AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha de Trabalho nº 2 - Funções

Matemática 11º Ano

1. Uma espécie rara de insetos gigantes foi descoberta numa floresta da Amazónia. Para proteger esta espécie, cientistas fizeram transportar alguns dos insetos para uma área protegida. A população de insetos, t meses depois de ser deslocada, era dada por $P(t) = \dfrac{50(1+0.5t)}{2+0.01t}$.

a) Quantos insetos foram transportados?
b) Qual é a população, passados 5 anos?
c) Caso a evolução continue a verificar-se segundo o mesmo modelo, o que acontece ao número de insetos passados muitos, muitos anos?

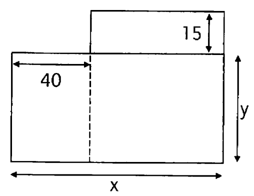
2. A concentração, em miligramas por litro, de um certo medicamento no sangue de um doente, t horas depois de ingerido, é dada por $C(t) = \dfrac{t}{2t^2+1}$. Recorrendo à tua calculadora determina:

a) Quanto tempo após a ingestão é a concentração no sangue mais elevada ? De quantos mg/l é essa concentração ?
b) O que acontece à concentração à medida que o tempo passa ?
c) Sabendo que esse medicamento é tomado de 12 em 12 horas, interpreta graficamente a situação.

3. Estuda, com o auxílio da calculadora gráfica, o comportamento da função real de variável real

$$F(x) = \frac{\mathbf{x}^3 - 10\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} + 50}{\mathbf{x} - 2}$$

4. Devido ao emparcelamento de terrenos na sua região, um agricultor que possuía um campo retangular com 5850 m^2 de área vê o traçado do seu campo alterado, embora sem perda de terreno. A figura mostra, na horizontal, o traçado inicial do terreno e, na vertical o novo traçado.



a) Exprime y em função de x antes de ser efetuado o emparcelamento.
b) Exprime y em função de x após ser efetuado o emparcelamento.

5. Quarenta pessoas estão inscritas para uma viagem cujo preço global é de 2000€. A inscrição de um número suplementar de k pessoas faz com que o preço por pessoa sofra um decréscimo e seja dado pela expressão $P(k) = \dfrac{2000}{40+k}$. Determina o número de inscrições suplementares a admitir para que o preço por pessoa seja inferior a 25€.

6. A intensidade do som que nos chega proveniente de uma fonte sonora é inversamente proporcional ao quadrado da distância que nos separa dela. Suponhamos que a intensidade do som emitido por um cantor é dada por $I(d) = \dfrac{50}{d^2}$ em que d é a distância em decâmetros e I é a intensidade do som em determinada unidade.

a) Representa graficamente a função $I(d) = \dfrac{50}{d^2}$, em IR+.
b) A que distância do cantor devemos colocar um gravador que só grava quando o som lhe chega com intensidade superior a 50 unidades?
c) Uma pessoa que só ouça sons com intensidade superior a 70 unidades, a que distância se deve colocar do cantor?

7. No Citröen Xsara (com cerca de 1,6 ton de peso) a expressão que relaciona a distância de paragem D, em metros, com a velocidade s, em Km/h, a que o automóvel se desloca é $\mathbf{D(s) = 0{,}005s^2 + 0{,}11s}$.

a) Introduz esta função na tua calculadora gráfica, escolhe um retângulo de visualização adequado e observa a sua representação gráfica.

b) Obtém agora uma tabela de valores da função (a variar de 10 em 10).
c) Compara a variação da distância de paragem quando a velocidade passa de 50 para 60 km/h e quando passa de 100 para 110 km/h. Que concluis?
d) Por imprudência de um condutor, dois automóveis circulam, perigosamente, um ao encontro do outro, num túnel de sentido único. O piso está seco. Um deles desloca-se a 35 km/h, o outro a 80 km/h e ambos têm características idênticas ao modelo citado. Os dois condutores descobrem ao mesmo tempo o perigo e travam quando os separa uma distância de 100 metros. Haverá acidente?

8. Lançou-se uma bola, de baixo para cima. Num dado referencial, a altura L (em metros) a que a bola se encontra do solo é função do tempo t (em segundos) decorrido desde o seu lançamento e é dada pela seguinte lei $\mathbf{L(t) = -4t^2 + 20t}$
a) Verifique que o valor da velocidade média a que a bola se desloca no intervalo [1 ; 2,5] é de 6 m/s.
b) Quanto vale o valor da velocidade média no intervalo de tempo [1 ; 2]? E em [1 ; 1,5]? E em [1 ; 1,2] ? E em [1 ; 1,1] ?
c) À velocidade da bola no instante t = 1s chama-se velocidade instantânea. Qual será o seu valor?
d) Sendo h um número real não nulo, determine, em função de h, o espaço percorrido pela bola no intervalo [1 ; 1+h]. Calcula, em função de h, o valor da velocidade média da bola neste intervalo e compare-a com os valores obtidos em b). O que deve acontecer a h para obtermos a resposta a c).
e) Calcule a velocidade instantânea no instante t=2.

9. Um movimento retilíneo de uma partícula desenvolve-se segundo a equação E(t) = 3t + 1 onde E(t) representa (em metros) a distância da partícula ao ponto considerado origem dos espaços e t é o tempo decorrido (em segundos).
a) Qual é a posição inicial da partícula em relação à origem ?
b) Calcula a rapidez média do movimento, no intervalo de tempo [3 ; 7].
c) Determina o valor da velocidade da partícula no instante t=5 s.

10. Um corpo está animado de um movimento retilíneo sendo a distância D percorrida até um dado instante t dada pela lei $\mathbf{D(t) = 0{,}2t^2 + 6t}$, onde D é expresso em metros e t em segundos.
a) Qual será o valor da velocidade no instante t = 9 s ?
b) Se a velocidade do corpo variar ao longo do tempo segundo a relação v(t) = 0,4t+6 qual será a aceleração, ou seja, a taxa de variação da velocidade no instante t = 10 s ?
Note que, assim como a velocidade indica a variação do espaço percorrido num dado instante, a aceleração indica a variação da velocidade num dado instante.
Comente a variação da velocidade neste exemplo.

11. Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $g(x) = \frac{1}{x}$ no ponto de abcissa 2.

12. Uma urbanização tinha, a certa altura, uma população de, aproximadamente, 500 pessoas. Foi estimado um aumento anual de 100 habitantes.
a) Encontra uma expressão para a população P da cidade, t anos após a sua inauguração.
b) Determina $\frac{dP}{dt}$ e explica o que representa.
c) Por várias razões, o aglomerado populacional não cresceu como estava previsto e a evolução da população tem um modelo mais ajustado na expressão $P(t) = 100(5 + t - 0{,}25t^2)$.
c.1) Qual a taxa de variação da população depois de 1, 2 e 3 anos ?
c.2) Qual foi o maior número de habitantes atingido na urbanização? O que aconteceu?

13. Considere-se uma placa de cartão de forma quadrada com 1 m de lado. Corta-se em cada canto um quadrado de lado x, com o fim de fazer uma caixa paralelepipédica sem tampa.
Qual o valor de x que torna o volume da caixa máximo? E qual é, nesse caso, o volume?

14. Há países que usam, para unidade de medida da temperatura, o grau centígrado (ºC), enquanto outros usam o grau Fahrenheit (ºF). A expressão $C = \frac{5(F-32)}{9}$ permite converter ºF em ºC.

a) Um português chega aos E.U.A. e verifica que a temperatura no local em que se encontra é 23 ºF. Qual a temperatura correspondente em ºC.

b) Um turista americano que visite Portugal tem de resolver o problema inverso, isto é, tem de converter em ºF temperaturas obtidas em ºC. 15ºC a quantos ºF correspondem ? E 22 ºC ?

c) Encontra uma fórmula que exprima F em função de C.

15) Uma nódoa circular de tinta é detetada sobre um tecido. O comprimento, em cm, do raio dessa nódoa, t segundos após ter sido detetada é dada por $R(t) = \frac{1+3t}{4+t}$, $t \geq 0$.

a) Calcula o raio da nódoa no instante em que foi detetada.

b) Recorrendo à tua calculadora, indica:

b.1) O instante em que o raio da nódoa atingiu 2 cm de comprimento.

b.2) O maior comprimento, em cm, que o raio da nódoa nunca ultrapassará.

16. Pretende-se esboçar o gráfico de N que dá o "nível de álcool no sangue" em função do peso p de uma pessoa, depois dela ter ingerido 1 litro de cerveja. Sabe-se que:

- Num litro de cerveja existem 40 g de álcool;
- N(p) é a razão entre o peso (em gramas) de álcool existente no litro de cerveja e o volume (em litros) do fluido orgânico da pessoa;
- O volume do fluido orgânico de cada pessoa é numericamente igual a 70% do seu peso total (em kg).

Sabendo que N(p) é expresso em gramas por litro e p é expresso em kg:

a) Determina N(30), N(60) e N(80).

b) Esboça o gráfico de N quando p varia de 20 a 130.

c) Em Portugal a Lei estabelece penas avultadas para quem for apanhado a conduzir com um nível de álcool no sangue superior a 0,5 g/l. Indica, nas condições do enunciado, quem não deve conduzir depois de beber 1 l de cerveja?

17. A densidade populacional (número de habitantes por unidade de área) de muitas cidades depende, da distância ao centro da cidade. Para uma determinada cidade, a densidade populacional, em milhares de pessoas por km^2, à distância de r quilómetros do centro, é dada, aproximadamente, por:

$$P(r) = 5 + 30r - 15r^2$$

a) Qual a densidade populacional no centro da cidade?

b) Para que valores de r deixa definitivamente de ter significado a expressão dada?

c) Encontra $\frac{dP}{dr}$ e calcula a taxa de variação da função para o raio de 0,5 km ; 1 km ; 2 km a partir do centro da cidade.

d) Esboça o gráfico de P e o gráfico de $\frac{dP}{dr}$ e usa-os para descrever, por palavras, como varia a densidade populacional com a distância ao centro.

e) Qual é a densidade populacional máxima? Qual o valor da taxa de variação da densidade populacional para esse raio?

18. Num passeio marítimo pretende-se plantar árvores afastadas de *x* metros. O passeio tem 3 Km de comprimento e terá uma árvore no início e outra no fim.

a) Justifique que a função *f* que relaciona o número de árvores necessário com *x* é $f(x) = \frac{3000}{x} + 1$

b) Escreva as equações das assímptotas do gráfico de f e interprete o seu significado.

c) Resolva a equação fraccionária $\frac{3000}{x} + 1 = 101$.

Explique o significado da equação e da solução no contexto do problema.

19. Considere as funções reais, de variável real, definidas por $\mathbf{f(x)} = \dfrac{2\mathbf{x}+6}{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{g(x)} = \mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 6$.

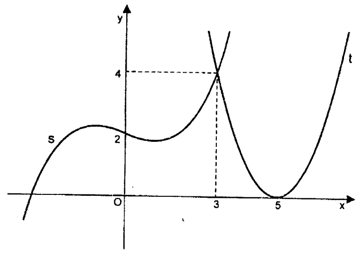
a) Determine as equações das assímptotas de f. b) Caracterize a função $\mathbf{f}^{-1}$.

c) Indique, o mais simplificado possível, a expressão designatória que define a função $\dfrac{f}{g}$.

d) Calcule $f'(x)$ e $g'(x)$.

e) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 1.

20) Na figura estão representadas graficamente as funções *s* e *t*.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira ?

(A) A função *t* não tem zeros. (B) 2 é um zero da função *s*.

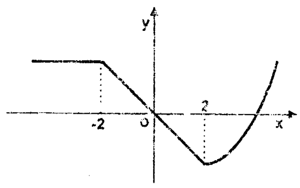
(C) 5 é um zero da função $\dfrac{s}{t}$. (D) 3 é um zero da função *s-t*.

21) Uma equação da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 1 é $y = 3x-2$.

Então o valor de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ é :

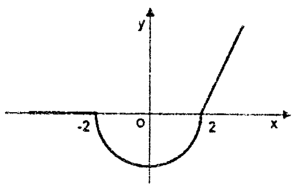
(A) 0 (B) 3 (C) 1 (D) -2

22) Se a representação gráfica de uma função g é

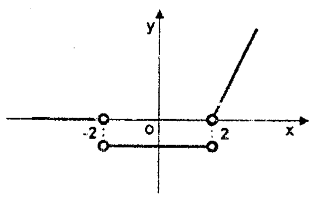


então a representação gráfica de *g*', derivada de *g*, pode ser:

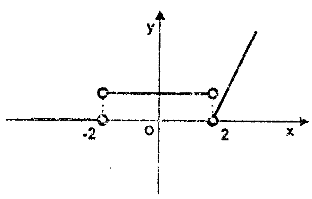
(A)



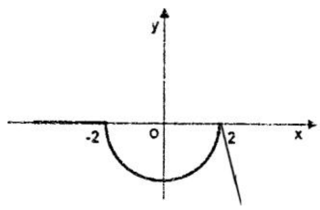
(B)



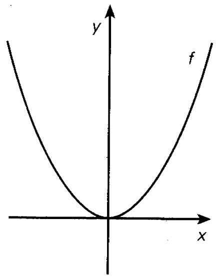
(C)



(D)



23) O gráfico ao lado representa a função *f* ', função derivada da função *f*. Das afirmações:



(I) A função *f* é decrescente em]- ∞, 0]. (II) $f(-10)<f(1)$

(III) $f'(-1)>0$ (IV) O gráfico da função *f* pode ser um parábola.

São verdadeiras:

(A) Todas (B) Nenhuma (C) Apenas I (D) II e III

Soluções: 1.a)25 b)596 c)2500 2.a)0,7h; 0,35mg/l b) $\to 0$ 4.a)y=5850/x b)y=(5850/(x-40))-15 5)>40 6.b)<1dam c)<0,845dam 7.d)Não 8.a)6m/s b)8m/s ; 10m/s; 11,2m/s; 11,6m/s c)12m/s d)$h\to 0$ 9.a)1m b)3m/s c)3m/s 10.a)9,6m/s b)0,4m/s 11)y=-1/4x+1 12.a)P(t)=100t+500 b)100 c1)50; 0; -50 c2)600 13)aprox.0,17; aprox.0,074;14.a)-5ºC b)59ºF; 71,6ºF c)F=(9c+160)/5 15.a)0,25cm b1)7seg b2)3cm 16.a)1,9g/l; 0,95g/l; 0,71g/l c)peso<114Kg 17.a)5 mil pessoas/Km^2 b)r>2155m(aprox.) c)P'(R)=30-30r; 15; 0; -30 e)20mil pessoas/Km^2; 0 18.b)x=0 e y=1 c)30 19.a)x=0 e y=2 b)f^{-1}:IR\{2}$\to$IR\{0} e f^{-1}(x)=6/(x-2) c)2/(x(x+2)) d)f'(x)=-6/x^2 e g'(x)=2x+5 e)y=-6x+14 20) D 21) B 22) B 23) D