Teste de avaliação 1 **Págs. 3 e 4**

1. **Resposta: (B)**
2. **Resposta: (C)**
3. **(A)** Quando $x=-1$, temos $(-1)^{-1+1}=(-1)^0=1$, pelo que a proposição $\exists x \in A:\ (-1)^{x+1}=1$ é verdadeira.

(B) $\forall x \in A,\ \sim(x^2 \leq 0) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x^2>0$, pelo que a proposição é falsa, pois $0 \in A$ e $0^2>0$ é falso.

(C) $|-1|=1$, $|0|=0$ e $|1|=1$, pelo que a proposição $\forall x \in A,\ |x| \leq 1$ é verdadeira.

(D) Quando $x=-1$, temos $\sqrt[3]{-1}=-1$, pelo que a proposição $\exists x \in A:\ \sqrt[3]{x}=-1$ é verdadeira.

Resposta: (B)

4. $D=\{x \in \mathbb{R}:\ -x^2>0\} \Leftrightarrow D=\{x \in \mathbb{R}:\ x^2<0\}$

O quadrado de qualquer número real é um número real não negativo, logo $D=\varnothing$.

Resposta: (D)

5. Como $\sim a \Rightarrow b$ é uma proposição falsa, então $\sim a$ terá de ser uma proposição verdadeira (e, por conseguinte, q terá de ser falsa) e b terá de ser uma proposição falsa.

(A)

a	b	$a \Leftrightarrow b$
F	F	V

(B)

a	b	$a \vee b$	$\sim(a \vee b)$
F	F	F	V

(C)

a	b	$\sim b$	$a \wedge \sim b$	$\sim b \Rightarrow (a \wedge \sim b)$
F	F	V	F	F

(D)

a	b	$b \Rightarrow a$
F	F	V

Resposta: (C)

6.1. $L \cap P = L = \{X \in A: X \text{ é losango}\}$

6.2. $R \cap P = R = \{X \in A: X \text{ é retângulo}\}$

6.3. $L \cap R = \{X \in A: X \text{ é quadrado}\}$

6.4. $L \cap Q = \{X \in A: X \text{ é quadrado}\}$

6.5. $P \cup Q = \{X \in A: X \text{ é retângulo}\}$

7.1. Se está quente e não está sol, então está quente.

7.2. Está quente ou não está sol, se e somente se, está sol e não está quente.

8.1. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \Rightarrow (q \wedge r)$

8.2. $p \Rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \vee r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

9.1. • $B=\left\{x \in \mathbb{R}:\ -\frac{x}{2}>-4\right\}=\{x \in \mathbb{R}:\ -x>-8\}$

$=\{x \in \mathbb{R}:\ x<8\}$, pelo que $B=]-\infty\ ,\ 8[$

• $C=\{x \in \mathbb{R}:\ 9+3x \geq 0\}=\{x \in \mathbb{R}:\ x \geq -3\}$

pelo que $C=[-3\ ,\ +\infty[$

Assim, $B \cap C =]-\infty\ ,\ 8[\cap [-3\ ,\ +\infty[= [-3\ ,\ 8[$.

9.2. $A=\{x \in \mathbb{R}:\ -2x<0\}=\{x \in \mathbb{R}:\ 2x>0\}=$

$=\{x \in \mathbb{R}:\ x>0\}$, pelo que $A=]0\ ,\ +\infty[$

Assim, $A \setminus C =]0\ ,\ +\infty[\setminus [-3\ ,\ +\infty[= \varnothing$.

9.3. $\overline{C}=]-\infty\ ,\ -3[$

9.4. $C \setminus (A \cap B) = [-3\ ,\ +\infty[\setminus (]0\ ,\ +\infty[\cap]-\infty\ ,\ 8[) =$

$=[-3\ ,\ +\infty[\setminus]0\ ,\ 8[=$

$=[-3\ ,\ 0] \cup [8\ ,\ +\infty[$

10. $P(C)=\{\ \varnothing\ ,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$P(B)=\{\varnothing\ ,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

$P(B) \setminus P(C)=$

$=\{\{4\},\{1,4\},\{2,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

Teste de avaliação 2 **Págs. 5 e 6**

1. • $\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\sqrt[3]{5} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\sqrt{5^3}}=\sqrt[3]{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt[6]{5^3}=\sqrt[3]{5} \Leftrightarrow \sqrt[6:3]{5^{3:3}}=\sqrt[3]{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}=\sqrt[3]{5} \rightarrow$ Falso

Assim, a proposição p é falsa.

• $\frac{7}{2+3\sqrt{2}}=-1+\frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{7(2-3\sqrt{2})}{(2+3\sqrt{2})(2-3\sqrt{2})}=-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{7(2-3\sqrt{2})}{2^2-(3\sqrt{2})}=-1+\frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{7(2-3\sqrt{2})}{4-18}=-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{7(2-3\sqrt{2})}{-14}=-1+\frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{2-3\sqrt{2}}{-2}=-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow -1+\frac{3\sqrt{2}}{2}=-1+\frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ Verdadeiro

Assim, a proposição q é verdadeira.

p	q	$p \Rightarrow q$
F	V	V

p	q	$p \vee q$
F	V	V

p	$\sim p$	q	$\sim p \wedge q$
F	V	V	V

p	$\sim p$	q	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
F	V	V	F	F

A proposição falsa é $\sim p \Leftrightarrow \sim q$.

Resposta: (D)

2. $A=\{x\in\mathbb{N}:\ x^3-4x=0\}=\{x\in\mathbb{N}:\ x(x^2-4)=0\}=$

$=\{x\in\mathbb{N}:\ x=0\vee x^2-4=0\}=$

$=\{x\in\mathbb{N}:\ x=0\vee x=-2\vee x=2\}$

$A=\{2\}$, pois 0 e –2 não são números naturais.

Por outro lado:

- $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$, –2 é a raiz do polinómio $x+2$;
- $x-2=0\Leftrightarrow x=2$, 2 é a raiz do polinómio $x-2$;
- $x^2+4=0\Leftrightarrow x^2=-4$, impossível em $\mathbb{R}$, pois $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+4>0$.
- $x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=0\vee x+2=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-2$

  0 e –2 são as raízes do polinómio x^2+2x.

Assim, a proposição verdadeira é:

$\exists x\in A:\ x$ é raiz do polinómio $x-2$

Resposta: (B)

3. $8^{\frac{x}{2}}=\left(2^3\right)^{\frac{x}{2}}=2^{\frac{3x}{2}}=\sqrt{4}^{\frac{3x}{2}}=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3x}{2}}=4^{\frac{3x}{4}}=\left(4^x\right)^{\frac{3}{4}}$

Como $4^x=3$: $\left(4^x\right)^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{3^3}=\sqrt[4]{27}$

Resposta: (A)

4. $P(x)=\left[3A(x)+B(x)\right]^2-2C(x)=$

$=\left[3(x-1)^2+\left(-3x^2+2x+1\right)\right]^2-2\left(x^3-2x+1\right)=$

$=\left[3\left(x^2-2x+1\right)-3x^2+2x+1\right]^2-2x^3+4x-2=$

$=\left(3x^2-6x+3-3x^2+2x+1\right)^2-2x^3+4x-2=$

$=(-4x+4)^2-2x^3+4x-2=$

$=-2x^3+16x^2-28x+14$

Resposta: (D)

5. $(x-1)^3>x\left(x^2+9\right)-10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-1)>x^3+9x-10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)(x-1)>x^3+9x-10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-2x^2+2x+x-1>x^3+9x-10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1>x^3+9x-10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x^2-6x+9>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3<0$

Determinemos as raízes do polinómio x^2+2x-3:

$x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4(-3)}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm 4}{2}\Leftrightarrow x=1\vee x=-3$

Voltando à inequação:

$x^2+2x-3<0\ \Leftrightarrow (x-1)(x+3)<0$

Construindo um quadro de sinais, tem-se:

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x-1$	–	–	–	0	+
$x+3$	–	0	+	+	+
$(x-1)(x+3)$	+	0	–	0	+

Assim, $(x-1)(x+3)<0\Leftrightarrow x\in\left]-3\ ,\ 1\right[$

Resposta: (B)

6.1. $P(-6)+P(-5)=$

$=(-6+5)^{2n}+(-6+6)^n-1+(-5+5)^{2n}+(-5+6)^n-1=$

$=(-1)^{2n}+0-1+0+1^n-1=\left[(-1)^2\right]^n+1^n-2=$

$=1^n+1^n-2=1+1-2=0$

6.2. Sabemos que $n=1$, pelo que $P(x)=(x+5)^{2\times1}+(x+6)^1-1$, reduzindo o polinómio $P(x)$, tem-se:

$P(x)=x^2+10x+25+x+6-1\ \Leftrightarrow P(x)=x^2+11x+30$

Assim, tem-se que:

$P(x)<T(x)\ \Leftrightarrow x^2+11x+30<-2x^2-15x+39\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2+26x-9<0$

$3x^2+26x-9=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-26\pm\sqrt{676-4\times3\times(-9)}}{6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-26\pm 28}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{-26-28}{6}\vee x=\dfrac{-26+28}{6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-9\vee x=\dfrac{1}{3}$

Voltando à inequação:

$3x^2+26x-9<0\ \Leftrightarrow 3(x+9)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+9)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)<0$

Construindo um quadro de sinais:

x	$-\infty$	-9		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x+9$	–	0	+	+	+
$x-\frac{1}{3}$	–	–	–	0	+
$(x+9)\left(x-\frac{1}{3}\right)$	+	0	–	0	+

Assim, $(x+9)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)<0\Leftrightarrow x\in\left]-9\ ,\ \dfrac{1}{3}\right[$, ou seja,

$P(x)<T(x)\Leftrightarrow x\in\left]-9\ ,\ \dfrac{1}{3}\right[$

7. Para fatorizar o polinómio $A(x)=2x^3-13x^2+22x-8$ experimenta-se, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente (no caso –8) que são –8, –4, –2, –1, 1, 2, 4 e 8. Como para $A(2)=0$ vamos fatorizar o polinómio recorrendo à regra de Ruffini:

	2	–13	22	–8
2		4	–18	8
	2	–9	4	0

$2x^2-9x+4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{81-4\times2\times(4)}}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm7}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{9+7}{4}\vee x=\dfrac{9-7}{4}\ \Leftrightarrow x=4\vee x=\dfrac{1}{2}$

$A(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=4 \vee x=\frac{1}{2}$

As raízes do polinómio A (x) são $\frac{1}{2}$, 2 e 4, pelo que as dimensões do paralelepípedo são $\frac{1}{2}$, 2 e 4.

8.1. Área do trapézio [$ABCD$] = $\frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}\times h =$

$=\frac{4+2a}{2}\times\left(4-a^2\right) = (2+a)\times\left(4-a^2\right)=$

$=8-2a^2+4a-a^3 = 8+4a-2a^2-a^3$

8.2. $T(a)\geq 9 \wedge 0<a<2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8+4a-2a^2a^3 \geq 9 \wedge 0<a<2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1+4a-2a^2-a^3 \geq 0 \wedge 0<a<2$

Para fatorizar o polinómio $-1+4a-2a^2-a^3$, temos que experimentar, como possíveis raízes, os divisores inteiros do termo independente (no caso –1) que são –1 e 1.

Como para a = 1 o valor numérico do polinómio é zero, significa que 1 é raiz do polinómio.

Pela regra de Ruffini, tem-se:

	–1	–2	4	–1
1		–1	–3	–1
	–1	–3	1	0

$-a^2-3a+1=0 \Leftrightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{-2} \Leftrightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{13}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-\frac{\sqrt{13}+3}{2} \vee a=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$

Voltando à inequação, tem-se que:

$-1+4a-2a^2-a^3\geq 0 \wedge 0<a<2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(a-1)\left(a+\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)\geq 0 \wedge 0<a<2$

$\Leftrightarrow (a-1)\left(a+\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)\leq 0 \wedge 0<a<2$

Sabendo que $\forall a\in\left]0,2\right[,\ a+\frac{3+\sqrt{13}}{2}>0$ e considerando

$a_1=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$, construiu-se o quadro de sinais seguinte:

a	0		a_1		1		2
$a-1$		–	–	–	0	+	
$a-a_1$		–	0	+	+	+	
Produto		+	0	–	0	+	

$T(a)\geq 9 \wedge 0<a<2 \Leftrightarrow a_1\leq a\leq 1 \Leftrightarrow a\in\left[\frac{\sqrt{13}-3}{2},1\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\in\left[\frac{\sqrt{13}-3}{2},1\right]$

Interpretação: A área do trapézio [$ABCD$] é maior ou igual a 9 quando $a\in\left[\frac{\sqrt{13}-3}{2},1\right]$.

9.1. $R(x)=0 \Leftrightarrow x^4-3x^2+2=0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-3x^2+2=0$

Substituindo x^2 por y, tem-se:

$y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{9-4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow y=\frac{3\pm1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{3+1}{2} \vee y=\frac{3-1}{2} \Leftrightarrow y=2 \vee y=1$

Voltando à variável x, tem-se:

$x^2=2 \vee x^2=1 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2} \vee x=\sqrt{2} \vee x=-1 \vee x=1$

9.2. $R(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-1)(x+1)$

Construindo um quadro de sinais, tem-se:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		–1		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x+\sqrt{2}$	–	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-\sqrt{2}$	–	–	–	–	–	–	–	0	+
$x-1$	–	–	–	–	–	0	+	+	+
$x+1$	–	–	–	0	+	+	+	+	+
R (x)	+	0	–	0	+	0	–	0	+

$R(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2}\ ,\ -1\right]\cup\left[1\ ,\ \sqrt{2}\right]$.

9.3. $\frac{4}{R\left(\sqrt[3]{2}\right)+S\left(\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{4}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4-3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+2+3\left(\sqrt[3]{4}\right)-2}=$

$=\frac{4}{\sqrt[3]{2^4}-3\times\sqrt[3]{4}+2+3\times\sqrt[3]{4}-2}=\frac{4}{\sqrt[3]{2^4}}=\frac{4}{\sqrt[3]{2^3\times2}}=$

$=\frac{4}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2\times\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\times\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{2\times\sqrt[3]{4}}{2}=\sqrt[3]{4}$

Teste de avaliação 3 — Págs. 7 e 8

1. $x^2-2x+y^2+6y+8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9+8-1-9=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9-2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=2$

A circunferência tem centro no ponto de coordenadas (1 , –3) e raio igual a $\sqrt{2}$ unidades, pelo que a proposição p é verdadeira e a proposição q é falsa. Assim, tem-se que:

- $\sim p \wedge q$ é falsa, pois $\sim \mathrm{V} \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$
- $\sim p \Rightarrow q$ é verdadeira, pois $\sim \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V}$
- $p \Leftrightarrow \sim q$ é verdadeira, pois $\mathrm{V} \Leftrightarrow \sim \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$
- $p \vee q$ é verdadeira, pois $\mathrm{V} \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V}$

Resposta: (A)

2. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares quando e apenas quando

$\frac{-2}{\sqrt{5}+3}=\frac{k}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+3\right)\times k=-2\times4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{-8}{\sqrt{5}+3} \Leftrightarrow k=\frac{-8\left(\sqrt{5}-3\right)}{\left(\sqrt{5}+3\right)\left(\sqrt{5}-3\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{-8\left(\sqrt{5}-3\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-3^2} \Leftrightarrow k=\frac{-8\left(\sqrt{5}-3\right)}{5-9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{-8\left(\sqrt{5}-3\right)}{5-9} \Leftrightarrow k=\frac{-8\left(\sqrt{5}-3\right)}{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 2\left(\sqrt{5}-3\right) \Leftrightarrow k = 2\sqrt{5}-6$

Resposta: (C)

3. $\begin{cases} 2x+\lambda=-3 \\ 2y+4=\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-3=\lambda \\ 2y+4=\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

$2y+4=-2x-3 \Leftrightarrow 3y=-2x-3-4 \Leftrightarrow 2y=-2x-7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-x-\frac{7}{2}$

Assim, a equação reduzida da reta *r* é $y=-x-\frac{7}{2}$

Resposta: (B)

4. $144x^2+225y^2=32\ 400 \Leftrightarrow \frac{144x^2}{32\ 400}+\frac{225y^2}{32\ 400}=\frac{32\ 400}{32\ 400} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{144}=1$

Assim, tem-se que, $a^2=225$, ou seja, $a=\sqrt{225} \Leftrightarrow a=15$ e $b^2=144$, pelo que $b=\sqrt{144} \Leftrightarrow b=12$.

Como $a > b$, tem-se que $a^2=b^2+c^2$.

$225=144+c^2 \Leftrightarrow c^2=81$, pelo que $c=\sqrt{81} \Leftrightarrow c=9$

Assim, $A(-9\ ,\ 0)$ e $B(9\ ,\ 0)$ e a abcissa do ponto *Q* é igual a –9, tal como a abcissa do ponto *M* . A abcissa do ponto *P* é igual a 9, assim como a abcissa do ponto *N*.

Por outro lado, os pontos *M, N, P* e *Q* pertencem à elipse, daí que:

$\frac{(-9)^2}{225}+\frac{y^2}{144}=1 \Leftrightarrow \frac{81}{225}+\frac{y^2}{144}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{144}=1-\frac{81}{225} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{144}=\frac{144}{225} \Leftrightarrow y^2=\frac{144\times144}{225} \Leftrightarrow y^2=\frac{2304}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2304}{25}} \Leftrightarrow y=-\frac{48}{5} \vee y=\frac{48}{5}$

$Q\left(-9\ ,\ \frac{48}{5}\right)$, $M\left(-9\ ,\ -\frac{48}{5}\right)$, $P\left(9\ ,\ \frac{48}{5}\right)$ e $N\left(9\ ,\ -\frac{48}{5}\right)$

A área do retângulo [*MNPQ*] é igual a $\overline{QP}\times\overline{PN}$, ou seja, é igual a $2\times9\times2\times\frac{48}{5}=345{,}6$.

Resposta: (D)

5. $\vec{u}(-2\ ,\ -6)$ e $\vec{v}(3\ ,\ -4)$

$\frac{1}{2}\vec{v}=2\vec{w}+\frac{1}{4}\vec{u} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(3\ ,\ -4)=2\vec{w}+\frac{1}{4}(-2\ ,\ -6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\ ,\ -2\right)=2\vec{w}+\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\ ,\ -2\right)-\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}\right)=2\vec{w} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2\ ,\ -\frac{1}{2}\right)=2\vec{w} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2\ ,\ -\frac{1}{2}\right)=\vec{w} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1\ ,\ -\frac{1}{4}\right)=\vec{w}$

Assim:

$\|\vec{w}\|=\left\|\left(1\ ,\ -\frac{1}{4}\right)\right\|=\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{17}{16}}=\frac{\sqrt{17}}{4}$

Resposta: (C)

6.1. O triângulo [*PQR*] é retângulo em *R*, quando e apenas quando, $\left[d(P\ ,\ Q)\right]^2=\left[d(P\ ,\ R)\right]^2+\left[d(R\ ,\ Q)\right]^2$ (1)

- $d(P\ ,\ Q)=\sqrt{(11+3)^2+(8-10)^2}=$

$=\sqrt{14^2+(-2)^2}=$

$=\sqrt{196+4}=\sqrt{200}$

- $d(P\ ,\ R)=\sqrt{(5+3)^2+(k-10)^2}=$

$=\sqrt{8^2+(k-10)^2}=$

$=\sqrt{64+(k-10)^2}=$

$=\sqrt{64+k^2-20k+100}=$

$=\sqrt{k^2-2-k+164}$

- $d(R\ ,\ Q)=\sqrt{(11-5)^2+(8-k)^2}=$

$=\sqrt{6^2+(8-k)^2}=$

$=\sqrt{36+(8-k)^2}=$

$=\sqrt{36+64-16k+k^2}=$

$=\sqrt{k^2-16k+100}$

Substituindo na equação (1), tem-se que:

$\left(\sqrt{200}\right)^2=\left(\sqrt{k^2-20k+164}\right)^2+\left(\sqrt{k^2-16k+100}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 200=k^2-20k+164+k^2-16k+100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 200=2k^2-36k+254 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k^2-36k+64=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-18k+32=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{18\pm\sqrt{(-18)^2-4\times1\times32}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{18\pm14}{2} \Leftrightarrow k=\frac{18+14}{2} \vee k=\frac{18-14}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=16 \vee k=2$

Logo, $k=2 \vee k=16$.

6.2. O centro da circunferência é *C* que é o ponto médio do segmento de reta [*PQ*].

$C\left(\frac{-3+11}{2}\ ,\ \frac{10+8}{2}\right) \Leftrightarrow C(4\ ,\ 9)$

O raio da circunferência é igual a $d(C\ ,\ P)$ ou $d(C\ ,\ Q)$.

$d(C\ ,\ P)=\sqrt{(4+3)^2+(9-10)^2}=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{50}$

Assim, a equação reduzida da circunferência de diâmetro [*PQ*] é $(x-4)^2+(y-9)^2=50$.

6.3. O ponto *R* pertence à mediatriz do segmento de reta [*PQ*], quando e apenas quando, $d(R\ ,\ P)=d(R\ ,\ Q)$.

Por **6.1.**, $R(5\ ,\ 2)$ ou $R(5\ ,\ 16)$.

- $R(5\ ,\ 2)$

$d(R\ ,\ P)=\sqrt{(5+3)^2+(2-10)^2}=\sqrt{8^2+(-8)^2}=\sqrt{128}$

$d(R\ ,\ Q)=\sqrt{(5-11)^2+(2-8)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}=\sqrt{72}$

- $R(5\ ,\ 16)$

$d(R\ ,\ P)=\sqrt{(5+3)^2+(15-10)^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$

$d(R\ ,\ Q)=\sqrt{(5-11)^2+(16-8)^2}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{10=10}$

Assim, R (5 , 2) não pertence à mediatriz do segmento de reta [PQ], já que $d(R\ ,\ P) \neq d(R\ ,Q)$.

No caso de R (5 , 16), este pertence à mediatriz do segmento de reta [PQ], pois $d(R\ ,\ P) = d(R\ ,\ Q)$.

7.1. $C = A + 2\overrightarrow{AE}$ e $D = B + 2\overrightarrow{BE}$

• $\overrightarrow{AE} = E - A = \left(\frac{5}{2}\ ,\ -\frac{5}{2}\right) - (3\ ,\ -6) = \left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{7}{2}\right)$

• $\overrightarrow{BE} = E - B = \left(\frac{5}{2}\ ,\ -\frac{5}{2}\right) - (6\ ,\ -2) = \left(-\frac{7}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$

Logo, $C = A + 2\overrightarrow{AE} = (3\ ,\ 6) + 2\left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{7}{2}\right) =$

$= (3\ ,\ -6) + (-1\ ,\ 7) = (2\ ,\ 1)$

$D = B + 2\overrightarrow{BE} = (6\ ,\ -2) + 2\left(-\frac{7}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right) =$

$= (6\ ,\ -2) + (-7\ ,\ -1) = (-1\ ,\ -3)$

7.2. O centro do círculo inscrito no quadrado [$ABCD$] é o ponto $E\left(\frac{5}{2}\ ,\ -\frac{5}{2}\right)$. O raio do círculo é igual a metade do comprimento do lado do quadrado [$ABCD$].

Raio = $\frac{d(A\ ,\ B)}{2} = \frac{\sqrt{(6-3)^2 + (-2+6)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = \frac{5}{2}$

Logo, a inequação reduzida do círculo inscrito no quadrado [$ABCD$] é $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$.

8.1. A reta t tem a direção do vetor $\vec{u}\left(3\sqrt{5}\ ,\ -6\right)$ pelo que o seu declive é igual a $\frac{-6}{3\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$.

$t:\ y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + b$

Como o ponto $A\left(-\frac{3}{2}\ ,\ 2\right) \in t$, tem-se que:

$2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + b \Leftrightarrow 2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$

Logo, a equação reduzida da reta t é $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + 2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

8.2. As retas r e t são paralelas quando e apenas quando têm a mesma direção, ou seja, os seus vetores diretores são colineares.

$\left(3\sqrt{5}\ ,\ -6\right)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta t e (2 , a) as de um vetor diretor da reta r.

Estes vetores são colineares quando e apenas quando,

$\frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{a}{-6} \Leftrightarrow a = \frac{-12}{3\sqrt{5}} \Leftrightarrow a = \frac{-4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow a = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

8.3. Seja $\vec{t}$ o vetor pedido.

$\vec{u}$ e $\vec{t}$ são colineares quando e apenas quando existe um número real k tal que $\vec{t} = k\vec{u}$.

Assim: $\vec{t} = k\left(3\sqrt{5}\ ,\ -6\right) \Leftrightarrow \vec{t} = \left(3\sqrt{5}k\ ,\ -6k\right)$

Por outro lado, pretende-se que o vetor $\vec{t}$ tenha norma igual a $\sqrt{3}$, pelo que:

$\|\vec{t}\| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left\|\left(3\sqrt{5}k\ ,\ -6k\right)\right\| = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(3\sqrt{5}k\right)^2 + (-6k)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{45k^2 + 36k^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{81k^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 81k^2 = 3 \Leftrightarrow k^2 = \frac{3}{81} \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\sqrt{\frac{1}{27}} \vee k = \sqrt{\frac{1}{27}} \Leftrightarrow k = \frac{-1}{3\sqrt{3}} \vee k = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{3}}{9} \vee k = \frac{\sqrt{3}}{9}$

O vetor $\vec{t}$ colinear a $\vec{u}$, de sentido contrário e de norma $\sqrt{3}$ tem coordenadas:

$\vec{t} = -\frac{\sqrt{3}}{9}\left(3\sqrt{5}\ ,\ -6\right) \Leftrightarrow \vec{t} = \left(-\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{3}\ ,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{t} = \left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\ ,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

Teste de avaliação 4 **Págs. 9 e 10**

1. $A(a-2\ ,a\ ,a)$ e $B(2-2a\ ,a\ ,3)$, com $a < -3 \wedge a \in \mathbb{R}$.

Seja M o ponto médio do segmento de reta [AB].

$M\left(\frac{a-2+2-2a}{2}, \frac{a+a}{2}, \frac{a+3}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{-a}{2}, a\ , \frac{a+3}{2}\right)$

Assim, tem-se que:

- $a < -3 \Leftrightarrow -a > 3 \Leftrightarrow \frac{-a}{2} > \frac{3}{2}$, pelo que a abcissa do ponto M é positiva.
- $a < -3$, pelo que a ordenada do ponto M é negativa.
- $a < -3 \Leftrightarrow a + 3 < -3 + 3 \Leftrightarrow a + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{a+3}{2} < 0$, pelo que a cota do ponto M é negativa.

Apenas as coordenadas apresentadas na opção (C) satisfazem as condições enunciadas.

Resposta: (C)

2. A superfície esférica S é definida por:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z + 20 = 0$

Determinemos a sua equação reduzida.

$x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2 + 6\sqrt{2}y + z^2 + 2\sqrt{2}z + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 6\sqrt{2}y + 18 + z^2 + 2\sqrt{2}z +$

$+ 2 + 20 - 2 - 18 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(z + \sqrt{2}\right)^2 = 2$

A superfície esférica S tem centro $\left(\sqrt{2}\ , -3\sqrt{2}\ , -\sqrt{2}\right)$ e raio igual a $\sqrt{2}$.

Logo, os planos de equação $y = -3\sqrt{2} - \sqrt{2} \Leftrightarrow y = -4\sqrt{2}$ e $y = -3\sqrt{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow y = -2\sqrt{2}$ são tangentes à superfície esférica S. Assim, os valores reais de a para os quais o plano de equação $y = a$ tem interseção não vazia com a superfície esférica S são $a \in \left[-4\sqrt{2}\ , -2\sqrt{2}\right]$.

Resposta: (C)

3. $W = R + \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow W = (1, b, 2) + Q - P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow W = (1, b, 2) + \left[(b, 2, 3 - b^2) - (-2, 1, 4)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow W = (1, b, 2) + (b + 2, 1, -b^2 - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow W = (b + 3, b + 1, -b^2 + 1)$

O ponto W pertence ao eixo Ox quando e apenas quando tem ordenada e cota nulas, assim vem que:

$b + 1 = 0 \wedge -b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow b + 1 = 0 \wedge b^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = -1 \wedge (b = -1 \vee b = 1) \Leftrightarrow b = -1$

Resposta: (A)

4. $t \in [-1, 3]$ e $\frac{-1+3}{2} = 1$, logo o ponto médio do segmento de reta [AB] corresponde ao ponto que se obtém quando se substitui t por 1 na condição:

$(x, y, z) = (-2, 1, 4) + t(-4, 5, 2)$

$(x, y, z) = (-2, 1, 4) + (-4, 5, 2) \Leftrightarrow (x, y, z) = (-6, 6, 6)$

Resposta: (B)

5. Um vetor diretor da reta r é, por exemplo, $\vec{r}(0, 1, 0)$, pelo que a reta r é paralela ao eixo Oy e, consequentemente, a proposição p é verdadeira.

Por outro lado, $\vec{s}(0, -2, 1)$ é um vetor diretor da reta s, pelo que a proposição q é falsa.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \vee q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
V	F	F	V	V	V	F	V

Resposta: (C)

6.1. ▪ Coordenadas de F

$\overrightarrow{VE}(1, -1, -2)$

$E = V + \overrightarrow{VE} = (1, 2, 8) + (1, -1, -2) = (2, 1, 6)$

$F = E + \overrightarrow{EF} = (2, 1, 6) + (0, 2, 0) = (2, 3, 6)$

▪ Coordenadas de G

$\overrightarrow{VG}(-1, 1, 2)$ e $\overrightarrow{VG} = G - V$

$(-1, 1, -2) = G - V \Leftrightarrow (-1, 1, -2) = G - (1, 2, 8)$

$\Leftrightarrow G = (-1, 1, -2) + (1, 2, 8) \Leftrightarrow G = (0, 3, 6)$

Logo, $G(0, 3, 6)$.

▪ Coordenadas de $\overrightarrow{VH}$

$H = G + \overrightarrow{GH} = G + \overrightarrow{FE} =$

$= (0, 3, 6) + (0, -2, 0) = (0, 1, 6)$

$\overrightarrow{VH} = H - V = (0, 1, 6) - (1, 2, 8) = (-1, -1, -2)$

6.2.

a) A área da base da pirâmide é igual a 64 unidades quadradas, pelo que o lado da base da pirâmide mede 8 unidades $\left(\sqrt{64} = 8\right)$.

Assim, $d(A, B) = 8$ e como $d(E, F) = 2$ (norma do vetor $\overrightarrow{EF}$) e os triângulos [ABV] e [EFV] são semelhantes, tem-se que $\overrightarrow{VB} = 4\overrightarrow{VF}$.

▪ $\overrightarrow{VF} = F - V = (2, 3, 6) - (1, 2, 8) = (1, 1, -2)$

▪ $\overrightarrow{VB} = 4\overrightarrow{VF} = 4(1, 1, -2) = (4, 4, -8)$

Por outro lado:

$D = V + \overrightarrow{VD} = V + 4\overrightarrow{VH} =$

$= (1, 2, 8) + 4(-1, -1, -2) =$

$= (1, 2, 8) + (-4, -4, -8) =$

$= (-3, -2, 0)$

Logo, $D(-3, -2, 0)$.

b) Um vetor diretor da reta DV é, por exemplo, $\overrightarrow{DV}$.

$\overrightarrow{DV} = V - D = (1, 2, 8) - (-3, -2, 0) = (4, 4, 8)$

Assim, uma equação vetorial da reta DV é

$(x, y, z) = (1, 2, 8) + k(1, 1, 2), k \in \mathbb{R}$.

7.1. $\overrightarrow{EF} = F - E = (0,6,0)$

$\overrightarrow{EA} = (0,0,-6)$

$\overrightarrow{EH} = (-6,0,0)$

$A = E + \overrightarrow{EA} = (2,-3,1+\sqrt{3}) + (0,0,-6) = (2,-3,-5+\sqrt{3})$

$B = F + \overrightarrow{EA} = (2,3,1+\sqrt{3}) + (0,0,-6) = (2,3,-5+\sqrt{3})$

$H = E + \overrightarrow{EH} = (2,-3,1+\sqrt{3}) + (-6,0,0) = (-4,-3,1+\sqrt{3})$

$G = F + \overrightarrow{EH} = (2,3,1+\sqrt{3}) + (-6,0,0) = (-4,3,1+\sqrt{3})$

$D = A + \overrightarrow{EH} = (2,-3,-5+\sqrt{3}) + (-6,0,0) = (-4,-3,-5+\sqrt{3})$

$C = B + \overrightarrow{EH} = (2,3,-5+\sqrt{3}) + (-6,0,0) = (-4,3,-5+\sqrt{3})$

7.2. Um vetor diretor da reta AG é, por exemplo, $\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{AG} = G - A = (-4, 3, 1+\sqrt{3}) - (2, -3, -5+\sqrt{3}) =$

$= (-6, 6, 6)$

Assim, um sistema de equações paramétricas da reta AG é:

$$\begin{cases} x = 2 - 6\lambda \\ y = -3 + 6\lambda \\ z = -5 + \sqrt{3} + 6\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

7.3.

a) $\overrightarrow{HF} = F - H = (2, 3, 1+\sqrt{3}) - (-4, -3, 1+\sqrt{3}) =$

$= (6, 6, 0)$. Logo, o segmento de reta [HF] pode ser definido por:

$(x, y, z) = (-4, -3, 1+\sqrt{3}) + k(6, 6, 0),\ k \in [0, 1]$

b) A esfera tangente a todas as faces do cubo tem centro no centro do cubo, ou seja, no ponto médio do segmento de reta [EC] e raio igual a metade da aresta do cubo.

Seja W o centro da esfera.

$W\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-3+3}{2}, \frac{1+\sqrt{3}-5+\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow W\left(-1, 0, \frac{-4+2\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow W\left(-1, 0, -2\sqrt{3}\right)$

O raio da esfera é igual a 3 unidades.

Assim, a esfera tangente todas as faces do cubo pode ser definida por $(x+1)^2 + y^2 + \left(z + 2 - \sqrt{3}\right)^2 \leq 9$.

7.4. O conjunto dos pontos P do espaço equidistante de E, F e G pode ser definido por:

$d(E, P) = d(F, P) \wedge d(E, P) = d(G, P)$

Trata-se da interseção do plano mediador de [*EF*] com o plano mediador de [*EG*].

- Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador de [*EF*]

Como $d(E, P) = d(F, P)$, temos

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + \left(z - \left(1+\sqrt{3}\right)\right)^2 =$$

$$= (x-2)^2 + (y-3)^2 + \left(z - \left(1+\sqrt{3}\right)\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y+3)^2 = (y-3)^2 \Leftrightarrow y + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y = -6y \Leftrightarrow 6y + 6y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

- Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador de [*EG*].

Como $d(E, P) = d(G, P)$, temos:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + \left(z - \left(1+\sqrt{3}\right)\right)^2 =$$

$$= (x+4)^2 + (y-3)^2 + \left(z - \left(1+\sqrt{3}\right)\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = (x+4)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 6y + 4 = 8x - 6y + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x - 8x + 6y + 6y + 4 - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12x + 12y - 12 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

$$d(E, P) = d(F, P) \wedge d(E, P) = d(G, P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \wedge x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \wedge x - 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \wedge x = -1$$

Assim, o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de E, F e G é a reta definida por $y = 0 \wedge x = -1$.

8.1. O plano yOz pode ser definido pela equação $x = 0$.

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ 2y = -4 + 2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \wedge x = 0 \\ 3z - 6 = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\lambda \\ 2y = -4 + 2\lambda \ \wedge x = 0 \\ 3z - 6 = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2y = -4 + 2\times 0 \ \wedge x = 0 \\ 3z - 6 = -\dfrac{0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = -2 \quad \wedge x = 0 \\ 3z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = -2 \quad \wedge x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$. Logo, $P(0, -2, 2)$

8.2.

a) O ponto A tem cota 1, pelo que $A(x, y, 1)$ e pertence à reta r. Substituindo z por 1 nas equações paramétricas da reta r, tem-se que:

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ 2y = -4 + 2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ 3\times 1 - 6 = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ 2y = -4 + 2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ -3 = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ 2y = -4 + 2\times 6 \\ \lambda = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ 2y = 8 \\ \lambda = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 4 \\ \lambda = 6 \end{cases}$$

Logo, $A(-6, 4, 1)$

O ponto B tem abcissa 6, pelo que $B(6, y, z)$ e pertence à reta r. Substituindo x por 6 nas equações paramétricas da reta r, tem-se que:

$$\begin{cases} 6 = -\lambda \\ 2y = -4 + 2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ 3z - 6 = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -6 \\ 2y = -4 + 2(-6) \\ -3z - 6 = -\dfrac{-6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -6 \\ 2y = -4 - 12 \\ 3z - 6 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -6 \\ 2y = -16 \\ 3z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -6 \\ y = -8 \\ z = 3 \end{cases}$$

Logo, $B(6, -8, 3)$.

O ponto C é o ponto médio do segmento de reta [*AB*].

$$C\left(\frac{-6+6}{2}, \frac{4-8}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \Leftrightarrow C(0, -2, 2)$$

Logo, $C(0, -2, 2)$

b) O raio da esfera é igual a $d(A, C)$.

$$d(A, C) = \sqrt{(-6-0)^2 + (4+2)^2 + (1-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(A, C) = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(A, C) = \sqrt{36 + 36 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(A, C) = \sqrt{73}$$

Logo, a inequação reduzida da esfera é $x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 \le 73$.

Teste de avaliação 5 **Págs. 11 e 12**

1. $\{2, 4\}$ e $\{6, 1\}$ são elementos de $A \times B$, pelo que 2 e 6 são elementos de A e 4 e 1 são elementos de B. Por outro lado, sabe-se que $A \cap B = \{1, 2\}$, o que significa que 1 e 2 são elementos quer de A quer de B. Assim, o conjunto A tem, pelo menos, os elementos 1, 2 e 6 e o conjunto B tem, pelo menos, os elementos 1, 2 e 4. Logo as opções (A) e (C) ficam desde logo excluídas, já que o conjunto $A \times B$ tem, pelo menos, nove elementos $(\#A \times \#B = 3 \times 3 = 9)$.

Podemos, portanto, garantir que $A \times B$ tem mais de oito elementos.

Resposta: (B)

2. -1 é um zero da função f, ou seja, $f(-1) = 0$.

$x + 2 = -1 \Leftrightarrow x = -3$

Logo, $g(-3) = f(-3+2) + 3 = f(-1) + 3 = 0 + 3 = 3$.

Assim, o ponto que garantidamente pertence ao gráfico da função g tem coordenadas $(-3\,,3)$.

Resposta: (B)

3. ▪ $f(x)=x^2-2x \Leftrightarrow f(x)=x^2-2x+1-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)=(x-1)^2-1$$

O gráfico da função f é parte de uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice tem coordenadas $(1\,,-1)$. Assim, f é decrescente em $[-3\,,1]$ e f é crescente em $[1\,,2]$.

▪ $h(x)=x^2-6x+10 \Leftrightarrow h(x)=x^2-6x+9+10-9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h(x)=(x-3)^2+1$$

O gráfico da função h é parte de uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice tem coordenadas $(3\,,1)$. Assim, h é decrescente em $[-2\,,1]$.

▪ $g(x)=x^2-4x+5 \Leftrightarrow g(x)=x^2-4x+4+5-4$

$$\Leftrightarrow g(x)=(x-2)^2+1$$

O gráfico da função g é parte de uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice tem coordenadas $(2\,,1)$. Assim, g é decrescente em $[-2\,,2]$ e g é crescente em $[2\,,4]$.

▪ $j(x)=x^2$

O gráfico da função j é parte de uma parábola com a concavidade votada para cima e cujo vértice tem coordenadas $(0\,,0)$. Assim, j é decrescente em $[-3\,,0]$ e j é crescente em $[0\,,1]$.

Resposta: (B)

4. **Resposta: (C)** → Propriedades dos módulos

5. $D_h=D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}=$

$$=\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R} \wedge g(x)\in[1\,,+\infty[\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}: g(x)\geq 1\}$$

Por simples observação do gráfico da função g, tem-se:

$D_{f\circ g}=\{-2\}\cup[4\,,+\infty[$

Resposta: (B)

6.1. O triângulo $[APD]$ é retângulo em A. Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{PD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AP}^2 \Leftrightarrow d^2=4^2+(12-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2=x^2-24x+16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2=16+144-24x+x^2$$

Como $d>0$, vem que $d=\sqrt{x^2-24x+160}$, ou seja, $d=f(x)$.

O domínio da função f é $[0\,,12[$ pois, quando P coincide com B, tem-se $x=0$. Como P nunca coincide com A, x nunca pode ser igual a 12, já que $\overline{AB}=12$.

6.2. $d=5$ é equivalente a $f(x)=5$.

$$f(x)=5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-24+160}=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2-24x+160}\right)^2=5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-24x+160=25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-24+135=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4\times 135}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{24\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=15 \vee x=9$$

Como $x\in[0\,,12[$, tem-se que $x=9$.

Verificação:

$\sqrt{9^2-24\times 9+160}=5 \Leftrightarrow \sqrt{25}=5$ (verdadeiro)

Logo, a solução da equação é 9.

O valor de x para o qual $d=5$ é 9.

6.3. Tem-se que P é equidistante do ponto B e do ponto D, pelo que $d(P\,,B)=d(P\,,D)$, daí que, $x=\sqrt{x^2-24x+160}$.

Assim, tem-se:

$$x=\sqrt{x^2-24x+160} \Rightarrow x^2=\left(\sqrt{x^2-24x+160}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=x^2-24x+160 \Leftrightarrow 24x=160 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{160}{24} \Leftrightarrow x=\frac{20}{3}$$

Verificação:

$\frac{20}{3}=\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2-24\times\frac{20}{3}+160}=\frac{20}{3}=\sqrt{\frac{400}{9}}$ (verdadeiro)

Determinemos, agora, a área do trapézio $[PBCD]$, sabendo que $x=\frac{20}{3}$.

$$A_{[PBCD]}=\frac{d(P\,,B)+d(D\,,C)}{2}\times d(B\,,C)=$$

$$=\frac{\frac{20}{3}+12}{2}\times 4=2\times\left(\frac{20}{3}+12\right)=\frac{40}{3}+24=\frac{112}{3}$$

A área do trapézio $[PBCD]$ é igual a $\frac{112}{3}$.

7.1. $\frac{3}{2}\geq -1$, pelo que $f\left(\frac{3}{2}\right)=1-2\times\frac{3}{2}=-2$.

Assim, vem que, para $x\in]-\infty\,,-1[$.

$$f(x)<f\left(\frac{3}{2}\right)\wedge x<-1 \Leftrightarrow -2x^2-5x+1<-2 \wedge x<-1 \Leftrightarrow$$

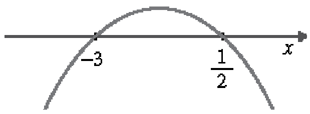
$$\Leftrightarrow -2x^2-5x+3<0 \wedge x<-1 \quad (1)$$

$$-2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times(-2)\times 3}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm 7}{-4} \Leftrightarrow x=\frac{5+7}{-4} \vee x=\frac{5-7}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \vee x=\frac{1}{2}$$

Graficamente:



Voltando a (1), vem que:

$-2x^2-5x+3<0 \wedge x<-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x<-3 \vee x>\frac{1}{2}\right) \wedge x<-1 \Leftrightarrow x<-3$$

Logo, $f(x)<f\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -3\right[$

7.2. $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \vee g(x)\in D_f\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R} \vee g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

Fazendo $g(x)=y$: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(y)$

- $y<-1 \Leftrightarrow g(x)<-1 \Leftrightarrow x+2<-1 \Leftrightarrow x<-3$

$f(y)=-2y^2-5y+1 \Rightarrow f(g(x))=-2(g(x))-5g(x)+1$

$\Rightarrow (f\circ g)(x)=-2(x+2)^2-5(x+2)+1$

$\Rightarrow (f\circ g)(x)=-2(x^2+4x+y)-5x-10+1$

$\Rightarrow (f\circ g)(x)=-2x^2-8x-8-5x-10+1$

$\Rightarrow (f\circ g)(x)=-2x^2-13x-17$

- $y\geq -1 \Leftrightarrow g(x)\geq -1 \Leftrightarrow x+2\geq -1 \Leftrightarrow x\geq -3$

$f(y)=1-2y \Rightarrow f(g(x))=1-2g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(g(x))=1-2(x+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(g(x))=1-2x-4 \Rightarrow (f\circ g)(x)=-2x-3$

$$f\circ g(x)\begin{cases}-2x^2-13x-17 & \text{se } x<-3\\ -2x-3 & \text{se } x\geq -3\end{cases}$$

$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases}-2x^2-13x-17 & \text{se } x<-3\\ -2x-3 & \text{se } x\geq -3\end{cases}$$

7.3. j é a restrição de f ao intervalo $\left[-1, +\infty\right[$.

Assim, $j(x)=1-2x$ e $D_j=\left[-1, +\infty\right[$.

O gráfico da função j é parte de uma reta de declive negativo, pelo que j é uma função decrescente e, consequentemente, $j(-1)$ é o máximo absoluto da função j.

$j(-1)=1-2(-1) \Leftrightarrow j(-1)=3$, logo, $D'_j=\left]-\infty, 3\right]=D_{j^{-1}}$.

Para determinar uma expressão analítica da função j^{-1} basta resolver em ordem a x a equação $y=1-2x$.

$$y=1-2x \Leftrightarrow 2x=1-y \Leftrightarrow x=\frac{1-y}{2}$$

Trocando as variáveis x e y obtemos $j^{-1}(x)=\frac{1-x}{2}$.

$j^{-1}:\left]-\infty, 3\right]\to\left[-1, +\infty\right[$

$$x \mapsto \frac{1-x}{2}$$

8.1. $f(x)=-(x-3)^2+4$, pelo que gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e cujo vértice tem coordenadas $(3, 4)$. Assim, tem-se que f é crescente em $\left]-\infty, 3\right]$ e é decrescente em $\left[3, +\infty\right[$.

$f(3)=4$ é o máximo absoluto da função f.

8.2. O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f pela contração horizontal de coeficiente 2.

Determinemos os zeros da função f.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -(x-3)^2+4=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3=\sqrt{4} \vee x-3=-\sqrt{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3=2 \vee x-3=-2 \Leftrightarrow x=5 \vee x=1$

Logo, os zeros da função g são $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{2}$.

8.3. O contradomínio da função f é $\left]-\infty, 4\right]$.

O gráfico da função h obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, seguida pela reflexão de eixo Ox e, finalmente, pela translação de vetor $\vec{v}(0, 2)$.

Assim, $D'_h=\left[-4+2, +\infty\right[$, ou seja, $D'_h=\left[-2, +\infty\right[$.

9.1. ▪ $g(4)=4-|2\times 4-2|=4-|8-2|=4-6=-2$

▪ $f(x)\leq g(4) \Leftrightarrow |x+2|-8\leq -2 \Leftrightarrow |x+2|\leq -2+8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x+2|\leq 6 \Leftrightarrow x+2\leq 6 \wedge x+2\geq -6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\leq 4 \wedge x\geq -8 \Leftrightarrow -8\leq x\leq 4$

Logo, $f(x)\leq g(4) \Leftrightarrow x\in[-8, 4]$.

9.2. ▪ $f(x)=|x+2|-8=\begin{cases}x+2-8 & \text{se } x+2\geq 0\\ -(x+2)-8 & \text{se } x+2<0\end{cases}$

$$=\begin{cases}x-6 & \text{se } x\geq -2\\ -x-10 & \text{se } x<-2\end{cases}$$

▪ $g(x)=x-|2x-2|=\begin{cases}x-(2x-2) & \text{se } 2x-2\geq 0\\ x-(-2x+2) & \text{se } 2x-2<0\end{cases}$

$$=\begin{cases}-x+2 & \text{se } x\geq 1\\ +x-2 & \text{se } x<1\end{cases}$$

Pretende-se determinar os zeros da função h definida por $h(x)=f(x)-g(x)$.

Para tal vamos recorrer ao seguinte quadro:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f(x)$	$-x-10$	-8	$x-6$	-5	$x-6$
$g(x)$	$3x-2$	-8	$3x-2$	1	$-x+2$
$h(x)$	$-4x-8$	0	$-2x-4$	-6	$2x-8$

Assim, tem-se que:

$h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4x-8=0\\ x<-2\end{cases} \vee x=-2 \vee \begin{cases}-2x-4=0\\ -2<x<1\end{cases} \vee \begin{cases}2x-8=0\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing \vee x=-2 \vee x\in\varnothing \vee x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=4$

Logo, os zeros da função h são –2 e 4.

Teste de avaliação 6 **Págs. 13 e 14**

1. É verdade que todos os números primos são ímpares ou iguais a 2, pelo que a proposição p é verdadeira. Também é verdade que existe pelo menos um número real tal que o seu simétrico é um número real negativo (existe uma infinidade, porque são todos os números reais positivos que verificam esta condição). Assim:

▪

p	q	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$
V	V	F	V

▪

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Leftrightarrow \sim p$
V	V	F	F	V

▪

p	q	$p \wedge q$
V	V	V

▪

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$p \vee q \Rightarrow \sim q$
V	V	V	F	F

Resposta: (D)

2. O polinómio $P(x) - x^3 - ax^2 - 2bx - 2$ é divisível por $x+a$ e por $x-b$:

	-1	$-a$	$-2b$	-2
$-a$		a	0	$2ab$
	-1	0	$-2b$	$2ab-2$
b		$-b$	$-b^2$	
	-1	$-b$	$-b^2-2b$	

Temos, portanto:

$$\begin{cases} 2ab-2=0 \\ -b^2-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=2 \\ -b(b+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ -b=0 \vee b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ b=0 \vee b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} ab=1 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=1 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-2 \end{cases}$$

Logo, $a-b=-\dfrac{1}{2}-(-2)=-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}$.

Resposta: (A)

3. $A(1,2)$ é o centro do quadrado e $B(4,6)$ é um dos seus vértices, sendo $[BC]$ um diâmetro desse quadrado. Assim,

$C = B + 2\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{BA} = A - B = (1,2)-(4,6)=(-3,-4)$

$C=(4,6)+2(-3,-4)=(4,6)+(-6,8)=(-2,-2)$

Resposta: (B)

4. Um vetor diretor da reta *AB* é, por exemplo $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,-1,4)-(1,-1,3)=(-1,0,1)$

Como o ponto $B(0,-1,4)$ pertence à reta *AB*, tem-se

que $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=-1 \\ z=4+\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um sistema de equações paramétricas da reta *AB*.

Resposta. (B)

5. $\sum_{i=1}^{4} x_i = 16$ e a amostra tem quatro elementos, pelo que

$\overline{x} = \dfrac{16}{4} = 4$. Logo, a média da amostra é 4.

Assim, tem-se que, $d_i = x_i - \overline{x}$, pelo que:

▪ $d_1 = x_1 - \overline{x} \Leftrightarrow -3 = x_1 - 4 \Leftrightarrow x_1 = 1$

▪ $d_3 = x_3 - \overline{x} \Leftrightarrow -1 = x_3 - 4 \Leftrightarrow x_3 = 3$

▪ $d_4 = x_4 - \overline{x} \Leftrightarrow 3 = x_4 - 4 \Leftrightarrow x_4 = 7$

Logo, $\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = 4$.

Substituindo x_1 por 1, x_3 por 3 e x_4 por 7, vem que:

$\dfrac{1+x_2+3+7}{4} = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4\times 4 - 11 \Leftrightarrow x_2 = 5$

$\underset{\sim}{x} = (1,5,3,7)$

Resposta: (C)

6. ▪ $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_{(1)} = nx_{(1)}$ e que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_{(n)} = nx_{(n)}$.

▪ Se $\overline{x} = x_{(1)}$ ou $\overline{x} = x_{(n)}$ então a amostra é constante (o que não é o caso, já que os elementos da amostra são todos diferentes).

Resposta: (C)

7. Se $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\underset{\sim}{y} = a\underset{\sim}{x}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$SS_y = a^2 SS_x$

Resposta: (C)

8. O percentil, por definição, é um valor que verifica o seguinte: Dada uma amostra *A* de uma certa população e uma variável estatística x, a percentagem de unidades estatísticas de *A* que têm valores inferiores ou iguais a P_k é, pelo menos *k*% e a percentagem de unidades estatísticas que têm valores superiores a P_k é, no máximo, $(100-k)$%.

Resposta: (C)

9. $\sum_{i=2}^{12} 4 = 2a - 4 \Leftrightarrow (12-2+1)\times 4 = 2a-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 44 = 2a - 4 \Leftrightarrow 2a = 48 \Leftrightarrow a = 24$, logo $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Resposta: (A)

10. O domínio da função *f* é $]0,4]$. A função *g* é definida por $g(x)=2x$, com $x \in]0,4]$ pois a área do retângulo [*ABFE*] é igual a $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BF}$, pelo que se tem $y = 2x$.

Assim, o gráfico de *f* é a parte da reta de equação $y=2x$ correspondente e $x \in]0,4]$.

Quando x toma o valor 4, y é igual a 8 (acontece quando o ponto *F* coincide com o ponto *C* e *x* não pode tomar o valor zero pois o ponto *F* nunca coincide com o ponto *B*).

Resposta: (C)

11.1. O ponto médio do segmento [*EH*] tem coordenadas $\left(\dfrac{3}{2}, -5, 3\right)$. A reta *EH* pode ser definida pela condição $y=-5 \wedge z=3$ e não pela condição $y=-3 \wedge z=3$.

A proposição é uma implicação em que o antecedente é verdeiro e o consequente é falso, logo a proposição é falsa.

11.2. Seja p a proposição:

p: O plano ADH pode ser definido pela equação $y-5=0$

Trata-se de uma proposição falsa, já que o plano ADH é definido pela equação $y=-5$, ou seja, $y+5=0$

Seja q a proposição:

q: O segmento de reta $[EF]$ pode ser definido pela condição $y=3 \wedge z=3 \wedge 0 \leq x \leq 3$

Trata-se de uma proposição falsa, pois o segmento de reta $[EF]$ é definido pela condição $x=3 \wedge z=3 \wedge -5 \leq y \leq -2$

Por outo lado, a proposição dada pode ser traduzida por:

p a menos que q

que é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow p$.

q é uma proposição falsa, pelo que $\sim q$ é verdadeira e sendo p falsa, a implicação é uma proposição falsa e, assim, a proposição dada é também falsa.

12. $\sqrt[3]{\sqrt{48-24\sqrt{3}}+\sqrt{16+8\sqrt{3}}}=$

$=\sqrt[3]{\sqrt{36-24\sqrt{3}+12}+\sqrt{4+8\sqrt{3}+12}}=$

$=\sqrt[3]{\sqrt{\left(6-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2+2\sqrt{3}\right)^2}}=$

Como $\sqrt{\left(6-2\sqrt{3}\right)^2}=6-2\sqrt{3}$ e $\sqrt{\left(2+2\sqrt{3}\right)^2}=2+2\sqrt{3}$:

$\sqrt[3]{\sqrt{\left(6-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2+2\sqrt{3}\right)^2}}=\sqrt[3]{6-2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}}=2$

13.1. D é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Oy que tem maior ordenada.

$x=0 \wedge (x-3)^2+(y-2)^2=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \wedge (0-3)^2+(y-2)^2=10 \Leftrightarrow x=0 \wedge 9+(y-2)^2=10$

$\Leftrightarrow x=0 \wedge (y-2)^2=10-9 \Leftrightarrow x=0 \wedge (y-2)^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \wedge (y-2=-1 \vee y-2=1) \Leftrightarrow x=0 \wedge (y=1 \vee y=3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \wedge y=1) \vee (x=0 \wedge y=3)$

A circunferência interseta o eixo Oy nos pontos de coordenadas $(0,1)$ e $(0,3)$. Destes dois pontos o que tem ordenada superior à de A é $(0,3)$. Logo $D(0,3)$.

E é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox que tem maior abcissa.

$y=0 \wedge (x-3)^2+(y-2)^2=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=0 \wedge (x-3)^2+(0-2)^2=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=0 \wedge (x-3)^2+4=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=0 \wedge (x-3)^2=10-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=0 \wedge (x-3)^2=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=0 \wedge \left(x-3=-\sqrt{6} \vee x-3=\sqrt{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=0 \wedge \left(x=-\sqrt{6}+3 \vee x=\sqrt{6}+3\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(y=0 \wedge x=3-\sqrt{6}\right) \vee \left(y=0 \wedge x=3+\sqrt{6}\right)$

A circunferência interseta o eixo Ox nos pontos de coordenadas $\left(3-\sqrt{6},0\right)$ e $\left(3+\sqrt{6},0\right)$. Destes dois pontos o que tem maior abcissa é $\left(3+\sqrt{6},0\right)$, logo $E\left(3+\sqrt{6},0\right)$

13.2. Um vetor diretor da reta DE é, por exemplo, $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE}=E-D=\left(3+\sqrt{6},0\right)-(0,3)=\left(3+\sqrt{6},-3\right)$

O declive da reta DE é igual a $\dfrac{-3}{3+\sqrt{6}}$.

$-\dfrac{3}{3\sqrt{+6}}=-\dfrac{3\left(3-\sqrt{6}\right)}{\left(3+\sqrt{6}\right)\left(3-\sqrt{6}\right)}=-\dfrac{3\left(3-\sqrt{6}\right)}{3^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=-\dfrac{3\left(3-\sqrt{6}\right)}{9-6}=$

$=-\dfrac{3\left(3-\sqrt{6}\right)}{3}=-\left(3-\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}-3$

Por outro lado, tem-se que o ponto $D(0,3)$ pertence à reta DE, logo a ordenada na origem é 3.

Assim, a equação reduzida da reta DE é $y=\left(\sqrt{6}-3\right)x+3$

13.3. Um vetor diretor da reta DG é, por exemplo, $\overrightarrow{DA}$ (repare que $\overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{DG}$ são vetores colineares). Tem-se que D (0 . 3) e A (3 , 2). Assim: $\overrightarrow{DA}=A-D=(3,2)-(0,3)=(3,-1)$

Logo, o declive da reta DG é igual a $-\dfrac{1}{3}$.

Por outro lado, o ponto D (0 , 3) pertence à reta DG, pelo que a ordenada na origem é 3.

Assim, a equação reduzida da reta DG é $y=-\dfrac{1}{3}x+3$.

Logo, uma condição que define a região sombreada é:

$y \leq -\dfrac{1}{3}x+3 \wedge y \geq \left(\sqrt{6}-3\right)x+3 \wedge (x-3)^2+(y-2)^2 \leq 10$

14.1. d é a distância do ponto P à origem do referencial.

O ponto P pertence à reta r de equação $y=-3x+6$ e tem abcissa t, pelo que as suas coordenadas são $P(t,-3t+6)$.

$d(O,P)=\sqrt{(-3t+6-0)^2+(t-0)^2}$

$=\sqrt{9t^2-36t+36+t^2}=\sqrt{10t^2-36t+36}$

Logo, $d=\sqrt{10t^2-36t+36}$.

14.2. $\sqrt{10t^2-36t+36}=26 \Rightarrow \left(\sqrt{10t^2+36t+36}\right)^2=26^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10t^2-36t+36=676 \Leftrightarrow 10t^2-36t+36-676=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10t^2-36t-640=0 \Leftrightarrow 5t^2-18t-320=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{18 \pm \sqrt{(-18)^2+4\times 5\times 320}}{10} \Leftrightarrow t=\dfrac{18 \pm \sqrt{6724}}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{18+82}{10} \vee t=\dfrac{18-82}{10} \Leftrightarrow t=10 \vee t=-\dfrac{32}{5}$

Verificação: Para $t=10$:

$\sqrt{10\times 10^2-36\times 10+36}=26 \Leftrightarrow \sqrt{676}=26$ (Verdadeiro)

Para $t=-\dfrac{32}{5}$: $\sqrt{10\times\left(-\dfrac{32}{5}\right)^2-36\times\left(-\dfrac{32}{5}\right)+36}=26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{676}=26$ (Verdadeiro)

- Para $t=10$, a ordenada do ponto P é dada por $-3\times 10+6=-24$, logo $P(10,-24)$.
- Para $t=-\dfrac{35}{5}$, a ordenada do ponto P é dada por

$-3\times\left(-\dfrac{32}{5}\right)+6=\dfrac{96}{5}+\dfrac{30}{5}=\dfrac{126}{5}$, logo $P\left(-\dfrac{32}{5},\dfrac{126}{5}\right)$.

P tem coordenadas (10 , –24) ou $\left(-\dfrac{32}{5},\dfrac{126}{5}\right)$.