Atividade de diagnóstico

1.

Cor do automóvel preferida	Frequência absoluta (n_i)	Frequência relativa (f_i)
Branco	65	0,325
Preto	20	0,1
Azul	15	0,075
Cinzento	100	0,5

$65 + x + 15 + 100 = 200 \Leftrightarrow x = 20$

2.1. $\frac{5+7+8+12}{4} = 8\%$

2.2. $n = 4 + 10 + 7 + 3 + 1 = 25$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i n_i}{n} = \frac{0\times4 + 1\times10 + 2\times7 + 3\times3 + 4\times1}{25} = 1{,}48$$

3.1. $M_o = 3$

3.2. Bimodal, porque $M_o = 1$ e $M_o = 2$

3.3. $M_o = \text{Preto}$

4.1. $2\,,\,3\,,\,5\,,\,6\,,\,7\,,\,9$ e 9

$n = 7 \to$ ímpar

$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$

A mediana é o 4.º elemento da sequência ordenada, isto é, 6.

4.2. $0\,,\,0\,,\,2\,,\,3\,,\,5\,,\,6\,,\,7\,,\,8$

$n = 8 \to$ par

$\frac{n}{2} = 4$ e $\frac{n}{2} + 1 = 5$

$\frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$

4.3. $n = 1 + 2 + 1 + 5 + 4 = 13$ (n é ímpar)

$\frac{n+1}{2} = \frac{12+1}{2} = 7$

A mediana é o 7.º elemento da sequência ordenada dos dados, isto é, é 8 dado que $1 + 2 + 1 = 4$, $1 + 2 + 1 + 5 = 9$ e $4 < 7 < 9$.

5. 2 5 7 7 8 8 9 10
11 1 2 13 13 13 13 14

Sequência ordenada

1 2 2 5 7 7 8 9 10 11 13 13 13 13 14

$n = 16$

$Q_2 = \text{Mediana} = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$

1.ª metade: 1 2 2 5 7 7 8 8

$Q_1 = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{5+7}{2} = 6$

2.ª metade: $\underset{x_{(9)}}{9}$ $\underset{x_{(10)}}{10}$ $\underset{x_{(11)}}{11}$ $\underset{x_{(12)}}{13}$ $\underset{x_{(13)}}{13}$ $\underset{x_{(14)}}{13}$ $\underset{x_{(15)}}{13}$ $\underset{x_{(16)}}{14}$

$Q_3 = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{13+13}{2} = 13$

$Q_1 = 6$ e $Q_3 = 13$

5.2. Sequência ordenada:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 8 8 9 9 9 10 10 10 11

$n = 18$

$Q_2 = \text{Mediana} = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{8+8}{2} = 8$

1.ª metade: 0 1 2 3 $\underset{x_{(15)}}{\underset{\downarrow}{4}}$ 5 6 7 8

$Q_1 = x_{(5)} = 4$

2.ª metade: 8 8 9 9 $\underset{x_{(14)}}{\underset{\downarrow}{9}}$ 10 10 10 11

$Q_3 = x_{(14)} = 9$

Assim, $Q_1 = 4$ e $Q_3 = 9$.

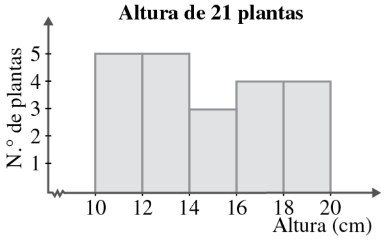
6. $n = 21$

Dados ordenados:

10 10 10 11 11 12 12 13 13 13 14 15 15
16 16 16 17 18 18 19 20

Altura (cm)	N.º de plantas
[10 , 12[	5
[12 , 14[	5
[14 , 16[	3
[16 , 18[	4
[18 , 20[	4
Total	21

Altura de 21 plantas



1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \sum_{i=1}^{6} i$

2. $3 + 6 + 9 + 12 = 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 = \sum_{i=1}^{4} 3i$

3. $5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 =$

$= 5\times1 + 5\times2 + 5\times3 + 5\times4 + 5\times5 + 6\times5 + 7\times5 +$

$+ 8\times5 + 9\times5 =$

$= \sum_{i=1}^{9} 5i$

Atividade inicial 1

1.1. $\sum_{i=1}^{5} \frac{i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

1.2. $\sum_{j=-3}^{2} (j-1)^2 = (-3-1)^2 + (-2-1)^2 + (-1-1)^2 + (0-1)^2 +$

$+ (1-1)^2 + (2-1)^2 =$

$= (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + 1^2 =$

$= 16 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 = 31$

1.3. $\sum_{k=5}^{9} 100 = 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 500$

1.4. $\sum_{i=1}^{3}(2i-7) = (2\times 1-7)+(2\times 2-7)+(2\times 3-7) =$

$= -5-3-1 = -9$

1.5. $\sum_{i=0}^{5}(-1)^k = (-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5 =$

$= 1-1+1-1+1-1 = 0$

1.6. $\sum_{j=-1}^{1}\left(1-j^2\right)^2 = \left(1-(-1)^2\right)^2+\left(1-0^2\right)^2+\left(1-1^2\right)^2 =$

$= 0+1+0 = 1$

2.1. $\sum_{i=1}^{3} ix_i = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

2.2. $\sum_{j=-3}^{3} x_j b^{j-3} = x_{-3}b^{-3-3} + x_{-2}b^{-2-3} + x_{-1}b^{-1-3} + x_0 b^{0-3} +$

$+ x_1 b^{1-3} + x_2 b^{2-3} + x_3 b^{3-3} =$

$= x_{-3}b^{-6} + x_{-2}b^{-5} + x_{-1}b^{-4} + x_0 b^{-3} + x_1 b^{-2} + x_2 b^{-1} + x_3$

3.1. $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = \sum_{i=1}^{5} i^2$

3.2. $5^4-5^5+5^6-5^7+5^8-5^9 = \sum_{i=4}^{9}(-1)^i 5^i$

3.3. $3-9+27-81 = \sum_{j=1}^{4}\left[(-1)^{j+1}3j\right]$

3.4. $(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+\ldots+(x_n-y_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)$

3.5. $\frac{x_1-3}{5}+\frac{x_2-3}{5}+\ldots+\frac{x_n-3}{5} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-3}{5}$

Pág. 183

4.1. $\sum_{i=1}^{3}3i + \sum_{i=1}^{3}2i = \sum_{i=1}^{3}(3i+2i) = \sum_{i=1}^{3}5i$

4.2. $\sum_{i=0}^{2}ix_i + \sum_{i=0}^{2}x_i = \sum_{i=0}^{2}(ix_i+x_i) = \sum_{i=0}^{2}x_i(1+i)$

Pág. 184

5.1. $\sum_{j=1}^{p}3x_j - \sum_{j=1}^{p}(x_j-2) = \sum_{j=1}^{p}(3x_j-x_j+2) =$

$= \sum_{j=1}^{p}(2x_j+2) =$

$= \sum_{j=1}^{p}(x_j+1) =$

$= 2\sum_{j=1}^{p}(x_j+1)$

5.2. $\sum_{k=1}^{n}\left(3^k+3k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(3\times 3^{k-1}+3k\right) =$

$= \sum_{k=1}^{n}\left[3\left(3^{k-1}+3k\right)\right] =$

$= 3\sum_{i=1}^{n}\left(3^{k-1}+k\right)$

6.1. $\sum_{i=1}^{6}5 = 6\times 5 = 30$

6.2. $\sum_{j=1}^{n}3 = 3\times n = 3n$

6.3. $\sum_{k=10}^{109}35 = 35(109-10+1) = 3500$

Pág. 185

7.1. $\sum_{i=n}^{2n}5 - \sum_{k=2n+1}^{5n}5 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(2n-n+1) - 5\left[5n-(2n+1)+1\right] = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(n+1) - 5(3n) = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5n+5-15n = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10n = 20 \Leftrightarrow n = -\frac{20}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = -2$

$S = \{-2\}$

7.2. $\sum_{k=1}^{n}5 - \sum_{k=1}^{n}2 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(n-1+1) - 2(n-1+1) = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5n-2n = 8 \Leftrightarrow 3n = 8 \Leftrightarrow n = \frac{8}{3}$

$S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

7.3. $\sum_{i=2}^{n}3 + 2\sum_{i=3}^{n}1 = 23 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(3n-2+1) + 2(n-3+1) = 23 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n-3+2n-4 = 23 \Leftrightarrow 5n = 23+7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5n = 30 \Leftrightarrow n = 6$

$S = \{6\}$

8.1. $\sum_{i=1}^{3}i^2 = \sum_{i=0}^{2}i^2 + k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2}\cancel{i^2} + 3^2 = \sum_{i=1}^{2}\cancel{i^2} + 0^2 + k \Leftrightarrow k = 9$

8.2. $\sum_{j=0}^{2}\left(3j^3\right) = 6k\sum_{j=0}^{2}j^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sum_{j=0}^{2}j^3 - 6k\sum_{j=0}^{2}j^3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3-6k)\sum_{j=0}^{2}j^3 = 0 \Leftrightarrow 3-6k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6k = -3 \Leftrightarrow k = \frac{-3}{-6} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Pág. 187

9. $h = 10$

$\underset{\sim}{x} = (11{,}1\,;12{,}5\,;7{,}8\,;11{,}1\,;12{,}0\,;7{,}8\,;11{,}1\,;12{,}0\,;7{,}8\,;10)$

$n = 10$

9.1. Amostra ordenada:

$\underset{\underset{x_{(1)}}{\downarrow}}{7{,}8}\quad 7{,}8\quad 7{,}8\quad 10\quad \underset{\underset{x_{(5)}}{\downarrow}}{11{,}1}\quad 11{,}1\quad 11{,}1\quad 12{,}0\quad 12{,}0\quad 12{,}5$

$x_{(1)} = 7{,}8$ e $x_{(5)} = 11{,}1$

9.2. $\tilde{x} = (7{,}8\ ;\ 10{,}0\ ;\ 11{,}1\ ;\ 12{,}0\ ;\ 12{,}5)$

9.3. $x = \dfrac{\sum_{j=1}^{5} x_j n_j}{10} = \dfrac{7{,}8\times 3 + 10\times 1 + 11{,}1\times 3 + 12\times 2 + 12{,}5}{10} =$

$= \dfrac{103{,}2}{10} = 10{,}32$

Pág. 189

10. $\underset{\sim}{x} = (1\ ,2\ ,1\ ,3\ ,2\ ,4\ ,3)$

10.1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1+2+1+3+2+4+3 = 16$

Amostra ordenada: 1 1 2 2 3 3 4

$x_{(1)} = 1$ e $n = 7$

$n\, x_{(1)} = 7$

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) 16 \geq 7\left(= n x_{(1)}\right)$

10.2. $x_{(1)} \leq \overline{x} \leq x_{(7)}$?

De **10.1.**: $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n x_{(1)}$

$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq x_{(1)} \Leftrightarrow \overline{x} \geq x_{(1)}$ ou $x = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = \dfrac{16}{7}$

Como $\dfrac{16}{7} \geq 1 \quad \left(1 = \dfrac{7}{7}\right)$ e $\dfrac{16}{7} \leq 4 \quad \left(4 = \dfrac{28}{7}\right)$,

então: $1 \leq \dfrac{16}{7} \leq 4$

Assim: $x_{(1)} \leq \overline{x} \leq x_{(7)}$

11. $\underset{\sim}{x} = (2\ ,4\ ,6\ ,8\ ,10\ ,12)$

$\underset{\sim}{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \dfrac{42}{6} = 7$

$\underset{\sim}{y} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, 2, \dfrac{8}{3}, \dfrac{10}{3}, 4\right)$

$\underset{\sim}{z} = (9\ ,19\ ,29\ ,39\ ,49\ ,59)$

Se $\underset{\sim}{y} = \dfrac{1}{3}\underset{\sim}{x}$, então $\overline{y} = \dfrac{1}{3}\overline{x} = \dfrac{1}{3}\times 7 = \dfrac{7}{3}$.

Se $\underset{\sim}{z} = 5\underset{\sim}{x} - 1$, então $\overline{z} = 5\overline{x} - 1 = 5\times 7 - 1 = 34$.

Pág. 190

12. $\underset{\sim}{x} = (x_1\ ,x_2\ ,\ldots\ ,x_n)$; $\underset{\sim}{y} = (y_1\ ,y_2\ ,\ldots\ ,y_n)$

$\underset{\sim}{w} = (x_1 + y_1\ ,\ldots\ ,x_n + y_n)$

$\overline{w} = \dfrac{(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_n+y_n)}{n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{w} = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} + \dfrac{y_1+\ldots+y_n}{n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{w} = \overline{x} + \overline{y}$

13. $11\times 175 = 1925$

$1925 - 185 = 1740$

$11\times 176 = 1936$

$1936 - 1740 = 196$

O jogador que entrou em campo para substituir o jogador que saiu media 196 cm.

Pág. 193

14. $\underset{\sim}{x} = (0\ ,1\ ,4\ ,2\ ,x_5\ ,5\ ,3\ ,x_8)$

$d_5 = 1$ e $\overline{x} = 2$

$d_i = x_i - \overline{x}$

Logo, $x_5 = d_5 + \overline{x} = 1 + 2 = 3$.

$x = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = 2 \Leftrightarrow 0+1+4+2+3+5+3+x_8 = 8\times 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_8 = 16 - 18 \Leftrightarrow x_8 = -2$

$\underset{\sim}{x} = (0\ ,1\ ,4\ ,2\ ,3\ ,5\ ,3\ ,-2)$

$d_1 = 0 - 2 = -2$

$d_2 = 1 - 2 = -1$

$d_3 = 4 - 2 = 2$

$d_4 = 2 - 2 = 0$

$d_5 = 3 - 2 = 1$

$d_6 = 5 - 2 = 3$

$d_7 = 3 - 2 = 1$

$d_8 = -2 - 2 = -4$

$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 + d_7^2 + d_8^2 =$

$= (-2)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + (-4)^2 = 36$

15.1. $\underset{\sim}{x} = (x_1\ ,\ldots\ ,x_n)$

$\overline{x} = 2$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1900$

$SS_x = 300$

$SS_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 \Leftrightarrow 1900 - n\times 4 = 300 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4n = -1600 \Leftrightarrow n = \dfrac{1600}{4} = 400$

Dimensão da amostra: $n = 400$

15.2. $\underset{\sim}{y} = -\underset{\sim}{x} + 2 \Rightarrow \overline{y} = -\overline{x} + 2 = -2 + 2 = 0$

15.3. $\overline{x} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 2n$

$\overline{z} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1 + 3}{n+2} =$

$= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + 4}{n+2} = \dfrac{2n+4}{n+2} = \dfrac{2(n+2)}{n+2} = 2$

Pág. 195

16. $\underset{\sim}{x} = (1\ ,0\ ,5\ ,2\ ,3\ ,4)$

$\underset{\sim}{y} = (4x_1\ ,4x_2\ ,4x_3\ ,4x_4\ ,4x_5\ ,4x_6)$

16.1. $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \dfrac{15}{6} = 2{,}5$

$\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} y_i}{6} = \dfrac{4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6}{6} =$

$= 4\dfrac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)}{6} =$

$= 4\overline{x} = 4\times 2{,}5 = 10$

ou

$\overline{y} = (4\,,0\,,20\,,8\,,12\,,16)$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{6} y_i}{6} = \frac{60}{6} = 10 = 4 \times 2{,}5 = 4 \times \overline{x}$$

16.2. $SS_x = \sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x})^2 =$

$= (1-2{,}5)^2 + (0-2{,}5)^2 + (5-2{,}5)^2 + (2-2{,}5)^2 +$

$+ (3-2{,}5)^2 + (4-2{,}5)$

$= (-1{,}5)^2 + (-2{,}5)^2 + (2{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (1{,}5)^2 =$

$= 17{,}5$

$SS_y = \sum_{i=1}^{6} (y_i - \overline{y})^2 =$

$= (4-10)^2 + (0-10)^2 + (20-10)^2 + (8-10)^2 +$

$+ (12-10)^2 + (16-10)^2 =$

$= (-6)^2 + (-10)^2 + (10)^2 + (-2)^2 + (2)^2 + (6)^2 = 280$

Logo, $SS_y = 16 SS_x = 16 \times 17{,}5 = 280$

17. $\underset{\sim}{x} = (0\,,1\,,0\,,2\,,3)$ e $\underset{\sim}{y} = (3\,,5\,,3\,,7\,,9)$

17.1. $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$ e $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \frac{27}{5} = 5{,}4$

Logo, $\overline{y} = 2 \times \overline{x} + 3 = 2 \times 1{,}2 + 3 = 2{,}4 + 3 = 5{,}4$.

17.2. $SS_x = \sum_{i=1}^{5} (x_1 - \overline{x})^2 =$

$= (0-1{,}2)^2 + (1-1{,}2)^2 + (0-1{,}2)^2 + (2-1{,}2)^2 + (3-1{,}2)^2 =$

$= 6{,}8$

$SS_y = \sum_{i=1}^{5} (y_i - \overline{y}) =$

$= (3-5{,}4)^2 + (5-5{,}4)^2 + (3-5{,}4)^2 + (7-5{,}4)^2 + (9-5{,}4)^2$

$= 27{,}2$

Logo, $SS_y = 4 SS_x = 4 \times 6{,}8 = 27{,}2$.

Pág. 196

18.1.

Peso	Frequência absoluta
67	2
73	2
79	4
81	3
83	2
85	2
87	3
88	1
91	1
Total	**20**

18.2. $\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{9} \tilde{x}_j n_j}{20} =$

$= \frac{67 \times 2 + 73 \times 2 + 79 \times 4 + 81 \times 3 + 83 \times 2 + 85 \times 2 +}{20}$

$+ \frac{87 \times 3 + 88 \times 1 + 91 \times 1}{20} = 80{,}75$

18.3. $SS_x = \sum_{j=1}^{9} (\tilde{x}_j - x)^2 n_j =$

$= (67-80{,}75)^2 \times 2 + (73-80{,}75)^2 \times 2 + (79-80{,}75)^2 \times 4 +$

$+ (81-80{,}75)^2 \times 3 + (83-80{,}75)^2 \times 2 + (85-80{,}75)^2 \times 2 +$

$+ (87-80{,}75)^2 \times 3 + (88-80{,}75)^2 \times 1 + (91-80{,}75)^2 \times 1 =$

$= 831{,}75$

Pág. 197

19. Equipa *A*: 2 0 1 4 4

Equipa *B*: 2 2 1 3 2

19.1. $\underset{\sim}{x} = (2\,,0\,,1\,,4\,,4)$

$\underset{\sim}{y} = (2\,,2\,,1\,,3\,,2)$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{11}{5} = 2{,}2$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

19.2. $SS_x = (2-2{,}2)^2 + (0-2{,}2)^2 + (1-2{,}2)^2 +$

$+ (4-2{,}2)^2 + (4-2{,}2)^2 = 12{,}8$

$s_x = \sqrt{\frac{12{,}8}{4}} \approx 1{,}79$

$SS_y = (2-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 = 2$

$s_y = \sqrt{\frac{2}{4}} \approx 0{,}71$

A dispersão em relação à média de golos é superior na equipa *A*.

A equipa *B* tem uma prestação ao nível da marcação de golos mais regular.

Pág. 198

20. $\overline{x} = 12$ e $s_x = 2$

20.1. $\underset{\sim}{y} = 2\underset{\sim}{x}$

$\overline{y} = 2\overline{x} = 2 \times 12 = 24$.

$s_y^2 = 2^2 s_x^2 = 4 \times 4 = 16$

$s_y = 2 s_x = 2 \times 2 = 4$

20.2. $\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x} + 4$

$\overline{z} = \overline{x} + 4 = 12 + 4 = 16$

$s_z^2 = s_x^2 = 4$

$s_z = s_x = 2$

20.3. $\underset{\sim}{t} = 3\underset{\sim}{x} + 2$

$\overline{t} = 3\overline{x} + 2 = 3 \times 12 + 2 = 36 + 2 = 38$

$s_t^2 = 3^2 \times s_x^2 = 9 \times 4 = 36$

$s_t = 3 s_x = 3 \times 2 = 6$

20.4. $\underset{\sim}{w} = -2x + 1$

$\overline{w} = -2\overline{x} + 1 = -2 \times 12 + 1 = -23$

$s_w^2 = (-2)^2 s_x^2 = 4 \times 4 = 16$

$s_w = |-2| s_x = 2 \times 2 = 4$

Pág. 199

21.1. $\overline{x} = 20,5$ ºC

$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 16\ 230$

$SS_x = \sum_{i=1}^{30} x_i^2 - n\overline{x}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow SS_x = 16\ 230 - 30 \times 20,5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow SS_x = 16\ 230 - 12\ 607,5 \Leftrightarrow SS_x = 3622,5$

$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{3622,5}{29}} \approx 11,18$

21.2. $s_x = 2$ ºC

$\overline{x} = 20$ ºC

$n = 10$

De $s_x = 2$ vem $s_x^2 = 4$, logo $s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$, pelo que:

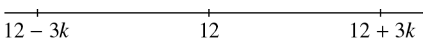
$4 = \frac{SS_x}{109} \Leftrightarrow SS_x = 36$

$SS_x = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - n\overline{x}^2 \Leftrightarrow 36 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \times 20^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 4036$

Pág. 200

22.1. $\overline{x} = 12$ ºC $\quad s_x = 3$ ºC



$12 - 3k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{7}{3}$

$\alpha < \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \alpha < \frac{9}{49} \approx 18,37\%$

22.2. $\overline{x} = 15$ ºC e $s_x = 1,5$ ºC

$\overline{x} - ks = 12 \Leftrightarrow 15 - k \times 1,5 = 12 \Leftrightarrow 1,5k = \frac{3}{1,5} \Leftrightarrow k = 2$

$\alpha < \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha < 0,25$

Como o mês de fevereiro tem 28 dias:

$0,25 \times 28 = 7$

No máximo, em sete dias, a temperatura foi inferior a 12 ºC ou superior a 18 ºC.

Pág. 201

23. $n = 10$

Amostra ordenada:

$(2,47; 2,49; 2,50; 2,52; 2,58; 2,60; 2,61; 2,63; 2,64; 2,69)$

23.1. $P_{25} = ?$

$\frac{k_n}{100} = \frac{25 \times 10}{100} = 2,5$ (não é um número inteiro)

P_{25} é o valor de ordem $[2,5] + 1 = 3$

Logo, $P_{25} = x_{(3)} = 2,50$ cm.

23.2. $P_{45} = ?$

$\frac{45 \times 10}{100} = 4,5$ (não é um número inteiro)

P_{45} é o valor de ordem $[4,5] + 1 = 5$

$P_{45} = x_{(5)} = 2,58$ cm

23.3. $P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 10}{100} = 7,5$ (não é um número inteiro)

P_{75} é o valor de ordem $[7,5] + 1 = 8$

$P_{75} = x_{(8)} = 2,63$ cm

23.4. $P_{90} = ?$

$\frac{90 \times 10}{100} = 9$ (número inteiro)

$P_{90} = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{2,64 + 2,69}{2} = \frac{5,33}{2} = 2,665$ cm

---

Pág. 204

24.1. (5 , 7 , 8 , 10 , 10 , 12 , 17 , 19 , 19 , 21 , 22 , 22 , 25 , 30 , 31 , 33 , 35 , 40 , 40 , 41)

$P_{25} = ?$

$\frac{25 \times 20}{100} = 5$ (número inteiro)

$P_{25} = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{10 + 12}{2} = 11$

$P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 20}{100} = 10$ (número inteiro)

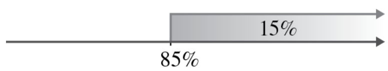
$P_{50} = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{21 + 22}{2} = 21,5$

$P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 20}{100} = 15$ (número inteiro)

$P_{75} = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = \frac{31 + 33}{2} = 32$

24.2.



$P_{85} = ?$

$\frac{85 \times 20}{100} = 17$ (número inteiro)

$P_{85} = \frac{x_{(17)} + x_{(18)}}{2} = \frac{35 + 40}{2} = 37,5$

O menor inteiro superior a 37,5 é 40.

O percurso, nestas condições, será de 40 minutos.

24.3. Sabe-se que $x_{(14)} = 30$.

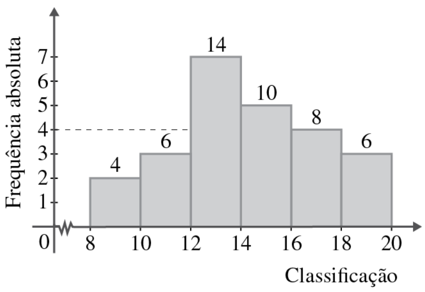
$\frac{20k}{100}$ não inteiro tal que $\left[\frac{20k}{100}\right] + 1 = 14$, isto é,

$13 < \frac{20k}{100} < 14 \Leftrightarrow 65 < x < 70$

Assim, pode pertencer a P_{66}, P_{67}, P_{68} ou P_{69}.

Pág. 205

25.



$A_t = 24 \times 2 = 48 \quad (= 4 + 6 + 14 + 10 + 8 + 6)$

25.1. $P_{30} = ?$

$x = \dfrac{30 \times 48}{100} = 14{,}4$

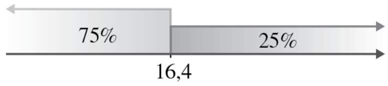
$P_{30} \in [12\,,14[$

$(P_{30} - 12) \times 7 = 14{,}4 - (4 + 6)$

$P_{30} = 12{,}63$

Pelo menos 30% dos alunos têm classificação inferior ou igual a 12,63 valores.

25.2. $P_{75} = ?$



$\dfrac{75 \times 48}{100} = 36$

$P_{75} \in [16\,,18[$

$(P_{75} - 16) \times 4 = 36 - (4 + 6 + 14 + 10) \Leftrightarrow P_{75} = 16{,}5$

A classificação é 16,5 valores.

25.3. $P_{40} = ?$

$\dfrac{40 \times 48}{100} = 19{,}2$

$P_{40} \in [12\,,14[$

$(P_{40} - 12) \times 7 = 19{,}2 - (4 + 6)$

$P_{40} = 13{,}31$

A classificação é 13,31 valores.

25.4. $12{,}3 \in [12\,,14[$

$(12{,}3 - 12) \times 7 = 2{,}1$

$4 + 6 + 2{,}1 = 12{,}1$

$\dfrac{knh}{100} = 12{,}1 \Leftrightarrow k = \dfrac{100 \times 12{,}1}{24 \times 2} \Leftrightarrow k \approx 25{,}21$

$P_k = P_{26}$

12,3 pertence ao P_{26}.

Pág. 206

26. A lista ordenada é:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
84	123	123	137	144	148	151	153	153	161

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
161	165	167	168	169	171	176	177	179	180

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
182	182	183	184	185	185	187	192	195	197

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
198	199	199	200	206	209	212	217	218	20

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
221	222	222	223	224	225	226	235	238	243

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
252	258	267	270	271	278	293	317	333	384

26.1. Como $\dfrac{15 \times 60}{100} = 9$ é inteiro, então o percentil 15 é a média dos elementos da lista que estão nas posições 9 e 10.

Logo, $P_{15} = \dfrac{153 + 161}{2} = 157$ mg/dl.

Como $\dfrac{74 \times 60}{100} = 44{,}4$ não é inteiro, então o percentil de 74 é o elemento da lista que está na posição $[44{,}4] + 1 = 45$.

Logo, $P_{74} = 224$ mg/dl.

26.2. Ao consultar a lista ordenada observou-se que o valor 200 g/dl é um elemento da lista e que se encontra na 34.ª posição da lista ordenada.

Por definição, $\left[\dfrac{k \times 60}{100}\right] + 1 = 34$, ou seja, $[0{,}6k] = 33$.

Logo, $33 < 0{,}6k < 34 \Leftrightarrow 55 < k < 56{,}66(6)$.

Podemos concluir que o indivíduo com um nível de 200 mg/dl pertence ao percentil 56. Tal significa que pelo menos 56% dos homens da amostra têm um nível de colesterol total inferior ou igual a 200 mg/dl.

26.3. Como $\dfrac{40}{100} \times 60 = 24$, o nível mais elevado de entre 40% dos níveis mais baixos da amostra está na posição 24 e é o 184 mg/dl.

Pág. 207

27. Dado que a amostra $\underset{\sim}{y}$ foi obtida a partir da amostra $\underset{\sim}{x}$ por uma transformação afim, temos que

$\underset{\sim}{y} = (ax_1 + b\,,\, ax_2 + b\,,\, \ldots\,,\, ax_{20} + b)$ e $\overline{y} - a\overline{x} + b$.

Uma vez que se conhece valores correspondentes das duas amostras e a média da amostra $\underset{\sim}{x}$, pode-se determinar a média da amostra $\underset{\sim}{y}$. Introduzindo os valores da amostra $\underset{\sim}{y}$ numa lista da calculadora, obtemos a média 52,175.

Conhecida a média da amostra $\underset{\sim}{y}$, temos que:

$$\begin{cases} 45a + b = 68{,}3 \\ 34{,}25 + b = 52{,}175 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -45a + 68{,}3 \\ 34{,}25a - 45a + 68{,}3 = 52{,}175 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -45a + 68{,}3 \\ -10{,}75a = 52{,}175 - 68{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -45a + 68{,}3 \\ a = \dfrac{-16{,}125}{-10{,}75} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -45 \times 1{,}5 + 68{,}3 \\ a = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{4}{5} \\ a = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Tem-se, então, a amostra:

$$\underset{\sim}{y} = \left(\frac{3}{2}x_1 + \frac{4}{5}\,;\, \frac{3}{2}x_2 + \frac{4}{5}\,;\, \ldots\,;\, \frac{3}{2}x_{30} + \frac{4}{5}\right)$$

Considerando x_i um valor da amostra $\underset{\sim}{x}$ e y_i um valor da amostra $\underset{\sim}{y}$, sabe-se que:

$$y_i = \frac{3}{2}x_i + \frac{4}{5} \Leftrightarrow 10y_i = 15x_i + 8 \Leftrightarrow x_i \frac{10y_i - 8}{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = \frac{2}{3}y_i - \frac{8}{15}$$

Aplicando este relação sobre a lista da calculadora com os dados da amostra $\underset{\sim}{y}$, obtemos a amostra $\underset{\sim}{x}$:

$$\underset{\sim}{x} = (45\,,30\,,58\,,32\,,27\,,21\,,23\,,22\,,40\,,21\,,20\,,30\,,$$
$$37\,,50\,,37\,,28\,,48\,,59\,,25\,,32)$$

Pág. 208

28.1. **Máquina *A*:**

100% – 6,25% = 93,75%

Resulta que pelo menos 93,755 das rolhas produzidas pela máquina *A* não têm defeito.

Máquina *B*:

Introduzindo os dados recorrendo às listas da calculadora, contaram-se 16 rolhas que pertencem ao intervalo $[2{,}9\,;3{,}1]$.

Logo, a percentagem de rolhas produzidas pela máquina *A* sem defeito é de $\frac{100\times 16}{40}$, ou seja, 40%.

A máquina que produz uma maior percentagem de rolhas sem defeito é a máquina *A*.

28.2. Dado que, pela amostra recolhida da máquina *A*, a percentagem de rolhas com defeito é sempre inferior a 6,25% e o intervalo para o diâmetro das rolhas sem defeito é centrado na média, pela desigualdade de Chebycheff, temos que $\frac{1}{k^2} = 0{,}0625$.

$$3 - 4s_x = 2{,}9 \Leftrightarrow -4s_x = 2{,}9 - 3 \Leftrightarrow s_x = \frac{0{,}1}{-4} \Leftrightarrow s_x = 0{,}025$$

Pág. 209

28.3. Efetuando operações sobre listas inseridas na calculadora, os valores da média dos diâmetros das rolhas produzida pela máquina *B* e do desvio-padrão são, aproximadamente, 3,061 cm e 0,192 cm, respetivamente.

28.4. A máquina que produz rolhas com menor variabilidade na medida do diâmetro é a máquina *A*, pois o desvio-padrão amostral é menor.

Pág. 212

Atividades complementares

29.1. $\sum_{k=1}^{1}(-2k) = -2$

29.2. $\sum_{i=2}^{4}(1-3i) = (1-3\times 2)+(1-3\times 3)+(1-3\times 4) =$

$= 5 - 8 - 11 = -24$

29.3. $\sum_{p=-2}^{1}(3p+1) = [3\times(-2)+1]+[3\times(-1)+1]+$

$+[3\times 0+1]+[3\times 1+1] =$

$= -5 - 2 + 1 + 4 = -2$

29.4. $\left(\sum_{k=0}^{3}k\right)^2 = (0+1+2+3)^2 = 36$

29.5. $\sum_{i=1}^{3}(-1)^i \times i^2 = (-1)\times 1^2 + (-1)^2\times 2^2 + (-1)^3\times 3^2 =$

$= -1 + 4 - 9 = -6$

29.6. $\sum_{j=-2}^{10}3 = 3(10-(-2)+1) = 39$

30.1. $\sum_{i=2}^{5}3x_i = 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 3x_5$

30.2. $\sum_{k=2}^{4}(2k-1)x_k =$

$= (2-2-1)x_2 + (2\times 3-1)x_3 + (2\times 4-1)x_4 =$

$= 3x_2 + 5x_3 + 7x_4$

30.3. $\sum_{i=1}^{4}2^{i-2}x_i = 2^{1-2}x_1 + 2^{2-2}x_2 + 2^{3-2}x_3$

$= \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3$

30.4. $\sum_{i=0}^{5}a_i x^{5-i} = a_0x^{5-0} + a_1x^{5-1} + a_2x^{5-2} + a_3x^{5-3} + a_4x^{5-4} +$

$+a_5x^{5-0} =$

$= a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$

31.1. $(x_1+2)^4 + (x_2+2)^4 + (x_3+2)^4 + \ldots + (x_n+2)^4 =$

$= \sum_{i=1}^{n}(x_i+2)^4$

31.2. $(3x_1-2y_1)+(3x_2-2y_2)+(3x_3-2y_3)+\ldots+(3x_n-2y_n) =$

$= \sum_{k=1}^{n}(3x_k - 2y_k)$

32. $\sum_{i=1}^{12}x_i = 8$ **e** $\sum_{i=1}^{12}x_i^2 = 17$

32.1. $\sum_{i=1}^{12}x_i(x_i+3) =$

$= \sum_{i=1}^{12}(x_i^2 + 3x_i) = \sum_{i=1}^{12}x_i^2 + 3\sum_{i=1}^{12}x_i =$

$= 17 + 3\times 8 = 17 + 24 = 41$

32.2. $\sum_{i=1}^{12}(3x_i - 2) = 3\sum_{i=1}^{12}x_i - 2\sum_{i=1}^{12}1 =$

$= 3\times 8 - 2\times 12 = 0$

32.3. $\sum_{i=1}^{12}(x_i-1)^2 = \sum_{i=1}^{12}(x_i^2 - 2x_i + 1) =$

$= \sum_{i=1}^{12}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{12}x_i + \sum_{i=1}^{12}1 =$

$= 17 - 2\times 8 + 12 = 1 + 12 = 13$

33.1. $\sum_{k=2}^{5}3k - 2\sum_{k=2}^{5}k = \sum_{k=2}^{5}3k - \sum_{k=2}^{5}2k = \sum_{k=2}^{5}(3k-2k) = \sum_{k=2}^{5}k$

33.2. $\sum_{i=4}^{8}(1-2i) + \sum_{i=4}^{8}3i - 5 = \sum_{i=4}^{8}(1-2i) + \sum_{i=4}^{8}3i - \sum_{i=4}^{8}1 =$

$= \sum_{i=4}^{8}(1-2i+3i-1) = \sum_{i=4}^{8}i$

34.1. $\sum_{k=100}^{209}300 = 300(209-100+1) = 300\times 110 = 33\,000$

34.2. $\sum_{k=20}^{88} 2 = 2(88-20+1) = 138$

35.1. $\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=1}^{4} a_k - a_4$

$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3$

$\sum_{k=1}^{3} a_k - a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_4 = a_1 + a_2 + a_3$

Logo, $\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=1}^{4} a_k - a_4$

35.2. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3^{k+1}}\right)$

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^{k+1}-3^k}{3^k 3^{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cancel{3^k}(3-1)}{\cancel{3^k}\times 3^{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3^{k+1}}$

36.1. $\sum_{i=1}^{7} x = 14 \Leftrightarrow (7-1+1)x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{7} \Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

36.2. $\sum_{k=1}^{8} 8 = 4x^2 \Leftrightarrow (8-1+1)\times 8 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{64}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x \pm \sqrt{16} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$

$S = \{-4, 4\}$

37. $\sum_{i=p}^{n}(1+i)^2 - \sum_{i=p}^{n}(i^2+2i) =$

$= \sum_{i=p}^{n}(1+2i+i^2) - \sum_{i=p}^{n}(i^2+2i) = \sum_{i=p}^{n}(1+2i+i^2-i^2-2i) =$

$= \sum_{i=p}^{n} 1 = n - p + 1$

38. $\sum_{i=1}^{n}(5x_i - 2) = \sum_{i=1}^{n} 5x_i - \sum_{i=1}^{n} 2 = 5\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n = 5A - 2n$

39.1. $\sum_{j=0}^{11}(k+j) = \sum_{j=1}^{11} j + 24k + \sum_{j=1}^{12} k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{11} k + \sum_{j=0}^{11} j = \sum_{j=1}^{11} j + 24k + 12k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12k + 0 + \sum_{j=1}^{11} j = \sum_{j=1}^{11} j + 24k + 12k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 24k \Leftrightarrow k = 0$

39.2. $1 + \sum_{i=1}^{50}(5+i) = 11k + \sum_{i=1}^{51}(5+i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \cancel{\sum_{i=1}^{50}(5+i)} = 11k + \cancel{\sum_{i=1}^{50}(5+i)} + \sum_{i=51}^{51}(5+i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = 11k + 56 \Leftrightarrow k = -\frac{55}{11} \Leftrightarrow k = -5$

39.3. $\sum_{i=1}^{16}(1+i)^2 = k + \sum_{i=1}^{16}(i^2+2i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{16}(1+2i+i^2) = k + \sum_{k=1}^{16}(i^2+2i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{16} 1 + \cancel{\sum_{i=1}^{16} 2i} + \cancel{\sum_{i=1}^{16} i^2} = k + \cancel{\sum_{k=1}^{16} i^2} + \cancel{\sum_{i=1}^{16} 2i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 = k$

40.1. $\underset{\sim}{x} = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4,$
$5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8)$

40.2. $x_{(3)} = 2$ e $x_{(21)} = 6$

40.3. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_j n_j}{30} =$

$= \frac{1\times1 + 2\times6 + 3\times5 + 4\times4 + 5\times4 + 6\times5 + 7\times3 + 8\times2}{30} =$

$= \frac{131}{30} \approx 4,4$ vezes

ou

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30} = \frac{131}{30} \approx 4,4$ vezes

41. $\underset{\sim}{x} = (10, 14, 13, 15, 16, 18, 12)$

41.1. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = \frac{98}{7} = 14$

Em média, consome 14 litros por semana.

41.2. Se o consumo diário aumenta dois litros, então $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + 2$, logo $\bar{y} = \bar{x} + 2 = 14 + 2 = 16$ (pelas propriedades da média)

ou

$\underset{\sim}{y} = (12, 16, 15, 17, 18, 20, 14)$

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{7} y_i}{7} = \frac{112}{7} = 16 = \bar{x} + 2$

41.3. Se o consumo duplicar então $\underset{\sim}{z} = 2\underset{\sim}{x}$, logo

$\bar{z} = 2\bar{x} = 2\times 14 = 28$ litros (pelas propriedades da média)

ou

$\underset{\sim}{z} = (20, 28, 26, 30, 32, 36, 24)$

$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{7} z_i}{7} = \frac{196}{7} = 28 = 2\bar{x}$

42. $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{12}) \leftarrow$ rapazes

$\underset{\sim}{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{13}) \leftarrow$ raparigas

$\bar{x} = 65$ e $\bar{y} = 61$ $\quad n_x = 12$ e $n_y = 13$

Seja $\underset{\sim}{z} = (x_1, x_2, \ldots, x_{12}, y_1, y_2, \ldots, y_{13})$.

$n = n_x + n_y = 12 + 13 = 25$

$\bar{z} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{13}}{25}$

Como $\bar{x} = 65 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = 65 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{12} x_i - 12\times 65 = 780$

e de $\bar{y} = 61 \Leftrightarrow \frac{\sum_{j=1}^{13} y_j}{13} = 61 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{13} y_j = 61\times 13 = 793$

logo $\bar{z} = \frac{780 + 793}{25} = 62,92$

A média das massas dos alunos é 62,92 kg.

43. $5\times 6 = 30$; $6\times 7 = 42$; $42 - 30 = 12$

Adicionou-se o número 12.

44. $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$\bar{x} = 1{,}7$ e $d_2 = 0{,}3$

44.1. $d_2 = x_2 - \bar{x} \Leftrightarrow x_2 = 1{,}7 + 0{,}3 = 2$ e

$\bar{x} = 1{,}7 \Leftrightarrow \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{3} = 1{,}7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}1 + 2 + x_3 + 2{,}3 + 0{,}9 = 5 \times 1{,}7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_3 = 8{,}5 - 6{,}3 \Leftrightarrow x_3 = 2{,}2$

$\underset{\sim}{x} = (1{,}1\,;\,2\,;\,2{,}2\,;\,2{,}3\,;\,0{,}9)$

44.2. $SS_x = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 =$

$= (1{,}1 - 1{,}7)^2 + (2 - 1{,}7)^2 + (2{,}2 - 1{,}7)^2 +$

$+ (2{,}3 - 1{,}7)^2 + (0{,}9 - 1{,}7)^2 = 1{,}7$

45. $\underset{\sim}{x} = (x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4)$

$d_2 = 2\,;\,d_3 = 1$ e $d_4 = 1{,}5$

45.1. Como $\sum_{i=1}^{4} d_i = 0 \Leftrightarrow d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d_1 + 2 + 1 + 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow d_1 = -4{,}5$

45.2. $x_2 = 3$

$d_2 = x_2 - \bar{x} \Leftrightarrow 2 = 3 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = 1$

pelo que $x_1 = d_1 + \bar{x} = -4{,}5 + 1 = -3{,}5$

$x_2 = 3$

$x_3 = d_3 + \bar{x} = 1 + 1 = 2$

$x_4 = d_4 + \bar{x} = 1{,}5 + 1 = 2{,}5$

logo $\underset{\sim}{x} = (-3{,}5\,;\,3\,;\,2\,;\,2{,}5)$

45.3. $SS_x = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2 =$

$= (-3{,}5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + (2{,}5 - 1)^2 = 27{,}5$

46.1. $\underset{\sim}{x} = (0\,,1\,,1\,,2\,,0\,,2\,,2)$, logo $\bar{x} = \dfrac{8}{7} = 1{,}14$

$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + a\,,\ a \neq 0$, logo $\bar{y} = \bar{x} + a$

$\underset{\sim}{y} = (a\,,1+a\,,1+a\,,2+a\,,a\,,2+a\,,2+a)$

$SS_x = \sum_{i=1}^{7} (x_i - \bar{x})^2 = \left(0 - \frac{8}{7}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{7}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{7}\right)^2 +$

$+ \left(2 - \frac{8}{7}\right)^2 + \left(0 - \frac{8}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{8}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{8}{7}\right)^2 =$

$= 3 \times \left(2 - \frac{8}{7}\right)^2 + 2 \times \left(1 - \frac{8}{7}\right)^2 + 2\left(0 - \frac{8}{7}\right)^2 \approx 4{,}86$

46.2. $SS_y = \sum_{i=1}^{7} (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{7} \left[x_i + a - (\bar{x} + a)\right]^2 =$

$= \sum_{i=1}^{7} (x_i + a - \bar{x} - a)^2 =$

$= \sum_{i=1}^{7} (x_i - \bar{x})^2 = SS_x$

47. $\underset{\sim}{x} = (2\,,0\,,3\,,5\,,7)$

$\underset{\sim}{y} = -5\underset{\sim}{x} = (-10\,,0\,,-15\,,-25\,,-35)$

$\bar{x} = \dfrac{17}{5}$ e $\bar{y} = -17$

$SS_x = \left(2 - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{17}{5}\right)^2 +$

$+ \left(5 - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(7 - \frac{17}{5}\right)^2 = 29{,}2$

$SS_y = (-10 + 17)^2 + (0 + 17)^2 + (-15 + 17)^2 + (-25 + 17)^2 +$

$+ (-35 + 17)^2 = 730 = 25 \times 29{,}2 = 25 SS_x$

48. $\underset{\sim}{x} = (17\,,15\,,13\,,18\,,12\,,11\,,15\,,15) \leftarrow$ Helena

$\underset{\sim}{y} = (15\,,16\,,14\,,16\,,14\,,12\,,15\,,14) \leftarrow$ Nuno

48.1. $\bar{x} = \dfrac{116}{8} = 14{,}5$ e $\bar{y} = \dfrac{116}{8} = 14{,}5$

48.2. $SS_x = (7 - 14{,}5)^2 + (15 - 14{,}5)^2 + (13 - 14{,}5)^2 +$

$+ (18 - 14{,}5)^2 + (12 - 14{,}5)^2 + (11 - 14{,}5)^2 +$

$+ (15 - 14{,}5)^2 + (15 - 14{,}5)^2 = 40$

$s_x = \sqrt{\dfrac{40}{7}} \approx 2{,}39$

$SS_y = (15 - 14{,}5)^2 + (16 - 14{,}5)^2 + (14 - 14{,}5)^2 +$

$+ (16 - 14{,}5)^2 + (14 - 14{,}5)^2 + (12 - 14{,}5)^2 +$

$+ (15 - 14{,}5)^2 + (14 - 14{,}5)^2 = 12$

$s_y = \sqrt{\dfrac{12}{7}} \approx 1{,}31$

48.3. $s_x > s_y$ logo o aluno que apresenta uma prestação mais regular é o Nuno.

49. $\underset{\sim}{x} = (10\,,12\,,10\,,9\,,14)$

49.1. $\bar{x} = 11$

Em média, cada saco tem 11 maçãs.

49.2. $SS_x = (10 - 11)^2 + (12 - 11)^2 + (10 - 11)^2 +$

$+ (9 - 11)^2 + (14 - 11)^2 = 16$

$s_x = \sqrt{\dfrac{16}{4}} = 2$ maçãs

49.3. $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + 3$ e $\underset{\sim}{z} = -\underset{\sim}{x}$

a) $\bar{y} = \bar{x} + 3 = 11 + 3 = 14$

e $\bar{z} = -\bar{x} = -11$

b) $s_y^2 = s_x^2 = 4$ e $s_z^2 = s_x^2 = 4$

c) $s_y = s_x = 2$ e $s_z = |-1| s_x = s_x = 2$

Pág. 214

50. $n = 16$

***Peso* (kg)**	**N.º de embalagens**
5,9	5
6,0	5
6,1	4
6,2	1
6,3	1
Total	**16**

50.1. $x = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} \underset{\sim}{x}_j n_j}{16} = \dfrac{5{,}9 \times 5 + 6{,}0 \times 5 + 6{,}1 \times 4 + 6{,}2 + 6{,}3}{16} = 6{,}025$

50.2. $SS_x = \sum_{i=1}^{5} (\underset{\sim}{x}_j - \bar{x}) n_j =$

$= (5,9-6,025)^2 \times 5 + (6-6,025)^2 \times 5 +$
$+(6,1-6,025)^2 \times 4 + (6,2-6,025)^2 + (6,3-6,025)^2 =$
$= 0,21$

$s_x = \sqrt{\frac{0,21}{15}} \approx 0,12$ (2 c. d.)

200 g = 0,2 kg

Sendo o desvio-padrão inferior a 200 g, a máquina não terá de ser afinada.

51. $\bar{x} = 10$ ºC

$s_x = 3$ ºC

$10-3k$ $\quad$ 10 $\quad$ $10+3k$

$10-3k=-2 \Leftrightarrow k=4$

$\alpha < \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{16} = 6,25\%$

52.1. $\underset{\sim}{x} = (10\,,13\,,14\,,15\,,15\,,21\,,22\,,22\,,18\,,21)$

$\bar{x} = \frac{171}{10} = 17,1$

$n = 10$

$\tilde{x} = (10\,,13\,,14\,,15\,,18\,,21\,,22)$

52.2. $SS_x = \sum_{i=1}^{7} (\tilde{x}_j - x) n_j =$

$= (10-17,1)^2 + (13-17,1)^2 + (14-17,1)^2 +$
$+(15-17,1)^2 \times 2 + (18-17,1)^2 + (21-17,1)^2 \times 2 +$
$+(22-17,1)^2 \times 2 = 164,9$

$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{164,9}{9}} \approx 4$

52.3. Amostra ordenada: $(10\,,13\,,14\,,15\,,15\,,18\,,21\,,21\,,22\,,22)$

a) $P_{15} = ?$

$\frac{15 \times 10}{100} = 1,5$ (não é um número inteiro)

$[1,5]+1=2$

$P_{15} = x_{(2)} = 13$ imóveis por quarteirão

b) $P_{25} = ?$

$\frac{25 \times 10}{100} = 2,5$ (não é um número inteiro)

$[2,5]+1=3$

$P_{25} = x_{(3)} = 14$ imóveis por quarteirão

c) $P_{80} = ?$

$\frac{80 \times 10}{100} = 8$ (é um número inteiro)

$P_{80} = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{21+22}{2} =$

$= 21,5$ imóveis por quarteirão

53.1. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_j n_j}{24} = \frac{48}{24} = 2$

Cometeram em média dois erros.

53.2. $P_{20} = ?$

$\frac{20 \times 24}{100} = 4,8$ (não é um número inteiro)

$[4,8]+1=5$, logo $P_{20} = x_{(5)} = 0$

N.º erros	N.º alunos	
0	5	$\leftarrow x_{(5)}$

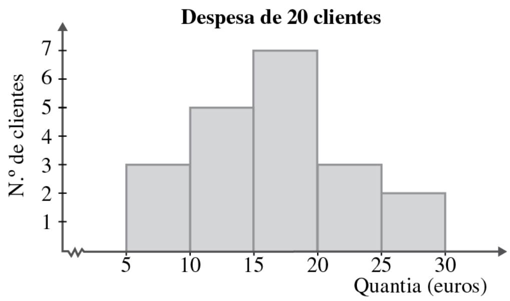
53.3. $P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 24}{100} = 12$ (é um número inteiro)

$P_{50} = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

Pelo menos 50% dos alunos cometeram dois erros ou menos ou 50% dos alunos, no máximo, cometeram dois erros.

54.1.



$At = nh = 20 \times 5 = 100$

54.2. $P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 100}{100} = 50$

$P_{50} \in [15\,,20[$

$(P_{50} - 15) \times 7 = 50 - (15+25) \Leftrightarrow P_{50} \approx 16,43$

O gasto mediano é 16,43 euros.

54.3. $P_{25} = ?$

$\frac{25 \times 100}{100} = 25$

$P_{25} \in [10\,,15[$

$(P_{25} - 10) \times 5 = 25 - 15 \Leftrightarrow P_{25} = 12$ €

$P_{45} = ?$

$\frac{45 \times 100}{100} = 45$

$(P_{45} - 15) \times 7 = 45 - (15+25) \Leftrightarrow P_{45} \approx 15,71$ €

$P_{80} = ?$

$\frac{80 \times 100}{100} = 80$

$P_{80} \in [20\,,25[$

$(P_{80} - 20) \times 3 = 80 - (15+25+35) \Leftrightarrow P_{80} \approx 21,67$ €

54.4. $22,50 \in P_k$?

$22,5 \in [20\,,25[$

$(22,5-20) \times 3 = 7,5$

$15+25+35+7,5 = 82,5$

$\frac{knh}{100} = 82,5 \Leftrightarrow k = \frac{k \times 100}{100} = 82,5 \Rightarrow k = 82,5$

$P_k = P_{83}$

A quantia gasta pelo António pertence a P_{83}.

55.1. $\frac{2}{1\times 3}+\frac{3}{2\times 4}+...+\frac{10}{9\times 11}=\sum_{k=1}^{9}\frac{k+1}{k(k+2)}$

55.2. $x_1y_1+x_1y_2+...+x_1y_8=\sum_{i=1}^{8}x_1y_i$

55.3. $x_1y_1+x_2y_2+...+x_9y_9=\sum_{i=1}^{9}x_iy_i$

55.4. $\frac{(x_5-2)^2}{5}+\frac{(x_6-2)^2}{6}+...+\sum_{i=5}^{100}\frac{(x_i-2)^2}{i}$

56.1. $\sum_{i=1}^{3}2i=2\times 1+2\times 2+2\times 3=12$

$2\sum_{i=1}^{3}i=2(1+2+3)=12$, logo $\sum_{i=1}^{3}2i=2\sum_{i=1}^{3}i$.

56.2. $\sum_{i=0}^{4}(-1)^i 2^i=(-1)^0\times 2^0+(-1)^1\times 2^1+$

$+(-1)^2\times 2^2+(-1)^3\times 2^3+(-1)^4\times 2^4=$

$=1-2+4-8+16=11$

logo $\sum_{i=0}^{4}(-1)^i 2^i=2\sum_{i=0}^{4}(-1)^i 2^{i-1}$.

56.3. $\sum_{i=3}^{5}(2x_i+2)=(2x_3+2)+(2x_4+2)+(2x_5+2)=$

$=2x_3+2x_4+2x_5+6$

$2\sum_{i=3}^{5}(x_1+1)=2[(x_3+1)+(x_4+1)+(x_5+1)]=$

$=2(x_3+x_4+x_5+3)=2x_3+2x_4+2x_5+6$

logo $\sum_{i=3}^{5}(2x_i+2)=2\sum_{i=3}^{5}(x_i+1)$

56.4. $\sum_{i=1}^{n}(4i+2)+\sum_{i=1}^{n}(2i+1)=$ (pelas propriedades dos somatórios)

$=\sum_{i=1}^{n}(4i+2+2i+1)=\sum_{i=1}^{n}(6i+3)=$

$=\sum_{i=1}^{n}[3(2i+1)]=3\sum_{i=1}^{n}(2i+1)$

56.5. $\sum_{k=0}^{n-1}(a-2ak)+a\sum_{k=0}^{n-1}(1-2k)=$

$=\sum_{k=0}^{n-1}(a-2ak+a-2ak)=$

$=\sum_{k=0}^{n-1}(2a-4ak)=\sum_{k=0}^{n-1}[2(a-2ak)]=$

$=2\sum_{k=0}^{n-1}(a-2ak)$

57.1. $\sum_{k=3}^{7}5i+\sum_{k=8}^{9}5i=$

$=5\times 3+5\times 4+5\times 5+5\times 6+5\times 7+5\times 8+5\times 9=$

$=\sum_{k=3}^{9}5i$

57.2. $\sum_{j=0}^{14}(2j-1)=\sum_{j=0}^{3}(2j-1)+\sum_{j=4}^{14}(2j-1)=$

$=2\times 0-1+2\times 1-1+2\times 2-1+2\times 3-1+\sum_{j=4}^{14}(2j-1)=$

$=8+\sum_{j=4}^{14}(2j-1)$

57.3. $\sum_{k=1}^{6}2k+\sum_{k=1}^{3}2k=\sum_{k=1}^{3}2k+\sum_{k=4}^{6}2k+\sum_{k=1}^{3}2k=$

$=\sum_{k=1}^{3}(2k+2k)+2\times 4+2\times 5+2\times 6=$

$=\sum_{k=1}^{3}4k+8+10+12=$

$=4\sum_{k=1}^{3}k+30$

57.4. $\sum_{k=0}^{3}(x_k+1)+\sum_{k=1}^{4}(x_k+1)=$

$=\sum_{k=0}^{0}(x_k+1)+\sum_{k=1}^{3}(x_k+1)+\sum_{k=1}^{3}(x_k+1)+\sum_{k=4}^{4}(x_k+1)=$

$=x_0+1+2\sum_{k=1}^{3}(x_k+1)+x_4+1=$

$=x_0+x_4+2+2\sum_{k=1}^{3}(x_k+1)$

57.5. $\sum_{j=1}^{15}2(1-3j)+2\sum_{j=16}^{31}(1-3j)=$

$=2\sum_{j=1}^{15}(1-3j)+2\sum_{16}^{30}(1-3j)+2\sum_{j=31}^{31}(1-3j)=$

$=2\left[\sum_{j=1}^{15}(1-3j)+\sum_{j=16}^{30}(1-3j)+2(1-3\times 31)\right]=$

$=2\sum_{j=1}^{30}(1-3j)-184$

58.1. $1+5+2+5+3+5+4+5=$

$=(1+2+3+4)+(5+5+5+5)=\sum_{i=1}^{4}i+\sum_{i=1}^{4}5$

58.2. $x_2+a^0+x_4+a^1+x_6+a^2+x_8+a^3=$

$=(x_2+x_4+x_6+x_8)+(a^0+a^1+a^2+a^3)=$

$=\sum_{i=1}^{4}x_{2i}+\sum_{k=0}^{3}a^k$

59.

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i	$x_i^2y_i$	$x_i^2y_i^2$
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	3	1	9	3	3	9
3	1	4	1	16	4	4	16
4	3	1	9	1	3	9	9
5	2	0	4	0	0	0	0
Total	7	9	15	27	10	16	34

59.1. $\sum_{i=1}^{5}(x_i-2y_i+2)=\sum_{i=1}^{5}x_i-2\sum_{i=1}^{5}y_i+\sum_{i=1}^{5}2$

$=7-2\times 9+2\times 5=-1$

59.2. $\sum_{i=1}^{5}y_i^2+6=27+6=33$

59.3. $\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{5}x_i^2=7^2-15=49-15=34$

59.4. $\sum_{i=1}^{5}(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{5}(x_i^2-2x_iy_i+y_i^2)$

$=\sum_{i=1}^{5}x_i^2-2\sum_{i=1}^{5}x_iy_i+\sum_{i=1}^{5}y_i^2$

$=15-2\times 10+27=22$

59.5. $\sum_{i=1}^{5}\left[(x_i-y_i)(x_i+y_i)\right]=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i^2-y_i^2\right)$

$=\sum_{i=1}^{5}x_i^2-\sum_{i=1}^{5}y_i^2=15-27=-12$

59.6. $\sum_{i=1}^{5}(y_i+2)^2=\sum_{i=1}^{5}\left(y_i^2+4y_i+4\right)=$

$=\sum_{i=1}^{5}y_i^2+4\sum_{i=1}^{5}y_i+\sum_{i=1}^{5}4=27+4\times 9+5\times 4=83$

60. $n_x=8$ e $n_y=8$

60.1. $\sum_{i=1}^{8}x_i=24$

60.2. $\left(\sum_{i=1}^{8}x_i\right)^2=24^2=576$

60.3. $\sum_{i=1}^{8}x_i\times\sum_{j=1}^{8-2}y_j=\sum_{i=1}^{8}x_i\times\sum_{j=1}^{6}y_j=24\times 18=432$

60.4. $\sum_{i=1}^{8}x_iy_i=$

$=5\times 4+4\times 3+3\times 2+2\times 4+2\times 2+3\times 3+1\times 3+4\times 2=70$

61. Seja $\underset{\sim}{x}=(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n)$, com $i=1\,,\ldots,n$, os salários dos n trabalhadores da empresa, queremos determinar n.

De $\sum_{i=1}^{n}x_i=25\,000$ e $\bar{x}=500$.

$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=500\Leftrightarrow\frac{25\,000}{n}=500\Leftrightarrow n=\frac{25\,000}{500}\Leftrightarrow n=50$

A empresa tem 50 trabalhadores.

Pág. 216

62. Consideremos $\underset{\sim}{x}=(x_1\,,\ldots,x_{27})$ as notas dos alunos da época normal, $\underset{\sim}{y}=(y_1\,,\ldots,y_{23})$ as da época de recurso e $\underset{\sim}{z}$ a amostra-conjunto:

$\underset{\sim}{z}=(x_1\,,\ldots,x_{27}\,,y_1\,,\ldots,y_{23})$

$n_z=27+23=50$

Sabe-se que $\bar{x}=12,4$ e $\bar{y}=12,4-0,9=11,5$, então:

$\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{50}z_k}{50}=\frac{\sum_{i=1}^{27}x_i+\sum_{j=1}^{23}y_j}{50}$

$\bar{x}=12,4\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{27}x_i=12,4\times 27=334,8$

$\bar{y}=11,5\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{23}y_i=11,5\times 23=264,5$

$\bar{z}=\frac{334,8+264,5}{50}=11,986$

A média das duas provas é 11,99 valores.

63. $n_1\rightarrow$ n.º de raparigas

$n_1=55$

$n_2\rightarrow$ n.º de rapazes $\Rightarrow n_1+n_2=100\Rightarrow n_2=100-55=45$

Seja $\underset{\sim}{x}=(x_1\,,\ldots,x_{55})$ as pontuações registadas pelo género feminino.

De $\bar{x}=60\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{55}x_i}{55}=60\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{55}x_i=3300$

Seja $\underset{\sim}{y}=(y_1\,,\ldots,y_{43})$ as pontuações registadas pelo género masculino e $\underset{\sim}{z}$ a amostra-conjunta.

$\underset{\sim}{z}=(x_1\,,\ldots,x_{55}\,,y_1\,,\ldots,y_{45})$

$n_z=100$

$\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{100}z_i}{100}=63$

$\sum_{i=1}^{100}z_i=\sum_{i=1}^{55}x_i+\sum_{j=1}^{45}y_i\Rightarrow z=\frac{\sum_{i=1}^{55}x_i+\sum_{i=1}^{45}y_i}{100}=63\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{45}y_i=6300-\sum_{i=1}^{55}x_i\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{45}y_i=3000$

Logo, $y=\frac{\sum_{i=1}^{45}y_i}{45}=\frac{3000}{45}\approx 66,67$ pontos.

64. $\underset{\sim}{x}=(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_{200})$

$\bar{x}=1,65$

Seja $\underset{\sim}{y}=(y_1\,,y_2\,,\ldots,y_{110})\leftarrow$ raparigas

$\bar{y}=1,60\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{110}y_i}{110}=1,60\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{110}y_i=176$

$\underset{\sim}{z}=(z_1\,,\ldots,z_{90})\leftarrow$ rapazes

$\bar{z}=?$

$x=\frac{\sum_{i=1}^{200}x_i}{200}=\frac{\sum_{i=1}^{110}y_i+\sum_{i=1}^{90}z_i}{200}=1,65$

$\sum_{i=1}^{90}z_i=330-176\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{90}z_i=154$

Logo, $\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{90}z_i}{90}=\frac{154}{90}\approx 1,71$.

Em média, os atletas masculinos medem 1,71 m.

65.1. $n=12+15+18+28=73$

$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}\tilde{x}_jn_j}{83}=\frac{23\times 12+50\times 15+100\times 28+150\times 28}{83}=$

$=\frac{8050}{83}\approx 96,99$ cl

Bimodal:

$M_o=100$ e $M_o=150$

1.º $Q=P_{25}$ $\frac{25\times 83}{100}=20,75$ (não é um número inteiro)

$[20,75]+1=21$

$P_{25}=x_{(21)}=50$

2.º $Q=P_{50}$ $\frac{50\times 83}{100}=41,5$ (não é um número inteiro)

$[41,5]+1=42$

$P_{50}=x_{(42)}=100$

3.º $Q=P_{75}$ $\frac{75\times 83}{100}=62,25$ (não é um número inteiro)

$[62,25]+1=63$

$P_{75}=x_{(63)}=150$

65.2. Seja k o número de garrafas de 150 cl aumentado.

A nova média

$$\frac{25\times12+50\times15+100\times28+150(28+k)}{93+k}=100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 300+750+2800+4200+150k=7300+100k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 150k-100k=8300-8050 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50k=250 \Leftrightarrow k=5$$

O novo número de garrafas de 150 cl é $28+5=33$.

66.1. $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{12}x_i}{12}=\frac{139}{12}=11,58$ ºC

66.2. $SS_x=\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})^2=164,24$ (2 c. d.)

66.3. $s_x=\sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}=\sqrt{\frac{164,24}{11}}=3,86$ ºC

66.4. A amostra ordenada:

$(6,0\,;8,0\,;8,3\,;9,4\,;9,4\,;9,5\,;9,7\,;14,4\,;14,8\,;16,0\,;16,1\,;17,4)$

$P_{50}=?$

$\frac{50\times12}{100}=6$, logo $P_{50}=\frac{x_{(6)}+x_{(7)}}{2}=\frac{9,5+9,7}{2}=9,6$

Em metade do ano a temperatura foi inferior ou igual a 9,6 ºC.

67.1. $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{15}x_i}{15}=\frac{292}{15}=19,47$ e $\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{15}y_i}{15}=\frac{277}{15}=18,47$

Em média, foram marcados mais golos na 1.ª volta.

67.2. $SS_x=\sum_{i=1}^{15}(x_i-\bar{x})^2=219,7335$

$s_x=\sqrt{\frac{219,7335}{14}}=3,96$ (2 c. d.)

$SS_y=\sum_{i=1}^{15}(y_i-\bar{y})^2=171,6735$

$S_y=\sqrt{\frac{171,6735}{14}}=3,50$ (2 c. d.)

A dispersão foi superior na 1.ª volta pois $s_x>s_y$.

67.3.

N.º de golos	N.º de jornadas
12	1
13	1
14	4
16	1
17	4
18	3
19	2
20	2
21	2
22	4
23	4
24	1
26	1
Total	**30**

Seja $\underset{\sim}{z}=(x_1,\dots,x_{15},y_1,\dots,y_{15})$

$n=30$

$$\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{13}x_jn_j}{30}=\frac{569}{30}=18,97$$

$$\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}=\frac{19,47+18,47}{2}=18,97=\bar{z}$$

Porque $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{y}$ têm a mesma dimensão.

67.4. $P_{80}=?$

$\frac{80\times30}{100}=24$ (é um número inteiro)

$P_{80}=\frac{x_{(24)}+x_{(25)}}{2}=\frac{22+23}{2}=22,5$

Em 80% das jornadas marcaram-se, no máximo, 22,5 golos.

---

68. Sendo $\underset{\sim}{x}=(x_1,x_2,\dots,x_{40})$ a amostra dos salários dos trabalhadores.

68.1. $\bar{x}=8,6$ (centenas de euros)

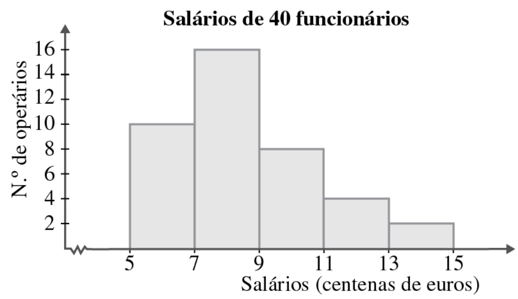
a) $\underset{\sim}{y}=\underset{\sim}{x}+0,1\underset{\sim}{x} \Rightarrow \underset{\sim}{y}=1,1\underset{\sim}{x}$

logo $\bar{y}=1,1\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}=9,46$ (centenas de euros)

b) Se for dada uma comissão fixa de 50 euros, ou seja, 0,5 centena de euros

$\bar{z}=8,6+0,5=9,10$ (centenas de euros)

68.2.



$At=nh=40\times2=80$

68.3. $P_{10}=?$

$\frac{10\times80}{100}=8$

$P_{10}\in[5,7[$

$(P_{10}-5)\times10=8 \Leftrightarrow P_{10}=5,8$

$P_{40}=?$

$\frac{40\times80}{100}=32$

$P_{40}\in[7,9[$

$(P_{40}-7)\times16=32-20 \Leftrightarrow P_{40}=7,75$

$P_{75}=?$

$\frac{75\times80}{100}=60$

$P_{75}\in[9,11[$

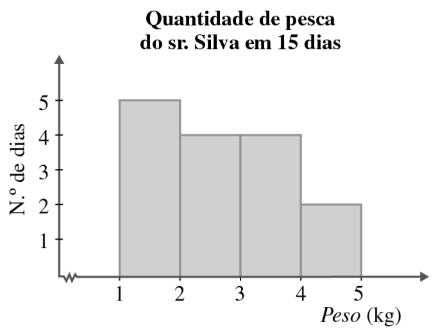
$(P_{75}-9)\times8=60-(20+32) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_{75}=10$

69.1. a)

Peso (kg)	N.º de dias
[1 , 2[	5
[2 , 3[	4
[3 , 4[	4
[4 , 5[	2
Total	**15**

b)



$At = 15 \times 1 = 15$

69.2. a) $\frac{50 \times 15}{100} = \frac{75}{100} = 7,5$

$P_{50} \in [2\,,3[$

$(P_{50} - 2) \times 4 = 7,5 - 5 \Leftrightarrow P_{50} = 2,625$

A quantidade de pescado mediano é 2,625 kg.

b) $\frac{75 \times 15}{100} = 11,25$

$P_{75} \in [3\,,4[$

$(P_{75} - 3) \times 4 = 11,25 - (5+4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_{75} = 3,563$

Em 75% dos dias, pesca, no máximo, 3,563 kg.

c) $1,57 \in [1\,,2[$

$(1,57 - 1) \times 5 = 2,85$

$\frac{knh}{100} = 2,85$

$k = \frac{285}{15} = 19$

$1,57 \in P_{19}$

d) $\frac{15 \times 15}{100} = 2,25$

$(P_{15} - 1) \times 5 = 2,25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_{15} = 1,45$ kg

$1,00\,;1,14\,;1,10$

O Sr. Silva pescou menos de 1,450 kg em três dias.

e) Por **d)** $P_{20} = 1,6$ kg.

O primeiro valor inferior a 1,6 kg é 1,57 kg.

70. $n = 21\,;\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 23,1\,;\ \sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 205,41$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{21} x_i}{21} = \frac{23,1}{21} = 1,1$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{21} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 205,41 - 21 \times 1,1^2 = 180$$

logo $s_x^2 = \frac{SSx}{n-1} = \frac{180}{20} = 9 \Rightarrow s_x = \sqrt{9} = 3$

70.1. $\underset{\sim}{y} = -2\underset{\sim}{x}$

$\bar{y} = -2\bar{x} = -2,2$

$s_y^2 = (-2)^2 s_x^2 = 4 \times 9 = 36$

$s_y = |-2| s_x = 2 \times 3 = 6$

70.2. $\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x} + 1$

$\bar{z} = \bar{x} + 1 = 2,1$

$s_z^2 = s_x^2 = 9$

$s_z = s_x = 3$

70.3. $\underset{\sim}{t} = 4\underset{\sim}{x} + 1$

$\bar{t} = 4\bar{x} + 1 = 5,4$

$s_t^2 = 4^2 s_x^2 = 16 \times 9 = 144$

$s_t = |4| s_x = 4 \times 3 = 12$

70.4. $\underset{\sim}{w} = -\underset{\sim}{x} + 3$

$\bar{w} = -\bar{x} + 3 = -1,1 + 3 = 1,9$

$s_w^2 = (-1)^2 s_x^2 = 9$

$s_w = |-1| s_x = 3$

71.1.

$At = nh = 40$

71.2. $P_{15} = ?$

$\frac{15 \times 40}{100} = 6$

$P_{15} \in [5\,,7[$

$(P_{15} - 5) \times 5 = 6 \Leftrightarrow P_{15} = 6,2$

$P_{55} = ?$

$P_{55} \in [7\,,9[$

$(P_{55} - 7) \times 8 = 22 - 10 \Leftrightarrow P_{55} = 8,5$

$P_{99} = ?$

$\frac{99 \times 40}{100} = 39,6$

$P_{99} \in [13\,,15[$

$(P_{99} - 13) \times 1 = 39,6 - (10 + 16 + 8 + 4)$

$P_{99} = 14,6$

72.1.

N.º livros	N.º alunos
0	7
1	9
2	3
3	2
4	2
5	1
Total	**24**

72.2. $\overline{x} = \frac{0\times 7 + 1\times 9\times 2\times 3 + 3\times 2\times 4\times 2\times 5}{24}$

$= \frac{9+6+6+8+5}{24} = \frac{17}{12} \approx 1,42$ livro

$SS_x = \left(0 - \frac{17}{12}\right)^2 \times 7 + \left(1 - \frac{17}{12}\right)^2 \times 9 + \left(2 - \frac{17}{12}\right)^2 \times 3 +$

$+\left(3 - \frac{17}{12}\right)^2 \times 2 + \left(4 - \frac{17}{12}\right)^2 \times 2 + \left(5 - \frac{17}{12}\right)^2 \times 1 = \frac{287}{6}$

$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{\frac{287}{6}}{23}} \approx 1,44$ livro

72.3. $P_{10} = ?$

$\frac{10\times 24}{100} = 2,1$ (não é um número inteiro)

$[2,4] + 1 = 3$

$P_{10} = x_{(3)} = 0$

$P_{30} = ?$

$\frac{30\times 24}{100} = 7,2$ (não é um número inteiro)

$[7,2] + 1 = 8$

$P_{30} = x_{(8)} = 1$

$P_{75} = ?$

$P_{75} = \frac{x_{(18)} + x_{(19)}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$

72.4. $\frac{75\times 24}{100} = 18$ (é um número inteiro)

$P_{80} = \frac{x_{(18)} + x_{(19)}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$

Logo, o aluno que registou menor índice de leitura leu três livros.

73. $\underset{\sim}{x} = (13, 15, 14, 16, 17, 16, 14, 18, 16, 19)$

Amostra ordenada:
$(13, 14, 14, 15, 16, 16, 16, 17, 18, 19)$

73.1. $x_6 = 16$ e $x_{(6)} = 16$

73.2. $\frac{60\times 10}{100} = 6$ (é um número inteiro)

$P_{60} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2}$

(B)

73.3. $P_{75} = ?$

$\frac{75\times 10}{100} = 7,5$ (não é um número inteiro)

$[7,5] + 1 = 8$

$P_{75} = x_{(8)} = 17$

Pelo menos 75% dos alunos que estudavam na biblioteca têm 17 anos ou menos.

Pág. 218

Avaliação

1. $\sum_{i=0}^{3} (-1)^i 3i = (-1)^0 \times 3\times 0 + (-1)\times 3\times 1 + (-1)^2 \times 3\times 2 +$

$+(-1)^3 \times 3\times 3 = -3 + 6 - 9 = -6$

Resposta: (C)

2. $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \rightarrow$ salários dos cinco funcionários

$\underset{\sim}{x} = 637,30 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} 5\times 637,30 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i = 3186,5$

$\underset{\sim}{y} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = 625 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i + x_6}{6} = 625 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_6 = 6\times 625 - \sum_{i=1}^{5} x_i = 3750 - 3186,50 = 563,50$

Resposta: (C)

3. $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $\sum_{i=1}^{3} x_i = 6$

$d_i = 1$ e $d_2 = -1$

$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3} = \frac{6}{3} = 1$ e $d_1 + d_2 + d_3 = 0 \Rightarrow d_3 = 0$

$d_i = x_i - \overline{x} \Leftrightarrow x_i = d_i + \overline{x}$

Logo, $x_i = 1 + 2 = 3$.

$x_2 = -1 + 2 = 1$

$x_3 = 0 + 2 = 2$

$\underset{\sim}{x} = (3, 1, 2)$

Resposta: (A)

4. Desvios: $-4, -2, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 2, 3$

$SS_x = (-4)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 +$

$+1^2 + 2^2 + 3^2 = 38$

$s_x = \sqrt{\frac{38}{9}} \approx 2,05$

Resposta: (C)

5. $\underset{\sim}{x} = (2, 5, 7, 10, 15)$

$\underset{\sim}{y} = (1, 3, 10, 2, 23)$

$\overline{x} = \frac{39}{5} = 7,8$ e $\overline{y} = \frac{39}{5} = 7,8$

$SS_x = 98,8$ e $SS_y = 305,16$

$s_x = \sqrt{\frac{98,8}{4}} \approx 4,97$ e $s_y = \sqrt{\frac{305,16}{4}} \approx 8,73$

$s_x < s_y$

Resposta: (C)

6. **(A)** $A_1 = 5 \times 3 = 15$; $A_2 = 5 \times 5 = 25$

$A_3 = 5 \times 6 = 60$; $A_4 = 5 \times 4 = 20$

$A_t = 90$

A afirmação **(A)** é verdadeira.

(B) $P_{60} = ?$ P

$P_{60} \in [15 , 20[$

$(P_{60} - 15) \times 6 = 54 - (15 + 25) \Leftrightarrow P_{60} = 17,33$

A afirmação **(B)** é falsa.

(C) Afirmação falsa.

Três alunos demoram entre 5 e 10 minutos.

(D) $P_{50} = ?$

$\frac{50 \times 90}{100} = 45$

$P_{50} \in [15 , 20[$

$(P_{50} - 15) \times 6 = 45 - (15 + 25)$

$P_{50} = 15,83$

A afirmação **(D)** é falsa.

7. $\sum_{i=2}^{6} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=2}^{6} x_i \right)^2$

$\sum_{i=2}^{6} x_i^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$

$\left(\sum_{i=2}^{6} x_i \right)^2 = (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2$

$x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \neq (x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2$

$\sum_{i=2}^{6} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=2}^{6} x_i \right)^2$

8. $d_1 = 3$ $\quad d_2 = -3$ $\quad d_3 = 2$ $\quad d_4 = -4$ $\quad d_5 = 9$

$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 0?$

$3 - 3 + 2 - 4 + 9 = 7 \neq 0$

Logo, não é possível ter esta série de desvios em relação à média.

9. $\underset{\sim}{x}(x_1 , x_2 , x_3 , x_4)$

$d_1 = -1$ $\quad d_2 = 1$ $\quad d_4 = -2$

9.1. $d_3 = ?$

$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0 \Leftrightarrow -1 + 1 + d_3 - 2 = 0 \Leftrightarrow d_3 = 2$

9.2. $x_2 = 0$

$d_i = x_i - \bar{x} \Leftrightarrow x_i = d_i + \bar{x}$

De $x_2 = 0$ vem $0 = 1 + \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = -1$

Então, $x_1 = -1 - 1 = -2$.

$x_2 = 0$

$x_3 = 2 - 1 = 1$

$x_4 = -2 - 1 = -3$

sendo $\underset{\sim}{x} = (-2 , 0 , 1 , -3)$.

10.1. $\bar{x} = 100$ e $\bar{y} = 100$

Logo, $\bar{x} = \bar{y}$.

10.2. $s_x = 40,96$ e $s_y = 51,61$

$s_x < s_y$

A Helena tem um conjunto de resultados mais homogéneo porque as médias são iguais e o desvio-padrão é menor.

11. $\underset{\sim}{x} = (171 ; 155 , 170 , 161 , 171 , 161 , 174 , 180 , 162 , 174)$

Amostra ordenada:

$(155 , 161 , 161 , 162 , 170 , 171 , 171 , 174 , 174 , 180)$

11.1. $x_7 = 174$ e $x_{(7)} = 171$

11.2. P_{60}

$\frac{60 \times 10}{100} = 6$ (é um número inteiro)

$P_{60} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2}$

Resposta: (B)

11.3. $P_{75} = ?$

$\frac{75 \times 10}{100} = 7,5$ (não é um número inteiro)

$[7,5] + 1 = 8$

$P_{75} = x_{(8)} = 174$

75% dos alunos medem, no máximo, 174 cm.

11.4. $162 = x_{(4)}$

Será que existe $P_k = x_{(4)}$?

$\frac{10k}{100}$ tem de ser um número não inteiro e $\left[\frac{10k}{100} \right] + 1 = 4$.

$3 < \frac{10k}{100} < 4$

$30 < k < 40$

Assim, a altura 162 cm pode pertencer a:

P_{31} , P_{32} , P_{33} , P_{34} , P_{35} , P_{36} , P_{37} , P_{38} e P_{39} .

12.1. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \tilde{x}_j n_j}{110} = \frac{0 \times 70 + 1 \times 25 + 2 \times 10 + 3 \times 5}{110} =$

$= \frac{6}{11} \approx 0,55$

12.2. $SS_x = \left(0 - \frac{6}{11} \right)^2 \times 70 + \left(1 - \frac{6}{11} \right)^2 \times 25 +$

$+ \left(2 - \frac{6}{11} \right)^2 \times 10 + \left(3 - \frac{6}{11} \right)^2 \times 5 \approx$

$\approx 77,273$

$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} \approx \sqrt{\frac{77,273}{109}} \approx 0,84$