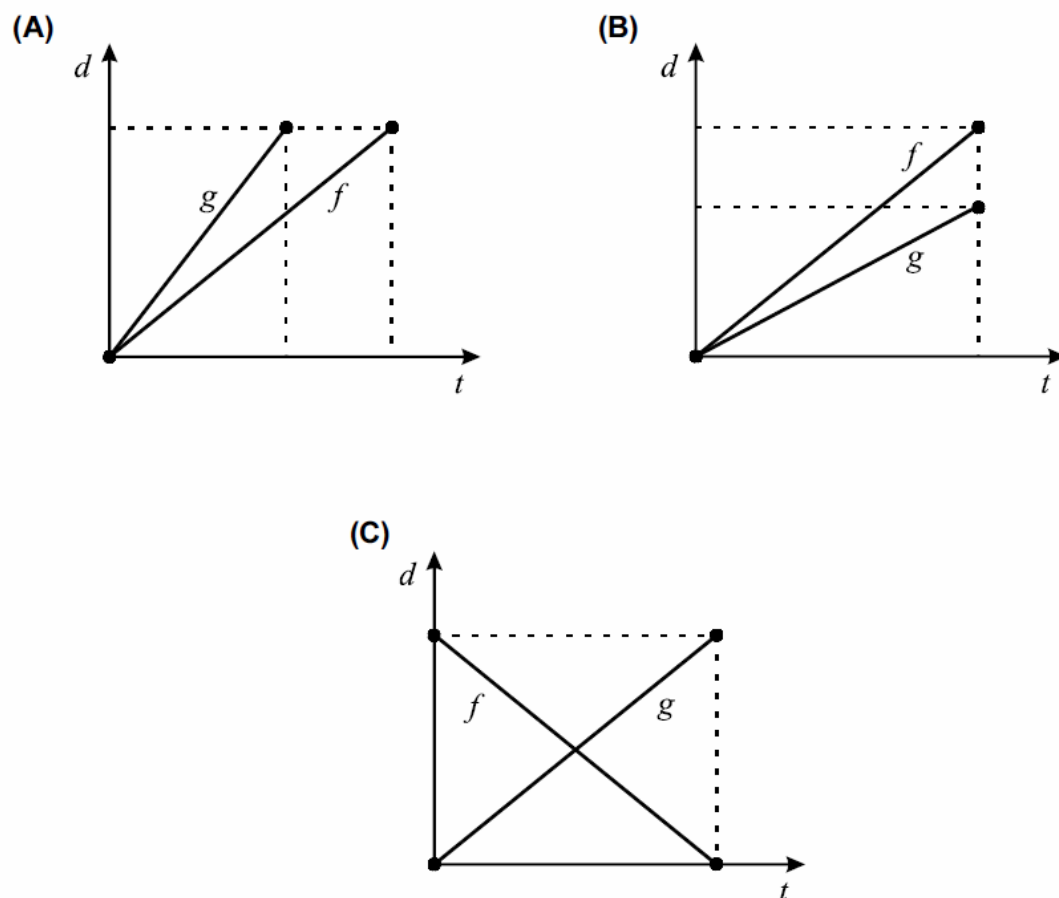
- 18 A Fernanda e a Gabriela são duas irmãs que frequentam a mesma escola. Certo dia, a Fernanda está em casa e a Gabriela está na escola. Num certo instante, a Fernanda sai de casa e vai para a escola e, no mesmo instante, a Gabriela sai da escola e vai para casa. Há um único caminho que liga a casa e a escola. Ambas fazem o percurso a pé e cada uma delas caminha a uma velocidade constante.

Seja f a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Fernanda, t minutos depois de ter saído de casa (a contagem do tempo tem início quando a Fernanda sai de casa e termina quando ela chega à escola).

Seja g a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Gabriela, t minutos depois de ter saído da escola (a contagem do tempo tem início quando a Gabriela sai da escola e termina quando ela chega a casa).

Indique em qual das opções seguintes podem estar representadas graficamente as funções f e g

Numa pequena composição, apresente, para cada uma das outras duas opções, uma razão pela qual a rejeita.



- 19 A figura 3 representa o projecto de um canteiro com a forma de um triângulo isósceles ($\overline{AC} = \overline{BC}$)

Nesse triângulo, a base $[AB]$ e a altura relativa a esta base medem ambas 12 metros.

O canteiro vai ter uma zona rectangular, destinada à plantação de flores, e uma zona relvada, representada a sombreado na figura.

O lado $[DG]$ do rectângulo está contido em $[AB]$ e os vértices E e F pertencem, respectivamente, a $[AC]$ e a $[BC]$

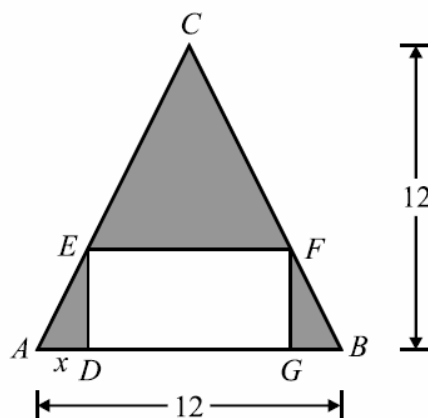


Figura 3

Seja x a distância, em metros, do ponto A ao ponto D ($x \in]0, 6[$)

Resolva os três itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

- 19.1 Mostre que a área, em metros quadrados, da zona relvada é dada, em função de x , por

$$S(x) = 4x^2 - 24x + 72$$

- 19.2 Determine o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima e calcule essa área.

- 19.3 Determine o conjunto dos valores de x para os quais a área da zona relvada é superior a 40 m^2

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

- 20** Na Figura 1, está representada uma roda gigante de um parque de diversões.

Um grupo de amigos foi andar nessa roda.

Depois de todos estarem sentados nas cadeiras, a roda começou a girar.

Uma das raparigas, a Beatriz, ficou sentada na cadeira número 1, que estava na posição indicada na Figura 1, quando a roda começou a girar.

A roda gira no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e demora um minuto a dar uma volta completa.

Seja d a função que dá a distância da cadeira 1 ao solo, t segundos após a roda ter começado a girar.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função d ?

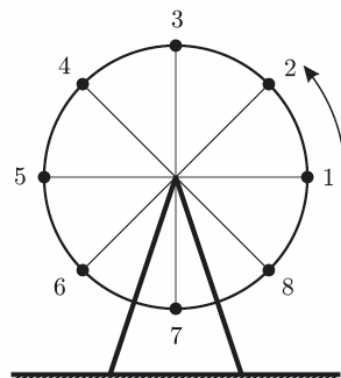
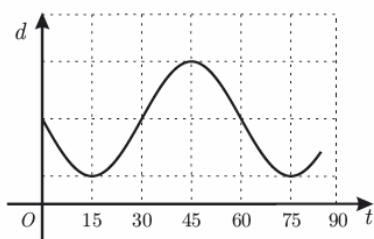
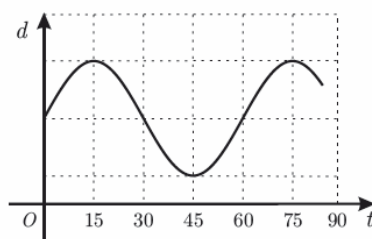


Figura 1

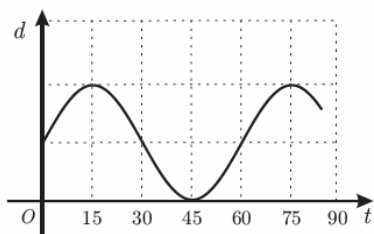
(A)



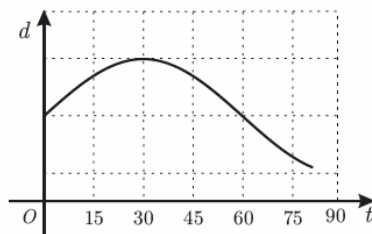
(B)



(C)



(D)



- 21** Uma piscina tem a forma de um paralelepípedo rectângulo. Essa piscina tem dez metros de comprimento e seis metros de largura.

Num certo dia, às 9 horas da manhã, começou a encher-se a piscina, que estava vazia.

A altura, h , em metros, da água na piscina, t horas depois das 9 horas desse dia, é dada por $h(t) = 0,3t$

A piscina esteve a encher ininterruptamente até às 14 horas desse dia.

Quantos litros de água havia na piscina às 14 horas?

- (A) 72 000
(B) 78 000
(C) 84 000
(D) 90 000

22 Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^4 + 2x^3 - 1$

O gráfico da função g , num referencial o.n. xOy , intersecta a recta de equação $y = 3$ em dois pontos. Sejam A e B esses dois pontos, sendo o ponto A o que tem menor abcissa.

Determine a área do triângulo $[AOB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Na sua resposta deve:

- reproduzir, num referencial, a parte do gráfico da função g que visualizou na sua calculadora;
- representar, no mesmo referencial, o triângulo $[AOB]$
- indicar as abcissas dos pontos A e B , arredondadas às centésimas;
- apresentar a área do triângulo $[AOB]$, com o arredondamento pedido.

23 Na Figura 5, está representada, em referencial o.n. xOy , a recta r , definida pela equação $y = 2x - 2$

Tal como a figura sugere, A e B são os pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(6, 0)$, respectivamente, e C é o ponto da recta r de abcissa 6

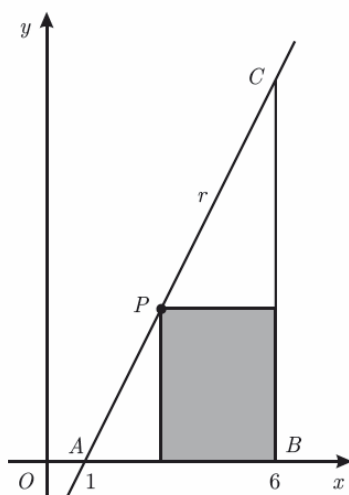


Figura 5

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de recta $[AC]$, nunca coincidindo com o ponto A , nem com o ponto C

A cada posição do ponto P corresponde um rectângulo em que uma das diagonais é o segmento $[BP]$ e em que um dos lados está contido no eixo Ox

Seja x a abcissa do ponto P ($x \in]1, 6[$)

Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

Nota – A calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

23.1 Mostre que a área do rectângulo é dada, em função de x , por

$$S(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

23.2 Determine os valores de x para os quais a área do rectângulo é inferior a 8

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

24 Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. xOy , o gráfico de uma função f de domínio $[-5, 6]$

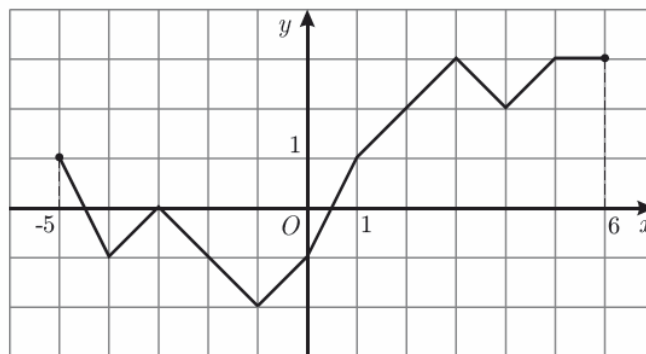


Figura 4

24.1 Qual é o contradomínio de f ?

24.2 Indique todos os números reais cujas imagens, por meio de f , são iguais a -1

24.3 Indique o conjunto solução da condição $f(x) > 2$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

25. Na Figura 4, está representado, num referencial o. n. xOy , o gráfico de uma função f , de domínio $] -2, 2[$

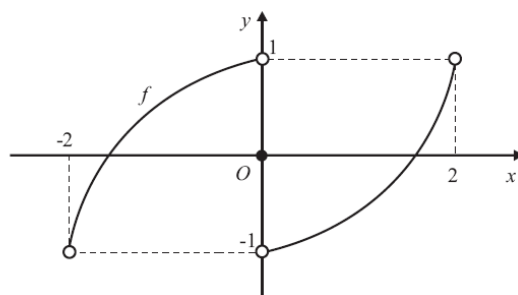


Figura 4

Em qual das opções seguintes estão três afirmações verdadeiras acerca da função f ?

(A)

- Tem três zeros.
- Não tem máximos nem mínimos.
- Não é par.

(B)

- Tem exatamente dois zeros.
- Não tem máximos nem mínimos.
- É crescente no seu domínio.

(C)

- Tem máximo e tem mínimo.
- É crescente no seu domínio.
- O contradomínio é $] -1, 1[$

(D)

- É par.
- Tem exatamente dois zeros.
- O contradomínio é $] -1, 1[$

- 26** Na Figura 2, estão representadas graficamente as funções f e g , de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|$

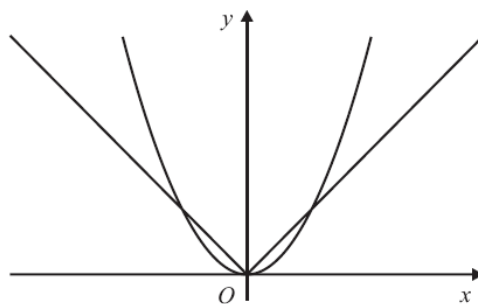


Figura 2

Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto solução da inequação $f(x) < g(x)$?

- (A) $] -1, 0[\cup] 0, 1[$ (B) $] -1, 0[\cup] 1, +\infty[$
 (C) $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ (D) $] -\infty, -1[\cup] 0, 1[$
- 27** Na Figura 9, está representada, num referencial o.n. xOy , parte da parábola que é o gráfico de uma função f

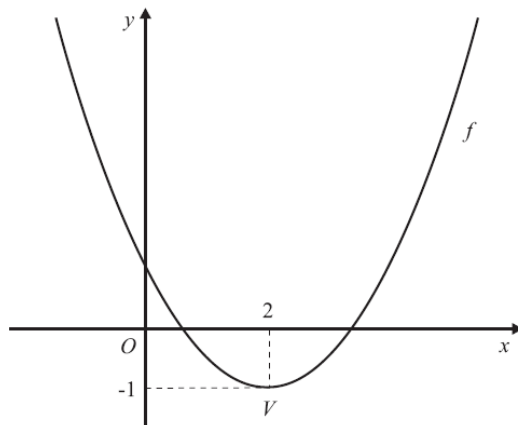


Figura 9

Sabe-se que:

- a parábola intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$
- o ponto V , vértice da parábola, tem coordenadas $(2, -1)$

- 27.1** Sejam g , h e j as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $g(x) = -f(x)$, $h(x) = f(x) + 3$ e $j(x) = f(x - 1)$

Indique os contradomínios das funções f , g , h e j

Nota – Não necessita de apresentar cálculos.

- 27.2** A função f pode ser definida por uma expressão do tipo $f(x) = a(x - h)^2 + k$, onde a , h e k são números reais.

Indique o valor de h e o valor de k , e determine o valor de a

- 28** Na Figura 10, estão representadas, num referencial o.n. xOy , as retas r e t . Os pontos A e B são, respetivamente, os pontos de intersecção das retas r e t com o eixo Ox . O ponto C é o ponto de intersecção das retas r e t .

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x = -1$
- a reta t é definida pela equação $y = -2x + 8$

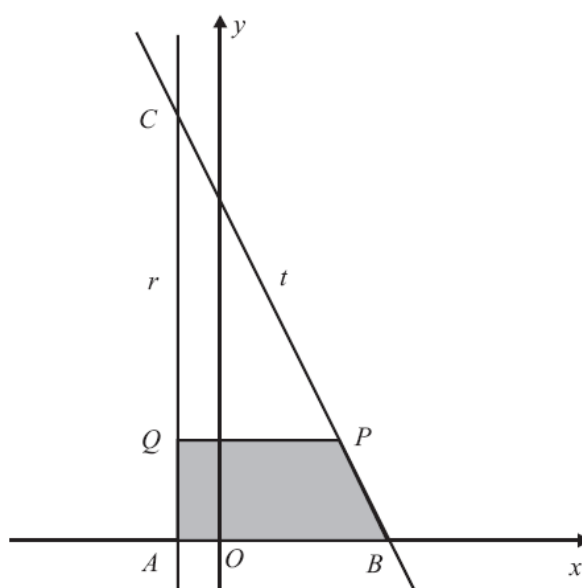


Figura 10

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$, nunca coincidindo com o ponto B , nem com o ponto C , e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, acompanhando o movimento do ponto P , de forma que a ordenada do ponto Q seja sempre igual à ordenada do ponto P .

Seja x a abcissa do ponto P .

Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

- 28.1** Mostre que a área do trapézio $[ABPQ]$ é dada, em função de x , por
- $$S(x) = -x^2 - 2x + 24 \quad (x \in]-1, 4[)$$

- 28.2** Determine os valores de x para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 21. Apresente a sua resposta na forma de um intervalo de números reais.

Nota – Tenha em conta que $S(x) = -x^2 - 2x + 24 \quad (x \in]-1, 4[)$

29. Na Figura 3, estão representadas, num referencial o.n. xOy , duas semirretas de origem no ponto de coordenadas $(-1, 0)$, cuja união é o gráfico de uma função h , de domínio $\mathbb{R}$.
Uma das semirretas intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 1

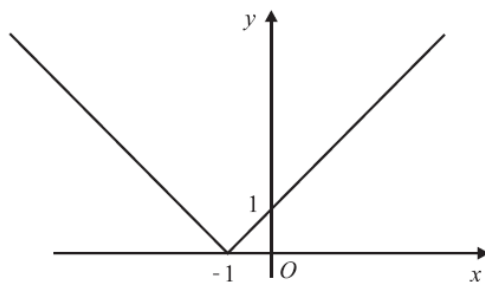


Figura 3

Qual das expressões seguintes pode definir a função h ?

- (A) $h(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ (B) $h(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x < 0 \\ x-1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- (C) $h(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x < -1 \\ x-1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ (D) $h(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x < -1 \\ x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

Soluções: 1.2) 10 e 1600; 2.1) $x(x+2)(x^2-5x+7)$; 2.2) $-13, 9$; 3) $[-2, -1[\cup]-1, 4[$; 4) D; 5) B; 6) D; 7) A; 8) C; 9) C; 10.2) 2 e 46; 10.3) 4; 11) B; 12) C; 13) D; 14.1) $]-\infty, -2[\cup]1, 4[$; 14.2) $C(6, 80)$; 15.1) 9; 15.2) $-12, 9$; 16) D; 17) C; 18) A; 19.2) 3 e 36; 19.3) $]0, 2[\cup]4, 6[$; 20) B; 21) D; 22) 5, 1; 23.2) $]1, 2[\cup]5, 6[$; 24.1) $[-2, 3]$; 24.2) $-4, -2, 0$; 24.3) $]2, 4[\cup]4, 6[$; 25) A; 26) A; 27.1) $[-1, +\infty[;]-\infty, 1[; [2, +\infty[; [-1, +\infty[$; 27.2) $h = 2; k = -1; a = 0, 5$; 28.2) $]-1, 1[$; 29) D