Atividade de diagnóstico

Pág. 96

1.1. Sejam os pontos $A(2\ ,\ -2)$, $B(0\ ,\ 1)$ e $C(x\ ,\ 0)$.

$\overline{AB}=\overline{AC} \Leftrightarrow \sqrt{(2-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(0+2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+9=(x-2)^2+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=-3 \vee x-2=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=5$

$C(-1\ ,\ 0)$ ou $C(5\ ,\ 0)$

1.2. Centro:

$M\left(\frac{2+0}{2}\ ,\ \frac{-2+1}{2}\right)$

$M\left(1\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$

Raio: $r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$

2. $A(-3\ ,\ 5)$, $B(-2\ ,\ -3)$ e $C(5\ ,\ -7)$

2.1. $D=A+\overrightarrow{BC}=(-3\ ,\ 5)+(7\ ,\ -4)=(4\ ,\ 1)$

$D(4\ ,\ 1)$

2.2. $\overline{AB}=\sqrt{(-2+3)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5+2)^2+(-7+3)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$

O paralelogramo $[ABCD]$ é um losango.

3.1. $\left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{ED}\right\|=$

$=\left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}\right\|=$

$=\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}\right\|=$

$=\left\|\overrightarrow{AF}\right\|$

$=\sqrt{2^2+2^2}$ cm $=\sqrt{8}$ cm

3.2. $D+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BC}=D+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF}=$

$=G+\overrightarrow{GF}=$

$=F$

4. $\vec{u}(2\ ;\ -2{,}1)$

4.1. $\vec{v}(-k\ ,\ k+1)$; $k\in\mathbb{R}$

$\frac{-k}{2}=\frac{k+1}{-2{,}1} \Leftrightarrow 2{,}1k=2k+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}1k=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=20$

4.2. $\vec{w}(2k\ ;\ -2{,}1k)$; $k\in\mathbb{R}$

$\|\vec{w}\|=\sqrt{(2k)^2+(-2{,}1k)^2}$

$\|\vec{w}\|=8{,}7 \Leftrightarrow \sqrt{4k^2+4{,}41k^2}=8{,}7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8{,}41k^2=8{,}7^2 \Leftrightarrow k^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-3 \vee k=3$

$\vec{w}(-6\ ;\ 6{,}3)$ ou $\vec{w}(6\ ;\ -6{,}3)$

Pág. 97

5. $A(3\ ,\ -4)$ e $B(-1\ ,\ -2)$

5.1. $m_{AB}=\frac{-2+4}{-1-3}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

$AB:\ y+4=-\frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

5.2. $C(1\ ,\ 0)$ e $\vec{s}(-2\ ,\ 1)$

$s:\ (x\ ,\ y)=(1\ ,\ 0)+k(-4\ ,\ 2)$, $k\in\mathbb{R}$

5.3. $\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-3)^2+(0+4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$\overline{AB}=\overline{AC}$

Logo, A pertence à mediatriz de $[BC]$.

6. $A(1\ ,\ -5\ ,\ 4)$; $C(4\ ,\ 0\ ,\ -4)$ e $G(2\ ,\ 6\ ,\ -1)$

6.1. $\overline{CG}=\sqrt{(2-4)^2+(6-0)^2+(-1+4)^2}=$

$=\sqrt{4+36+9}=$

$=\sqrt{49}=7$

$V=7^3=343$

6.2. $E=A+\overrightarrow{AE}$

$=A+\overrightarrow{CG}=$

$=(1\ ,\ -5\ ,\ 4)+(-2\ ,\ 6\ ,\ 3)=$

$=(-1\ ,\ 1\ ,\ 7)$

6.3. Centro: $M\left(\frac{1+4}{2}\ ,\ \frac{-5+0}{2}\ ,\ \frac{4-4}{2}\right)$

$M\left(\frac{5}{2}\ ,\ -\frac{5}{2}\ ,\ 0\right)$

Raio: $r=\overline{MA}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{5}{2}+5\right)^2+(0-4)^2}=$

$=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}+16}=\sqrt{\frac{49}{2}}$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+z^2=\frac{49}{2}$

7. $A(-8\ ,\ 4\ ,\ 2)$ e $B(-5\ ,\ 2\ ,\ 1)$

7.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(3\ ,\ -2\ ,\ -1)$

AB: $(x\ ,\ y\ ,\ z)=(-8\ ,\ 4\ ,\ 2)+k(3\ ,\ -2\ ,\ -1)$, $k\in\mathbb{R}$

7.2. Coordenadas do ponto de interseção: $I(x\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$(x\ ,\ 0\ ,\ 0)=(-8\ ,\ 4\ ,\ 2)+k(3\ ,\ -2\ ,\ -1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-8+3k \\ 0=4-2k \\ 0=2-k \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-2 \\ k=2 \\ k=2 \end{cases}$

$I(-2\ ,\ 0\ ,\ 0)$

Atividade inicial 1

Pág. 98

1. $\tan\alpha = \frac{1}{1} = 1$; $\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\alpha \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ e $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\beta \in \left]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right[$ e $\tan\beta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Pág. 100

1. $A\left(-2\ ,\ \sqrt{3}\right)$, $B\left(0\ ,\ 3\sqrt{3}\right)$, $C(1\ ,\ 0)$ e $D(2\ ,\ -1)$

1.1. a) $m = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $m = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$y - 0 = -\sqrt{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

1.2. a) $m_{AB} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{0+2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ rad ou $\alpha = 60°$

b) $m_{AC} = \frac{0-\sqrt{3}}{1-(-2)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ rad

ou $\alpha = 180° - 30° = 150°$

c) $m_{CD} = \frac{-1}{2-1} = -1$

$\alpha = \pi - \tan^{-1}(1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ rad

ou $\alpha = 180° - 45° = 135°$

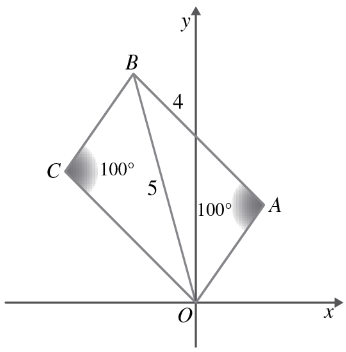
1.3. $m_{BC} = \frac{-3\sqrt{3}}{1} = -3\sqrt{3}$

$\alpha = \pi - \tan^{-1}\left(3\sqrt{3}\right) \approx 1{,}8\,\text{rad}$

2. $O\hat{C}B = 100°$; $A\hat{O}C = 180° - 100° = 80°$

2.1. Inclinação de CB = inclinação de OA = $135° - 80° = 55°$

2.2.



$$\frac{\sin(100°)}{5} = \frac{\sin\left(A\hat{O}B\right)}{4}$$

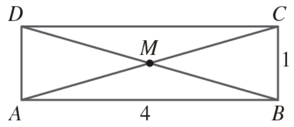
$$\sin\left(A\hat{O}B\right) = \frac{4\sin(100°)}{5} \approx 0{,}7878$$

$A\hat{O}B \approx \sin^{-1}(0{,}7878) \approx 51{,}98°$

Inclinação de OB $\approx 51{,}98° + 55° \approx 107{,}0°$

Pág. 101

3.



3.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AB} = 4 \times 4 = 16$

3.2. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BM} = \overline{CD} \times \frac{1}{2}\overline{CD} = 4 \times 2 = 8$

3.3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = -\overline{AB} \times \frac{1}{2}\overline{AB} = -4 \times 2 = -8$

Pág. 103

4.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \vec{v}}\right) =$

$= 3 \times 4 \times \cos 60° = 12 \times \frac{1}{2} = 6$

4.2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2{,}5 \times 3 \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$

$= 7{,}5 \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$

$= -7{,}5 \times \cos\frac{\pi}{6} = -7{,}5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= -\frac{15\sqrt{3}}{4}$

4.3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 90° =$

$= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \times 0 = 0$

4.4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \cos\pi = -12$

5.1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \times 2 \times \cos(120°) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

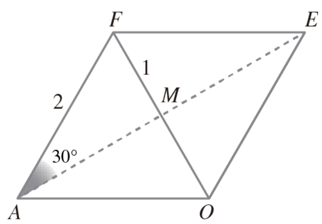
5.2. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OF} = 2 \times 2 \times \cos(120°) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

5.3. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = 2 \times 2 \times \cos(120°) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

5.4. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = 2 \times 4 \times \cos(180°) = 8 \times (-1) = -8$

5.5. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos 0° = 16 \times 1 = 16$

5.6.



$\overline{AM}^2 + 1^2 = 2^2$

$\overline{AM} = \sqrt{3}$

$\overline{AE} = 2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overline{AE} \times \overline{AM} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$

6.1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 2\times\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$

6.2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=2\times\sqrt{3}\times\cos 30^\circ=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

6.3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times 2\times\cos(120^\circ)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

6.4. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{MC}\right\|\times\cos 90^\circ=0$

Pág. 106

7.1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times 4\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=12\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=12\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$

7.2. $\left(\sqrt{3}\,\vec{u}\right)\cdot\left(-\sqrt{12}\,\vec{v}\right)=-\sqrt{3}\times\sqrt{12}\times(\vec{u}\cdot\vec{v})=-\sqrt{36}\times(-6)=36$

7.3. $(3\vec{v}+2\vec{u})\cdot(-2\vec{v})=-6\vec{v}\cdot\vec{v}-4\vec{u}\cdot\vec{v}=$

$=-6\|\vec{v}\|^2-4\times(-6)=-6\times 4^2+24=-72$

7.4. $(-\vec{u})\cdot(2\vec{v}-\vec{u})=-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{u}=$

$=-2\times(-6)+\|\vec{u}\|^2=12+9=21$

8.1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times 9\cos\frac{\pi}{3}=36\times\frac{1}{2}=18$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=$

$=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

$=9^2-18=63$

8.2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times 2\times\cos 120^\circ=$

$=8\times\cos(180^\circ-60^\circ)=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

$=2^2-(-4)=8$

8.3. $C\hat{B}A=A\hat{C}B=15^\circ$

$B\hat{A}C=180^\circ-2\times 15^\circ=150^\circ$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times 4\times\cos 150^\circ=$

$=16\times\cos(180^\circ-30^\circ)=$

$=16\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8\sqrt{3}$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=$

$=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

$=4^2+8\sqrt{3}=16+8\sqrt{3}$

Pág. 107

9. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)=$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=0$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

Logo, as diagonais de um losango são perpendiculares.

10. $V=3\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

$\overline{AB}=\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$

10.1. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AF}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}=$

$=\overline{AB}\times\overline{AB}+0=$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$

10.2. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AH}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}\right)=$

$=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HG}=$

$=\left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2+0=\overline{AD}^2+\overline{AD}^2=3+3=6$

Pág. 108

11. $A(2\,,\,-1)$, $B(5\,,\,-3)$ e $\vec{u}(1\,,\,4)$

11.1. a) $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=(1\,,\,4)\cdot(3\,,\,-2)=1\times 3+4\times(-2)=3-8=-5$

b) $\vec{e_1}(1\,,\,0)$; $\vec{e_2}(0\,,\,1)$; $\vec{u}(1\,,\,4)$; $\overrightarrow{AB}(3\,,\,-2)$

$\left(\vec{u}+\vec{e_1}\right)\cdot\left(\vec{e_2}-\overrightarrow{AB}\right)=(2\,,\,4)\cdot(-3\,,\,3)=-6+12=6$

11.2. $P(x\,,\,x+1)$

$\overrightarrow{OP}(x\,,\,x+1)$

$\overrightarrow{OP}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow(x\,,\,x+1)\cdot(1\,,\,4)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4(x+1)=0\Leftrightarrow 5x=-4\Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}$

Se $x=-\frac{4}{5}$, $x+1=-\frac{4}{5}+1=\frac{1}{5}$.

$P\left(-\frac{4}{5}\,,\,\frac{1}{5}\right)$

Pág. 109

12.1. $\vec{u}(1\,,\,-2)$ e $\vec{v}(2\,,\,3)$

$\cos\left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=\frac{(1\,,\,-2)\cdot(2\,,\,3)}{\sqrt{1+4}\sqrt{4+9}}=\frac{2-6}{\sqrt{5}\sqrt{13}}=\frac{-4}{\sqrt{65}}$

$\left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=\arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right)\approx 119{,}7^\circ$

12.2. $\vec{u}(-1\,,\,1)$ e $\vec{v}(-3\,,\,1)$

$\cos\left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=\frac{(-1\,,\,1)\cdot(-3\,,\,1)}{\sqrt{1+1}\sqrt{9+1}}=\frac{3+1}{\sqrt{2}\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{20}}$

$\left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right)\approx 26{,}6^\circ$

12.3. $\vec{u}(4\,,\,-2)$ e $\vec{v}(2\,,\,1)$

$\cos\left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=\frac{(4\,,\,-2)\cdot(2\,,\,1)}{\sqrt{16+4}\sqrt{4+1}}=\frac{8-2}{\sqrt{20}\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{100}}=\frac{6}{10}=0{,}6$

$\left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=\arccos(0{,}6)\approx 53{,}1^\circ$

13.1. $\vec{u}(1\,,\,0\,,\,1)$ e $\vec{v}(-1\,,\,5\,,\,1)$

$\cos\left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=\frac{(1\,,\,0\,,\,1)\cdot(-1\,,\,5\,,\,1)}{\sqrt{1+0+1}\sqrt{1+25+1}}=\frac{-1+0+1}{\sqrt{2}\sqrt{27}}=0$

$\left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=\frac{\pi}{2}$

13.2. $\vec{u}(2\ ,\ -2\ ,\ 0)$ e $\vec{v}(-2\ ,\ 1\ ,\ -2)$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)=\frac{(2\ ,\ -2\ ,\ 0)\cdot(-2\ ,\ 1\ ,\ -2)}{\sqrt{4+4+0}\sqrt{4+1+4}}=\frac{-4-2+0}{\sqrt{8}\sqrt{9}}=$$

$$=\frac{-6}{3\sqrt{8}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

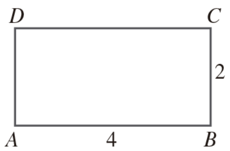
13.3. $\vec{u}\left(\sqrt{3}\ ,\ 1\ ,\ 0\right)$ e $\vec{v}\left(\sqrt{3}\ ,\ 1\ ,\ 2\sqrt{3}\right)$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)=\frac{\left(\sqrt{3}\ ,\ 1\ ,\ 0\right)\cdot\left(\sqrt{3}\ ,\ 1\ ,\ 2\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3+1}\times\sqrt{3+1+12}}=$$

$$=\frac{3+1+0}{\sqrt{4}\sqrt{16}}=\frac{4}{2\times 4}=\frac{1}{2}$$

$$\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)=\frac{\pi}{3}$$

14.



14.1. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)=$

$$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=$$

$$=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overline{AB}\times\overline{AB}=$$

$$=-\overline{AD}\times\overline{AD}+4\times 4=$$

$$=-2\times 2+16=12$$

14.2. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{DB}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DB}\right\|}=$

$$=\frac{12}{\sqrt{4^2+2^2}\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{DB}}\right)=\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\approx 53{,}1°$$

15. $r:\ x-8y-17=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{8}x-\frac{17}{8}$

$s:\ (x\ ,\ y)=(3\ ,\ 8)+k(4\ ,\ 7),\ k\in\mathbb{R}$

$A(1\ ,\ -2)$ e $B(-1\ ,\ 1)$

15.1. $1-8\times(-2)-17=0\Leftrightarrow 1+16-17=0\Leftrightarrow 0=0$

Logo, $A\in r$.

$(-1\ ,\ 1)=(3\ ,\ 8)+k(4\ ,\ 7)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1=3+4k\\1=8+7k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4k=-4\\7k=-7\end{cases}\Leftrightarrow k=-1$$

Logo, $B\in s$.

15.2. a) A reta a é perpendicular à reta r.

$$m_a\times m_r=-1\Leftrightarrow m_a\times\frac{1}{8}=-1\Leftrightarrow m_a=-8$$

A reta a passa em $A(1\ ,\ -2)$.

$$a:\ y+2=-8(x-1)\Leftrightarrow y=-8x+6$$

A reta b é perpendicular à reta s.

$$m_b\times m_s=-1\Leftrightarrow m_b\times\frac{7}{4}=-1\Leftrightarrow m_b=-\frac{4}{7}$$

A reta b passa em $B(-1\ ,\ 1)$.

$$b:\ y-1=-\frac{4}{7}(x+1)\Leftrightarrow y=-\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}$$

b) $\begin{cases}y=-8x+6\\y=-\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-8x+6\\-8x+6=-\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-8x+6\\-56x+42=-4x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-8x+6\\52x=39\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-8x+6\\x=\frac{39}{52}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-8\times\frac{3}{4}+6\\x=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$C\left(\frac{3}{4}\ ,\ 0\right)$$

c) $\overline{AC}=\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+4}=\frac{\sqrt{65}}{4}$

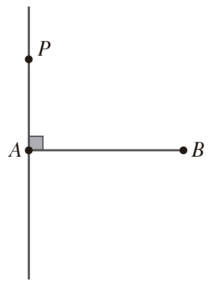
$$\overline{BC}=\sqrt{\left(-1-\frac{3}{4}\right)^2+(1-0)^2}=\sqrt{\frac{49}{16}+1}=\frac{\sqrt{65}}{4}$$

$\overline{AC}=\overline{BC}$, logo B pertence à circunferência de centro C que passa no ponto A.

A reta r passa no ponto A da circunferência e é perpendicular à reta AC que passa no centro da circunferência. Logo, a reta r é tangente à circunferência no ponto A.

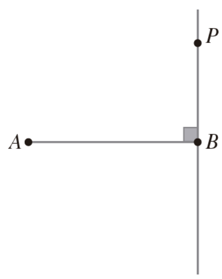
De igual modo, s passa no ponto B da circunferência e é perpendicular a BC. Logo, a reta s é tangente à circunferência no ponto B.

16.1.



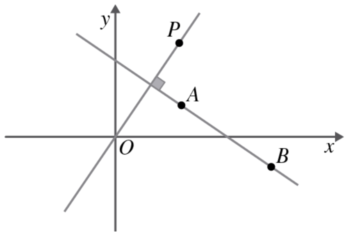
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ define a reta perpendicular à reta AB no ponto A.

16.2.



$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ define a reta perpendicular a AB no ponto B.

16.3.



$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ define a reta perpendicular a AB e que passa pela origem, O.

Pág. 113

17. $A(2\ ,\ -1\ ,\ 2)$, $B(4\ ,\ 1\ ,\ 1)$ e $V(3\ ,\ 3\ ,\ 3)$

17.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (2\ ,\ 2\ ,\ -1)$; $\overrightarrow{BC}(\lambda\ ,\ 1\ ,\ \lambda)$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\ ,\ 2\ ,\ -1) \cdot (\lambda\ ,\ 1\ ,\ \lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\lambda + 2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = -2$

17.2. $\overrightarrow{BC}(-2\ ,\ 1\ ,\ -2)$

$C = B + \overrightarrow{BC} = (4\ ,\ 1\ ,\ 1) + (-2\ ,\ 1\ ,\ -2) = (2\ ,\ 2\ ,\ -1)$

17.3. a) Seja $P(x\ ,\ y\ ,\ z) \in \alpha$.

Ponto médio de $[AB]$:

$$M\left(\frac{2+4}{2}\ ,\ \frac{-1+1}{2}\ ,\ \frac{2+1}{2}\right) = M\left(3\ ,\ 0\ ,\ \frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x-3\ ,\ y\ ,\ z-\frac{3}{2}\right) \cdot (2\ ,\ 2\ ,\ -1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 + 2y - z + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 2z - 12 + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 2z - 9 = 0$$

b) α: $4x + 4y - 2z - 9 = 0$; $V(3\ ,\ 3\ ,\ 3)$

$4 \times 3 + 4 \times 3 - 2 \times 3 - 9 = 0 \Leftrightarrow 12 + 12 - 6 - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = 0$ (Falso)

Logo, $V \notin \alpha$.

Pág. 114

18. $A(-3\ ,\ 2)$ e $B(3\ ,\ 0)$

18.1. Seja $P(x\ ,\ y)$ um ponto da circunferência de diâmetro $[AB]$.

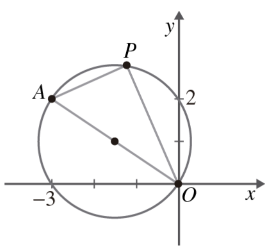
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x+3\ ,\ y-2) \cdot (x-3\ ,\ y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) + (y-2)y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 9 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$

18.2.



$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = 0$ define a circunferência de diâmetro $[AO]$.

Pág. 115

19. $A(2\ ,\ -1\ ,\ 3)$ e $B(-2\ ,\ 3\ ,\ 1)$

19.1. Seja $P(x\ ,\ y\ ,\ z)$ um ponto da superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow$

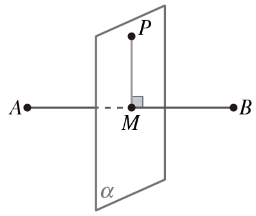
$\Leftrightarrow (x-2\ ,\ y+1\ ,\ z-3) \cdot (x+2\ ,\ y-3\ ,\ z-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + (y+1)(y-3) + (z-3)(z-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 + y^2 - 3y + y - 3 + z^2 - z - 3z + 3 = 0 \Leftrightarrow$

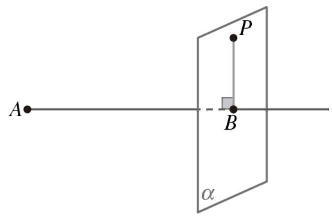
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 4 = 0$

19.2. a)



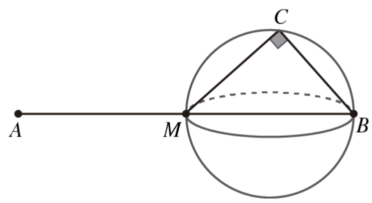
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$ define o plano mediador de $[AB]$.

b)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ define o plano perpendicular à reta AB no ponto B .

c)



$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ define a superfície esférica de diâmetro $[MB]$.

Pág. 116

20. $A(0\ ,\ 7)$, $B(8\ ,\ -9)$ e $C(2\ ,\ -2)$

s: $(x\ ,\ y) = (8\ ,\ -9) + k(7\ ,\ 6),\ k \in \mathbb{R}$

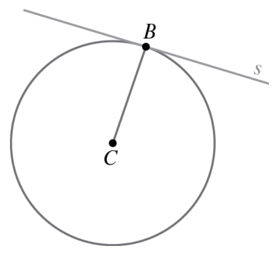
20.1. Seja $P(x\ ,\ y)$ um ponto da reta tangente à circunferência de centro C no ponto A .

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow (x\ ,\ y-7) \cdot (2\ ,\ -9) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 9y + 63 = 0 \Leftrightarrow 9y = 2x + 63 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{2}{9}x + 7$

20.2.



$B(8\ ,\ -9)$ é o ponto que se obtém na equação vetorial de s para $k=0$. Logo, $B\in s$.

$\overrightarrow{BC}(-6\ ,\ 7)$

$\vec{s}(7\ ,\ 6)$ é um vetor diretor de s.

$\overrightarrow{BC}\cdot\vec{s}=(-6\ ,\ 7)\cdot(7\ ,\ 6)=-42+42=0$

Logo, $s\perp BC$.

Portanto, como a reta s é perpendicular a BC no ponto B, s é tangente no ponto B à circunferência de centro C que passa em B.

Pág. 117

21. $A(1\ ,\ -3\ ,\ 1)$ e $B(-1\ ,\ 5\ ,\ 3)$

Seja $P(x\ ,\ y\ ,\ z)$ um ponto de α.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1\ ,\ y+3\ ,\ z-1)\cdot(-2\ ,\ 8\ ,\ 2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-2(x-1)+8(y+3)+2(z-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-2x+2+8y+24+2z-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-2x+8y+2z+24=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-4y-z-12=0$

$\alpha:\ x-4y-z-12=0$

Seja $Q(x\ ,\ y\ ,\ z)$ um ponto de β.

$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+1\ ,\ y-5\ ,\ z-3)\cdot(-2\ ,\ 8\ ,\ 2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-2(x+1)+8(y-5)+2(z-3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-2x-2+8y-40+2z-6=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-2x+8y+2z-48=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-4y-z+24=0$

$\beta:\ x-4y-z+24=0$

Atividades complementares

Pág. 119

22.1. $x-2y+2=0\Leftrightarrow 2y=x+2\ \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+1$

$m=\frac{1}{2}$

$\alpha=\arctan\frac{1}{2}\approx 26,6°$

22.2. $x+2y+2=0\Leftrightarrow 2y=-x-2\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-1$

$m=-\frac{1}{2}$

$\alpha=180°-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\approx 153,4°$

22.3. $9x-y+3=0\Leftrightarrow y=9x+3$

$m=9$

$\alpha=\arctan(9)\approx 83,7°$

22.4. $3x+5y+2=0\Leftrightarrow 5y=-3x-2\ \Leftrightarrow y=-\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}$

$m=-\frac{3}{5}$

$\alpha=180°-\arctan\left(\frac{3}{5}\right)\approx 149,0°$

23.1. $(x\ ,\ y)=(1\ ,\ 2)+k\left(6\ ,\ -\sqrt{12}\right),\ k\in\mathbb{R}$

$m=\frac{-\sqrt{12}}{6}=-\frac{2\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha=\pi-\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\ ;\ \alpha=\frac{5\pi}{6}\text{rad}$

23.2. $(x\ ,\ y)=(1\ ,\ -1)+k(-1\ ,\ 0),\ k\in\mathbb{R}$

$m=\frac{0}{-1}=0$

$\alpha=0\ \text{rad}$

24.1. $A\left(\sqrt{3}\ ,\ 1\right)$ e $\alpha=\frac{5\pi}{6}$

$m=\tan\frac{5\pi}{6}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y-1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

24.2. $A\left(\sqrt{12}\ ,\ -1\right)$ e $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$m=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$y+1=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{12}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}\sqrt{12}-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x-\sqrt{36}-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x-7$

24.3. $A(-3\ ,\ 2)$ e $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

$m=\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$y-2=-1(x+3)\Leftrightarrow y=-x-3+2\Leftrightarrow$

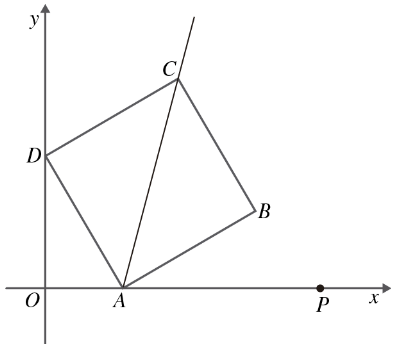
$\Leftrightarrow y=-x-1$

24.4. $A\left(\sqrt{3}\ ,\ -2\right)$ e $\alpha=0$

$m=\tan 0=0$

$y=-2$

25.1.



$P\hat{A}C=\frac{5\pi}{12}\ ;\ B\hat{A}C=\frac{\pi}{4}$

$P\hat{A}B=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi-3\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$

DC e AB são retas paralelas. Logo, a inclinação de DC é igual à inclinação de AB, ou seja, é $\frac{\pi}{6}$ rad.

$$P\hat{A}D = P\hat{A}C + C\hat{A}D = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}$$

A inclinação de BC é igual à inclinação de AD, ou seja, é igual a $\frac{2\pi}{3}$ rad.

25.2. Reta AD

$$m = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$A(1\ ,\ 0)$$

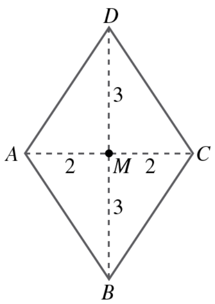
$$y = -\sqrt{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

Reta AB

$$m = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

26.



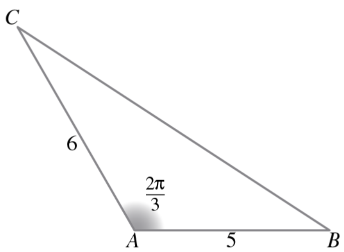
26.1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AC} \times \overline{AM} = 4 \times 2 = 8$

26.2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overline{BD} \times \overline{BM} = 6 \times 3 = 18$

26.3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overline{AC} \times \overline{CM} = -4 \times 2 = -8$

26.4. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overline{DB} \times \overline{DM} = -6 \times 3 = -18$

27.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) =$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 =$$

$$= -5 \times 6 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 5^2 =$$

$$= -5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 40$$

28.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right) =$

$$= 3 \times 4 \times \cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

28.2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{3} =$

$$= \sqrt{12} \times \frac{1}{2} =$$

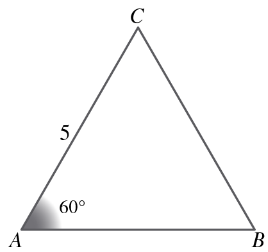
$$= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

28.3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{27} \times \frac{1}{3} \times \cos\frac{5\pi}{6} =$

$$= 3\sqrt{3} \times \frac{1}{3} \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

29.



29.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \times 5 \times \cos 60° = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \times 5 \times \frac{1}{2} = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\overline{AB} = 30 \Leftrightarrow \overline{AB} = 6$$

29.2. $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos 60°$ (Teorema de Carnot)

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$\overline{BC}^2 = 36 + 25 - 30$$

$$\overline{BC}^2 = 31$$

$$\overline{BC} = \sqrt{31}$$

30. $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ e $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$

30.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times \sqrt{3} \times \cos\frac{\pi}{6} = 6 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \times 3 = 9$

30.2. $(-2\vec{v}) \cdot \vec{u} = -2(\vec{v} \cdot \vec{u}) =$

$$= -2(\vec{u} \cdot \vec{v}) =$$

$$= -2 \times 9 = -18$$

30.3. $(3\vec{u}) \cdot (2\vec{v} - 3\vec{u}) =$

$$= 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 9\vec{u} \cdot \vec{u} =$$

$$= 6 \times 9 - 9\|\vec{u}\|^2 =$$

$$= 54 - 9 \times 36 = -270$$

30.4. $\left(2\vec{v} - \sqrt{2}\vec{u}\right) \cdot (-\vec{v}) =$

$$= -2\vec{v} \cdot \vec{v} + \sqrt{2}\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$= -2\|\vec{v}\|^2 + \sqrt{2} \times 9 =$$

$$= -2 \times 3 + 9\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - 6 = -6 + 9\sqrt{2}$$

31.1. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overline{DC} \times \overline{DA} \times \cos\left(C\hat{D}A\right)$

$$= 2 \times 2 \times \cos 60° = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

31.2. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CB}\cdot\left(-\overrightarrow{CD}\right)=$

$=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=$

$=\overline{CB}\times\overline{CD}\times\cos 60°=$

$=2\times 2\times\frac{1}{2}=2$

32. $\|\vec{u}\|=\frac{1}{2}$, $\|\vec{v}\|=3$, $\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)=\frac{2\pi}{3}$

$\|2\vec{u}-3\vec{v}\|^2=\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

$=4\vec{u}\cdot\vec{u}-6\vec{u}\cdot\vec{v}-6\vec{v}\cdot\vec{u}+9\vec{v}\cdot\vec{v}=$

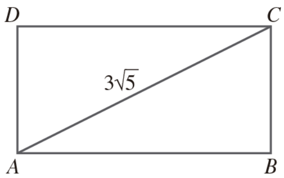
$=4\|\vec{u}\|^2-6\vec{u}\cdot\vec{v}-6\vec{u}\cdot\vec{v}+9\|\vec{v}\|^2=$

$=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\vec{u}\cdot\vec{v}+9\times 3^2=$

$=1-12\times\frac{1}{2}\times 3\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+81=$

$=82-18\times\left(-\frac{1}{2}\right)=82+9=91$

33.



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AB}=\overline{AB}^2$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AD}\times\overline{AD}=\overline{AD}^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{AB}^2=4\overline{AD}^2$

Por outro lado:

$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\overline{AD}^2+\overline{AD}^2=45\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\overline{AD}^2=45\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{AD}^2=9\Leftrightarrow$

$\overset{\overline{AD}>0}{\Leftrightarrow}\overline{AD}=3$

$\overline{AB}^2=4\overline{AD}^2\Leftrightarrow\overline{AB}^2=4\times 9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{AB}^2=36$

$\overset{\overline{AB}>0}{\Leftrightarrow}\overline{AB}=6$

$\overline{AB}=6$ e $\overline{AD}=3$

Pág. 120

34. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-6\Leftrightarrow$

Sabemos que $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$ e $C\hat{B}A=A\hat{C}B=B\hat{A}C=60°$.

$\Leftrightarrow-3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{BA}\times\overline{BC}\times\cos 60°=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{BA}\times\overline{BA}\times\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{AB}^2=4\overset{\overline{AB}>0}{\Leftrightarrow}\overline{AB}=2$

35. $\overline{AB}=a=\overline{AC}$

$\overline{BC}^2=a^2+a^2=2a^2$

35.1. $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{NC}=$ $\qquad\left(\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{BN}\right)$

$=\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{BN}=\left\|\overrightarrow{BN}\right\|^2=$

$=\left(\frac{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}{2}\right)^2=\frac{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}{4}=$

$=\frac{2a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

35.2. $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=$ $\qquad\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AB}$

$=0+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=$ $\qquad\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=\frac{1}{2}a^2=\frac{a^2}{2}$

36. $A(-1\ ,\ 2\ ,\ 0)$, $B(0\ ,\ 1\ ,\ 3)$ e $C(2\ ,\ 1\ ,\ 2)$

36.1. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(1\ ,\ -1\ ,\ 3)\cdot(2\ ,\ 0\ ,\ -1)=$

$=1\times 2-1\times 0+3\times(-1)=-1$

b) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=$

$=(2\ ,\ -2\ ,\ 6)-(2\ ,\ 0\ ,\ -1)=(0\ ,\ -2\ ,\ 7)$

$\overrightarrow{CA}(-3\ ,\ 1\ ,\ -2)$

$\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=$

$=(0\ ,\ -2\ ,\ 7)\cdot(-3\ ,\ 1\ ,\ -2)=$

$=0-2-14=-16$

36.2. $P(0\ ,\ 0\ ,\ z)$

$\overrightarrow{PC}(2\ ,\ 1\ ,\ 2-z)$

$\overrightarrow{AC}(3\ ,\ -1\ ,\ 2)$

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 6-1+2(2-z)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5+4-2z=0\Leftrightarrow 2z=9\Leftrightarrow z=\frac{9}{2}$

$P\left(0\ ,\ 0\ ,\ \frac{9}{2}\right)$

37.1. $\vec{u}(1\ ,\ -1\ ,\ 0)$ e $\vec{v}(-2\ ,\ 2\ ,\ 1)$

$\cos\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{(1\ ,\ -1\ ,\ 0)\cdot(-2\ ,\ 2\ ,\ 1)}{\sqrt{1+1+0}\times\sqrt{4+4+1}}=$

$=\frac{-2-2}{\sqrt{2}\sqrt{9}}=-\frac{4}{3\sqrt{2}}$

$\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)=\arccos\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)\approx 2{,}8\,\text{rad}$

37.2. $\vec{u}(2\ ,\ -3\ ,\ 1)$ e $\vec{v}(-1\ ,\ 0\ ,\ 3)$

$\cos\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)=\frac{(2\ ,\ -3\ ,\ 1)\cdot(-1\ ,\ 0\ ,\ 3)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+0+9}}=$

$=\frac{-2+3}{\sqrt{14}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{140}}$

$\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{140}}\right)\approx 1{,}5\,\text{rad}$

38.1. $\vec{u}(-3\ ,\ k\ ,\ 2)$ e $\vec{v}(2\ ,\ 1\ ,\ -k)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow -6+k-2k=0 \ \Leftrightarrow k=-6$

38.2. $\vec{u}(k+1\ ,\ k\ ,\ 1)$ e $\vec{v}(k-1\ ,\ 1\ ,\ 1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (k+1)(k-1)+k+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-1+k+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k(k+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=0 \vee k=-1$

38.3. $\vec{u}(k+2\ ,\ -k\ ,\ k+2)$ e $\vec{v}(k+2\ ,\ k+2\ ,\ 1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (k+2)^2-k(k+2)+k+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k+2)(k+2-k+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k+2)\times 3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k+2=0 \Leftrightarrow k=-2$

39. $\vec{u}(a\ ,\ b)$, $M(3\ ,\ -1)$ e $A(1\ ,\ -5)$

39.1. $\vec{v}(-b\ ,\ a)$ e $\vec{w}(b\ ,\ -a)$

$\vec{v}\cdot\vec{u}=(-b\ ,\ a)\cdot(a\ ,\ b)=-ba+ab=0$

$\vec{w}\cdot\vec{u}=(b\ ,\ -a)\cdot(a\ ,\ b)=ba-ab=0$

Logo, $\vec{v}\perp\vec{u}$ e $\vec{w}\perp\vec{u}$.

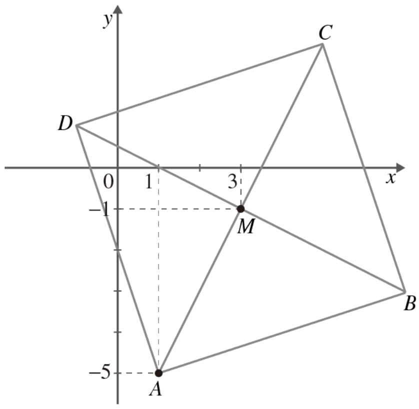
$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{(-b)^2+a^2}=\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\|\vec{w}\|=\sqrt{b^2+(-a)^2}=\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

Logo, $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|$.

39.2.



$\overrightarrow{AM}=M-A=(2\ ,\ 4)$

Vetores perpendiculares a $\overrightarrow{AM}$ com a mesma norma:

$(-4\ ,\ 2\ )$ e $(4\ ,\ -2)$

$C=M+\overrightarrow{AM}=(3\ ,\ -1)+(2\ ,\ 4)=(5\ ,\ 3)$

$B=M+\overrightarrow{MB}=(3\ ,\ 1)+(4\ ,\ -2)=(7\ ,\ -3)$

$D=M+\overrightarrow{MD}=(3\ ,\ -1)+(-4\ ,\ 2)=(-1\ ,\ 1)$

$B(7\ ,\ -3)$, $C(5\ ,\ 3)$ e $D(-1\ ,\ 1)$

40.1. $D\hat{C}O=90°-O\hat{D}C=90°-30°=60°$

Inclinação da reta s : $\alpha=180°-60°=120°$

$m_s=\tan 120°=\tan(180°-60°)$

$m_s=-\sqrt{3}$

Declive da reta r :

$m_r\times m_s=-1 \Leftrightarrow m_r\times(-\sqrt{3})=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m_r=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m_r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

A reta r passa em A (–12 , 0), logo:

$r:\ y-0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+12) \Leftrightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+4\sqrt{3}$

40.2. $B(3\ ,\ y)$

$B\in r$. Logo, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times 3+4\sqrt{3} \Leftrightarrow y=5\sqrt{3}$.

$B(3\ ,\ 5\sqrt{3})$

$s:\ y-5\sqrt{3}=-\sqrt{3}(x-3) \Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+5\sqrt{3} \Leftrightarrow$

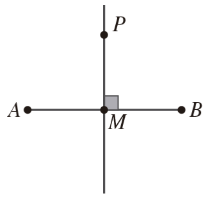
$\Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x+8\sqrt{3}$

Coordenadas de $C(x\ ,\ 0)$

$-\sqrt{3}x+8\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x=-8\sqrt{3} \Leftrightarrow x=8$

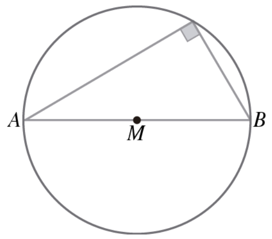
$C(8\ ,\ 0)$

41.1. $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$



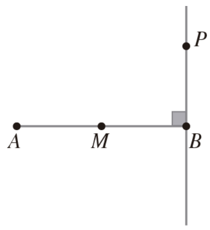
Mediatriz do segmento de reta [AB]

41.2. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$



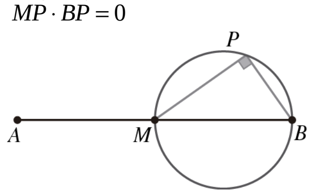
Circunferência de diâmetro [AB]

41.3. $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BP}=0$



Reta perpendicular à reta AB no ponto B

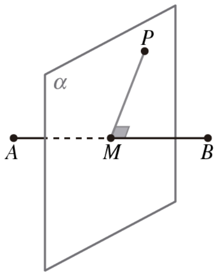
41.4. $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$



Circunferência de diâmetro [MB]

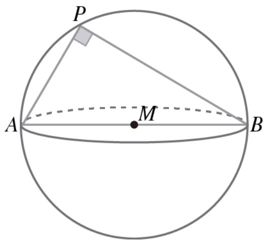
Pág. 121

42.1. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$



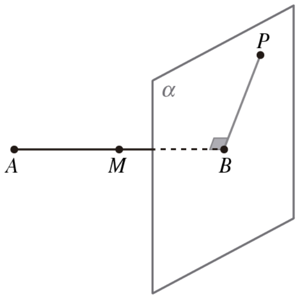
Plano mediador de $[AB]$

42.2. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$



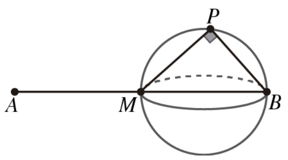
Superfície esférica de diâmetro $[AB]$

42.3. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$



Plano perpendicular a $[AB]$ em B

42.4. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$



Superfície esférica de diâmetro $[MB]$

43. Área do setor $BOD : \dfrac{\pi}{2}$ cm^2

Seja $B\hat{O}D = \theta$. Então

$$\frac{\theta r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \quad r = 2$$

$$\frac{\theta \times 4}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$D\hat{O}A = \pi - B\hat{O}D = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overline{OA} \times \overline{OD} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \ \overrightarrow{OD}}\right) =$$

$$= 2 \times 2 \times \cos\frac{3\pi}{4} = 4\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 4 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

44. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AC} \times \overline{AC} = \overline{AC}^2$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 6{,}1^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 6{,}1^2 - 6^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 1{,}21 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\overline{BC} > 0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = 1{,}1$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{6 \times 1{,}1}{2} = 3{,}3$$

$$A_{[ABC]} = 3{,}3 \ \text{cm}^2$$

45. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} =$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right) =$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} = \quad \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OB}$$

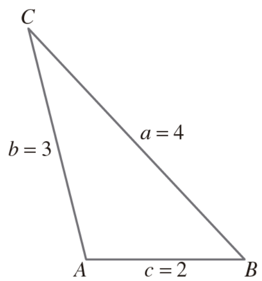
$$= 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} =$$

$$= 2\left\|\overrightarrow{AO}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \ \overrightarrow{OP}}\right) =$$

$$= 2r^2 + 2 \times r \times r \times \cos\alpha =$$

$$= 2r^2\left(1 + \cos\alpha\right)$$

46.1.



Pelo Teorema de Carnot:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 4 - 16}{2 \times 3 \times 2} =$$

$$= \frac{-3}{4 \times 3} = -\frac{1}{4}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A =$$

$$= 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

46.2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{CA} =$

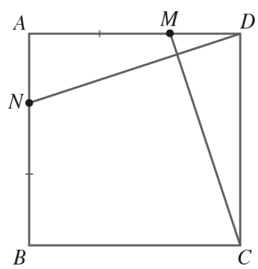
$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} =$$

$$= \left(-\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 =$$

$$= -\frac{3}{2} - 3^2 = -\frac{3}{2} - 9 = -\frac{21}{2}$$

47.



$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{DN}=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}\right)=$$
$$=\left(\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=$$
$$=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+\frac{1}{9}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}=$$
$$=0-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{DA}\right\|^2+\frac{1}{9}\times 0= \qquad \left(\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=0 \qquad \left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\right)$$

Logo, $CM\perp DN$.

48.1. a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=$
$$=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=$$
$$=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow 2\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=$$
$$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

c) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}+(-\vec{v})\|^2=$
$$=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot(-\vec{v})+\|-\vec{v}\|^2=$$
$$=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

d) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=$
$$=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$$

e) $(\vec{u}+\vec{v})\perp(\vec{v}-\vec{v})\Leftrightarrow(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=0\Leftrightarrow\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\| \text{ dado que } \|\vec{u}\|\geq 0 \text{ e } \|\vec{v}\|\geq 0$$

48.2. $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\|=1$ e $\vec{u}\perp\vec{v}$

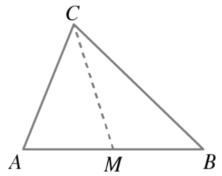
$$\cos\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}-\vec{v}}\right)=\frac{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}{\|u+\vec{v}\|\|\vec{u}-\vec{v}\|}=$$
$$=\frac{\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2}{\sqrt{\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2}\times\sqrt{\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+0+1^2}\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-0+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{4}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}-\vec{v}}\right)=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=60°$$

48.3. $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{u}+\vec{v}\|$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{u}+\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{u}+\vec{v}\|}= \qquad \left(\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\right)$$
$$=\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{u}\|}=\frac{\|u\|^2+\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)}{\|\vec{u}\|^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\|u\|^2+\|\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{u}\|^2}= \qquad \left(\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{u}+\vec{v}\|\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\|\vec{u}\|^2}{\|u\|^2}=\frac{1}{2}$$

Logo, $\left(\widehat{\vec{u},\ \vec{u}+\vec{v}}\right)=60°$.

49.



49.1. $\overline{AC}^2=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right\|^2=$
$$=\left\|AM\right\|^2+2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}+\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 \quad (1)$$

$\overline{BC}^2=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\right\|^2= \qquad \left(\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{AM}\right)$
$$=\left\|-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MC}^2-\overrightarrow{AM}\right\|^2=$$
$$=\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2-2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AM}+\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2=$$
$$=\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2-2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}+\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 \quad (2)$$

Logo, de (1) e (2) :
$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2+2\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2=$$
$$=2\overline{MC}^2+2\overline{AM}^2=$$
$$=2\overline{MC}^2+2\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2= \qquad \left(\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}\right)$$
$$=2\overline{MC}^2+2\frac{\overline{AB}^2}{4}=2\overline{MC}^2+\frac{\overline{AB}^2}{2}$$

49.2. $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{MC}^2+\frac{1}{2}\overline{AB}^2$

$$3^2+4^2=2\overline{MC}^2+\frac{1}{2}\times 2^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25=2\overline{MC}^2+2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\overline{MC}^2=\frac{23}{2}\overset{\overline{MC}>0}{\Leftrightarrow}\overline{MC}=\sqrt{\frac{23}{2}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\overline{MC}=\frac{\sqrt{23}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\Leftrightarrow\overline{MC}=\frac{\sqrt{46}}{2}$$

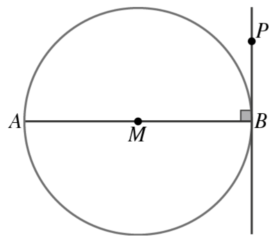
Avaliação 1

Pág. 122

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=2^2=4$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}=2\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2=2\times 1^2=2$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}=-\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2=-1$$

Resposta: **(C)**

2.



O lugar geométrico dos pontos $P(x\ ,\ y)$ tais que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ é a reta tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ no ponto B .

Resposta: **(A)**

3. $A(4\ ,\ 2)$ e $B(8\ ,\ -1)$

$$m_{AB}=\frac{-1-2}{8-4}=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$$

$$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

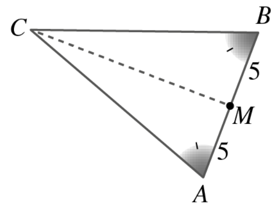
$$1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{25}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$$

Como $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right[$, $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

Resposta: **(D)**

4.

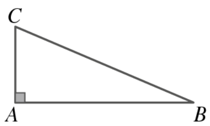


$\overline{AB}=10$, $\overline{AC}=\overline{BC}$ e $B\hat{A}C=C\hat{B}A$

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AM}=10\times5=50$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overline{BA}\times\overline{BM}=-10\times5=-50$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-(-50)=50>0$
- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overline{BA}\times\overline{BM}=10\times5=50$

Resposta: **(C)**

5. $A(1\ ,\ 0\ ,\ 1)$, $B(2\ ,\ k-1\ ,\ -2k)$ e $C(k+1\ ,\ 1\ ,\ 4)$



$\overrightarrow{AC}(k\ ,\ 1\ ,\ 3)$; $\overrightarrow{AB}(1\ ,\ k-1\ ,\ -2k-1)$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow k+(k-1)+3(-2k-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4k=4\Leftrightarrow k=-1$$

Resposta: **(D)**

6. $\overline{AM}^2+\overline{DM}^2+\overline{AD}^2\Leftrightarrow\overline{AM}^2+8^2=10^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\overline{AM}^2=36\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AM}=6\qquad(\overline{AM}>0)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overline{AB}\times\overline{AM}=10\times6=60$$

Resposta: **(A)**

Pág. 123

7.1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{OB}\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)=$

$$=2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=$$

$$=2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overline{OB}\times\overline{OP}\times\cos\frac{\pi}{3}=$$

$$=2\left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2+2\times2\times2\times\frac{1}{2}=$$

$$=2\times2^2+4=12$$

7.2. $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}\cdot\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\right)=$

$$=\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA}=$$

$$=\left\|\overrightarrow{PO}\right\|^2-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=$$

$$=2^2-\overline{OP}\times\overline{OA}\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OA}}\right)=$$

$$=4-2\times2\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4-2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=6$$

8. Se $\overline{RC}=\overline{CS}$, então $\overline{BR}=\overline{DS}$ pelo que os triângulos [ABR] e [ASD] são iguais.

Área de [ABR] $=\frac{36-20}{2}$ cm^2 = 8 cm^2

$$\frac{6\times\overline{BR}}{2}=8\Leftrightarrow\overline{BR}=\frac{8}{3}$$

$$\overline{BR}=\overline{DS}=\frac{8}{3}$$

$$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AS}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BR}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DS}\right)=$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{BR}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BR}\cdot\overrightarrow{DS}=$$

$$=0+\overline{AB}\times\overline{DS}+\overline{BR}+\overline{AD}+0=$$

$$=6\times\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\times6=16+16=32$$

9. $A(4\ ,\ 0)$

$$r:\ x+3y=3\Leftrightarrow 3y=-x+3\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+1$$

9.1. $m_r=-\frac{1}{3}$

$$\alpha=\pi-\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\approx 2{,}8\text{ rad}$$

9.2. $m_s\times m_r=-1\Leftrightarrow m_s\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1\Leftrightarrow m_s=3$

$$s:\ y-0=3(x-4)\Leftrightarrow y=3x-12$$

9.3. $C(x\ ,\ y)$; $\overrightarrow{OC}(x\ ,\ y)$; $\overrightarrow{OA}(4\ ,\ 0)$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=4x$$

Logo, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ não depende de y , ou seja, da ordenada do ponto C.

10.1. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AG}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}\right)=$

$$=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{BA}\right)=$$

$$=\left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2=$$

$$=\left(a^2+a^2\right)-a^2=\qquad\text{(Teorema de Pitágoras)}$$

$$=a^2$$

10.2. $\left\|\overrightarrow{AG}\right\|=\left\|\overrightarrow{BH}\right\|=\sqrt{3}a$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AG}}{\left\|\overrightarrow{BH}\right\|\left\|\overrightarrow{AG}\right\|}=\frac{a^2}{\sqrt{3}a\sqrt{3}a}=\frac{a^2}{3a^2}=\frac{1}{3}$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\approx 70{,}5°$$

11. $r:\ x-7y+20=0$

$A(1\ ,\ y)\in r$

11.1. $\alpha_s=135°$

$m_s=\tan(135°)=\tan(180°-45°)=-\tan 45°=-1$

$B(-1\ ,\ -3)\in s$

$y+3=-1(x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-x-1-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-x-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y+4=0$

$1-7y+20=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7y=21\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=3$

$A(1\ ,\ 3)$

11.2. $A(1\ ,\ y)\in r$

11.3. Seja p a reta perpendicular a r no ponto A .

$x-7y+20=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{7}x+\frac{20}{7}$

$m_r=\frac{1}{7}$

$m_p\times m_r=-1\Leftrightarrow m_p\times\frac{1}{7}=-1\Leftrightarrow m_p=-7$

$A(1\ ,\ 3)\in p$

$p:\ y-3=-7(x-1)\Leftrightarrow y=-7x+10$

Seja q a reta perpendicular à reta s no ponto B .

$m_q\times m_s=-1\Leftrightarrow m_q\times(-1)=-1\Leftrightarrow m_q=1$

$B(-1\ ,\ -3)\in q$

$q:\ y+3=1(x+1)\Leftrightarrow y=x-2$

C é o ponto de interseção das retas p e q .

$$\begin{cases}y=-7x+10\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=-7x+10\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8x=12\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=\frac{3}{2}-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$C\left(\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$

Atividade inicial 2

Pág. 124

1. $\vec{u}(2\ ,\ -1\ ,\ 0)$, $\vec{v}(1\ ,\ 2\ ,\ -1)$, $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(2\ ,\ -1\ ,\ 0)=0 \Leftrightarrow 2a-b=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=2a$

Substituindo b por $2a$ em $\vec{n}$, $\vec{n}(a\ ,\ 2a\ ,\ c)$ que é uma expressão geral dos vetores perpendiculares ao vetor $\vec{u}$.

2. Por exemplo, $\vec{n}_1(1\ ,\ 2\ ,\ 0)$, $\vec{n}_2(1\ ,\ 2\ ,\ 1)$ e $\vec{n}_3(1\ ,\ 2\ ,\ -1)$

3. $\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \wedge n\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(1\ ,\ 2\ ,\ -1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ a+2b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ a+2\times 2a-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ c=5a \end{cases}$

Substituindo em $n(a\ ,\ b\ ,\ c)$, b por $2a$ e c por $5a$, obtemos $\vec{n}(a\ ,\ 2a\ ,\ 5a)$, expressão geral dos vetores perpendiculares a u e a v .

4. Por exemplo, para $a=1$, $\vec{n}(1\ ,\ 2\ ,\ 5)$

Pág. 127

1.1. $A(1\ ,\ 0\ ,\ -1)$ e $\vec{n}(-2\ ,\ 3\ ,\ 1)$

$\alpha:\ -2(x-1)+3(y-0)+1(z+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+2+3y+z+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+3y+z+3=0$

1.2. $A(-2\ ,\ 1\ ,\ 3)$ e $\vec{n}(0\ ,\ -1\ ,\ 2)$

$\alpha:\ 0(x+2)-1(y-1)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -y+1-2z+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -y+2z-5=0$

1.3. $A(-2\ ,\ 1\ ,\ 0)$ e $\vec{n}(3\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$\alpha:\ 3(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2$

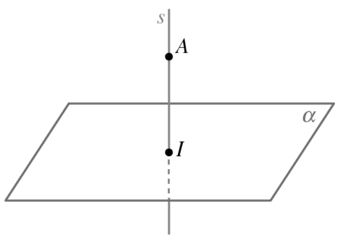
Pág. 128

2. $\alpha:\ 4x-8y+z+3=0$; $A(-2\ ,\ 9\ ,\ -4\ )$

2.1. $\vec{n}(4\ ,\ -8\ ,\ 1)$ é um vetor normal do plano α . Logo, $\vec{n}$ é um vetor diretor de qualquer reta perpendicular a α , em particular da reta s que passa em A .

$s:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(-2\ ,\ 9\ ,\ -4)+k(4\ ,\ -8\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

2.2.



Trata-se de determinar $\overline{AI}$ sendo I o ponto de interseção da reta s com o plano α .

$s:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(-2\ ,\ 9\ ,\ -4)+k(4\ ,\ -8\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

Equações paramétricas de s:

$\begin{cases} x=-2+4k \\ y=9-8k \\ z=-4+k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

Qualquer ponto da reta s é da forma:

$(-2+4k\ ,\ 9-8k\ ,\ -4+k),\ k\in\mathbb{R}$

O ponto I é o ponto de s que pertence a:

$\alpha:\ 4x-8y+z+3=0$

$4(-2+4k)-8(9-8k)+(-4+k)+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8+16k-72+64k-4+k+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 81k=81 \Leftrightarrow k=1$

$I(-2+4\ ,\ 9-8\ ,\ -4+1)=\ I(2\ ,\ 1\ ,\ -3)$

$r=\overline{AI}=\sqrt{(-2-2)^2+(9-1)^2+(-4+3)^2}=$ $\quad A(-2,\ 9,\ -4)$

$=\sqrt{16+64+1}=$ $\quad I(2,\ 1,\ -3)$

$=\sqrt{81}=9$

2.3. **a)** $r:\ (x,\ y,\ z)=(n,\ -1,\ m)+k(3m,\ m,\ m-5),\ k\in\mathbb{R}$

Vetor diretor de r: $\vec{r}(3m,\ m,\ m-5)$

Vetor normal ao plano α: $\vec{n}(4,\ -8,\ 1)$

$r//\alpha \Leftrightarrow \vec{r}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\times 3m-8m+m-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12m-7m=5 \Leftrightarrow 5m=5 \Leftrightarrow m=1$

b) r está contida em α se e só se $r//\alpha$ e o ponto $(n\ ,\ -1\ ,\ m)\in\alpha$

$r//\alpha \wedge (n\ ,\ -1\ ,\ m)\in\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=1\wedge(n\ ,\ -1\ ,\ 1)\in\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=1\wedge 4n-8\times(-1)+1+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=1\wedge 4n=-12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=1\wedge n=-3$

Pág. 129

3. $ABC:\ x+2y+2z-6=0$ e $V(3\ ,\ 6\ ,\ 9)$

3.1. $(x\ ,\ y\ ,\ z)=(3\ ,\ 6\ ,\ 9)+k(1\ ,\ 2\ ,\ 2),\ k\in\mathbb{R}$

3.2. E é a interseção de r com ABC .

Qualquer ponto de r é da forma:

$(3+k\ ,\ 6+2k\ ,\ 9+2k)$

O valor de k para o qual este ponto pertence ao plano ABC é dado por:

$3+k+2(6+2k)+2(9+2k)-6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k+3+12+18-6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k=-27 \Leftrightarrow k=-3$

Assim:

$E(3-3\ ,\ 6-2\times 3\ ,\ 9-2\times 3)$ ou $E(0\ ,\ 0\ ,\ 3)$

3.3. $B(0\ ,\ y\ ,\ 0)$ e $B\in ABC$

$0+2y+0-6=0 \Leftrightarrow 2y=6 \Leftrightarrow y=3$

$B(0\ ,\ 3\ ,\ 0)$

3.4. $\overrightarrow{BV}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BV}=$

$=\overline{BD}\times\overline{BE}=$ (E é a projeção ortogonal de V na reta BD)

$=2\overline{BE}\times\overline{BE}=2\overline{BE}^2=$

$=2\left(\sqrt{0^2+3^2+3^2}\right)^2=2\times 18=36$

Pág. 130

4. $\alpha: \ 3x+y-2z+1=0$

$A(1\ ,\ 1\ ,\ -1)$ e $B(1\ ,\ 0\ ,\ -2)$

4.1. $3(x-1)+(y-1)-2(z+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+y-2z-6=0$

4.2. $\beta_k: \ k^2x+ky+z+1=0$

a) $A(1\ ,\ 1\ ,\ -1)\in \beta_k$

$k^2\times 1+k\times 1+(-1)+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2+k=0 \Leftrightarrow k(k+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=0 \vee k=-1$

b) $B(1\ ,\ 0\ ,\ -2)\in \beta_k$

$k^2\times 1+k\times 0-2+1=0 \Leftrightarrow k^2-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-1 \vee k=1$

c) Se β_k passa em A e B então $k=-1$ e

$\beta_{-1}: \ x-y+z+1$

$n_\beta(1\ ,\ -1\ ,\ 1)$ é um vetor normal a β

$n_\alpha(3\ ,\ 1\ ,\ -2)$ é um vetor normal a α

$n_\beta \cdot n_\alpha=(1\ ,\ -1\ ,\ 1)\cdot(3\ ,\ 1\ ,\ -2)=$

$=3-1-2=0$

Como $n_\beta \cdot n_\alpha=0$, então β_{-1} é perpendicular ao plano α.

Pág. 131

5. $ABC: \ 3x-6y+2z+12=0$; $E(6\ ,\ -8\ ,\ 10)$

5.1. O plano EFG passa em E e é paralelo ao plano ABC.

$3(x-6)-6(y+8)+2(z-10)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-6y+2z-18-48-20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-6y+2z-86=0$

5.2. $M(1-k\ ,\ k\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{EM}=(1-k-6\ ,\ k+8\ ,\ -9)=(-k-5\ ,\ k+8\ ,\ -9)$

$\overrightarrow{EM}$ é um vetor da reta EM.

$\vec{n}(3\ ,\ -6\ ,\ 2)$ é um vetor normal ao plano ABC.

A reta EM é paralela ao plano ABC $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-k-5\ ,\ k+8\ ,\ -9)\cdot(3\ ,\ -6\ ,\ 2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3k-15-6k-48-18=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k=-81 \Leftrightarrow k=-9$

5.3. $\vec{n}(3\ ,\ -6\ ,\ 2)$ é normal ao plano ABC. Logo é um vetor diretos da reta FB.

Assim, $\vec{u}\left(m+\frac{1}{2}\ ,\ 2m-2\ ,\ 2m\right)$ é um vetor diretor da reta FB se e só se $\vec{u}$ e $\vec{n}$ forem colineares:

$$\frac{m+\frac{1}{2}}{3}=\frac{2m-2}{-6}=\frac{2m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m-3=6m-6 \\ m-1=-3m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12m=3 \\ 4m=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$$

5.4. $(x\ ,\ y\ ,\ z)=(6\ ,\ -8\ ,\ 10)+k(3\ ,\ -6\ ,\ 2),\ k\in\mathbb{R}$

5.5. O ponto A é a interseção da reta EA com o plano ABC.

Qualquer ponto de EA é da forma:

$I(6+3k\ ,\ -8-6k\ ,\ 10+2k)$

I pertence a ABC: $3x-6y+2z+12=0$.

$3(6+3k)-6(-8-6k)+2(10+2k)+12=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k+36k+4k+18+48+20+12=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49k=-98 \Leftrightarrow k=-2$

Para $k=-2$ obtemos as coordenadas de A:

$A(6-6\ ,\ -8+12\ ,\ 10-4)$ ou $A(0\ ,\ 4\ ,\ 6)$

Pág. 133

6. $\alpha: \ (x,\ y,\ z)=$

$=(1,\ -1,\ 0)+\lambda(1,\ 0,\ 1)+\mu(-2,\ 1,\ -1);\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$

$A(3\ ,\ -3\ ,\ 0)$ e $B(2\ ,\ -2\ ,\ 1)$

6.1. $(3,\ -3,\ 0)=(1,\ -1,\ 0)+\lambda(1,\ 0,\ 1)+\mu(-2,\ 1,\ -1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3=1+\lambda-2\mu \\ -3=-1+\mu \\ 0=\lambda-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \mu=-2 \\ \lambda=\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=1-2+4 \ \ (V) \\ \mu=-2 \\ \lambda=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-2 \\ \lambda=-2 \end{cases}$$

O sistema é possível. Logo, $A\in\alpha$.

$B\notin\alpha$?

$(2,\ -2,\ 1)=(1,\ -1,\ 0)+\lambda(1,\ 0,\ 1)+\mu(-2,\ 1,\ -1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2=1+\lambda-2\mu \\ -2=-1+\mu \\ 1=\lambda-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \mu=-1 \\ 1=\lambda-(-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2=1+0+2 \ \ (F) \\ \mu=-1 \\ \lambda=0 \end{cases}$$

O sistema é impossível.

Logo, $B\notin\alpha$.

6.2. $\vec{e}_1(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ e $\vec{e}_2(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ são vetores diretores do plano xOy e, portanto, de qualquer plano paralelo a xOy.

$(x,\ y,\ z)=(2,\ -2,\ 1)+\lambda(1,\ 0,\ 0)+\mu(0,\ 1,\ 0),\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$

7. $A(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$, $B(0\ ,\ 2\ ,\ -1)$ e $C(1\ ,\ 2\ ,\ 1)$

$\vec{v}(1\ ,\ 0\ ,\ -1)$

7.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-1\ ,\ 2\ ,\ -1)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(0\ ,\ 2\ ,\ 1)$

$\alpha: \ (x,\ y,\ z)=$

$=(1,\ 0,\ 0)+\lambda(-1,\ 2,\ -1)+\mu(0,\ 2,\ 1);\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$

7.2. $\beta: \ (x,\ y,\ z)=$

$=(1,\ 0,\ 0)+\lambda(-1,\ 2,\ -1)+\mu(1,\ 0,\ -1);\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$

7.3. $C(1\ ,\ 2\ ,\ 1)\in\beta$?

$(1,\ 2,\ 1)=$

$=(1,\ 0,\ 0)+\lambda(-1,\ 2,\ -1)+\mu(1,\ 0,\ -1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=1-\lambda+\mu \\ 2=2\lambda \\ 1=-\lambda-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1-1-2 \ \ (F) \\ \lambda=1 \\ \mu=-2 \end{cases}$$

O sistema é impossível.

Logo, $C\notin\beta$.

Pág. 134

8. $(x,\ y,\ z) =$

$= (1,\ 3,\ -1) + \lambda(2,\ 1,\ 0) + \mu(1,\ -1,\ 1);\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a α . Então:

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot(2,\ 1,\ 0)=0 \\ \vec{n}\cdot(1,\ -1,\ 1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,\ b,\ c)\cdot(2,\ 1,\ 0)=0 \\ (a,\ b,\ c)\cdot(1,\ -1,\ 1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ a+2a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ c=-3a \end{cases}$$

$\vec{n}(a\ ,\ -2a\ ,\ -3a)$ define a família de vetores normais a α .

Para $a=1$, $\vec{n}(1\ ,\ -2\ ,\ -3)$.

$(1\ ,\ 3\ ,\ -1) \in \alpha$

$\alpha:\ 1(x-1)-2(y-3)-3(z+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2y-3z-1+6-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2y-3z+2=0$

9. $A(1\ ,\ 0\ ,\ 1)$; $\overrightarrow{AB}(2\ ,\ -2\ ,\ 1)$; $\overrightarrow{AC}(3\ ,\ 0\ ,\ 3)$

9.1. **a)** $(x,\ y,\ z) =$

$= (1,\ 0,\ 1) + \lambda(2,\ -2,\ 1) + \mu(3,\ 0,\ 3);\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

b) Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal ao plano ABC .

$$\begin{cases} (a,\ b,\ c)\cdot(2,\ -2,\ 1)=0 \\ (a,\ b,\ c)\cdot(3,\ 0,\ 3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c=0 \\ 3a+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b-a=0 \\ c=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2}a \\ c=-a \end{cases}$$

$\vec{n}\left(a\ ,\ \frac{1}{2}a\ ,\ -a\right)$ define a família de vetores normais ao plano ABC .

Para $a=2$, $\vec{n}(2\ ,\ 1\ ,\ -2)$.

$2(x-1)+1(y-0)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z=0$

9.2. $E = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$

$= (1\ ,\ 0\ ,\ 1) + \frac{1}{2}(3\ ,\ 0\ ,\ 3) =$

$= (1\ ,\ 0\ ,\ 1) + \left(\frac{3}{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{3}{2}\right) =$

$= \left(\frac{5}{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

9.3. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$V_{\text{pirâmide}} = 9$

$\frac{1}{3}\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\times h = 9$

$\frac{1}{3}\times 3^2\times h = 9 \Leftrightarrow h=3$

$V(x\ ,\ y\ ,\ z),\ y<0$

Sabemos que $\overrightarrow{EV}$ é um vetor normal ao plano ABC e $\left\|\overrightarrow{EV}\right\| = h = 3$.

$\overrightarrow{VE}$ é colinear com $\vec{n}(2\ ,\ 1\ ,\ -2)$ e $\left\|\overrightarrow{EV}\right\| = 3$.

$\overrightarrow{EV} = k(2\ ,\ 1\ ,\ -2) = (2k\ ,\ 1\ ,\ -2k)$

$\left\|\overrightarrow{EV}\right\| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2+k^2+(-2k)^2} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k^2+k^2+4k^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k^2 = 9 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-1 \vee k=1$

Se $k=1$, $\overrightarrow{EV} = (2\ ,\ 1\ ,\ -2)$ e

$V = E + \overrightarrow{EV} = \left(\frac{5}{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{5}{2}\right) + (2\ ,\ 1\ ,\ -2) =$

$= \left(\frac{9}{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{1}{2}\right)$

Se $k=-1$, $\overrightarrow{EV} = (-2\ ,\ 1\ ,\ 2)$ e

$V = E + \overrightarrow{EV} = \left(\frac{5}{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{5}{2}\right) + (-2\ ,\ -1\ ,\ 2) =$

$= \left(\frac{1}{2}\ ,\ -1\ ,\ \frac{9}{2}\right)$

Como $y<0$, temos $V\left(\frac{1}{2}\ ,\ -1\ ,\ \frac{9}{2}\right)$.

Pág. 135

10. $A(2\ ,\ 1\ ,\ 0)$, $B(-1\ ,\ -2\ ,\ -3)$ e $C(-3\ ,\ 0\ ,\ 1)$

10.1. $\overrightarrow{AB} = (-3\ ,\ -3\ ,\ -3)$

$\overrightarrow{AC} = (-5\ ,\ -1\ ,\ -1)$

$\frac{-3}{-5} \neq \frac{-3}{-1}$

Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares, A , B e C definem um plano.

10.2. Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a ABC .

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-3\ ,\ -3\ ,\ -3)=0 \\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-5\ ,\ -1\ ,\ 1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a-3b-3c=0 \\ -5a-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-b \\ -5a-b-a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-b \\ 6a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a+3a \\ b=-3a \end{cases} = \begin{cases} c=2a \\ b=-3a \end{cases}$$

$\vec{n}(a\ ,\ -3a\ ,\ 2a)$. Para $a=1$, temos que $\vec{n}(1\ ,\ -3\ ,\ 2)$ é um vetor normal a ABC .

$A(2\ ,\ 1\ ,\ 0) \in ABC$

$1(x-2)-3(y-1)+2z=0 \Leftrightarrow x-3y+2z+1=0$

11. $E(2\ ,\ 0\ ,\ 2)$, $B(2\ ,\ 2\ ,\ 0)$, $G(0\ ,\ 2\ ,\ 2)$

11.1. $\overrightarrow{EB}(0\ ,\ 2\ ,\ -2)$ e $\overrightarrow{EG}(-2\ ,\ 2\ ,\ 0)$

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal ao plano EBG .

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(0\ ,\ 2\ ,\ -2)=0 \\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-2\ ,\ 2\ ,\ 0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b-2c=0 \\ -2a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ -2a+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=c \end{cases}$$

$\vec{n}(c\ ,\ c\ ,\ c)$

Para $c=1$, $\vec{n}(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$.

$E(2\ ,\ 0\ ,\ 2) \in EBG$

$EBG:\ 1(x-2)+1(y-0)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow x+y+z-4=0$

11.2. A reta r que passa em $D(0,\ 0,\ 2)$ e é perpendicular a EBG é:

$(x\ ,\ y\ ,\ z)=(0\ ,\ 0\ ,\ 2)+k(1\ ,\ 1\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

Todo o ponto de r é da forma $(k\ ,\ k\ ,\ 2+k)$.

A interseção de r com o plano EBG obtém-se para k tal que:

$k+k+(2+k)-4=0 \Leftrightarrow 3k-2=0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$

O ponto de interseção de r com EBG é:

$I\left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ 2+\frac{2}{3}\right)$, ou seja, $I\left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{8}{3}\right)$.

Raio da superfície esférica:

$$r=\overline{DI}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{8}{3}-2\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{4}{3}}$$

A equação pedida é:

$$x^2+y^2+(z-2)^2=\frac{4}{3}$$

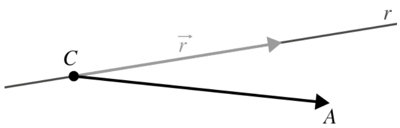
Pág. 136

12. $r:\ x=1\wedge z=2$

$A(3\ ,\ 1\ ,\ 1)$ e $B(2\ ,\ 1\ ,\ 0)$

12.1. $C(1\ ,\ 0\ ,\ 2)$ é um ponto de r

$\vec{r}(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ é um vetor diretor de r



α passa em C e tem a direção dos vetores $\vec{r}$ e $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{CA}(2\ ,\ 1\ ,\ -1)$

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a α.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{r}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(2\ ,\ 1\ ,\ -1)=0\\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(0\ ,\ 1\ ,\ 0)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b-c=0\\ b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2a\\ b=0\end{cases}$$

$\vec{n}(a\ ,\ 0\ ,\ 2a)$

Para $a=1$, $\vec{n}(1\ ,\ 0\ ,\ 2)$ que é um vetor normal a α.

$A(3\ ,\ 1\ ,\ 1)\in\alpha$

$\alpha:\ 1(x-3)+0(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2z-5=0$

12.2. $\overrightarrow{AB}(-1\ ,\ 0\ ,\ -1)$

$\vec{r}(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a β.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{r}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-1\ ,\ 0\ ,\ -1)=0\\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(0\ ,\ 1\ ,\ 0)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-a-c=0\\ b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-a\\ b=0\end{cases}$$

$\vec{n}(a\ ,\ 0\ ,\ -a)$

Para $a=1$, vem $\vec{n}(1\ ,\ 0\ ,\ -1)$ que é um vetor normal a β.

$A(3\ ,\ 1\ ,\ 1)\in\beta$

$\beta:\ 1(x-3)+0(y-1)-1(z-1)=0 \Leftrightarrow x-z-2=0$

12.3. $\vec{r}(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ é um vetor normal a π

$A(3\ ,\ 1\ ,\ 1)\in\pi$

$\pi:\ 1(y-1)=0 \Leftrightarrow y=1$

13. $r:\ (x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 4)+k(-1,\ 2,\ -3),\ k\in\mathbb{R}$

$s:\ (x,\ y,\ z)=(-1,\ 4,\ -2)+t(1,\ 0,\ 1),\ t\in\mathbb{R}$

13.1. $(-1\ ,\ 4\ ,\ -2)=(1\ ,\ 0\ ,\ 4)+k(-1\ ,\ 2\ ,\ -3)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1=1-k\\ 4=2k\\ -2=4-3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\ k=2\\ k=2\end{cases}$$

O sistema é possível. Logo $A(-1\ ,\ 4\ ,\ -2)\in r$.

$(-1\ ,\ 4\ ,\ -2)\in s$ pois é o ponto que se obtém para $t=0$.

$\vec{r}(-1\ ,\ 2\ ,\ -3)$ é um vetor diretor de r.

$\vec{s}(1\ ,\ 0\ ,\ 1)$ é um vetor diretor de s.

Como $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares, as retas r e s não são paralelas.

Como r e s não são paralelas, $A\in r$ e $A\in s$, então r e s são concorrentes no ponto A.

13.2. O plano α passa em A e tem a direção dos vetores:

$\vec{r}(-1\ ,\ 2\ ,\ -3)$ e $\vec{s}(1\ ,\ 0\ ,\ 1)$

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a α.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{r}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{s}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-1\ ,\ 2\ ,\ -3)=0\\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(1\ ,\ 0\ ,\ 1)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-a+2b-3c=0\\ a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c+2b-3c=0\\ a=-c\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2b=2c\\ a=-c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=c\\ a=-c\end{cases}$$, logo $\vec{n}(-c\ ,\ c\ ,\ c)$.

Para $c=-1$, $\vec{n}(1\ ,\ -1\ ,\ 1)$ que é o vetor normal a α.

$\alpha:\ 1(x+1)-1(y-4)-1(z+2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-y-z+3=0$

Pág. 137

14. $r:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ 0\ ,\ 0)+k(1\ ,\ -1\ ,\ 3),\ k\in\mathbb{R}$

$s:\ (x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1)+t\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -1\right),\ t\in\mathbb{R}$

14.1. $\vec{r}(1\ ,\ -1\ ,\ 3)$ e $\vec{t}\left(-\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -1\right)$

$\vec{r}=-3\vec{t}$. Logo, $\vec{r}$ e $\vec{t}$ são colineares pelo que as retas r e t são paralelas. Assim, $A(1\ ,\ 0\ ,\ 0)\in r$.

$A\in s$?

$$(1,\ 0,\ 0)=(0,\ 0,\ 1)+t\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}1=-\frac{t}{3}\\ 0=\frac{t}{3}\\ 0=r-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-3\\ t=0\\ t=1\end{cases}$$

O sistema é impossível. Logo, $A\notin s$. Portanto, as retas são paralelas e não coincidentes, ou seja, são estritamente paralelas.

14.2. $\vec{r}(1\ ,\ -1\ ,\ 3)$ é um vetor diretor de r.

$A(1\ ,\ 0\ ,\ 0) \in r$ e $B(0\ ,\ 0\ ,\ 1) \in s$

A e B são pontos de α.

$\overrightarrow{AB}(-1\ ,\ 0\ ,\ 1)$

α é o plano que passa em $A(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ e tem a direção dos vetores $\vec{r}$ e $\overrightarrow{AB}$.

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a α.

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{r}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(1\ ,\ -1\ ,\ 3)=0 \\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-1\ ,\ 0\ ,\ 1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+3c=0 \\ -a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-b+3c=0 \\ a=c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4c \\ a=c \end{cases}$$

$\vec{n}(c\ ,\ 4c\ ,\ c)$. Para $c = 1$, obtém-se $\vec{n}(1\ ,\ 4\ ,\ 1)$ que é um vetor normal a α. $A(1\ ,\ 0\ ,\ 0) \in \alpha$

$\alpha:\ 1(x-1)+4(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow x+4y+z-1=0$

15. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=12$

$\alpha:\ x-y+z=1$

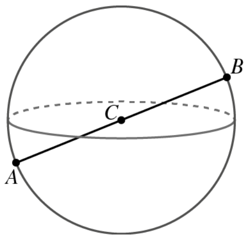
$A(1\ ,\ -1\ ,\ 2)$

15.1. $(1-3)^2+(-1-1)^2+2^2=12 \Leftrightarrow$

O ponto A pertence à superfície esférica.

15.2. $C(3\ ,\ 1\ ,\ 0)$ é o centro da superfície esférica.

$\overrightarrow{AC}(2\ ,\ 2\ -2)$



$B=C+\overrightarrow{AC}=$

$=(3\ ,\ 1\ ,\ 0)+(2\ ,\ 2\ ,\ -2)=$

$=(5\ ,\ 3\ ,\ -2)$

$B(5\ ,\ 3\ ,\ -2)$

15.3. a) Seja $P(x\ ,y\ ,\ z)$ um ponto do plano tangente à superfície esférica no ponto A.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow$

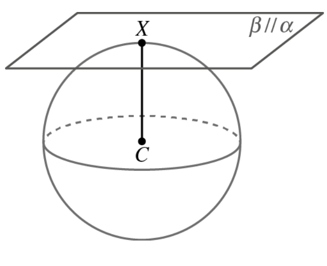
$\Leftrightarrow (x-1\ ,\ y+1\ ,\ z-2)\cdot(2\ ,\ 2\ ,\ -2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-1)+2(y+1)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1+y+1-z+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y-z+2=0$

b) Seja X o ponto de tangência.



Então, $\overrightarrow{CX}$ é normal a β. Como $\beta \mathbin{//} \alpha$, então $\overrightarrow{CX}$ é normal a α. Logo, $\overrightarrow{CX}$ é colinear com $\vec{n}(1\ ,\ -1\ ,\ 1)$, ou seja:

$\overrightarrow{CX}=\lambda(1\ ,\ -1\ ,\ 1)=(\lambda\ ,\ -\lambda\ ,\ \lambda)$

Por outro lado, $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=r=\sqrt{12}$.

$\left\|\overrightarrow{CX}\right\|=\sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+(-\lambda)^2+\lambda^2}=\sqrt{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\lambda^2=12 \Leftrightarrow \lambda^2=4 \Leftrightarrow \lambda=2 \vee \lambda=-2$

$\overrightarrow{CX}(2\ ,\ -2\ ,\ 2)$ ou $\overrightarrow{CX}(-2\ ,\ 2\ ,\ -2)$

$X=C+\overrightarrow{CX}$

$X=(3\ ,\ 1\ ,\ 0)+(2\ ,\ -2\ ,\ 2)=(5\ ,\ -1\ ,\ 2)$ ou

$X=(3\ ,\ 1\ ,\ 0)+(-2\ ,\ 2\ ,\ -2)=(1\ ,\ 3\ ,\ -2)$

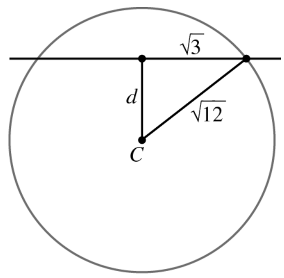
Como $\beta/\!/\alpha$, $\vec{n}(1\ ,\ -1\ ,\ 1)$ é um vetor normal a β.

$\beta:\ (x-5)-(y+1)+(z-2)=0 \Leftrightarrow x-y+z-8=0$

ou

$\beta:\ (x-1)-(y-3)+(z+2)=0 \Leftrightarrow x-y+z+4=0$

c)



$d^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{12}\right)^2 \Leftrightarrow d^2=12-3 \Leftrightarrow d^2=9 \overset{d>0}{\Leftrightarrow} d=3$

Qualquer plano que diste 3 unidades do centro $C(3\ ,\ 1\ ,\ 0)$ da superfície esférica interseta-a segundo uma circunferência de raio $\sqrt{3}$.

Os planos $x = 3$, $y = 1$ e $z = 0$ são perpendiculares aos eixos coordenados e passam no centro da superfície esférica.

Os planos perpendiculares aos eixos coordenados que distam 3 unidades do centro são:

$x=3-3 \Leftrightarrow x=0$

$x=3+3 \Leftrightarrow x=6$

$y=1-3 \Leftrightarrow y=-2$

$y=1+3 \Leftrightarrow y=4$

$z=0-3 \Leftrightarrow z=-3$

$z=0+3 \Leftrightarrow z=3$

Por exemplo, o plano de equação $x = 0$ interseta a superfície esférica segundo uma circunferência de raio $\sqrt{3}$.

Atividades complementares

Pág. 139

16.1. $A\left(\frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ -1\right)$ e $\vec{u}(2\ ,\ -1\ ,\ 3)$

$\pi:\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1(y-0)+3(z+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-y+3z+2=0$

16.2. $A(-1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ e $\vec{u}\left(\frac{1}{2}\ ,\ -1\ ,\ 1\right)$

$\pi:\ \frac{1}{2}(x+1)-1(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x-y+z+\frac{1}{2}=0$

16.3. $A(1\ ,\ -1\ ,\ 3)$, $\vec{u}(2\ ,\ 0\ ,\ -1)$

$\pi:\ 2(x-1)-(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-z+1=0$

16.4. $A(2\ ,\ -1\ ,\ 5)$ e $\vec{u}(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$\pi:\ 1(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$

16.5. $A(-3\ ,\ -2\ ,\ 1)$ e $\vec{u}(0\ ,\ -2\ ,\ 0)$

$\pi: -2(y+2)=0 \Leftrightarrow y=-2$

17.1. $x-y+z=0$

$\vec{n}(1\ ,\ -1\ ,\ 1)$ e $A(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$

17.2. $2x=z \Leftrightarrow 2x-z=0$

$\vec{n}(2\ ,\ 0\ ,\ -1)$ e $A(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$

17.3. $\frac{x}{2}+z=y \Leftrightarrow \frac{x}{2}-y+z=0$

$\vec{n}\left(\frac{1}{2}\ ,\ -1\ ,\ 0\right)$ e $A(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$

17.4. $y=3$

$\vec{n}(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ e $A(0\ ,\ 3\ ,\ 0)$

18. $\alpha:\ x-3y+z=5$

$A(1\ ,\ -3\ ,\ 1)$

18.1. $\vec{r}(1\ ,\ -3\ ,\ 1)$ é um vetor diretor de r, dado que é normal a α.

$r:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ -3\ ,\ 1)+k(1\ ,\ -3\ ,\ 1)$

18.2. Trata-se do ponto I de interseção de r com α.

Todo o ponto de r é da forma:

$(1+k\ ,\ -3-3k\ ,\ 1+k),\ k\in\mathbb{R}$

O ponto de r que pertence a $\alpha:\ x-3y+z=5$ é o que se obtém para k tal que:

$(1+k)-3(-3-3k)+(1+k)=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11k=-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-\frac{6}{11}$

Para $k=-\frac{6}{11}$:

$1+k=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$

$-3-3k=-3+\frac{18}{11}=-\frac{15}{11}$

O ponto pedido tem coordenadas $\left(\frac{5}{11}\ ,\ -\frac{15}{11}\ ,\ \frac{5}{11}\right)$.

18.3. $s:\ (x,\ y,\ z)=$

$=(1,\ -1,\ 2m)+k(m-1,\ m,\ 3m),\ k\in\mathbb{R}$

$\vec{s}(m-1,\ m,\ 3m)$ é um vetor diretor de s.

$\vec{n}(1\ ,\ -3\ ,\ 1)$ é um vetor normal a α

a) $s\perp\alpha \Leftrightarrow \vec{s}$ é colinear com $\vec{n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{m-1}{1}=\frac{m}{-3}=\frac{3m}{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3m+3=m \wedge m=-9m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4m=3 \wedge m=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=\frac{3}{4} \wedge m=0$

A condição é impossível. Não existe m para o qual s é perpendicular a α.

b) $s//\alpha \Leftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m-1\ ,\ m\ ,\ 3m)\cdot(1\ ,\ -3\ ,\ 1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m-1-3m+3m=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=1$

c) $A(1\ ,\ -1\ ,\ 2m)$ é um ponto de s.

s está contida em α se e só se r é paralela a α e $A\in\alpha \Leftrightarrow\ m=1 \wedge 1-3\times(-1)+2m=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=1 \wedge 2m=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=1 \wedge m=\frac{1}{2}$

Como a condição é impossível, não existe $m\in\mathbb{R}$ para o qual a reta r está contida em α.

19. $ABC:\ 2x+y+2z-4=0$

19.1. $A(x\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

$A(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$; $B(0\ ,\ y\ ,\ 0)$

$y-4=0 \Leftrightarrow y=4$

$B(0\ ,\ 4\ ,\ 0)$; $C(0\ ,\ 0\ ,\ z)$

$2z-4=0 \Leftrightarrow z=2$

$C(0\ ,\ 0\ ,\ 2)$

$V=\frac{1}{3}\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times\frac{2\times4}{2}\times2=\frac{8}{3}$

19.2. $\vec{n}(2\ ,\ 1\ ,\ 2)$ é um vetor normal a ABC

$r:\ (x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)+k(2,\ 1,\ 2),\ k\in\mathbb{R}$

$r:\ \begin{cases} x=2k \\ y=k \\ z=2k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

19.3. Interseção de r com o plano ABC:

Qualquer ponto de r é da forma $(2k\ ,\ k\ ,\ 2k),\ k\in\mathbb{R}$

O ponto de r que pertence ao plano ABC obtém-se para k tal que:

$2\times(2k)+k+2(2k)-4=0 \Leftrightarrow 4k+k+4k-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k=4 \Leftrightarrow k=\frac{4}{9}$

Se $k=\frac{4}{9},\ 2k=\frac{8}{9}$.

O ponto de tangência, T, tem coordenadas $\left(\frac{8}{9}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{8}{9}\right)$.

O raio da superfície esférica é:

$r=\overline{OT}=\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{16}{81}+\frac{64}{81}}=\frac{4}{3}$

Equação pedida: $x^2+y^2+z^2=\frac{16}{9}$

19.4. $\beta: \ kx+ky+y+kz-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow kx+(k+1)y+kz-1=0$

$\vec{u}(k\ ,\ k+1\ ,\ k)$ é um vetor normal a β.

$\vec{v}(2\ ,\ 1\ ,\ 2)$ é um vetor normal a α.

a) $\beta // \alpha \Leftrightarrow \vec{u}$ é colinear com $\vec{v} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{k}{2}=\frac{k+1}{1}=\frac{k}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k+2=k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-2$

b) $\beta \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k\ ,\ k+1\ ,\ k)\cdot(2\ ,\ 1\ ,\ 2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k+k+1+2k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5k=-1 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{5}$

c) $B(0\ ,\ 4\ ,\ 0)\in\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\times 0+k\times 4+4+k\times 0-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-\frac{3}{4}$

20. $C(3\ ,\ 0\ ,\ 0)$

20.1. $V_{\text{prisma}}=\overline{OC}^2\times\overline{OD} \Leftrightarrow 18=3^2\times\overline{OD}$

$\overline{OD}=2$

a) $E(0\ ,\ -3\ ,\ 2)$ e $C(3\ ,\ 0\ ,\ 0)$

Ponto médio de [EC]:

$M\left(\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}\ ,\ 1\right)$

$\overrightarrow{EC}(3\ ,\ 3\ ,\ -2)$

Plano mediador de [EC]:

$3\left(x-\frac{3}{2}\right)+3\left(y+\frac{3}{2}\right)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+3y-2z-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+3y-2z+2=0$

b) $D(0\ ,\ 0\ ,\ 2)$, $E(0\ ,\ -3\ ,\ 2)$ e $C(3\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{DC}(3\ ,\ 0\ ,\ -2)$ e $\overrightarrow{DE}(0\ ,\ 3\ ,\ 0)$

$EDC: \ (x\ ,\ y,\ \ z)=$

$=(0,\ 0,\ 2)+\alpha(3,\ 0,\ -2)+\beta(0,\ 3,\ 0);\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$

20.2. a) $F(3\ ,\ -3\ ,\ 2)$, $D(0\ ,\ 0\ ,\ 2)$ e $B(3\ ,\ -3\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{DB}(3\ ,\ -3\ ,\ -2)$

$\beta: \ 3(x-3)-3(y+3)-2(z-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-3y+2z-9-9+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-3y-2z-14=0$

b) $A(0\ ,\ -3\ ,\ 0)$ e $C(3\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{AC}(3\ ,\ 3\ ,\ 0)$ é um vetor diretor de AC

$\vec{n}(3\ ,\ -3\ ,\ -2)$ é um vetor normal a β.

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=(3\ ,\ 3\ ,\ 0)\cdot(3\ ,\ -3\ ,\ 2)=$

$=9-9+0=0$

Como $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$, a reta AC é paralela a β.

$A\in\beta$?

$3\times 0-3\times(-3)-2\times 0-14=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9-14=0$ (Falso)

A é um ponto da reta AC e $A\notin\alpha$. Logo, como sabemos que a reta AC é paralela a α, podemos concluir que a reta AC é estritamente paralela a β.

Pág. 140

21. $V(0\ ,\ 6\ ,\ 3)$

$AC: \ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(0\ ,\ 2\ ,\ 1)+k(1\ ,\ 1\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

$AB: \ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(0\ ,\ 2\ ,\ 1)+t(1\ ,\ 1\ ,\ 0),\ t\in\mathbb{R}$

$BVC: \ x+y+z-9=0$

21.1. O ponto A pertence às retas AC e AB. Como estas retas não são paralelas, pois os seus vetores diretores (1 , 1 , 1) e (1 , 1 , 0) não são colineares, então são concorrentes no ponto A.

Da equação das retas conclui-se que o ponto de coordenadas (0 , 2 , 1) pertence às duas retas. Logo, A (0 , 2 , 1).

21.2. O plano ABC contém as retas AB e AC. Logo, este plano passa em A e tem a direção dos vetores de coordenadas (1 , 1 , 1) e (1 , 1 , 0).

ABC: $(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+\lambda(1,\ 1,\ 1)+\mu(1,\ 1,\ 0);\ \lambda$ e $\mu\in\mathbb{R}$

Equação cartesiana:

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a ABC:

$\begin{cases}(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(1\ ,\ 1\ ,\ 1)=0\\(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(1\ ,\ 1\ ,\ 0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c=0\\a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a-a+c=0\\b=-a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=0\\b=-a\end{cases}$

$\vec{n}(a\ ,\ -a\ ,\ 0)$

Para $a=1$, obtemos $\vec{n}(1\ ,\ -1\ ,\ 0)$ que é um vetor normal a ABC.

$ABC: \ 1(x-0)-1(y-2)=0 \Leftrightarrow -x+y-2=0$

21.3. B é o ponto de interseção da reta AB com o plano BVC de equação: $x+y+z-9=0$

Ponto genérico de AB: $(t\ ,\ 2+t\ ,\ 1),\ t\in\mathbb{R}$

Como B pertence ao plano BVC:

$t+(2+t)+1-9=0 \Leftrightarrow 2t=6 \Leftrightarrow t=3$

Logo, $B(3\ ,\ 5\ ,\ 1)$.

C é o ponto de interseção da reta AC com o plano BVC.

Ponto genérico de AC: $(k\ ,\ 2+k\ ,\ 1+k),\ k\in\mathbb{R}$

$k+(2+k)+(1+k)-9=0 \Leftrightarrow 3k=6 \Leftrightarrow k=2$

Logo, $C(2\ ,\ 4\ ,\ 3)$

21.4. $A(0\ ,\ 2\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{CA}=(-2\ ,\ 2-4\ ,\ 1-3)=(-2\ ,\ -2\ ,\ -2)$

$\overrightarrow{CB}=(2-3\ ,\ 4-5\ ,\ 3-1)=(-1\ ,\ -1\ ,\ 2)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-2\ ,\ -2\ ,\ -2)\cdot(-1\ ,\ -1\ ,\ 2)=2+2-4=0$

Logo, $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ pelo que o triângulo [ABC] é retângulo em C.

21.5. $\overrightarrow{VC} = C - V = (2\ ,\ 4\ ,\ 3) - (0\ ,\ 6\ ,\ 3) = (2\ ,\ -2\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{VC}(2\ ,\ -2\ ,\ 0)$ é um vetor diretor da reta VC.

$\vec{n}(1\ ,\ -1\ ,\ 0)$ é um vetor normal ao plano ABC.

Como $\overrightarrow{VC} = 2\vec{n}$, $\overrightarrow{VC}$ é colinear com $\vec{n}$. Logo, a reta VC é perpendicular ao plano ABC.

21.6. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}\frac{\overline{CA} \times \overline{CB}}{2} \times \overline{CV}$

$\overline{CA} = \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\overline{CB} = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\overline{CV} = \|\overrightarrow{VC}\| = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{2} \times 2\sqrt{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{36}}{3} =$$

$$= \frac{2 \times 6}{3} = 4$$

22. $A(3\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$r:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (0\ ,\ 6\ ,\ 0) + k(0\ ,\ 1\ ,\ -2),\ k \in \mathbb{R}$

22.1. $A(3\ ,\ 0\ ,\ 0) \in \alpha$, $B(0\ ,\ 6\ ,\ 0) \in r$

Como α contém a reta r, $B \in \alpha$.

Assim, $\overrightarrow{AB}(-3\ ,\ 6\ ,\ 0)$ é um vetor diretor de α.

$\vec{r}(0\ ,1\ ,\ -2)$ é um vetor diretor da reta r.

Portanto, α passa em $A(3\ ,\ 0\ ,\ 0)$ e tem a direção dos vetores $\overrightarrow{AB}(-3\ ,\ 6\ ,\ 0)$ e $\vec{r}(0\ ,\ 1\ ,\ -2)$.

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a α.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a\ ,\ b\ ,\ c) \cdot (-3\ ,\ 6\ ,\ 0) = 0 \\ (a\ ,\ b\ ,\ c) \cdot (0\ ,\ 1\ ,\ -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{1}{2}b \end{cases}$$

$\vec{n}\left(2b\ ,\ b\ ,\ \frac{b}{2}\right)$. Para $b = 2$ obtemos $\vec{n}(4\ ,\ 2\ ,\ 1)$ que é um vetor normal a α.

$\alpha:\ 4(x-3) + 2(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + z - 12 = 0$

22.2. $s:\ x = 1 \wedge y = 2$

Substituindo na equação de α temos

$4 \times 1 + 2 \times 2 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 + 4 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 4$

Logo, $C(1\ ,\ 2\ ,\ 4)$, pelo que tem cota 4.

22.3. A base $[OAB]$ da pirâmide é um triângulo retângulo em O contido no plano xOy. Logo, a altura da pirâmide relativa a esta base é a cota de C.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} \times \text{cota } C = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 6}{2} \times 4 = 12$$

22.4. $\vec{r}(0\ ,\ 1\ ,\ -2)$ é normal ao plano β.

a) $\beta:\ 0(x-0) + 1(y-0) - 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y - 2z = 0$

b) A origem O pertence a β

O ponto $A(3\ ,\ 0\ ,\ 0)$ pertence a β pois $0 - 2 \times 0 = 0$.

Logo, a reta *AO*, ou seja, o eixo *Ox* está contido no plano β.

23. $\alpha:\ 2x + 3y + 6z + 1 = 0$

$V\left(\frac{5}{3}\ ,\ 2\ ,\ 1\right)$

$S:\ (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 50$

23.1. A reta VC passa em V e é perpendicular a α. Logo, $\vec{n}(2\ ,\ 3\ ,\ 6)$, por ser um vetor normal a α, é um vetor diretor de VC.

$VC:\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(\frac{5}{3}\ ,\ 2\ ,\ 1\right) + k(2\ ,\ 3\ ,\ 6),\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} + 2k \\ y = 2 + 3k\ ,\ k \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 6k \end{cases}$$

23.2. C é a interseção de *VC* com α.

C é o ponto $\left(\frac{5}{3} + 2k\ ,\ 2 + 3k\ ,\ 1 + 6k\right)$ para k tal que

$$2\left(\frac{5}{3} + 2k\right) + 3(2 + 3k) + 6(1 + 6k) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k + 9k + 36k + \frac{10}{3} + 6 + 6 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49k = -\frac{49}{3} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$C\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\ ,\ 2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)\ ,\ 1 + 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

$C(1\ ,\ 1\ ,\ -1)$

23.3. $\overline{VC} = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 + (2-1)^2 + (1+1)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + 1 + 4} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$$

23.4. Centro da superfície esférica: $A(3\ ,\ 4\ ,\ 5)$

Substituindo nas equações paramétricas de *VC*, vem:

$$\begin{cases} 3 = \frac{5}{3} + 2k \\ 4 = 2 + 3k \\ 5 = 1 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 5 + 6k \\ k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{4}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

Logo, o centro da superfície esférica pertence a *VC*.

23.5. Seja r o raio da base do cone.

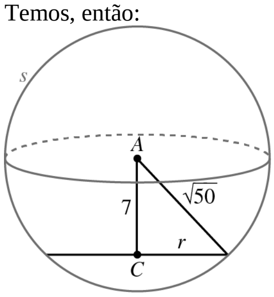
$A(3\ ,\ 4\ ,\ 5)$ é o centro da superfície esférica.

A distância de A a α é $\overline{AC}$, dado que o ponto *A* pertence à reta *VC* perpendicular a α.

$\overline{AC} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{49} = 7$

O raio da superfície esférica *S* é $\sqrt{50}$.

Temos, então:



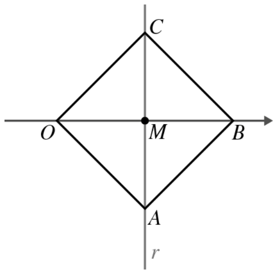
(O desenho não está à escala)

$r^2+7^2=\left(\sqrt{50}\right)^2 \Leftrightarrow r^2=50-49 \overset{r>0}{\Leftrightarrow} r=1$

Portanto, o cone tem altura $\frac{7}{3}$ e raio da base igual a 1.

$V_{\text{cone}}=\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times\frac{7}{3}=\frac{7\pi}{9}$

24. $r:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ 0\ ,\ 0)+k(0\ ,\ 1\ ,\ 1), k\in\mathbb{R}$



Seja M o centro do quadrado $[OABC]$.
O, M e B pertencem ao plano α que passa em O e é perpendicular a r.
$\vec{r}(0\ ,\ 1\ ,\ 1)$ é um vetor perpendicular a α.

$\alpha:\ 0(x-0)+1(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow y+z=0$

M é o ponto de interseção de r com α.
Todo o ponto de r é da forma $R(1\ ,\ k\ ,\ k)$.

Como $R(1\ ,\ k\ ,\ k)$ pertence a α vem:

$k+k=0 \Leftrightarrow k=0$
Logo, $M(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$.

$B=M+\overrightarrow{OM}=(1\ ,\ 0\ ,\ 0)+(1\ ,\ 0\ ,\ 0)=(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=1$

A e B são os pontos da reta r cuja distância a M é igual a 1.
$M(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ e $R(1\ ,\ k\ ,\ k)$

$\overrightarrow{MR}(0\ ,\ k\ ,\ k)$

$\left\|\overrightarrow{MR}\right\|=1 \Leftrightarrow \sqrt{k^2+k^2}=1 \Leftrightarrow 2k^2=1 \Leftrightarrow k^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim:

$A\left(1\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(1\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $B(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$

Pág. 141

25. $\alpha\equiv ABC:\ y+z-2=0$
$B(2\ ,\ y\ ,\ 2)$, $A(0\ ,\ 0\ ,\ z)$ e $D(0\ ,\ y\ ,\ 0)$

25.1. $B(2\ ,\ y\ ,\ 2)$ pertence ao plano $\alpha:\ y+z-2=0$.
Então, $y+2-2=0 \Leftrightarrow y=0$. Logo, $B(2\ ,\ 0\ ,\ 2)$.
$D(0\ ,\ y\ ,\ 0)$ pertence ao plano $\alpha:\ y+z-2=0$.
Então, $y+0-2=0 \Leftrightarrow y=2$. Logo, $D(0\ ,\ 2\ ,\ 0)$.
As diagonais de um retângulo bissetam-se.
Portanto, E é o ponto médio de $[BD]$:
$E\left(\frac{2+0}{2}\ ,\ \frac{0+2}{2}\ ,\ \frac{2+0}{2}\right)$, ou seja, $E(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$

25.2. $E(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$
Como E é a projeção ortogonal de V no plano da base, a reta EV é perpendicular ao plano $\alpha:\ y+z-2=0$. Portanto, $\vec{n}(0\ ,\ 1\ ,\ 1)$ é um vetor diretor da reta EV.

$EV:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ 1\ ,\ 1)+k(0\ ,\ 1\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

$EV:\ \begin{cases} x=1 \\ y=1+k,\ k\in\mathbb{R} \\ z=1+k \end{cases}$

25.3. $A(0\ ,\ 0\ ,\ z)$ pertence ao plano $\alpha:\ y+z-2=0$.
Logo, $0+z-2=0 \Leftrightarrow z=2$, pelo que $A(0\ ,\ 0\ ,\ 2)$.
$A(0\ ,\ 0\ ,\ 2)$, $B(2\ ,\ 0\ ,\ 2)$ e $D(0\ ,\ 2\ ,\ 0)$.

$\overrightarrow{AB}(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=2$

$\overrightarrow{AD}(0\ ,\ 2\ ,\ -2)$; $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

Seja h a altura da pirâmide.

$V_{\text{pirâmide}}=\frac{1}{3}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times k$

$8=\frac{1}{3}\times2\times2\sqrt{2}\times h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24=4\sqrt{2}h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h=\frac{24}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow h=\frac{6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h=3\sqrt{2}$

Como V pertence à reta EV é da forma $(1\ ,\ 1+k\ ,\ 1+k)$ e $\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=3\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{EV}(1-1\ ,\ 1+k-1\ ,\ 1+k-1)$, logo $\overrightarrow{EV}(0\ ,\ k\ ,\ k)$

$\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{k^2+k^2}=3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2k^2=18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2=9 \Leftrightarrow k=-3 \vee k=3$

Como $1-3=-2$ e $1+3=4$:
$V(1\ ,\ -2\ ,\ -2)$ ou $V(1\ ,\ 4\ ,\ 4)$

Dado que V tem cota positiva, então $V(1\ ,\ 4\ ,\ 4)$.

25.4. $V(1\ ,\ 4\ ,\ 4)$
O vetor $\vec{n}(0\ ,\ 1\ ,\ 1)$ é normal ao plano por ser normal a α

$1(y-4)+1(z-4)=0 \Leftrightarrow y+z-8=0$

25.5. $\beta:\ 3x-y+z=3$

a) $\vec{n}(0\ ,\ 1\ ,\ 1)$ é um vetor normal ao plano α.
$\vec{u}(3\ ,\ -1\ ,\ 1)$ é um vetor normal ao plano β.
$\vec{n}\cdot\vec{u}=(0\ ,\ 1\ ,\ 1)\cdot(3\ ,\ -1\ ,\ 1)=0-1+1=0$
Logo, α e β são perpendiculares.

b) $B(2\ ,\ 0\ ,\ 2)$ e $D(0\ ,\ 2\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{BD}(-2\ ,\ 2\ ,\ -2)$

$BD:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(2\ ,\ 0\ ,\ 2)+k(-2\ ,\ 2\ ,\ -2),\ k\in\mathbb{R}$

O ponto de interseção de *BD* com β é da forma $(2-2k\ ,\ 2k\ ,\ 2-2k)$.

Como este ponto pertence a $\beta:\ 3x-y+z=3$:

$3(2-2k)-2k+(2-2k)=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6k-2k-2k+6+2=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10k=-5\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}$

Se $k=\dfrac{1}{2}$, $2k=1$ e $2-2k=1$.

Portanto, *BD* interseta β no ponto (1 , 1 , 1), ou seja, no ponto E.

26. $A(-1\ ,\ -1\ ,\ -2)$, $B(1\ ,\ 1\ ,\ -2)$ e $C(-2\ ,\ 4\ ,\ -2)$

$\overline{BF}=6$

26.1. Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal ao plano *ABC*.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(2\ ,\ 2\ ,\ 0)=0\\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-1\ ,\ 5\ ,\ 0)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2b=0\\ -a+5b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5b+b=0\\ a=5b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ a=0\end{cases}$$

$\vec{n}(0\ ,\ 0\ ,\ c)$ é a família de vetores normais ao plano *ABC*

Para $c=1$, $\vec{n}(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$.

$\overrightarrow{BF}$ é colinear com $\vec{n}(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$ e tem norma 6.

Logo, $\overrightarrow{BF}(0\ ,\ 0\ ,\ 6)$ dado que a cota de F é maior do que a cota de B.

$F=B+\overrightarrow{BF}=(1\ ,\ 1\ ,\ -2)+(0\ ,\ 0\ ,\ 6)=(1\ ,\ 1\ ,\ 4)$

$F(1\ ,\ 1\ ,\ 4)$ e $C(-2\ ,\ 4\ ,\ -2)$

$\overrightarrow{CF}(3\ ,\ -3\ ,\ 6)$

Reta *CF* :

$(x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ 1\ ,\ 4)+k(3\ ,\ -3\ ,\ 6),\ k\in\mathbb{R}$

$L(-8\ ,\ 10\ ,\ -14)\in CF$?

$(-8\ ,\ 10\ ,\ -14)=(1\ ,\ 1\ ,\ 4)+k(3\ ,\ -3\ ,\ 6)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-8=1+3k\\ 10=1-3k\\ -14=4+6k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3k=-9\\ 3k=-9\\ 6k=-18\end{cases}\Leftrightarrow k=-3$$

O sistema é possível. Logo, o ponto *L* pertence à reta *CF* .

26.2. $A(-1\ ,\ -1\ ,\ -2)$, $F(1\ ,\ 1\ ,\ 4)$ e $C(-2\ ,\ 4\ ,\ -2)$

$\overrightarrow{AF}(2\ ,\ 2\ ,\ 6)$ e $\overrightarrow{AC}(-1\ ,\ 5\ ,\ 0)$

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal ao plano *AFC* .

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(2\ ,\ 2\ ,\ 6)=0\\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-1\ ,\ 5\ ,\ 0)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2b+6c=0\\ -a+5b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5b+b+3c=0\\ a=5b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-2b\\ a=5b\end{cases}$$

$\vec{n}(5b\ ,\ b\ ,\ -2b)$. Para $b=1$ obtemos $\vec{n}(5\ ,\ 1\ ,\ -2)$ que é um vetor normal ao plano *AFC* .

$AFC:\ 5(x-1)+(y-1)-2(z-4)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x+y-2z+2=0$

26.3. O lugar geométrico dos pontos $S(x\ ,\ y\ ,\ z)$ tais que $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=0$ é a superfície esférica de diâmetro [*AB*].

27. $EFG:\ x-2y-2z+18=0$

$C(4\ ,\ 1\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{EH}(2\ ,\ 2\ ,\ -1)$ e $\overrightarrow{GH}(\lambda\ ,\ 1\ ,\ \lambda)$

27.1. $\vec{n}(1\ ,\ -2\ ,\ -2)$ é um vetor normal ao plano EFG.

Logo, $\vec{n}$ é um vetor diretor da reta *CG* .

$CG:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(4\ ,\ 1\ ,\ 1)+k(1\ ,\ -2\ ,\ -2),\ k\in\mathbb{R}$

27.2. G é a interseção da reta *CG* com o plano EFG.

Os pontos da reta *CG* são da forma:

$$(4+k\ ,\ 1-2k\ ,\ 1-2k)$$

O ponto de *CG* que pertence ao plano *EFG* obtém-se para o valor de *k* tal que:

$(4-k)-2(1-2k)-2(1-2k)+18=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k+18=0\Leftrightarrow k=-2$

$G(4-2\ ,\ 1-2\times(-2)\ ,\ 1-2\times(-2))=G(2\ ,\ 5\ ,\ 5)$

27.3. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GH}=0\Leftrightarrow(2\ ,\ 2\ ,\ -1)\cdot(\lambda\ ,\ 1\ ,\ \lambda)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\lambda+2-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=-2$

27.4. $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}=$

$=(-2\ ,\ 1\ ,\ -2)+(-2\ ,\ -2\ ,\ 1)=$

$=(-4\ ,\ -1\ ,\ -1)$

$A=C+\overrightarrow{CA}=(4\ ,\ 1\ ,\ 1)+(-4\ ,\ -1\ ,\ -1)=$

$=(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$

Logo, *A* é a origem do referencial.

28. $A(2\ ,\ 3\ ,\ -1)$ e $E(1\ ,\ 2\ ,\ 4)$

$ABC:\ 2x-y+2z+1=0$

28.1. $P(x\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{AP}(x-2\ ,\ -3\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{OA}(2\ ,\ 3\ ,\ -1)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA}=0\Leftrightarrow(x-2\ ,\ -3\ ,\ 1)\cdot(2\ ,\ 3\ ,\ -1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-4-9-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=14\Leftrightarrow x=7$

$P(7\ ,\ 0\ ,\ 0)$

28.2. *F* é a interseção da reta *EF* com o plano ABC.

$\vec{n}(2\ ,\ -1\ ,\ 2)$ é um vetor normal ao plano ABC. Logo, $\vec{n}$ é um vetor diretor da reta *EF*.

$EF:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ 2\ ,\ 4)+k(2\ ,\ -1\ ,\ 2),\ k\in\mathbb{R}$

Os pontos de *EF* são da forma:

$$(1+2k\ ,\ 2-k\ ,\ 4+2k),\ k\in\mathbb{R}$$

O ponto de *EF* que pertencem ao plano *ABC* obtém-se para *k* tal que:

$2(1+2k)-(2-k)+2(4+2k)+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k+k+4k+9=0\Leftrightarrow 9k=-9\Leftrightarrow k=-1$

Portanto, *F* tem coordenadas $(1-2\ ,\ 2+1\ ,\ 4-2)$ ou $F(-1\ ,\ 3\ ,\ 2)$.

Avaliação 2

Pág. 142

1. $(x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ m\ ,\ -2)+k(2\ ,\ -1\ ,\ m),\ k\in\mathbb{R}$

$\alpha:\ 3mx+3y+3z+1=0$

$(2\ ,\ -1\ ,\ m)$ é um vetor diretor da reta.

$(3m\ ,\ 3\ ,\ 3)$ é um vetor normal ao plano α.

$(2\ ,\ -1\ ,\ m)\cdot(3m\ ,\ 3\ ,\ 3)=0 \Leftrightarrow 6m-3+3m=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9m=3 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$

Resposta: **(A)**

2. $r:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ 0\ ,\ 0)+k(1\ ,\ 1\ ,\ 0),\ k\in\mathbb{R}$

$\theta:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=$

$=(1\ ,\ 1\ ,\ -1)+\lambda(1\ ,\ 1\ ,\ 0)+\mu(1\ ,\ 0\ ,\ 1);\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$

$\vec{r}(1\ ,\ 1\ ,\ 0)$ é um vetor diretor de r

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a θ.

$\begin{cases}(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ 1,\ 0)=0\\(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ 0,\ 1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=0\\a+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-a\\c=-a\end{cases}$

Logo, $\vec{n}(a\ ,\ -a\ ,\ -a)$. Para a = 1, obtemos o vetor

$\vec{n}(1\ ,\ -1\ ,\ -1)$ é o vetor normal a θ.

$\vec{n}\cdot\vec{r}=(1\ ,\ -1\ ,\ 1)\cdot(1\ ,\ 1\ ,\ 0)=1-1=0$

Logo, a reta r é paralela ao plano θ.

$A(1\ ,\ 0\ ,\ 0)\in r$

$\theta:\ 1(x-1)-1(y-1)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow x-y-z-1=0$

1 – 0 – 0 – 1 = 0 (verdadeiro). Logo, $A\in\theta$.

A reta r é paralela ao plano θ e existe um ponto de r que pertence a θ. Assim, a reta r está contida em θ.

Resposta: **(B)**

3. $r:\ x=-1 \wedge z=1$

$\vec{r}(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ é um vetor diretor de r. Logo, $\vec{r}$ é um vetor normal ao plano $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$.

Portanto, $\vec{r}(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ é colinear com $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$.

Logo, $a=0 \wedge c=0 \wedge b\neq 0$.

Resposta: **(D)**

4. $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9$

Centro: $(1\ ,0\ ,2)$; raio: 3

Se $\overline{AB}=6=2\times$raio, então $[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica, pelo que a reta r passa no seu centro.

Resposta: **(B)**

5. $\alpha:\ x=z \Leftrightarrow x-z=0$

$\vec{n}(1\ ,\ 0\ ,\ -1)$ é um vetor normal a α.

Qualquer vetor com a direção de α é perpendicular a $\vec{n}$:

(A) $(1\ ,\ 1\ ,\ 0)\cdot(1\ ,\ 0\ ,\ -1)=1+0+0\neq 0$

(B) $(0\ ,\ 1\ ,\ 1)\cdot(1\ ,\ 0\ ,\ -1)=0+0-1\neq 0$

(C) $(1\ ,\ 0\ ,\ 1)\cdot(1\ ,\ 0\ ,\ -1)=1+0-1=0$

$(1\ ,\ 1\ ,\ 1)\cdot(1\ ,\ 0\ ,\ -1)=1+0-1=0$

Resposta: **(C)**

6. $A(5\ ,\ 4\ ,\ 0)$ e $B(0\ ,\ 4\ ,\ 3)$

Todos os planos passam na origem

(A) $12\times5-15\times4+20\times0=0 \Leftrightarrow 0=0$ (V)

$12\times0-15\times4+20\times3=0 \Leftrightarrow 0=0$ (V)

Resposta: **(A)**

7. $A(-2\ ,\ 1\ ,\ -2)$; $\overrightarrow{OA}(-2\ ,\ 1\ ,\ -2)$

$C(-2\ ,\ -2\ ,\ 1)$; $\overrightarrow{OC}(-2\ ,\ -2\ ,\ 1)$

$D(-1\ ,\ 2\ ,\ 2)$; $\overrightarrow{OD}(-1\ ,\ 2\ ,\ 2)$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=(-3\ ,\ 3\ ,\ 0)$

Como $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AE}$, temos:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}=(-3\ ,\ 3\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{OE}(-3\ ,\ 3\ ,\ 0)$ é colinear com o vetor $(3\ ,-3\ ,0)$.

A reta dada passa em C e é paralela a AE, logo essa reta passa no vértice F.

Resposta: **(C)**

Pág. 143

8. $ABC:\ 2x+y-2z+6=0$

$A(0\ ,\ 0\ ,\ z)$ e $V(7\ ,\ 8\ ,\ -4)$

8.1. A pertence ao plano ABC:

$0+0-2z+6=0 \Leftrightarrow z=3$

$A(0\ ,\ 0\ ,\ 3)$

8.2. **a)** O vetor $\vec{n}(2\ ,\ 1\ ,\ -2)$, normal ao plano ABC, é um vetor diretor da reta VE.

$VE:\ (x,\ y,\ z)=(7,\ 8,\ -4)+k(2,\ 1,\ -2),\ k\in\mathbb{R}$

b) E é o ponto de VE que pertence a ABC.

Todo o ponto de VE é da forma:

$(7+2k\ ,\ 8+k\ ,\ -4-2k),\ k\in\mathbb{R}$

Como E pertence ao plano ABC, temos:

$2(7+2k)+8+k-2(-4-2k)+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k+k+4k+14+8+8+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k=-36 \Leftrightarrow k=-4$

$E(7-8\ ,\ 8-4\ ,\ -4+8) = E(-1\ ,\ 4\ ,\ 4)$

8.3. Centro: $V(7\ ,\ 8\ ,\ -4)$

Raio: $\overline{OV}=\sqrt{49+64+16}=\sqrt{129}$

$(x-7)^2+(y-8)^2+(z+4)^2=129$

9. $r:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(0\ ,\ 0\ ,\ -1)+k(-1\ ,\ 2\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

$s:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ 2\ ,-1)+k(1\ ,\ 2\ ,\ 0),\ k\in\mathbb{R}$

9.1. As retas r e s não são paralelas dado que os vetores $(-1\ ,2\ ,1)$ e $(1\ ,2\ ,0)$ não são colineares.

$(0\ ,\ 0\ ,\ -1)\in r$

$(0\ ,\ 0\ ,\ -1)\in s$?

$(0\ ,\ 0\ ,\ -1)=(1\ ,\ 2\ ,\ -1)+k(1\ ,\ 2\ ,\ 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}0=1+k\\0=2+2k \Leftrightarrow k=-1\\-1=-1\end{cases}$

O ponto $(0\ ,\ 0\ ,\ -1)\in s$, sendo obtido para $k=-1$.

Portanto as retas r e s são concorrentes em $(0\ ,0\ ,-1)$.

9.2. Trata-se do plano α que passa em $(0\ ,\ 0\ ,\ -1)$ e tem a direção dos vetores $\vec{r}(-1\ ,\ 2\ ,\ 1)$ e $\vec{s}(1\ ,\ 2\ ,\ 0)$.

Seja $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal ao plano α.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{r}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{s}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-1\ ,\ 2\ ,\ 1)=0\\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(1\ ,\ 2\ ,\ 0)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-a+2b+c=0\\ a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+2b+c=0\\ a=-2b\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4b\\ a=-2b\end{cases}$$

$\vec{n}(-2b\ ,\ b\ ,\ -4b)$. Para $b=-1$, obtemos $\vec{n}(2\ ,\ -1\ ,\ 4)$ que é um vetor normal ao plano α.

$\alpha:\ 2(x-0)-1(y-0)+4(z+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+y-4z-4=0$

9.3. $I(0\ ,\ 0\ ,\ -1)$ e $A(-3\ ,\ 6\ ,\ 2)$

Ponto médio de IA: $M\left(-\dfrac{3}{2}\ ,\ 3\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{IA}(-3\ ,\ 6\ ,\ 3)$

Plano mediador de [*IA*]:

$\theta:\ -3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+6(y-3)+3\left(z-\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x+6y+3z-\dfrac{9}{2}-18-\dfrac{3}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x+6y+3z-24=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2y-z+8=0$

Todo o ponto da reta *s* é da forma $(1+k\ ,\ 2+2k\ ,\ -1)$.

O ponto de s que pertence ao plano θ obtém-se para k tal que:

$1+k-2(2+2k)+1+8=0\Leftrightarrow -3k+6=0\Leftrightarrow k=2$

$B(1+2\ ,\ 2+4\ ,\ -1)\ =\ B(3\ ,\ 6\ ,\ -1)$

10. $C(2\ ,\ -2\ ,\ 0)$; $ACB:\ 3x+z=6$ e $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=-2,5$

10.1. a) $E(0\ ,\ y\ ,\ 0)$

$3(x-0)+1(z-0)=0\Leftrightarrow 3x+z=0$

b) Trata-se do plano mediador de [*EC*] que é o plano perpendicular ao eixo *Ox* que passa no ponto médio de [*EC*] cuja abcissa é $\dfrac{2}{2}=1$.

Logo, a equação do plano é $x=1$.

c) [*OECB*] é um quadrado de lado $\overline{EC}=2$.

$E(0\ ,\ -2\ ,\ 0)$

$\vec{n}(3\ ,\ 0\ ,\ 1)$ é um vetor normal ao plano ACB. Portanto, $\vec{n}$ é um vetor diretor de qualquer reta perpendicular a ACB:

$(x\ ,\ y\ ,\ z)=(0\ ,\ -2\ ,\ 0)+k(3\ ,\ 0\ ,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

10.2. $P(1+\sin\alpha\ ,\ \tan\alpha-1\ ,\ \cos\alpha)$

$B(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$ e $E(0\ ,\ -2\ ,\ 0)$

Centro de superfície esférica: $M(1\ ,\ -1\ ,\ 0)$

Raio da superfície esférica: $r=\overline{ME}=\sqrt{1^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}$

Equação da superfície esférica: $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=2$

Como *P* pertence à superfície esférica, temos:

$(1+\sin\alpha-1)^2+(\tan\alpha-1+1)^2+\cos^2\alpha=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2\alpha+\tan^2\alpha+\cos^2\alpha=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\tan^2\alpha=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\tan^2\alpha=2\Leftrightarrow\tan^2\alpha=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\tan\alpha=-1\vee\tan\alpha=1$

Como $\alpha\in\left]0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, temos $\tan\alpha=1$, donde $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ e

$P\left(1+\sin\dfrac{\pi}{4}\ ,\ \tan\dfrac{\pi}{4}-1\ ,\ \cos\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$P\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1-1\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $P\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

10.3. $C(2\ ,\ -2\ ,\ 0)$

A projeção de *A* no plano *Oxy* é o centro do quadrado [*OECB*]. Logo, o ponto *A* tem abcissa 1 e ordenada -1.

$A(1\ ,\ -1\ ,\ z)$ pertence ao plano $3x+z=6$

Então, $3+z=6\Leftrightarrow z=3$, pelo que $A(1\ ,\ -1\ ,\ 3)$.

Assim, a pirâmide [*OECBA*] tem altura 3 e área da base $2^2=4$ pelo que o seu volume é $V_1=\dfrac{1}{3}\times4\times3=4$.

Para determinar o volume da pirâmide [*OECBD*] precisamos de determinar a cota de D.

$A(1\ ,\ -1\ ,\ 3)$, $C(2\ ,\ -2\ ,\ 0)$, $D(1\ ,\ -1\ ,\ z)$ e $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=-2,5$.

$\overrightarrow{CA}(-1\ ,\ 1\ ,\ 3)$ e $\overrightarrow{CD}(-1\ ,\ 1\ ,\ z)$

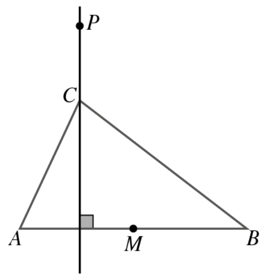
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=-2,5\Leftrightarrow1+1+3z=-2,5\Leftrightarrow3z=-4,5\Leftrightarrow z=-1,5$

Logo, a altura da pirâmide [*OECBD*] é 1,5 e o seu volume é $V_2=\dfrac{1}{3}\times4\times1,5=2$, pelo que o volume do octaedro é $V_1+V_2=4+2=6$.

Avaliação global

Pág. 144

1.



O lugar geométrico dos pontos *P* do plano tais que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0$ é a reta perpendicular a *AB* que passa em C.

Resposta: **(C)**

2. $ACD:\ 2x+2y+z=4$

$A(x\ ,\ 0\ ,\ 0)$: $2x=4\Leftrightarrow x=2$, logo $A(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$.

$C(0\ ,\ y\ ,\ 0)$: $2y=4\Leftrightarrow y=2$, logo $C(0\ ,\ 2\ ,\ 0)$.

$D(0\ ,\ 0\ ,\ z)$: $z=4$, logo $D(0\ ,\ 0\ ,\ 4)$.

$V=2\times2\times4=6$

Resposta: **(A)**

3. $\alpha:\ x-2y+z=1$

$r:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(m\ ,\ -1\ ,\ m)+k(1\ ,\ 1\ ,\ n),\ k\in\mathbb{R}$

Ponto de α com $x=2$ e $y=0$:

$2-0+z=1\Leftrightarrow z=-1$

O ponto (2 , 0 , –1) pertence à reta r .

$(2\ ,\ 0\ ,\ -1)=(m\ ,\ -1\ ,\ m)+k(1\ ,\ 1\ ,\ n),\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

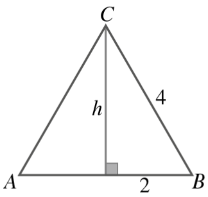
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2=m+k\\0=-1+k\\-1=m+kn\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=m+1\\k=1\\-1=m+n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\k=1\\-1=1+n\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\k=1\\n=-2\end{cases}$$

Resposta: **(C)**

4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$

$\overline{AB}\times\frac{1}{2}\overline{AB}=8\Leftrightarrow\overline{AB}^2=16\Leftrightarrow\overline{AB}=4$



$h^2+2^2=4^2\Leftrightarrow h^2=12\Leftrightarrow h=\sqrt{12}\Leftrightarrow h=2\sqrt{3}$

$A_{[ABC]}=\frac{4\times2\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

Resposta: **(B)**

5. $S:\ (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=3$

$\alpha:\ z=3$

$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=3\wedge z=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-2)^2+(3-2)^2=3\wedge z=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-2)^2=2\wedge z=3$

Circunferência de centro (2 , 2 , 3) e raio $\sqrt{2}$ contida no plano z = 3 .

Resposta: **(C)**

Pág. 145

6. O vetor $\vec{e}_2(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ é normal ao plano xOz .

O vetor $\vec{r}(1\ ,\ 0\ ,\ 1)$ é um vetor diretor da reta r .

$\vec{e}_2\cdot\vec{r}=(0\ ,\ 1\ ,\ 0)\cdot(1\ ,\ 0\ ,\ 1)=0$. Logo, como $\vec{e}_2\perp\vec{r}$, a reta r é paralela ao plano xOz.

7. $A(3\ ,\ 2)$ e $B(x\ ,\ 0)$

7.1. $m_{AB}=\tan135°=\tan(180°-45°)=-\tan45°=-1$

$AB:\ y-2=-1(x-3)\Leftrightarrow y=-x+5$

7.2. $B(x\ ,\ 0)$ é um ponto da reta $y=-x+5$.

Logo, $0=-x+5\Leftrightarrow x=5$ e $B(5\ ,\ 0)$.

7.3. $C(0\ ,\ y)$ e $B(5\ ,\ 0)$

$m_{AB}=-1$

$m_{BC}=\frac{5-0}{0-y}=-\frac{5}{y}$

$m_{AB}\times m_{BC}=-1\Leftrightarrow-1\times\left(-\frac{5}{y}\right)=-1\Leftrightarrow\frac{5}{y}=-1\Leftrightarrow y=-5$

$C(0\ ,\ -5)$

8. $C(6\ ,\ 4)$ e $A(9\ ,\ 0)$

8.1. Seja $P(x\ ,\ y)$ um ponto da reta t .

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(x-9\ ,\ y)\cdot(-3\ ,\ 4)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-3x+27+4y=0\Leftrightarrow4y=3x-27\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{27}{4}$

8.2. Centro da circunferência: $C(6\ ,\ 4)$

Raio da circunferência: $r=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{9+16}=5$

Equação da circunferência: $(x-6)^2+(y-4)^2=25$

8.3. Área de um setor circular = $\frac{\alpha r^2}{2}$

$\frac{25\pi}{12}=\frac{\alpha\times25}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{12}=\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\cos\frac{\pi}{6}=$

$=5\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$

9. $A(6\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$\alpha:\ 3x-4y+2z=18$

9.1. $DE:\ y=0\wedge z=6$

$P(x\ ,\ 0\ ,\ 6)$

Como $P\in\alpha$, vem:

$3x+2\times6=18\Leftrightarrow3x=6\Leftrightarrow x=2$

$P(2\ ,\ 0\ ,\ 6)$

$EF:\ x=6\wedge z=6$

$Q(6\ ,\ y\ ,\ 6)$

Como $Q\in\alpha$, vem:

$18-4y+12=18\Leftrightarrow y=3$

$Q(6\ ,\ 3\ ,\ 6)$

$\overrightarrow{AQ}(0\ ,\ 3\ ,\ 6)$ e $\overrightarrow{AP}(-4\ ,\ 0\ ,\ 6)$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AQ}}\right)=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\left\|\overrightarrow{AQ}\right\|}=$

$=\frac{(0\ ,\ 3\ ,\ 6)\cdot(-4\ ,\ 0\ ,\ 6)}{\sqrt{9+36}\sqrt{16+36}}=\frac{36}{\sqrt{45}\sqrt{52}}=$

$=\frac{36}{3\sqrt{5}\times2\sqrt{13}}=\frac{6}{\sqrt{65}}$

$Q\hat{A}P=\arccos\frac{6}{\sqrt{65}}\approx42°$

9.2. $\vec{n}(3\ ,\ -4\ ,\ 2)$ é um vetor diretor de s .

$E(6\ ,\ 0\ ,\ 6)$

Por exemplo:

$s:\ (x\ ,\ y\ ,\ z)=(6\ ,\ 0\ ,\ 6)+k(3\ ,\ -4\ ,\ 2),\ k\in\mathbb{R}$