Ficha para praticar 1 **Págs. 4 a 7**

1.1. Pela definição da razão trigonométrica seno é imediato que:

$\sin\alpha = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b\sin\alpha$

$\sin\beta = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a\sin\beta$

Portanto, $b\sin\alpha = a\sin\beta \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$.

1.2. Pela definição da razão trigonométrica seno é imediato que:

$\sin\alpha = \frac{h'}{c} \Leftrightarrow h' = c\sin\alpha$

$\sin\gamma = \frac{h'}{a} \Leftrightarrow h' = a\sin\gamma$

Portanto, $c\sin\alpha = a\sin\gamma \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

1.3. $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ e $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$, pelo que

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

2.1. $B\hat{A}C + C\hat{B}A + A\hat{C}B = 180^\circ$, ou seja:

$A\hat{C}B = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow A\hat{C}B = 75^\circ$

Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}} = \frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin 45^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 75^\circ}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \Rightarrow \overline{BC} \approx 2,2$$

$$\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}} = \frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{3} \Leftrightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\overline{AC}} = \frac{\sin 75^\circ}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{3\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \Rightarrow \overline{AC} \approx 2,7$$

Portanto, $A\hat{C}B = 75^\circ$, $\overline{BC} \approx 2,2$ e $\overline{AC} \approx 2,7$.

2.2. $B\hat{A}C + C\hat{B}A + A\hat{C}B = 180^\circ$, ou seja:

$A\hat{C}B = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow A\hat{C}B = 80^\circ$

Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}} = \frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 40^\circ}{2,6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2,6\sin\left(60^\circ\right)}{\sin\left(40^\circ\right)} \Rightarrow \overline{BC} \approx 3,5$$

$$\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}} = \frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin 40^\circ}{2,6} = \frac{\sin 80^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2,6\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} \Rightarrow \overline{AB} \approx 4,0$$

Portanto, $A\hat{C}B = 80^\circ$, $\overline{BC} \approx 3,5$ e $\overline{AB} \approx 4,0$.

2.3. $B\hat{A}C + C\hat{B}A + A\hat{C}B = 180^\circ$, ou seja:

$A\hat{C}B = 180^\circ - 57^\circ - 59^\circ \Leftrightarrow A\hat{C}B = 64^\circ$

Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}} = \frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 57^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 59^\circ}{29} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{29\sin\left(57^\circ\right)}{\sin\left(59^\circ\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{BC} \approx 28,4$$

$$\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}} = \frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin 59^\circ}{29} = \frac{\sin 64^\circ}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{29\sin\left(64^\circ\right)}{\sin\left(59^\circ\right)} \Rightarrow \overline{AB} \approx 30,4$$

Portanto, $A\hat{C}B = 64^\circ$, $\overline{BC} \approx 28,4$ e $\overline{AB} \approx 30,4$.

2.4. $B\hat{A}C + C\hat{B}A + A\hat{C}B = 180^\circ$, ou seja:

$A\hat{C}B = 180^\circ - 80^\circ - 25^\circ \Leftrightarrow A\hat{C}B = 75^\circ$

Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}} = \frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 80^\circ}{15} = \frac{\sin 25^\circ}{\overline{AC}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{15\sin 25^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow \overline{AC} \approx 6,4$$

$$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}} = \frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin 80^\circ}{15} = \frac{\sin 75^\circ}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{15\sin 75^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow \overline{AB} \approx 14,7.$$

Portanto, $A\hat{C}B = 75^\circ$, $\overline{AC} \approx 6,4$ e $\overline{AB} \approx 14,7$.

3. O perímetro P do retângulo [ABC] é igual a:

$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$

Por outro lado, $B\hat{C}A = 2C\hat{A}B$ e, como a soma das amplitudes dos dois ângulos agudos internos de um triângulo retângulo é igual a 90°:

$B\hat{C}A + C\hat{A}B = 90^\circ \Leftrightarrow 2C\hat{A}B + C\hat{A}B = 90^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3C\hat{A}B = 90^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C\hat{A}B = 30^\circ$

pelo que $B\hat{C}A = 60^\circ$.

Assim:

$$\frac{\sin\left(B\hat{C}B\right)}{\overline{AB}} = \frac{\sin\left(C\hat{A}B\right)}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 60^\circ}{40} = \frac{\sin 30^\circ}{\overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{40} = \frac{\frac{1}{2}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{40\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 20\times\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{40}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

Determinemos $\overline{AC}$, utilizando, por exemplo, o Teorema de Pitágoras.

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 40^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \frac{1600}{3} + 1600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \frac{6400}{3}$$

Como $\overline{AC} > 0$, $\overline{AC} = \sqrt{\frac{6400}{3}} = \frac{80}{\sqrt{3}} = \frac{80\sqrt{3}}{3}$.

Portanto:

$$P = 40 + \frac{40\sqrt{3}}{3} + \frac{80\sqrt{3}}{3} = 40 + \frac{120\sqrt{3}}{3} =$$

$$= 40 + 40\sqrt{3} = 40\left(1+\sqrt{3}\right)$$

4. $C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180º$, ou seja:

$A\hat{B}C = 180º - 45º - 75º \Leftrightarrow A\hat{B}C = 60º$

Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(A\hat{B}C\right)}{\overline{AC}} = \frac{\sin\left(B\hat{C}A\right)}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin 60º}{5} = \frac{\sin 45º}{\overline{AB}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{5} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{\sin\left(A\hat{B}C\right)}{\overline{AC}} = \frac{\sin\left(C\hat{A}B\right)}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 60º}{5} = \frac{\sin 75º}{\overline{BC}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{5\sin 75º}{\sin 60º} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{5\sin 75º}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 5\sin 75º \times \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{10\sin 75º}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{10\sqrt{3}\sin 75º}{3}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \frac{5\sqrt{6}}{3} + \frac{10\sqrt{3}\sin 75º}{3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{6} + 10\sqrt{3}\sin 75º}{3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}\left(\sqrt{2} + 2\sin 75º\right)}{3}$$

5. Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(C\hat{A}B\right)}{\overline{BC}} = \frac{\sin\left(B\hat{C}A\right)}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin 45º}{\overline{BC}} = \frac{\sin 30º}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{50\sin 45º}{\sin 30º} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{50\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC = \frac{25\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 50\sqrt{2}$$

6.1. $3\sin 120º + \sin 90º - \sin 60º =$

$$= 3\sin\left(180º - 60º\right) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 3\sin 60º + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sqrt{3} + 1$$

6.2. $\sqrt{2}\sin 135º - 2\sqrt{3}\sin 150º =$

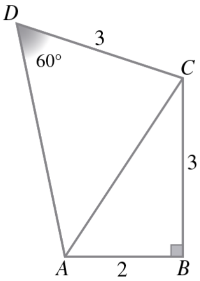
$$= \sqrt{2}\sin\left(180º - 45º\right) - 2\sqrt{3}\sin\left(180º - 30º\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin 45º - 2\sqrt{3}\sin 30º =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1 - \sqrt{3}$$

7. O triângulo [*ABC*] é retângulo em *B*.



Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 13$$

Como, $\overline{AC} > 0$, $\overline{AC} = \sqrt{13}$.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo [*ACD*]:

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 3^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AD}\times 3\cos 60º \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13 = 9 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AD}\times 3\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13 = 9 + \overline{AD}^2 - 3\overline{AD} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 - 3\overline{AD} - 4 = 0$$

Pela fórmula resolvente:

$$\overline{AD} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\times(-4)}}{2} \Leftrightarrow \overline{AD} = 4 \vee \overline{AD} = -1$$

Como $\overline{AD} > 0$, $\overline{AD} = 4$.

Portanto, a medida do perímetro do quadrilátero [*ABCD*] é igual a $2 + 3 + 3 + 4 = 12$.

8.1. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[AC'C]$:

$$b^2 = h^2 + \overline{AC'}^2$$

Como $\cos\alpha = \frac{\overline{AC'}}{b}$, $\overline{AC'} = b\cos\alpha$.

Assim, $h^2 = b^2 - \overline{AC'}^2$, ou seja, $h^2 = b^2 - \left(b\cos\alpha^2\right)$.

8.2. Quando $b = 8$ e $\alpha = 30º$, temos que:

$$h^2 = 8^2 - \left(8\cos 30º\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = 64 - \left(8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 64 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = 64 - 48 \Leftrightarrow h^2 = 16$$

Como $h > 0$, $h = 4$.

Portanto, $h = 4$.

8.3. Pelo Teorema de Carnot, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, pelo que substituindo, nesta equação, *a* por 7, *b* por 5 e *c* por 10, vem:

$$7^2 = 5^2 + 10^2 - 2\times 5\times 10\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 = 25 + 100 - 100\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100\cos\alpha = 76 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{76}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{19}{25}$$

Como $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$:

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{19}{25}\right)^2 = 1 - \frac{361}{625} = \frac{264}{625}$$

Logo, $\sin^2\alpha = \frac{264}{625}$.

9.1. $A\hat{C}B = 180º - 45º - 60º = 75º$

Usando a lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}} = \frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 75º}{3} = \frac{\sin 45º}{\overline{BC}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3\sin 45º}{\sin 75º}$, ou seja, $\overline{BC} \approx 2{,}2$ cm.

$$\frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}}=\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}}\Leftrightarrow\frac{\sin 75^\circ}{3}=\frac{\sin 60^\circ}{\overline{AC}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{3\sin\left(60^\circ\right)}{\sin\left(75^\circ\right)}$$, ou seja, $\overline{BC}\approx 2,7$ cm.

Portanto, $\overline{AC}\approx 2,7$ cm e $\overline{BC}\approx 2,2$ cm.

9.2. $A\hat{C}B=180^\circ-75^\circ-50^\circ=55^\circ$

Usando a lei do seno:

$$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}}=\frac{\sin\left(A\hat{C}D\right)}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\frac{\sin 75^\circ}{6}=\frac{\sin 55^\circ}{\overline{AB}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AB}=\frac{6\sin\left(55^\circ\right)}{\sin\left(75^\circ\right)}$$, ou seja, $\overline{AB}\approx 5,1$ cm.

Usando, novamente, a lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}}=\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}}\Leftrightarrow\frac{\sin 75^\circ}{6}=\frac{\sin 50^\circ}{\overline{AC}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{6\sin 50^\circ}{\sin 75^\circ}$$, ou seja, $\overline{AC}\approx 4,8$ cm.

Portanto, $\overline{AB}\approx 5,1$ cm e $\overline{AC}\approx 4,8$ cm.

10. Usando a lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}}=\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}}=\frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}}$$

$A\hat{C}B=180^\circ-45^\circ-15^\circ=120^\circ$

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sin 15^\circ}{\overline{AC}}=\frac{\sin 120^\circ}{\overline{AB}}$$

Por outro lado, temos que $\sin 120^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo:

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sin 120^\circ}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\overline{AB}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AB}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow\overline{AB}=\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sin 15^\circ}{\overline{AC}}\Leftrightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\overline{AC}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{6}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

11.1. $\sin 120^\circ-\sin 60^\circ+3\sin 90^\circ=$

$=\sin\left(180^\circ-60^\circ\right)-\sin 60^\circ+3\sin 90^\circ=$

$=\sin 60^\circ-\sin 60^\circ+3\sin 90^\circ=$

$=3\sin 90^\circ=3\times 1=3$

11.2. $2\sin 150^\circ+\sin 30^\circ-\frac{1}{2}\sin 90^\circ=$

$=2\sin\left(180^\circ-30^\circ\right)+\sin 30^\circ-\frac{1}{2}\sin 90^\circ=$

$=2\sin 30^\circ+\sin 30^\circ-\frac{1}{2}\sin 90^\circ=$

$=3\sin 30^\circ-\frac{1}{2}\sin 90^\circ=$

$=3\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$

$=1$

11.3. $\sin^2 170^\circ+\sin^2 80^\circ=$

$=\left(\sin 170^\circ\right)^2+\left(\sin 80^\circ\right)^2=$

$=\left[\sin\left(180^\circ-10^\circ\right)\right]^2+\left[\sin\left(90^\circ-10^\circ\right)\right]^2=$

$=\left(\sin 10^\circ\right)^2+\left(\cos 10^\circ\right)^2=$

$=\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ=$

$=1$

11.4. $-\sin 90^\circ\times 2\sin 120^\circ-\left(\sin 30^\circ-\sin 120^\circ\right)^2=$

$=-\sin 90^\circ\times 2\sin\left(180^\circ-60^\circ\right)-\left(\sin 30^\circ-\sin\left(180^\circ-120^\circ\right)\right)^2=$

$=-\sin 90^\circ\times 2\sin 60^\circ-\left(\sin 30^\circ-\sin 60^\circ\right)^2=$

$=-1\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=$

$=-\sqrt{3}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

12.1. Utilizando o Teorema de Carnot (lei dos cossenos):

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\left(B\hat{A}C\right)$

$\Leftrightarrow\overline{BC}^2=3^2+6^2-2\times 3\times 6\times\cos\left(60^\circ\right)$

$\Leftrightarrow\overline{BC}^2=9+36-36\times\cos\left(60^\circ\right)$

$\Leftrightarrow\overline{BC}^2=45-36\times\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\overline{BC}^2=27$

Portanto, $\overline{BC}=\sqrt{27}$, ou seja, $\overline{BC}=3\sqrt{3}\approx 5,20$.

12.2. Utilizando o Teorema de Carnot (lei dos cossenos):

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^2=27+6^2-2\times 3\sqrt{3}\times 6\times\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9=63-36\sqrt{3}\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\left(A\hat{C}B\right)=\frac{54}{36\sqrt{3}}\Leftrightarrow\cos\left(A\hat{C}B\right)=\frac{3}{2\sqrt{3}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\left(A\hat{C}B\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2\times\left(\sqrt{3}\right)^2}\Leftrightarrow\cos\left(A\hat{C}B\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $A\hat{C}B=30^\circ$.

13.1. $a+\cos 120^\circ=\cos 150^\circ-2\times\cos 90^\circ\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+\cos\left(180^\circ-60^\circ\right)=\cos\left(180^\circ-30^\circ\right)-2\times\cos 90^\circ\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-\cos 60^\circ=-\cos 30^\circ-2\times\cos 90^\circ\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

13.2. $2\cos(135^\circ)-2a=\cos(60^\circ)-3\cos(120^\circ)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos(180^\circ-45^\circ)-2a=\cos(60^\circ)-3\cos(180^\circ-60^\circ)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\cos(45^\circ)-2a=\cos(60^\circ)+3\cos(60^\circ)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\cos(45^\circ)-2a=4\cos(60^\circ)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-4\times\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a=-\sqrt{2}-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$

13.3. $a\cos(150^\circ)=\cos(120^\circ)-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cos(180^\circ-30^\circ)=\cos(180^\circ-60^\circ)-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a\cos(30^\circ)=-\cos(60^\circ)-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cos(30^\circ)=\cos(60^\circ)+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=\frac{\cos(60^\circ)+2}{\cos(30^\circ)}\Leftrightarrow a=\frac{\frac{1}{2}+2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow a=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=\frac{5}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

14.1. O ângulo de maior amplitude é o de vértice em *C* porque se opõe ao lado de maior comprimento.

Vamos determinar o cosseno deste ângulo, recorrendo à lei dos cossenos.

$$\cos\left(A\hat{C}B\right)=\frac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{AC}\times\overline{BC}}=\frac{4,2^2+2^2-5^2}{2\times4,2\times2}=\frac{-3,36}{16,8}$$

Como $\cos\left(A\hat{C}B\right)<0$, o ângulo de vértice em *C* é obtuso e, como tal, o triângulo [*ABC*] é obtusângulo.

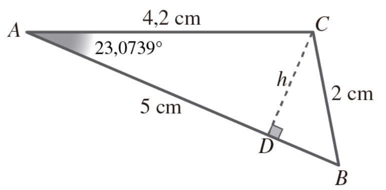
14.2. Vamos determinar uma das três alturas do triângulo.

Por exemplo, para determinar a altura relativa à base [*AC*] necessitamos da amplitude de um dos ângulos de vértice e *A* ou de vértice em *C*.

Assim:

$$\cos(BAC)=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{AB}}=\frac{4,25^2+5^2-2^2}{2\times4,2\times5}=\frac{38,64}{42}$$

Portanto, $B\hat{A}C=\cos^{-1}\left(\frac{38,64}{42}\right)\approx 23,0739^\circ$.



Logo, usando as razões trigonométricas do triângulo [*ACD*] da figura:

$$\sin(23,0739^\circ)=\frac{h}{4,2}\Leftrightarrow h=4,2\sin(23,0739^\circ)$$

Então, a área do triângulo [*ABC*] é dada por:

$$\frac{\overline{AB}\times h}{2}=\frac{5\times4,2\sin(23,0739)}{2}\approx 4,1151\text{ cm}^2$$

A área do triângulo [*ABC*] é, aproximadamente, 4,115 cm^2.

Ficha para praticar 2 **Págs. 8 a 11**

1.1. Para determinar $\overline{BC}$ vamos recorrer ao Teorema de Carrot (lei dos cossenos).

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AC}\times\overline{AB}\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2=5^2+8^2-2\times5\times8\cos60^\circ\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2=25+64-40\Leftrightarrow \overline{BC}^2=49$

Como $\overline{BC}>0$, então $\overline{BC}=7$.

1.2. Aplicando a lei dos senos:

$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}}=\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}}\Leftrightarrow\frac{\sin(60^\circ)}{7}=\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(C\hat{B}A\right)=\frac{5\sin(60^\circ)}{7}\Leftrightarrow \sin\left(C\hat{B}A\right)=\frac{5\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(C\hat{B}A\right)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

Portanto, $C\hat{B}A=\sin^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)$, ou seja, $C\hat{B}A\approx 38^\circ$.

2.1. Aplicando a lei dos cossenos:

- $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\overline{BC}\times\overline{AC}\times\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 6^2=10^2+4,8^2-2\times10\times4,8\times\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 36=100+23,04-96\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \cos\left(A\hat{C}B\right)=\frac{87,04}{96}\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow A\hat{C}B=\cos^{-1}\left(\frac{87,04}{96}\right)\Rightarrow$

  $\Rightarrow A\hat{C}B\approx 24,95^\circ$

- $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 10^2=6^2+4,8^2-2\times6\times4,8\times\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 100=36+23,04-57,6\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \cos\left(B\hat{A}C\right)=\left(-\frac{40,96}{57,6}\right)\Rightarrow$

  $\Rightarrow B\hat{A}C\approx 135,33^\circ$

- $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\left(C\hat{B}A\right)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 4,8^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\left(C\hat{B}A\right)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 23,04=36+100-120\cos\left(C\hat{B}A\right)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \cos\left(C\hat{B}A\right)=\frac{112,96}{120}\Rightarrow$

  $\Rightarrow C\hat{B}A\approx 19,72^\circ$

  Portanto, $A\hat{C}B\approx 24,95^\circ$, $B\hat{A}C\approx 135,33^\circ$ e $C\hat{B}A\approx 19,72^\circ$.

2.2. $B\hat{A}C+C\hat{B}A+A\hat{C}B=180^\circ$, pelo que:

$C\hat{B}A=180^\circ-135^\circ-15^\circ\Leftrightarrow C\hat{B}A=30^\circ$

Recorrendo à lei dos senos:

$\frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}}=\frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\frac{\sin15^\circ}{\overline{BC}}=\frac{\sin135^\circ}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC}=\frac{2\sin15^\circ}{\sin135^\circ}\Rightarrow \overline{BC}\approx 0,73$

Recorrendo novamente à lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}}=\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}}\Leftrightarrow\frac{\sin 135^{\circ}}{2}=\frac{\sin 30^{\circ}}{\overline{AC}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{2\sin 30^{\circ}}{\sin 135^{\circ}}\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\sin\left(180^{\circ}-45^{\circ}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{1}{\sin 45^{\circ}}\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}=\sqrt{2}$$

Portanto, $C\hat{B}A=30^{\circ}$, $\overline{BC}\approx 0,73$ e $\overline{AC}=\sqrt{2}$.

2.3. Para determinar $\overline{AC}$ vamos recorrer ao Teorema de Carnot (lei dos cossenos).

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\left(C\hat{B}A\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}^2=4^2+3,5^2-2\times4\times3,5\times\cos 30^{\circ}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}^2=16+12,25-28\cos 30^{\circ}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}^2=28,25-28\times\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}^2=28,25-14\sqrt{3}$$

Como $\overline{AC}>0$, $\overline{AC}=\sqrt{28,25-14\sqrt{3}}$, ou seja, $\overline{AC}\approx 2,00$.

Para determinar $A\hat{C}B$ vamos recorrer à lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}}=\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}}\Leftrightarrow\frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{4}=\frac{\sin 30^{\circ}}{\sqrt{28,25-14\sqrt{3}}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(A\hat{C}B\right)=\frac{4\sin\left(30^{\circ}\right)}{\sqrt{28,25-14\sqrt{3}}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\hat{C}B=\sin^{-1}\left(\frac{4\sin\left(30^{\circ}\right)}{\sqrt{28,25-14\sqrt{3}}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\hat{C}B\approx 88,97^{\circ}$$

Assim:

$$B\hat{A}C=180^{\circ}-30^{\circ}-88,97^{\circ}\Leftrightarrow B\hat{A}C=61,03^{\circ}$$

Portanto, $\overline{AC}\approx 2,0$, $A\hat{C}B=88,97^{\circ}$ e $B\hat{A}C=61,03^{\circ}$.

2.4. Aplicando a lei dos cossenos:

■ $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\overline{BC}\times\overline{AC}\times\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1,5^2=2,1^2+3^2-2\times2,1\times3\times\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2,25=4,41+9-12,6\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(A\hat{C}B\right)=\frac{11,16}{12,6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\hat{C}B=\cos^{-1}\left(\frac{11,15}{12,6}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\hat{C}B\approx 27,66^{\circ}$$

■ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2,1^2=1,5^2+3^2-2\times1,5\times3\times\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4,41=2,25+9-9\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(B\hat{A}C\right)=\frac{6,84}{9}\Leftrightarrow B\hat{A}C=\cos^{-1}\left(\frac{6,84}{9}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\hat{A}C\approx 40,54^{\circ}$$

Assim tem-se que:

$C\hat{B}A=180^{\circ}-\cos^{-1}\left(\frac{11,16}{12,6}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{6,84}{9}\right)$, ou seja,

$C\hat{B}A\approx 111,80^{\circ}$.

Portanto, $A\hat{C}B\approx 27,66^{\circ}$, $BAC\approx 40,54^{\circ}$ e $C\hat{B}A\approx 111,80^{\circ}$.

3.1. $\sin 135^{\circ}=\sin\left(180^{\circ}-45^{\circ}\right)=\sin 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.2. $\sin 120^{\circ}=\sin\left(180^{\circ}-60^{\circ}\right)=\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.3. $\sin 150^{\circ}=\sin\left(180^{\circ}-30^{\circ}\right)=\sin 30^{\circ}=\frac{1}{2}$

3.4. $\sin 45^{\circ}\times\cos 135^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos\left(180^{\circ}-45^{\circ}\right)=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\cos\left(45^{\circ}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

3.5. $\sin^2\left(170^{\circ}\right)+\sin^2\left(80^{\circ}\right)=\sin^2\left(180^{\circ}-10^{\circ}\right)+\cos^2\left(10^{\circ}\right)=$

$$=\sin^2\left(10\right)+\cos^2\left(10^{0}\right)=1$$

3.6. $2\sin\left(90^{\circ}\right)-2\cos\left(120^{\circ}\right)=2\times1-2\cos\left(180^{\circ}-60^{\circ}\right)=$

$$=2-2\left(-\cos\left(60^{\circ}\right)\right)=2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=3$$

4.1. Aplicando o Teorema de Carnot (lei dos cossenos):

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36=25+16-40\cos\left(A\hat{C}B\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(A\hat{C}D\right)=\frac{5}{40}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\hat{C}B=\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\Rightarrow A\hat{C}B\approx 83^{\circ}$$

4.2. Seja h a altura do triângulo [ABC] relativamente à base [AC].

$$\sin\left(A\hat{C}B\right)=\frac{h}{5}\Leftrightarrow h=5\sin\left(A\hat{C}B\right)$$

Assim:

Área $\Delta_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times h}{2}=\frac{4\times h}{2}=2h=2\times5\sin\left(A\hat{C}B\right)$, ou seja,

$10\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right)\approx 9,9$

Portanto, a área do triângulo [ABC] é aproximadamente igual a 9,9.

5.1. Aplicando a lei dos cossenos:

- $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2,4^2=4,8^2+3,2^2-2\times4,8\times3,2\times\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5,76=23,04+10,24-30,72\cos\left(B\hat{A}C\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(B\hat{A}C\right)=\frac{27,52}{30,72}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\hat{A}C=\cos^{-1}\left(\frac{27,52}{30,72}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\hat{A}C\approx 26,4^{\circ}$$

- $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\left(C\hat{B}A\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3,2^2 = 4,8^2 + 2,4^2 - 2\times4,8\times2,4\times\cos\left(C\hat{B}A\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10,24 = 23,04 + 5,76 - 23,04\cos\left(C\hat{B}A\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(C\hat{B}A\right) = \dfrac{18,56}{23,04} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C\hat{B}A = \cos^{-1}\left(\dfrac{18,56}{23,04}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow C\hat{B}A \approx 26,4^{\circ}$

Finalmente, tem-se que $A\hat{C}B = 180^{\circ} - B\hat{A}C - C\hat{B}A$, ou seja,

$A\hat{C}B = 180^{\circ} - \cos^{-1}\left(\dfrac{27,52}{30,72}\right) - \cos^{-1}\left(\dfrac{18,56}{23,04}\right) \Leftrightarrow$

$\Rightarrow A\hat{C}B \approx 117,3^{\circ}$

Portanto, $B\hat{A}C \approx 26,4^{\circ}$, $C\hat{B}A \approx 36,3^{\circ}$ e $A\hat{C}B \approx 117,3^{\circ}$

5.2. Seja *h* a medida da altura do triângulo [*ABC*] relativamente à base [*AB*].

$\sin\left(B\hat{A}C\right) = \dfrac{h}{3,2} \Leftrightarrow h = 3,2\sin\left(B\hat{A}C\right)$

Por outro lado, tem-se que:

Área $\Delta_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB}\times4}{2} = \dfrac{4,8h}{2} = 2,4h$, ou seja,

$2,4\times3,2\sin\left(B\hat{A}C\right) = 7,68\sin\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{27,52}{30,72}\right)\right) \approx 3,41$

Portanto, a área do triângulo [*ABC*] é aproximadamente igual a 3,41.

6. A circunferência tem raio 3 e *C* é o seu centro.

Sendo *B* um ponto da circunferência, $\overline{BC} = 3$.

Aplicando a lei dos cossenos:

$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\times\overline{BC}\times\overline{AD}\times\cos\left(C\hat{B}A\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 3^2 + 4^2 - 2\times3\times4\times\cos\left(60^{\circ}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 9 + 16 - 24\times\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 13$

Como $\overline{AC} > 0$, vem que $\overline{AC} = \sqrt{13}$.

Por outro lado, tem-se que [*CD*] é um raio da circunferência, pelo que, $\overline{CD} = 3$ e, portanto, $\overline{AD} = \sqrt{13} - 3$.

7. Aplicando a lei dos cossenos:

$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2\overline{AO}\times\overline{BO}\times\cos\left(B\hat{O}A\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1,2r)^2 = r^2 + r^2 - 2r\times r\times\cos(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1,44r^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1,44r^2 - 2r^2 = -2r^2\cos(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,56r^2 = -2r^2\cos(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(x) = \dfrac{0,56r^2}{2r^2} \Leftrightarrow \cos(x) = 0,28$

Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

ou seja,

$\sin^2(x) + 0,28^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2(x) = 1 - 0,28^2 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0,9216$

Como *x* é um ângulo agudo (pois $\cos x > 0$), vem que $\sin x = \sqrt{0,9216} = 0,96$.

Portanto, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, isto é, $\tan x = \dfrac{0,96}{0,28} = \dfrac{24}{7}$.

Assim, $\tan x = \dfrac{24}{7}$.

8.1. Recorrendo à lei dos cossenos:

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\cos\left(B\hat{C}A\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7^2 = \overline{BC}^2 + 3^2 - 2\times\overline{BC}\times3\times\cos60^{\circ} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49 = \overline{BC}^2 + 9 - 6\overline{BC}\times\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40 = \overline{BC}^2 - 3\overline{BC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 - 3\overline{BC} - 40 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-40)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \dfrac{3 \pm \sqrt{169}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 8 \vee \overline{BC} = -5$

Como $\overline{BC} > 0$, então $\overline{BC} = 8$.

8.2. ■ $\cos\left(C\hat{A}B\right) = \dfrac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{AB}} = \dfrac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2\times3\times7} =$

$= \dfrac{-6}{42} = -\dfrac{1}{7}$

Logo, $C\hat{A}B = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{7}\right) \approx 98,2^{\circ}$.

■ $\cos\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{\overline{AV}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}} = \dfrac{7^2 + 8^2 - 3^2}{2\times7\times8} =$

$= \dfrac{104}{112} = \dfrac{13}{14}$

Logo, $A\hat{B}C = \cos^{-1}\left(\dfrac{13}{14}\right) \approx 21,8^{\circ}$.

9. Vamos determinar $\overline{AC}$, utilizando a lei dos cossenos.

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\left(B\hat{A}C\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7^2 = 6^2 + \overline{AC}^2 - 2\times6\times\overline{AC}\times\cos78^{\circ} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49 = 36 + \overline{AC}^2 - 12\overline{AC}\times\cos78^{\circ} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 - 12\overline{AC}\cos(78^{\circ}) - 13 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AC = \dfrac{12\cos(78^{\circ}) \pm \sqrt{\left[12\cos(78^{\circ})\right]^2 - 4\times(-13)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = \dfrac{12\cos(78^{\circ}) + \sqrt{\left(12\cos(78^{\circ})\right)^2 + 52}}{2} \vee$

$\vee AC = \dfrac{12\cos(78^{\circ}) - \sqrt{\left(12\cos(78^{\circ})\right)^2 + 52}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC} \approx 5,063 \vee \overline{AC} \approx -2,568$

Como $\overline{AC} > 0$, então $\overline{AC} \approx 5,063$.

Por outro lado, a área do círculo de centro *A* e raio [*AM*] é dada por $\pi\times\overline{AM}^2 = \pi\times\left(\dfrac{\overline{AC}}{2}\right)^2 = \pi\times\left(\dfrac{5,063}{2}\right)^2 \approx 20,13$.

Logo, a área pedida é 20,13 cm².

10. A soma das amplitudes dos ângulo internos de um triângulo é 180º, pelo que $C\hat{B}A = 180º - 105º - 30º = 45º$.

Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin\left(C\hat{B}A\right)}{\overline{AC}} = \frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}} = \frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\sin(45º)}{10} = \frac{\sin(105º)}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{10\sin(105º)}{\sin(45º)}$$

$$\frac{\sin(45º)}{10} = \frac{\sin(30º)}{\overline{BC}} \Leftrightarrow BC = \frac{10\sin(30º)}{\sin(45º)}$$

Portanto, o perímetro do triângulo [*ABC*] é igual a:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \frac{10\sin(105º)}{\sin(45º)} + \frac{10\sin(30º)}{\sin(45º)} + 10 \approx 30,7$$

11.1. Usando o triângulo [*ABD*], temos que $\tan(55º) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$ e utilizando o triângulo [*ABC*], $\tan(46º) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$.

Como $\overline{BC} = x$:

$\tan 55º = \frac{x+1,4}{\overline{AB}}$ e $\tan 46º = \frac{x}{\overline{AB}}$, daí que:

$\overline{AB} = \frac{x+1,4}{\tan 55º}$ e $AB = \frac{x}{\tan 46º}$, pelo que

$$\frac{x+1,4}{\tan 55º} = \frac{x}{\tan 46º} \Leftrightarrow (x+1,4)\tan 46º = x\tan 55º$$

$$\Leftrightarrow x\tan 46º + 1,4\tan 46º = x\tan 55º \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\tan 55º - x\tan 46º = 1,4\tan 46º \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(\tan 55º - \tan 46º\right) = 1,4\tan 46º \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1,4\tan 46º}{\tan 55º - \tan 46º}$$

11.2. Área do triângulo [*ADC*] = $\frac{\overline{DC}\times\overline{AB}}{2}$

Utilizando o triângulo [*ABC*]:

$\tan 46º = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, ou seja, $\overline{AB} = \frac{BC}{\tan 46º}$

Como $\overline{BC} = \frac{1,4\tan(46º)}{\tan(55º) - \tan(46º)}$:

$$\overline{AB} = \frac{1,4}{\tan(55º) - \tan(40º)}$$

Logo, área do triângulo [*ADC*] = $\frac{1,4\times\overline{AB}}{2} \approx 2,5$.

A área do triângulo [*ADC*] é, aproximadamente, 2,5 cm^2.

12. Temos que $B\hat{C}A = \alpha$ (já que o ângulo *BCA* tem lados paralelos ao ângulo de amplitude α). Assim, utilizando a lei dos cossenos, vem que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\cos\left(B\hat{C}A\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,5^2 = 1,2^2 + 2,1^2 - 2\times 1,2\times 2,1\times\cos\left(B\hat{C}A\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2,25 = 5,85 - 5,04\cos\left(B\hat{C}A\right) \Leftrightarrow \cos\left(B\hat{C}A\right) = \frac{3,6}{5,04}$$

Portanto, $B\hat{C}A = \cos^{-1}\left(\frac{3,6}{5,04}\right) \approx 44º$.

Logo, $\alpha \approx 44º$.

13. Utilizando a lei dos cossenos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a+3}\right)^2 = \left(\sqrt{a+1}\right)^2 + \left(\sqrt{3a-2}\right)^2 -$$

$$-2\times\sqrt{a+1}\times\sqrt{3a-2}\times\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+3 = a+1+3a-2-2\sqrt{(a+1)(3a-2)}\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+3 = 4a-1-2\sqrt{(a+1)(3a-2)}\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3a+4 = -2\sqrt{(a+1)(3a-2)}\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-3a}{2} = \sqrt{(a+1)(3a-2)}\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4-3a}{2\sqrt{(a+1)(3a-2)}}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, ou seja,

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{4-3a}{2\sqrt{(a+1)(3a-2)}}\right)^2 = 1 - \frac{(4-3a)^2}{4(a+1)(3a-2)}$$

$$= \frac{4(a+1)(3a-2)-(4-3a)^2}{4(a+1)(3a-2)} =$$

$$= \frac{4\left(3a^2-2a+3a-2\right)-\left(16-24a+9a^2\right)}{4(a+1)(3a-2)} =$$

$$= \frac{12a^2+4a-8-16+24a-9a^2}{4(a+1)(3a-2)} = \frac{3a^2+28a-24}{4(a+1)(3a-2)}$$

Ficha de teste 1 **Págs. 12 e 13**

1. Aplicando a lei dos cossenos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos\left(A\hat{C}B\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6^2 = 4^2 + 5^2 - 2\times 4\times 5\cos\left(A\hat{C}B\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36 = 16 + 25 - 40\cos\left(A\hat{C}B\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(A\hat{C}B\right) = \frac{1}{8}$$

Como $A\hat{C}B = x$, $\cos x = \frac{11}{8}$.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{1}{64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{63}{64}$$

Como *x* é um ângulo agudo (o triângulo [*HBC*] é acutângulo), $\sin x > 0$. Portanto $\sin x = \frac{\sqrt{63}}{8}$.

Resposta: **(C)**

2. $$\frac{\sin(120º)}{\sin(90º)+\cos(150º)} = \frac{\sin(180º-60)}{1+\cos(180º-30º)} =$$

$$= \frac{\sin 60º}{1-\cos 30º} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3} = 2\sqrt{3}+3$$

Resposta: **(A)**

3. Aplicando o Teorema de Carnot (lei dos cossenos):

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\left(C\hat{B}A\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 2^2 + 4^2 - 2\times2\times4\cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 28 = 4 + 16 - 16\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha = 120^\circ$

Portanto, $\alpha = 120^\circ$.

Resposta: **(B)**

4. O triângulo [*ABC*] é isósceles e, como $A\hat{C}B = 120^\circ$, tem-se que:

$B\hat{A}C = C\hat{B}A$ e $B\hat{A}C + C\hat{B}A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Portanto, $B\hat{A}C = C\hat{B}A = 30^\circ$.

Aplicando a lei dos senos:

$\frac{\sin\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}} = \frac{\sin\left(B\hat{A}C\right)}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 120^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 30^\circ}{\overline{BC}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(180^\circ - 60^\circ\right)}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin\left(60^\circ\right)}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\overline{BC}}$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 3\times\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{3}$

Portanto, o perímetro do triângulo [*ABC*] é igual a $6 + 4\sqrt{3}$.

Resposta: **(D)**

5.
- $\frac{3}{1+\sin\left(150^\circ\right)} = \frac{3}{1+\sin\left(180^\circ-30^\circ\right)} = \frac{3}{1+\sin 30^\circ} =$

  $= \frac{3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 3\times\frac{2}{3} = 2$

- $\frac{2\cos\left(120^\circ\right)+1}{3} = \frac{2\left(\cos\left(180^\circ-60^\circ\right)\right)+1}{3} =$

  $= \frac{2\left(-\cos\left(60^\circ\right)\right)+1}{3} = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{3} = \frac{-1+1}{3} = 0$

- $\frac{4}{\cos 90^\circ} = \frac{4}{0}$, pelo que $\frac{4}{0} \notin \mathbb{R}$.

- $\frac{2}{\sin\left(90^\circ\right)} = \frac{2}{1} = 2$

Resposta: **(C)**

6. O perímetro do losango [*ABCD*] é igual a 20 unidades, pelo que a medida do comprimento de cada um dos seus lados é igual a 5 unidades.

Por outro lado, $A\hat{D}C = 30^\circ$.

Portanto, $B\hat{A}D = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ e, consequentemente, $C\hat{A}D = 150^\circ : 2 = 75^\circ$.

Recorrendo à lei dos cossenos:

$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos\left(A\hat{D}C\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2 - 2\times5\times5\times\cos\left(30^\circ\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 + 25 - 50\times\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 50 - 25\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25\left(2-\sqrt{3}\right)$

Como $\overline{AC} > 0$, $\overline{AC} = \sqrt{25\left(2-\sqrt{3}\right)}$, ou seja, $\overline{AC} = 5\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Recorrendo, novamente, à lei dos cossenos, tem-se:

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos\left(B\hat{A}D\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 5^2 + 5^2 - 2\times5\times5\times\cos\left(150^\circ\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 25 + 25 - 50\times\cos\left(180^\circ - 30^\circ\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 50 - 50\times\left(-\cos 30^\circ\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 50 - 50\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 50 + 25\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 25\left(2+\sqrt{3}\right)$

Como $\overline{BD} > 0$, $\overline{BD} = \sqrt{25\left(2+\sqrt{3}\right)}$, ou seja, $\overline{BD} = 5\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Então, a área do losango [*ABCD*] é igual a:

$\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{2} = \frac{5\sqrt{2-\sqrt{3}}\times5\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} =$

$= \frac{25\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2} = \frac{25\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}}{2} =$

$= \frac{25\sqrt{4-3}}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$

7. $C\hat{B}D = D\hat{C}B = 30^\circ$, pelo que $B\hat{D}C = 180^\circ - 2\times30^\circ = 120^\circ$, consequentemente, $C\hat{D}A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Sabe-se, ainda, que $\overline{DB} = \overline{CD}$.

Pela lei dos senos:

$\frac{\sin\left(C\hat{B}D\right)}{\overline{CD}} = \frac{\sin\left(B\hat{D}C\right)}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sin 30^\circ}{\overline{CD}} = \frac{\sin 120^\circ}{3+\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\overline{CD}} = \frac{\sin\left(180^\circ-60^\circ\right)}{3+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\overline{CD}} = \frac{\sin 60^\circ}{3+\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{3\sqrt{3}+3}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{3} + 1$

$B\hat{A}C + C\hat{B}A + A\hat{C}B = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B\hat{A}C + 30^\circ + 75^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B\hat{A}C = 75^\circ$

Assim, conclui-se que o triângulo [*ABC*] é isósceles (tem dois ângulos internos de igual amplitude). Portanto, $\overline{AB}=\overline{BC}$, ou seja,

$\overline{AB}=\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AD}+\overline{DB}=\overline{BC}$, mas $\overline{DB}=\overline{CD}$, pelo que

$\overline{AD}+\overline{CD}=\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AD}+\sqrt{3}+1=3+\sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{AD}=3+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1$

$\Leftrightarrow \overline{AD}=2$

Logo, $\overline{AD}=2$.

8. $\dfrac{\cos 20^\circ+\sin 135^\circ+\cos 160^\circ}{1-2\cos 135^\circ}=$

$=\dfrac{\cos(20^\circ)+\sin(180^\circ-45^\circ)+\cos(180^\circ-20^\circ)}{1-2\cos(180^\circ-45^\circ)}=$

$=\dfrac{\cos(20^\circ)+\sin(45^\circ)-\cos(20^\circ)}{1+2\cos(45^\circ)}=$

$=\dfrac{\sin(45^\circ)}{1+2\cos(45^\circ)}=$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{1^2-\sqrt{2}^2}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{1-2}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{-1}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9. $D\hat{A}C+A\hat{C}D+C\hat{D}A=180^\circ$, ou seja:

$A\hat{C}D=180^\circ-90^\circ-60^\circ \Leftrightarrow A\hat{C}D=30^\circ$

Aplicando a lei dos senos:

$\dfrac{\sin(A\hat{C}D)}{\overline{AD}}=\dfrac{\sin(D\hat{A}C)}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \dfrac{\sin 30^\circ}{\overline{AD}}=\dfrac{\sin 60^\circ}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}}{\overline{AD}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{AD}=\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \overline{AD}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \overline{AD}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AD}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sin(C\hat{B}A)=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin(C\hat{B}A)=\dfrac{2}{4} \Leftrightarrow \sin(C\hat{B}A)=\dfrac{1}{2}$, pelo que $C\hat{B}A=30^\circ$ e, consequentemente, $D\hat{C}B=30^\circ$.

Assim:

$\dfrac{\sin(D\hat{C}B)}{\overline{DB}}=\dfrac{\sin(C\hat{B}D)}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \dfrac{\sin(60^\circ)}{\overline{DB}}=\dfrac{\sin(30^\circ)}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\overline{DB}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{DB}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{DB}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{DB}=2\sqrt{3}$

Finalmente:

$\cos(A\hat{C}D)=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos(30^\circ)=\dfrac{2}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2}{\overline{AC}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}=\dfrac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Então, $A\hat{C}B=90^\circ, C\hat{B}A=30^\circ, \overline{AC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ e

$\overline{AB}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

10. Aplicando a lei dos cossenos:

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos(A\hat{C}B)$

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2=100^2+160^2-2\times100\times160\times\cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2=10000+25600-32000\times\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2=19600$

Como $\overline{AB}>0$, $\overline{AB}=\sqrt{19600}=140$.

Ainda pela lei dos cossenos:

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(C\hat{B}A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100^2=140^2+160^2-2\times140\times160\times\cos(C\hat{B}A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\,000=25600+19600-44\,800\cos(C\hat{B}A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(C\hat{B}A)=\dfrac{35\,200}{44\,800} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C\hat{B}A=\cos^{-1}\left(\dfrac{35200}{44800}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C\hat{B}A\approx 38,2^\circ$

Portanto, $\overline{AB}=140$ m e $C\hat{B}A\approx 38,2^\circ$.

Ficha para praticar 3 **Págs. 14 a 17**

1.1. a) Temos que 360º : 6 = 60º. Portanto, dois vértices consecutivos do hexágono regular [*ABCDEF*] definem na circunferência arcos de 60º de amplitude. Assim, $A\hat{O}C = 120º$, pelo que se $\dot{O}A$ é o lado origem do ângulo definido por $(120º\,,\,2)$, o lado extremidade é $\dot{O}C$.

b) $5\times(-60º) = -300º$, pelo que $A\hat{O}B = -300º$. Logo se $\dot{O}A$ é o lado origem do ângulo definido por $(-300º\,,\,-1)$, o lado extremidade é $\dot{O}B$.

c) $3\times(-60º) = -180º$, pelo que $A\hat{O}D = -180º$, lado origem do ângulo definido por $(-180º\,,\,-3)$, o lado extremidade é $\dot{O}D$.

d) $4\times 60º = 240º$, pelo que $A\hat{O}E = 240º$, logo se $\dot{O}A$ é o lado origem do ângulo definido por $(240º\,,\,5)$, o lado extremidade é $\dot{O}E$.

1.2. a) Temos que 960º = 2 × 360º + 240º, pelo que se trata do ângulo generalizado $(240º\,,\,2)$. Logo, se $\dot{O}A$ é o lado origem do ângulo definido por $(240º\,,\,2)$, o lado extremidade é $\dot{O}E$.

b) Temos que –2100 = –5 × 360º – 300º, pelo que se trata do ângulo generalizado $(-300º\,,\,-5)$. Logo, se $\dot{O}A$ é o lado do ângulo definido por $(-300º\,,\,-5)$, o lado extremidade é $\dot{O}B$.

c) Temos que $4500º = 12\times 360º + 180º$, pelo que se trata do ângulo generalizado $(180º\,,12)$. Logo, se $\dot{O}A$ é o lado origem do ângulo definido por $(180º\,,12)$, o lado extremidade é $\dot{O}D$.

d) Temos que $-1680º = -4\times 360º - 240º$, pelo que se trata do ângulo generalizado $(-240º\,,\,-4)$. Logo, se $\dot{O}A$ é o lado origem do ângulo definido por $(-240º\,,\,-4)$, o lado extremidade é $\dot{O}C$.

2.1. O ângulo *EAF* tem amplitude 60º e é inscrito na circunferência, pelo que $\overset{\frown}{EF} = 120º$.
Por outro lado, sabe-se que [*DB*] é um diâmetro da circunferência, portanto, $\overset{\frown}{BD} = 180º$.
Tem-se, ainda, que $\overset{\frown}{FD} = 20º$. Assim, vem que:
$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FD} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 180º = \overset{\frown}{BF} + 120º + 20º \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = 40º$

2.2. a) $490º = 130º + 1\times 360º$, portanto, 490º é a amplitude do ângulo generalizado $(130º\,,1)$. Assim, vem que:
$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE} = 90º + 40º = 130º$, pelo que o transformado do ponto *A* pela rotação de centro *O* e ângulo $(130º\,,1)$ é o ponto *E*.

b) $-1190º = -110º - 3\times 360º$, portanto, $-1108º$ é a amplitude do ângulo generalizado $(-110º\,,\,-3)$. Assim,
$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{FD} = 110º$, pelo que o transformado do ponto *A* pela rotação de centro *O* e ângulo $(-110º\,,\,-3)$ é o ponto *F*.

c) $2410º = 250º + 6\times 360º$, portanto, $2410º$ é a amplitude do ângulo generalizado $(250º\,,\,6)$. Assim,
$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EF} = 90º + 40º + 120º = 250º$, pelo que o transformado do ponto *A* pela rotação de centro *O* e ângulo $(250º\,,\,6)$ é o ponto *F*.

d) $-1670º = -230º - 4\times 360º$, portanto, $-1670º$ é a amplitude do ângulo generalizado $(-230º\,,\,-4)$.
Assim, $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{FF} = 90º + 20º + 120º = 230º$, pelo que o transformado do ponto *A* pela rotação de centro *O* e ângulo $(-230º\,,\,-4)$ é o ponto *E*.

2.3. O ângulo *EAF* tem amplitude 60º, pelo que se α é o ângulo orientado que determina a rotação de centro *A* que transforma *E* em *F*, temos que a amplitude de α pode ser 60º ou –300º, respetivamente, quando a semirreta $\dot{A}E$ roda, no sentido positivo, em torno do ponto *A*, ou quando a semirreta $\dot{A}E$ roda, no sentido negativo, em torno do ponto *A*.

2.4. a) $\overset{\frown}{BF} = 40º$, pelo que $B\hat{A}E = 20º$, então $B\hat{A}F = 20º + 60º = 80º$.
Assim, o lado extremidade é $\dot{A}F$.

b) Temos que $\overset{\frown}{FD} = 20º$, pelo que $F\hat{A}D = 10º$, então, $B\hat{A}D = 90º$ (ou, simplesmente, por ser um ângulo interno de um quadrado).
Assim, o lado extremidade é $\dot{A}D$.

3.1. $500º = 140º + 1\times 360º$, portanto, 500º é a amplitude do ângulo generalizado $(140º\,,1)$. Como 140º é a amplitude de um ângulo cujo lado extremidade se situa no 2.º quadrante, então 500º é a amplitude de um ângulo do 2.º quadrante.

3.2. –205º é a amplitude de um ângulo do 2.º quadrante.

3.3. 1660º = 220º + 4 × 360º, portanto, 1660º é a amplitude do ângulo generalizado $(220º\,,\,4)$.
Como $220º$ é a amplitude de um ângulo cujo lado extremidade se situa no 3.º quadrante, então 1660º é a amplitude de um ângulo do 3.º quadrante.

3.4. $-2370º = -210º - 6\times 360º$, portanto, $-2370º$ é a amplitude do ângulo generalizado $(-210º\,,\,-6)$.
Como –210º é amplitude de um ângulo cujo lado extremidade se situa no 2.º quadrante, então, –2370º é a amplitude de um ângulo do 2.º quadrante.

3.5. $-410º = -50º - 1\times 360º$, portanto, –4100º é a amplitude do ângulo generalizado $(-50º\,,\,-1)$.
Como –50º é a amplitude de um ângulo cujo lado extremidade se situa no 4.º quadrante, então, –410º é a amplitude de um ângulo do 4.º quadrante.

3.6. $-1450º = -10º - 4\times 360º$, portanto, –1450º é a amplitude do ângulo generalizado $(-10º\,,\,-4)$.
Como –10º é a amplitude de um ângulo cujo lado extremidade se situa no 4.º quadrante, então –1450º é a amplitude de um ângulo do 4.º quadrante.

3.7. –280º é a amplitude de um ângulo do 1.º quadrante.

3.8. $1590^\circ = 150^\circ + 4\times 360^\circ$, portanto, 1590° é amplitude do ângulo generalizado $(150^\circ\,,\,4)$.

Como 150° é a amplitude de um ângulo cujo lado extremidade se situa no 2.º quadrante, então 1590° é a amplitude de um ângulo do 2.º quadrante.

4.1. Temos que $\alpha = 100^\circ$, portanto, α pertence ao 2.º quadrante, pelo que $\sin\alpha > 0$ e $\cos\,\alpha < 0$.

4.2. Temos que $\alpha = -340^\circ$, portanto, α pertence ao 1.º quadrante, pelo que $\sin\alpha > 0$ e $\cos\alpha > 0$.

4.3. Temos que $\alpha = -170^\circ$, portanto, α pertence ao 3.º quadrante, pelo que $\sin\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$.

4.4. $-700 = -340^\circ - 1\times 360^\circ$, logo -700° é a amplitude do ângulo generalizado $(-340^\circ\,,\,-1)$. Assim, $\alpha = -700^\circ$ pertence ao 1.º quadrante, pelo que $\sin\alpha > 0$ e $\cos\alpha > 0$.

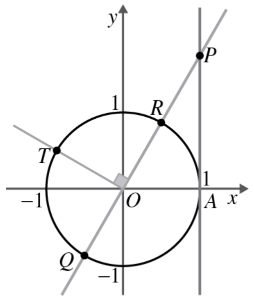
5.1. Tem-se que $A\hat{O}R = 60^\circ$, pelo que $R(\cos 60^\circ\,,\,\sin 60^\circ)$, isto é, $R\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Por outro lado, tem-se que o ponto Q é a imagem do ponto R pela reflexão central de centro O, logo, o ponto Q tem coordenadas $\left(-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5.2. Área triângulo $[OPA]$ = $\dfrac{\overline{OA}\times\overline{AP}}{2} = \dfrac{1\times\overline{AP}}{2} = \dfrac{\overline{AP}}{2}$.

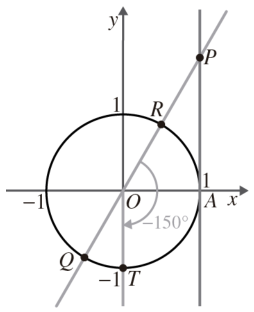
Por outro lado, tem-se que $P(1\,,\,\tan 60^\circ)$, ou seja, $P\left(1\,,\,\sqrt{3}\right)$.

Assim, $\overline{AP} = \sqrt{3}$, logo, a área do triângulo $[OAP]$ é $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5.3. **a)** Trata-se do lado extremidade $\dot{O}T$.



b) Trata-se do lado extremidade $\dot{O}T$.



6.1. $\sin(540^\circ) - 2\cos(-315^\circ) + \sin(-225^\circ) =$

$= \sin(180^\circ + 360^\circ) - 2\cos(-315^\circ + 360^\circ) + \sin(-225^\circ + 360^\circ) =$

$= \sin(180^\circ) - 2\cos(45^\circ) + \sin(135^\circ) =$

$= \sin(180^\circ) - 2\cos(45^\circ) + \sin(180^\circ - 45^\circ) =$

$= \sin(180^\circ) - 2\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) =$

$= 0 - 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 - 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6.2. $\cos(495^\circ) - \sin(-405^\circ) - \sin(1170^\circ) =$

$= \cos(135 + 360^\circ) - \sin(-45^\circ - 360^\circ) - \sin(90^\circ + 3\times 360^\circ) =$

$= \cos(135^\circ) - \sin(-45^\circ) - \sin(90^\circ) =$

$= \cos(180^\circ - 45) + \sin(45^\circ) - \sin(90^\circ) =$

$= -\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) - \sin(90^\circ) =$

$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -1$

6.3. $\dfrac{\tan(-135^\circ) + \sin(-150^\circ)}{\sin(-270^\circ) - \tan(420^\circ)} =$

$= \dfrac{\tan(-135^\circ + 180^\circ) + \sin(-150^\circ + 360^\circ)}{\sin(-270^\circ + 360^\circ) - \tan(60^\circ + 360^\circ)} =$

$= \dfrac{\tan(45^\circ) + \sin(210^\circ)}{\sin(90^\circ) - \tan(60^\circ)} =$

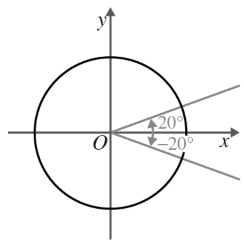
$= \dfrac{\tan(45^\circ) + \sin(180^\circ + 30^\circ)}{\sin(90^\circ) - \tan(60^\circ)} =$

$= \dfrac{\tan(45^\circ) - \sin(30^\circ)}{\sin(90^\circ) - \tan(60^\circ)} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)}{\left(1 - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \dfrac{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}{1^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} =$

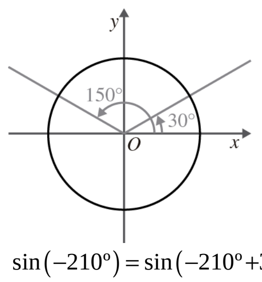
$= \dfrac{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}{-2} = -\dfrac{1 + \sqrt{3}}{4}$

7.1.



$\cos(-20^\circ) = \cos(20^\circ)$, portanto, trata-se dos ângulos generalizados $(-20^\circ\,,\,n)$ e $(20^\circ\,,\,n)$, com n inteiro.

7.2.



$\sin(-210^\circ) = \sin(-210^\circ + 360^\circ)$

$= \sin(150)^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin(30^\circ)$

Portanto, trata-se dos ângulos generalizados $(30^\circ\,,\,n)$ e $(150^\circ\,,\,n)$, com n inteiro.

8.1. $\alpha = 172^\circ$ pertence ao 2.º quadrante

8.2. $\alpha = 302^\circ$ pertence ao 4.º quadrante.

8.3. $\alpha = 742^\circ = 22^\circ + 2\times 360^\circ$, logo $\alpha = 742^\circ = (22^\circ, 2)$ pertence ao 1.º quadrante.

8.4. $\alpha = -105^\circ$ pertence ao 3.º quadrante

8.5. $\alpha=-1312^\circ=-232^\circ-3\times360^\circ$, logo
$\alpha=-1312^\circ=(-232^\circ\ ,-3)$ pertence ao 2.º quadrante.

8.6. $\alpha=-616^\circ=-256^\circ-360^\circ$, logo $\alpha=-616^\circ=(-256^\circ\ ,1)$
pertence ao 2.º quadrante.

8.7. $\alpha=-1441^\circ=-1^\circ-4\times360^\circ$, logo $\alpha=-1441^\circ=(-1^\circ\ ,-4)$
pertence ao 4.º quadrante.

8.8. $\alpha=1500^\circ=60^\circ+4\times360^\circ$, logo $\alpha=1500^\circ=(60^\circ\ ,4)$
pertence ao 1.º quadrante.

9.1. $\alpha=100^\circ$ pertence ao 2.º quadrante, pelo que $\cos\alpha<0$
$\beta=470^\circ=110^\circ+360^\circ$, logo $\beta=470^\circ=(110^\circ\ ,1)$ pertence ao 2.º quadrante, portanto, $\sin\beta>0$.
Assim, $\cos(100^\circ)-\sin(470^\circ)<0$, ou seja, é negativo.

9.2. $\alpha=-1100^\circ=-20^\circ-3\times360^\circ$, logo
$\alpha=-1100^\circ=(-30^\circ\ ,-3)$ pertence ao 4.º quadrante, pelo que, $\tan\alpha<0$.
$\beta=-730^\circ=-10^\circ-2\times360^\circ$, logo $\beta=-730^\circ=(-10^\circ\ ,-2)$
pertence ao 4.º quadrante, portanto, $\cos\beta>0$.
Assim, $\tan(-1100^\circ)\times\cos(-730^\circ)<0$, ou seja, é negativo.

9.3. $\alpha=-120^\circ$ pertence ao 3.º quadrante, pelo que, $\tan\alpha>0$.
$\beta=-40^\circ$ pertence ao 4.º quadrante, pelo que, $\cos\beta>0$.
Assim, $\tan(-120^\circ)+\cos(-40^\circ)>0$, ou seja, é positivo.

9.4. $\alpha=-1280^\circ=-200^\circ-3\times360^\circ$, logo $\alpha=(-200^\circ\ ,-3)$
pertence ao 2.º quadrante, portanto $\sin\alpha>0$.
$p=-600^\circ=-240^\circ-360^\circ$, logo $\beta=(-240^\circ\ ,-1)$ pertence ao 2.º quadrante, portanto $\tan\beta<0$ e, consequentemente, $\tan^2\beta>0$.
$\theta=-420^\circ=-60^\circ-360^\circ$, logo $\theta=(-60^\circ\ ,-1)$ pertence ao 4.º quadrante, portanto, $\cos\theta>0$.
Assim $\dfrac{\sin(-1280^\circ)\times\tan^2(-600^\circ)}{\cos(-420^\circ)}>0$, ou seja, é positivo.

10.1. $P(\cos150^\circ\ ,\sin150^\circ)$

$$\cos(150^\circ)=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos30^\circ=-\frac{\sqrt3}{2}$$

$$\sin(150^\circ)=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ=\frac12$$

Logo, o ponto P tem coordenadas $\left(-\dfrac{\sqrt3}{2}\ ,\dfrac12\right)$.

As coordenadas do ponto T são $(1\ ,\tan150^\circ)$.

$$\tan150^\circ=\frac{\sin150^\circ}{\cos150^\circ}=\frac{\frac12}{-\frac{\sqrt3}{2}}=-\frac{1}{\sqrt3}=-\frac{\sqrt3}{3}$$

Portanto, o ponto T tem coordenadas $\left(1\ ,-\dfrac{\sqrt3}{3}\right)$.

Assim, $P\left(-\dfrac{\sqrt3}{2}\ ,\dfrac12\right)$ e $T\left(1\ ,-\dfrac{\sqrt3}{3}\right)$.

10.2. $QT=OT-OQ=\sqrt{1+\left(-\dfrac{\sqrt3}{3}\right)^2}-1=$

$$=\sqrt{\frac43}-1=\frac{2}{\sqrt3}-1=\frac{2\sqrt3}{3}-1$$

11.1. $\alpha=-200^\circ$ pertence ao 2.º quadrante, pelo que $\sin\alpha>0$.
β pertence ao 3.º quadrante, pelo que $\cos\beta<0$.
Assim, $\sin\alpha-\cos\beta>0$, ou seja, é positivo.

11.2. β pertence ao 3.º quadrante, pelo que $\tan\beta>0$, e consequentemente, $-2\tan\beta<0$.
$\alpha=-200^\circ$ pertence ao 2.º quadrante, pelo que $\cos\alpha<0$.
Assim, $-2\tan\beta\times\cos\alpha>0$, ou seja, é positivo.

11.3. β pertence ao 3.º quadrante, pelo que $\sin\beta<0$.
$\alpha=-200^\circ$ pertence ao 2.º quadrante, pelo que $\tan\alpha<0$ e, consequentemente, $2\tan\alpha<0$.
Assim, $\sin\beta+2\tan\alpha<0$, ou seja, é negativo.

11.4. $180^\circ<\beta<270^\circ$, logo
$-200^\circ+180^\circ<\alpha+\beta<-200^\circ+270^\circ$, ou seja,
$-20^\circ<\alpha+\beta<70^\circ$
$\alpha+\beta$ pode pertencer ao 1.º quadrante, ao 4.º quadrante ou ao semieixo positivo *Ox*, pelo que um qualquer dos casos $\cos(\alpha+\beta)>0$, ou seja, é positivo.

12.1. $\left(\sin(-1845^\circ)-2\cos(-765^\circ)\right)^2-\tan(1125^\circ)=$

$$=\left(\sin(-45^\circ-5\times360^\circ)-2\cos(-45^\circ-2\times360^\circ)\right)^2-\tan(45^\circ+3\times360^\circ)=$$

$$=\left(\sin(-45^\circ)-2\cos(-45^\circ)\right)^2-\tan(45^\circ)=$$

$$=\left(-\sin45^\circ-2\cos45^\circ\right)^2-\left(\tan45^\circ\right)=$$

$$=\left(-\frac{\sqrt2}{2}-2\frac{\sqrt2}{2}\right)^2-1=\left(-\frac{3\sqrt2}{2}\right)^2-1=\frac92-1=\frac72$$

12.2. $\sin(-1650^\circ)+3\cos(840^\circ)-\sin(2970^\circ)=$

$$=\sin(-210^\circ-4\times360^\circ)+3\cos(120^\circ+2\times360^\circ)-\sin(90^\circ+8\times360^\circ)=$$

$$=\sin(-210^\circ)+3\cos(120^\circ)-\sin(90^\circ)=$$

$$=\sin(-210^\circ+360^\circ)+3\cos(180^\circ-60^\circ)-1=$$

$$=\sin(150^\circ)-3\cos(60^\circ)-1=$$

$$=\sin(180^\circ-30^\circ)-3\cos(60^\circ)-1=$$

$$=\sin30^\circ-3\cos(60^\circ)-1=\frac12-3\left(\frac12\right)-1=$$

$$=-1-1=-2$$

12.3. $\dfrac{\sin(-2220^\circ)-\tan(-210^\circ)}{\tan(-240^\circ)-\cos(1260^\circ)}=$

$$=\frac{\sin(-60^\circ-6\times360^\circ)-\tan(-210^\circ)}{\tan(-240^\circ)-\cos(180^\circ+3\times1080^\circ)}=$$

$$=\frac{\sin(-60^\circ)-\tan(-210^\circ)}{\tan(-240^\circ)-\cos(180^\circ)}=$$

$$=\frac{-\sin(60^\circ)-\tan(-210^\circ+360^\circ)}{\tan(-240^\circ+360^\circ)-\cos(180^\circ)}=$$

$$=\frac{-\sin(60^\circ)-\tan(150^\circ)}{\tan(120^\circ)-\cos(180^\circ)}=$$

$$= \frac{-\sin(60^\circ) - \tan(180^\circ - 30^\circ)}{-\tan(180^\circ - 60^\circ) - \cos(180^\circ)} =$$

$$= \frac{-\sin(60^\circ) + \tan 30^\circ}{-\tan(60^\circ) - (-1)} =$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\sqrt{3} + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = -\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}}{1 - 3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}$$

12.4. $(\cos(-405^\circ) - \tan(585^\circ))(\sin(2565^\circ) + \cos(-405^\circ)) =$

$$= (\cos(-45^\circ - 360^\circ) - \tan(225^\circ + 360^\circ)) \times$$

$$\times (\sin(45^\circ + 7 \times 360^\circ) + \cos(-45^\circ - 360^\circ)) =$$

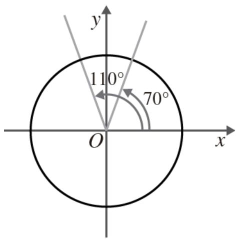
$$= (\cos(-45^\circ) - \tan(225^\circ))(\sin(45^\circ) + \cos(-45^\circ)) =$$

$$= (\cos(45^\circ) - \tan(180^\circ + 45^\circ))(\sin(45^\circ) + \cos(45^\circ)) =$$

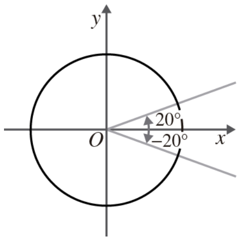
$$= (\cos(45^\circ) - \tan(45^\circ))(\sin(45^\circ) + \cos(45^\circ)) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\sqrt{2} = \frac{2}{2} - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$$

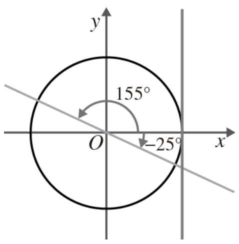
13.1.



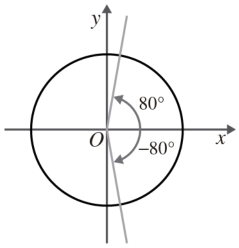
13.2.



13.3.



13.4. $\cos(-440^\circ) = \cos(-80^\circ - 360^\circ) = \cos(-80^\circ)$



14.1. Qualquer que seja o ângulo orientado β , temos:

$-1 \le \cos\beta \le 1$, pelo que, $-5 \le 5\cos\beta \le 5$.

Logo, valor máximo: 5 e valor mínimo: –5.

14.2. Qualquer que seja o ângulo orientado β , temos

$-1 \le \sin\beta \le 1$, pelo que:

$-2 \le 2\sin\beta \le 2 \Leftrightarrow -5 \le 2\sin\beta - 3 \le -1$.

Logo, valor máximo: –1 e valor mínimo: –5

14.3. Qualquer que seja o ângulo orientado β :

$-1 \le \sin\beta \le 1$, pelo que $1 \ge -\sin\beta \ge -1 \Leftrightarrow 4 \ge 3 - \sin\beta \ge 2$.

Logo, o valor máximo é 4 e o valor mínimo é 2.

14.4. Qualquer que seja o ângulo orientado β , temos que

$-1 \le \sin\beta \le 1$, pelo que $0 \le \sin^2\beta \le 1$.

Logo, valor máximo é 1 e o valor mínimo é 0.

14.5. Qualquer que seja o ângulo orientado β , temos:

$\tan\beta \in \left]-\infty, +\infty\right[$, pelo que $\tan^2\beta \ge 0 \Leftrightarrow \tan^2\beta + 3 \ge 3$.

Logo, o valor máximo não existe e o valor mínimo é 3.

14.6. Qualquer que seja o ângulo orientado β , temos

$-1 \le \cos\beta \le 1$, pelo que:

$0 \le \cos^2\beta \le 1 \Leftrightarrow 0 \ge -\cos^2\beta \ge -1 \Leftrightarrow 1 \ge 1 - \cos^2\beta \ge 0$

Logo, valor máximo: 1 e valor mínimo: 0.

15.1. $Q(\cos 130^\circ , \sin 130^\circ)$, ou seja, $Q(-0{,}64 ; 0{,}77)$

15.2. $A_{[OQR]} = \frac{RO \times \text{ordenada de } Q}{2} = \frac{1 \times \sin 130^\circ}{2} =$

$$= \frac{\sin 130^\circ}{2} \approx 0{,}4$$

Ficha para praticar 4 **Págs. 18 a 21**

1.1. Seja x o valor em radianos correspondente a 60º, então:

$$x = \frac{60^\circ \pi}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Portanto, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad.

1.2. Seja x o valor em radianos correspondente a 30º, então:

$$x = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad.

1.3. Seja x o valor em radianos correspondente a 45º, então:

$$x = \frac{45^\circ \pi}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Portanto. $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad.

1.4. Seja x o valor em radianos correspondente 150º, então:

$$x = \frac{150^\circ \pi}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

Portanto, $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ rad.

1.5. Seja x o valor em radianos correspondente a 240º, então:

$$x = \frac{240^\circ \pi}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, $240^\circ = \frac{4\pi}{3}$ rad.

1.6. Seja x o valor em radianos correspondente a –120º, então:

$$x = \frac{-120^\circ \pi}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{-2\pi}{3}$$

Portanto, $-120^{\circ} = -\frac{2\pi}{3}$ rad.

1.7. Seja *x* a amplitude em radianos correspondente a –540º,
então: $x = \frac{540^{\circ}\,\pi}{180^{\circ}} \Leftrightarrow x = 3\pi$
Portanto, $x = 3\pi$ rad.

1.8. Seja *x* a amplitude em radianos correspondente a 1170º,
então: $x = \frac{1170^{\circ}\,\pi}{180^{\circ}} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{2}$
Portanto, $x = \frac{13\pi}{2}$ rad

2.1. Seja *x* a amplitude em graus correspondente a $\frac{7\pi}{6}$ rad, então:
$x = \frac{7}{6}\pi$ rad $\Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\times 180^{\circ} \Leftrightarrow x = 210^{\circ}$

2.2. Seja *x* a amplitude em graus correspondente a $-\frac{5\pi}{3}$ rad,
então: $x = -\frac{5}{3}\pi$ rad $\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}\times 180^{\circ} \Leftrightarrow x = -300^{\circ}$
Portanto, $x = -300^{\circ}$.

2.3. Seja *x* a amplitude em graus correspondente a $-\frac{\pi}{4}$ rad, então:
$x = -\frac{1}{4}\pi$ rad $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\times 180^{\circ} \Leftrightarrow x = -45^{\circ}$
Portanto, $x = -45^{\circ}$.

2.4. Seja *x* a amplitude em graus correspondente a $\frac{11\pi}{2}$ rad, então:
$x = \frac{11}{2}\pi$ rad $\Leftrightarrow x = \frac{11}{2}\times 180^{\circ} \Leftrightarrow x = 990^{\circ}$
Portanto, $x = 990^{\circ}$.

2.5. Seja *x* a amplitude em graus correspondente a $-\frac{19\pi}{4}$ rad,
então: $x = -\frac{19}{4}\pi$ rad $\Leftrightarrow x = -\frac{19}{4}\times 180^{\circ} \Leftrightarrow x = -855^{\circ}$
Portanto, $x = -855^{\circ}$.

2.6. Seja *x* a amplitude em graus correspondente a -12π rad,
então: $x = -12\pi$ rad $\Leftrightarrow x = -12\times 180^{\circ} \Leftrightarrow x = -2160^{\circ}$.
Portanto, $x = -2160^{\circ}$.

2.7. Seja *x* a amplitude em graus correspondente a $\frac{3\pi}{5}$ rad, então:
$x = \frac{3}{5}\pi$ rad $\Leftrightarrow x = \frac{3}{5}\times 180^{\circ} \Leftrightarrow x = 108^{\circ}$

2.8. Seja *x* a amplitude em graus correspondente a $-\frac{17\pi}{3}$ rad
então: $x = -\frac{17\pi}{3}$ rad $= -\frac{17}{3}\times 180^{\circ} \Leftrightarrow x = -1020^{\circ}$
Portanto, $x = -1020^{\circ}$.

3.1. **a)** Temos que $360^{\circ} : 8 = 45^{\circ}$, portanto, dois vértices consecutivos do octógono regular [*ABCDEFGH*] definem na circunferência arcos de 45º de amplitude.
Assim:
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{GH} = \overset{\frown}{HA} = \frac{\pi}{4}$ rad
Então, $D\hat{O}G = \frac{3\pi}{4}$ rad, pelo que se $\dot{O}D$ é o lado origem do ângulo definido por $\left(\frac{3\pi}{4}\text{rad}\,,\,2\right)$, o lado extremidade é $\dot{O}G$.

b) $D\hat{O}E = -\frac{7\pi}{4}$ rad, pelo que se $\dot{O}D$ é o lado origem do ângulo definido por $\left(-\frac{7\pi}{4}\text{rad}\,,\,-1\right)$, o lado extremidade é $\dot{O}E$.

c) $D\hat{O}A = \frac{5\pi}{4}$ rad, pelo que se $\dot{O}D$ é o lado origem do ângulo definido por $\left(\frac{5\pi}{4}\text{rad}\,,\,3\right)$, o lado extremidade é $\dot{O}A$.

d) $D\hat{O}B = -\frac{\pi}{2}$rad , pelo que se $\dot{O}D$ é o lado origem do ângulo definido por $\left(-\frac{\pi}{2}\text{rad}\,,\,-2\right)$, o lado extremidade é $\dot{O}B$.

3.2. **a)** Temos que $\frac{5\pi}{2}\text{rad} = 2\pi$ rad , pelo que se trata do ângulo generalizado $\left(\frac{\pi}{2}\text{rad}\,,1\right)$. Logo, se $\dot{O}D$ é o lado origem do ângulo definido por $\left(\frac{\pi}{2}\text{rad}\,,1\right)$, o lado extremidade é $\dot{O}F$.

b) Temos que $-\frac{15\pi}{4}\text{rad} = -2\pi\text{ rad} - \frac{7\pi}{4}$ rad , pelo que se trata do ângulo generalizado $\left(-\frac{7\pi}{4}\text{rad}\,,\,-1\right)$. Logo, se $\dot{O}D$ é o lado origem do ângulo definido por $\left(-\frac{7\pi}{4}\text{rad}\,,\,-1\right)$, o lado extremidade é $\dot{O}E$.

c) Temos que -4π rad é o ângulo generalizado $\left(0\text{ rad}\,,\,-2\right)$, logo se $\dot{O}D$ é o lado do ângulo definido por $\left(0\text{ rad}\,,\,-2\right)$, o lado extremidade é $\dot{O}D$.

d) Temos que $-\frac{11}{2}\pi\text{ rad} = -4\pi\text{ rad} - \frac{3\pi}{2}$ rad , pelo que se trata do ângulo generalizado $\left(-\frac{3\pi}{2}\text{ rad}\,,\,-2\right)$. Logo, se $\dot{O}D$ é o lado origem do ângulo definido por $\left(-\frac{3\pi}{2}\text{ rad}\,,\,-2\right)$, o lado extremidade é $\dot{O}F$.

4. ■ O ponto *P* tem abcissa igual a $-\frac{4}{5}$, pelo que $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:
$\sin^2\alpha + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{5} \vee \sin\alpha = \frac{3}{5}$.
Como $\alpha \in$ ao 3.º quadrante, então $\sin\alpha < 0$, pelo que $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

■ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, portanto $\tan\alpha = \dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{3}{4}$.

5. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{24}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{24}}{5} \vee \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{24}}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5} \vee \cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

Como $\alpha \in$ 2.º quadrante, então $\cos\alpha < 0$, pelo que $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

Por outro lado, tem-se que $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Assim:

$\tan\alpha = \dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} \Leftrightarrow \tan\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{6}} \Leftrightarrow \tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

Portanto, $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ e $\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

6. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, pelo que:

$\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{13}{4} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{4}{13} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}} \vee \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \vee \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

Como $\alpha \in$ 4.º quadrante, então $\cos\alpha > 0$, pelo que $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

Por outro lado:

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \tan\alpha \times \cos\alpha$

Portanto, $\sin\alpha = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \Leftrightarrow \sin\alpha = -\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

Assim, $\cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13} - \dfrac{3\sqrt{13}}{13} = -\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

7.1. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\right) =$

$= -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

7.2. $\dfrac{\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\cos\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} =$

$= \dfrac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} =$

$= \dfrac{-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1$

7.3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{18}\right) + \cos\left(\dfrac{17\pi}{18}\right) - \cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) =$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{18}\right) + \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{18}\right) - \cos\left(-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\right) =$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{18}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{18}\right) - \cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) =$

$= -\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\left(-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7.4. $\dfrac{\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} = \dfrac{-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)}{\cos\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi\right)} =$

$= \dfrac{-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \dfrac{-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} =$

$= \dfrac{-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left[-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{-1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{-1 + \frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} =$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8.1. $\dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow \dfrac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{1} + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \cos^2\alpha$.

8.2. $\sin\alpha \times \cos\alpha \times \left(\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha \times \cos\alpha \times \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha\times\cos\alpha\times\left(\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha\times\cos\alpha\times\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1=1$

8.3. $\left(2-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-2\sin^2\alpha-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-2\sin^2\alpha-\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-2\sin^2\alpha-\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-2\sin^2\alpha-1=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-2\left(1-\cos^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-2+2\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha-1=2\cos^2\alpha-1$

9.1. $\cos(\pi-\alpha)-2\sin(\alpha-\pi)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=3\sin\alpha-\cos\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos\alpha-2(-\sin\alpha)+\sin\alpha=3\sin\alpha-\cos\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos\alpha+2\sin\alpha+\sin\alpha=3\sin\alpha-\cos\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sin\alpha-\cos\alpha=3\sin\alpha-\cos\alpha$

9.2. $\tan(3\pi-\alpha)+\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}-\tan(-\pi-\alpha)=\tan\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\alpha+\dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}-(-\tan\alpha)=\tan\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\alpha-\tan\alpha+\tan\alpha=\tan\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\alpha=\tan\alpha$

9.3. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\alpha-3\pi)+2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+$

$+3\sin(\pi+\alpha)\times\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-5\cos\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha+\cos(\alpha-\pi)-2\cos\alpha-$

$-3\sin\alpha\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=-5\cos\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha-3\sin\alpha\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-5\cos\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\cos\alpha-3\cos\alpha=-5\cos\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5\cos\alpha=-5\cos\alpha$

10. Tem-se que $\tan(-\alpha)=2\wedge\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$, ou seja,

$-\tan\alpha=2\wedge\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow\tan\alpha=-2\wedge\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$

Como $\tan\alpha<0$, então $\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, isto é, $\alpha\in$ 2.º quadrante.

Por outro lado:

$\cos(\alpha-\pi)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha-(-\sin\alpha)=$

$=-\cos\alpha+\sin\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Portanto:

$(-2)^2+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 4+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 5=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{5}}\vee\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{5}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\vee\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\alpha\in$ 2.º quadrante, $\cos\alpha<0$, pelo que $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Tem-se, também, que $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Leftrightarrow\sin\alpha=\tan\alpha\times\cos\alpha$,

pelo que:

$\sin\alpha=-2\times\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Assim:

$-\cos\alpha+\sin\alpha=-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Portanto, $\cos(\alpha-\pi)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

11. $4\cos(\alpha+\pi)=1\wedge\alpha\in[\pi,2\pi]$, ou seja,

$\cos(\alpha+\pi)=\dfrac{1}{4}\wedge\alpha\in[\pi,2\pi]\Leftrightarrow-\cos\alpha=\dfrac{1}{4}\wedge\alpha\in[\pi,2\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}\wedge\alpha\in[\pi,2\pi]$

Como $\cos\alpha<0$, $\alpha\in\left]\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$, isto é, $\alpha\in$ 3.º quadrante.

$\tan(\alpha-3\pi)-\sin(-\alpha-\pi)=\tan\alpha-\sin\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\sin^2\alpha+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\dfrac{1}{16}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\dfrac{15}{16}\Leftrightarrow\sin=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\vee\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Como $\alpha\in$ 3.º quadrante, $\sin\alpha<0$, pelo que $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ou seja, $\tan\alpha=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{15}}{4}}{-\dfrac{1}{4}}\Leftrightarrow\tan\alpha=\sqrt{15}$

Assim:

$\tan\alpha-\sin\alpha=\sqrt{15}-\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)=\sqrt{15}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{5\sqrt{15}}{4}$

Portanto, $\tan(\alpha-3\pi)-\sin(-\alpha-\pi)=\dfrac{5\sqrt{15}}{4}$.

12. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{5}{8}\wedge\alpha\in[-2\pi,-\pi]$, ou seja:

$-\cos\alpha=\frac{5}{8}\wedge\alpha\in[-2\pi,-\pi]\Leftrightarrow\cos\alpha=-\frac{5}{8}\wedge\alpha\in[-2\pi,-\pi]$

Comos $\cos\alpha<0$, $\alpha\in\left]-\frac{3\pi}{2},-\pi\right[$, isto é, $\alpha\in$ 2.º quadrante.

Por outro lado:

$\cos\left(-\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\tan(-\alpha)=\sin\alpha-\tan\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\sin^2\alpha+\left(-\frac{5}{8}\right)^2=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha+\frac{25}{64}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{25}{64}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\frac{39}{64}\Leftrightarrow\sin\alpha=-\frac{\sqrt{39}}{8}\vee\sin\alpha=\frac{\sqrt{39}}{8}$

Tem-se que $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ou seja:

$\tan\alpha=\frac{\frac{\sqrt{39}}{8}}{-\frac{5}{8}}\Leftrightarrow\tan\alpha=-\frac{\sqrt{39}}{5}$

$\sin\alpha-\tan\alpha=\frac{\sqrt{39}}{8}-\left(-\frac{\sqrt{39}}{5}\right)=\frac{\sqrt{39}}{8}+\frac{\sqrt{39}}{5}$

Assim:

$\sin\alpha-\tan\alpha=\frac{\sqrt{39}}{8}-\left(-\frac{\sqrt{39}}{5}\right)=\frac{\sqrt{39}}{8}+\frac{\sqrt{39}}{5}=$

$=\frac{5\sqrt{39}+8\sqrt{39}}{40}=\frac{13\sqrt{39}}{40}$

Portanto, $\cos\left(-\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\tan(-\alpha)=\frac{13\sqrt{39}}{40}$.

13.1. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=a-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=a+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=a+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}=a+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

13.2. $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)-2\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2a-\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=2a-\cos\left(-\frac{4\pi}{3}+2\pi\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)+2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=2a-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow3\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=2a-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow3\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=2a+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2a+\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{3}=2a+\frac{1}{2}\Leftrightarrow2a=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}$

13.3. $a\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cos\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi\right)=\tan\left(-\frac{7\pi}{4}+2\pi\right)+\sin\left(-\frac{11\pi}{6}+2\pi\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-a\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+\frac{1}{2}\Leftrightarrow-a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=-\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

13.4. $a\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+a\cos(-\pi)=\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\sin\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)+a\cos(-\pi)=$

$=\tan\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+a\cos(-\pi)=\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+a\cos(-\pi)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-a\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+a\cos(-\pi)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+a(-1)=1-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}\Leftrightarrow a=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{\sqrt{3}+2}\Leftrightarrow a=-\frac{\sqrt{3}-2}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-\frac{\sqrt{3}-2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2}\Leftrightarrow a=-\frac{\sqrt{3}-2}{3-4}$

$\Leftrightarrow a=-\frac{\sqrt{3}-2}{-1}\Leftrightarrow a=\sqrt{3}-2$

14. $2\tan\alpha+5=0\Leftrightarrow\tan\alpha=-\frac{5}{2}$

Por outro lado, sabemos que $\alpha\in\left]-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right[$ e, como $\tan\alpha<0$, então $\alpha\in\left]-\frac{3\pi}{2},-\pi\right[$, ou seja, α pertence ao 2.º quadrante.

$2\sin\alpha-\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\alpha+\cos\alpha$

- $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, logo

$1+\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\dfrac{25}{4}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{29}{4}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{4}{29}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{4}{29}}\vee\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{4}{29}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{29}}{29}\vee\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$

Como α pertence ao 2.º quadrante, então $\cos\alpha<0$, pelo que $\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$.

- $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$, ou seja, $\sin\alpha=\cos\alpha\times\tan\alpha$, pelo que

$\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{29}}{29}\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$

$2\sin\alpha+\cos\alpha=2\left(\dfrac{5\sqrt{29}}{29}\right)+\left(-\dfrac{2\sqrt{29}}{29}\right)=$

$=\dfrac{10\sqrt{29}}{29}-\dfrac{2\sqrt{29}}{29}=\dfrac{8\sqrt{29}}{29}$

Portanto, $2\sin\alpha-\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{8\sqrt{29}}{29}$.

15. $B\hat{D}C=60^{\circ}=\dfrac{\pi}{3}\text{rad}$ e $B\hat{A}D=30^{\circ}=\dfrac{\pi}{6}$ rad

Pela lei dos senos:

$\dfrac{\sin\hat{C}}{3}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{2,6}\Leftrightarrow\sin\hat{C}=\dfrac{3\times\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{2,6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\hat{C}=\dfrac{3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2,6}\Leftrightarrow$

Como *c* é um ângulo agudo, $\hat{c}\approx1,5$ rad.

$C\hat{B}A=\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}+\sin^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{5,2}\right)\right)\approx1,1\,\text{rad}$

$A\hat{D}B=\pi-B\hat{D}C=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

$D\hat{B}A=\pi-A\hat{D}B-B\hat{A}D=\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$

Logo, o triângulo [*DAB*] é isósceles, sendo $\overline{DA}=\overline{DB}=3$.

Pela lei dos senos:

$\dfrac{\sin\left(A\hat{D}B\right)}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin\left(B\hat{A}D\right)}{\overline{DB}}\Leftrightarrow\dfrac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow3\times\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\Leftrightarrow3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\Leftrightarrow\overline{AB}=3\sqrt{3}$

Portanto, $C\hat{B}A\approx$ 1,1 rad; $A\hat{C}B\approx$ 1,5 rad; $\overline{AC}=4,6$ e $\overline{AB}\approx3\sqrt{3}$.

16. O ponto *P* tem coordenadas $(3\cos\theta, 3\sin\theta)$.

Como a abcissa do ponto *P* é igual a $-\dfrac{7}{4}$, então

$3\cos\theta=-\dfrac{7}{4}$, ou seja, $\cos\theta=-\dfrac{7}{12}$.

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{7}{12}\right)^2\Leftrightarrow\sin^2\theta=1-\dfrac{49}{144}\Leftrightarrow\sin^2\theta=\dfrac{95}{144}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{95}}{12}\vee\sin\theta=\dfrac{\sqrt{95}}{12}$

No entanto, θ pertence ao 3.º quadrante, pelo que $\sin\theta<0$, logo, $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{95}}{12}$. Assim:

$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{95}}{12}-\left(-\dfrac{7}{12}\right)=\dfrac{7-\sqrt{95}}{12}$

17.1. $\cos\left(-\dfrac{37\pi}{3}\right)+\sin\left(\dfrac{47\pi}{6}\right)-2\cos(-21\pi)=$

$=\cos\left(-12\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(6\pi+\dfrac{11\pi}{6}\right)-2\cos(-\pi-20\pi)=$

$=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)-2\cos(-\pi)=$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos(-\pi)=$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos(-\pi)=$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos(-\pi)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-2\times(-1)=2$

17.2. $\tan\left(\dfrac{43\pi}{4}\right)-2\cos\left(-\dfrac{55\pi}{6}\right)+3\sin\left(\dfrac{17\pi}{4}\right)=$

$=\tan\left(10\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)-2\cos\left(-8\pi-\dfrac{7\pi}{6}\right)+3\sin\left(4\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$=\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)-2\cos\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)+3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$=\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi\right)+3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$=-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$=-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$=-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$=-1+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

17.3. $\sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)-2\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{127\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\tan\left(-\dfrac{41\pi}{3}\right)=$

$=\sqrt{2}\sin\left(-4\pi-\dfrac{7\pi}{4}\right)-2\sqrt{3}\cos\left(20\pi+\dfrac{7\pi}{6}\right)+$

$+\sqrt{3}\tan\left(-13\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right)=$

$=\sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)-2\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\tan\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=$

$=\sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}+2\pi\right)-2\sqrt{3}\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\tan\left(-\dfrac{2\pi}{3}+\pi\right)=$

$=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=$

$=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)=1+3+3=7$

18.1. a) Usando o triângulo retângulo $[BCE]$:

$$\sin\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{4}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$$\cos^2\beta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2\beta = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\beta = -\sqrt{\frac{1}{5}} \vee \cos\beta = \sqrt{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \vee \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Como β é um ângulo agudo, $\cos\beta > 0$, pelo que $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Por outro lado, cos $\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

c)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -2$$

d) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -\sin\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

e) $\sin\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha = -\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

f) $\tan(-\beta) - 2\cos\left(-\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$

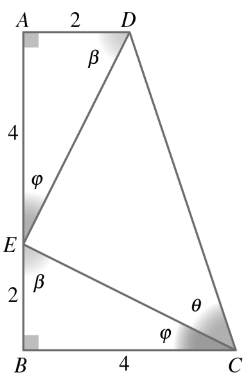
$$= -\tan\beta - 2\sin\alpha =$$

$$= -\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = -2\sin\alpha =$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} - 2\times\frac{2\sqrt{5}}{5} =$$

$$= -2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

18.2. Os triângulos $[BCE]$ e $[AED]$ são iguais.



Como $\beta + \varphi = \frac{\pi}{2}$, $C\hat{E}D = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$\overline{EC} = \overline{ED}$, $E\hat{D}C = D\hat{C}E = \theta$

Portanto, $\theta = \frac{\pi - C\hat{E}D}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

19. $\cos\alpha + \frac{1}{4\cos\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha - 1 = 0 \wedge 4\cos\alpha \neq 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((2\cos\alpha - 1)^2 = 0 \wedge \cos\alpha \neq 0\right) \Leftrightarrow 2\cos\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Como α é um ângulo, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Assim, $\sin\alpha \times \tan\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$.

20. Temos que $2\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = 2\alpha - \frac{3\pi}{2}$, pelo que

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\left[\alpha - \left(2a - \frac{3\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(\alpha - 2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha = -\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

Ficha de teste 2 **Págs. 22 e 23**

1.

$$\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\tan(-180^{\circ}) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\tan(-180^{\circ}) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)} =$$

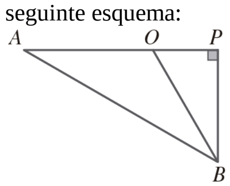
$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\tan(-180^{\circ}) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{0\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - 2$$

Resposta: **(B)**

2. Considere o seguinte esquema:



$A\hat{P}B = \frac{\pi}{2}$ rad ; $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{3}$ rad e $A\hat{O}P = \pi$ rad , pelo que

$B\hat{O}P = \pi \text{ rad} - \frac{2\pi}{3} \text{rad} = \frac{\pi}{3} \text{rad}$.

Pela definição de seno:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{BP}}{1} \Leftrightarrow \overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Área do triângulo [*OAB*] $= \dfrac{\overline{OA}\times\overline{BP}}{2} = \dfrac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Resposta: **(A)**

3. $-\dfrac{59\pi}{3}$ rad$=\left(-18\pi-\dfrac{5\pi}{3}\right)$rad $=\left(-9\times 2\pi-\dfrac{5\pi}{3}\right)$ rad , pelo que

$-\dfrac{59\pi}{3}$rad se situa no 1.º quadrante.

Resposta: **(A)**

4. $3\cos\theta+2=0\wedge\theta\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, ou seja,

$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}\wedge\theta\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin^2\theta+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=1\Leftrightarrow\sin^2\theta+\dfrac{4}{9}=1\Leftrightarrow\sin^2\theta=1-\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2\theta=\dfrac{5}{9}\Leftrightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\vee\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Como $\theta\in$ 2.º quadrante, então $\sin\theta>0$, pelo que

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Assim, fica desde já excluída a opção (A).

Por outro lado, $\sin\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\cos\theta=\dfrac{2}{3}$, pelo que (B) também é excluída.

Tem-se, ainda, que:

$\cos(-\theta)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

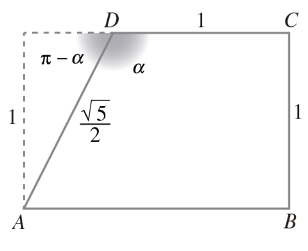
Portanto, (C) também é excluída.

$\sin\left(-\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow-\cos\theta=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$

Logo, a opção correta é (D).

Resposta: **(D)**

5. Considere o seguinte esquema:



Pela definição de seno:

$\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\dfrac{4}{5}+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=1-\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\vee\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como α é um ângulo obtuso, $\cos\alpha<0$, pelo que

$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Resposta: **(C)**

6.1. **a)** Temos que 360º : 4 = 90º, portanto, dois vértices consecutivos do quadrado [*ABCD*] definem na circunferência arcos de 90º de amplitude.

Por outro lado, $3\times(-90^\circ)=-270^\circ$ e $B\hat{O}C=-270^\circ$,

logo, se $\dot{O}B$ é o lado origem do ângulo definido por $(-270^\circ, 2)$, o lado extremidade é $\dot{O}C$.

b) $-\pi$ rad $=2\times\left(-\dfrac{\pi}{2}\text{ rad}\right)$ e $B\hat{O}D=-\pi$ rad

Logo, se $\dot{O}B$ é o lado origem do ângulo definido por $(-\pi\text{ rad}, -1)$ o lado extremidade é $\dot{O}D$.

6.2. **a)** Tem-se que $-540^\circ=-180^\circ-1\times 360^\circ$, pelo que se trata do ângulo generalizado $(-180^\circ, -1)$.

Logo, se $\dot{O}B$ é o lado origem do ângulo definido por $(-180^\circ, -1)$ o lado extremidade é $\dot{O}D$.

b) $-\dfrac{25\pi}{4}$ rad $=\left(-6\pi-\dfrac{2\pi}{4}\right)$ rad $=\left(-6\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)$ rad pelo que se trata do ângulo generalizado $\left(-\dfrac{\pi}{2}\text{ rad}, -3\right)$.

Logo, se $\dot{O}B$ é o lado origem do ângulo definido por $\left(-\dfrac{\pi}{2}\text{rad}, 3\right)$, o lado extremidade é $\dot{O}A$.

7.1. Por definição, tan β = ordenada de *P*, pelo que $\tan\beta=3$.

$\dfrac{6}{\sqrt{3}-3}=\dfrac{6\times\left(\sqrt{3}+3\right)}{\left(\sqrt{3}-3\right)\left(\sqrt{3}+3\right)}=\dfrac{6\times\left(\sqrt{3}+3\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-3^2}=$

$=\dfrac{6\times\left(\sqrt{3}+3\right)}{3-9}=\dfrac{6\times\left(\sqrt{3}+3\right)}{-6}=-\sqrt{3}-3$

7.2. $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$, ou seja:

$\dfrac{\cos^2\beta}{\cos^2\beta}+\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2}=\dfrac{1}{\cos^2\beta}\Leftrightarrow 1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2\beta}$

Assim:

$1+3^2=\dfrac{1}{\cos^2\beta}\Leftrightarrow 10=\dfrac{1}{\cos^2\beta}\Leftrightarrow\cos^2\beta=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\vee\cos\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Como $\beta\in$ 3.º quadrante, $\cos<0$, pelo que $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\Leftrightarrow 3=\dfrac{\sin\beta}{-\frac{\sqrt{10}}{10}}\Leftrightarrow\sin\beta=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\cos\beta-2\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}-2\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)=$

$=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}+\dfrac{6\sqrt{10}}{10}=\dfrac{5\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

8. Tem-se que $5\sin(-\alpha-\pi)=2\wedge\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, ou seja:

$\sin(-\alpha - \pi) = \frac{2}{5} \wedge \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{2}{5} \wedge \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como $\sin\alpha > 0$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, ou seja, $\alpha \in$ 1.º quadrante.

Por outro lado:

$\cos(-\alpha + 3\pi) + \tan(\pi - \alpha) =$

$= \cos(-\alpha + \pi) + \tan(\pi - \alpha) = \cos\alpha - \tan\alpha$

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{21}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5} \vee \cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Como $\alpha \in$ 1.º quadrante, $\cos\alpha > 0$, pelo que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

$-\cos\alpha - \tan\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5} - \frac{2\sqrt{21}}{21} = -\frac{21\sqrt{21}}{105} - \frac{10\sqrt{21}}{105} =$

$= -\frac{31\sqrt{21}}{105}$

9.1. $\sin(630°) - \tan(540°) - 2\cos(-900°) =$

$= \sin(270° + 2 \times 360°) - \tan(3 \times 180°) -$

$-2\cos(-180° - 2 \times 360°) =$

$= \sin(270°) - \tan(0°) - 2\cos(-180°) =$

$= -1 - 0 - 2 \times (-1) = -1 + 2 = 1$

9.2. $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) =$

$= \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-2\pi - \frac{7\pi}{6}\right) + \cos\left(4\pi + \frac{3\pi}{2}\right) =$

$= \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) =$

$= -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi\right) + 0 =$

$= -\sqrt{3} - \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\sqrt{3} - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

10. $\frac{\cos^3\alpha + 2\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}}{\cos\alpha\sin^2\alpha} = \tan^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha + 1}{\cos\alpha}}{\cos\alpha\sin^2\alpha} = \tan^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\cos^2\alpha - 1\right)^2}{\cos\alpha\left(\cos\alpha\sin^2\alpha\right)} = \tan^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\left(1 - \cos^2\alpha\right)^2}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} = \tan^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\sin^2\alpha\right)^2}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} = \tan^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha \times \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} = \tan^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \tan^2\alpha$

Ficha para praticar 5 **Págs. 24 a 27**

1.1. Sabe-se que $x\in D_f$, pelo que $\frac{x}{3}\in D_f$.

Portanto:

$-1\le \sin\left(\frac{x}{3}\right)\le 1 \Leftrightarrow 4\ge -4\sin\left(\frac{x}{3}\right)\ge -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2+4\ge 2-4\sin\left(\frac{x}{3}\right)\ge 2-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\ge 2-4\sin\left(\frac{x}{3}\right)\ge -2$

Logo, $D'_f=[-2\,,6]$.

1.2. $x\in D_f$, então $x+6\pi\in D_f$, pois $D_f=\mathbb{R}$.

Assim:

$f(x+6\pi)=2-4\sin\left(\frac{x+6\pi}{3}\right)=$

$=2-4\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)=2-4\sin\left(\frac{x}{3}+2\pi\right)$

Como a função senão é periódica de período 2π:

$2-4\sin\left(\frac{x}{3}+2\pi\right)=$

$=2-4\sin\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)$

Portanto, a função *f* é periódica de período 6π.

1.3. $f(-a)-f(a+6\pi)=f(-a)-f(a)$, pois *f* é periódica de período 6π.

Assim:

$f(-a)-f(a)=2-4\sin\left(-\frac{a}{3}\right)-\left[2-4\sin\left(\frac{a}{3}\right)\right]=$

$=2-4\sin\left(-\frac{a}{3}\right)-2+4\sin\left(\frac{a}{3}\right)=-4\sin\left(-\frac{a}{3}\right)+4\sin\left(\frac{a}{3}\right)=$

$=-4\left(-\sin\left(\frac{a}{3}\right)\right)+4\sin\left(\frac{a}{3}\right)=$

$=4\sin\left(\frac{a}{3}\right)+4\sin\left(\frac{a}{3}\right)=8\sin\left(\frac{a}{3}\right)$

2.1. Sabe-se que $x\in D_g$, pelo que $4x\in D_g$, então:

$-1\le\cos(4x)\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\cos(4x)\le 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2+10\le 10+2\cos(4x)\le 2+10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\le 10+2\cos(4x)\le 12$

Logo, $D'_g=[8\,,12]$.

2.2. $g(x)=0\Leftrightarrow 10+2\cos(4x)=0\Leftrightarrow\cos(4x)=-5$

$-1\le\cos(4x)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Portanto, a equação $\cos(4x)=-5$ é impossível, pelo que *g* não tem zeros.

Assim, a proposição é verdadeira.

2.3. $x\in D_g$, pelo que $-x\in D_g$.

A função *g* é par quando e apenas quando:

$-x\in D_g,\ g(-x)=g(x),\ \forall x\in D_g$

Tem-se que:

$g(-x)=10+2\cos(-4x)=10+2[\cos(4x)]=$

$=10+2\cos(4x)=g(x)$

Portanto, *g* é uma função par.

2.4. $x\in D_g$, então $x+\frac{\pi}{2}\in D_g$, pois $D_g=\mathbb{R}$.

Assim, $g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=10+2\cos\left[4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=$

$=10+2\cos(4x+2\pi)$

Como a função cosseno é periódica de período 2π, tem-se que $10+2\cos(4x+2\pi)=10+2\cos(4x)=g(x)$.

Portanto, a função *g* é periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

2.5. O gráfico da função *g* pode ser obtido a partir do gráfico da função $y=\cos x$ pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{4}$, seguida da dilatação vertical de coeficiente 2 e finalmente pela translação de vetor $\vec{u}(0\,,10)$.

3.1. $x\in D_f$, pelo que $x+\pi\in D_f$.

Assim, $f(x+\pi)=\sin[2(x+\pi)]=\sin(2x+2\pi)$.

Como a função seno é periódica de período 2π, então:

$\sin(2x+2\pi)=\sin(x)=f(x)$

Portanto, a função *f* é periódica de período π.

3.2. $x\in D_g$, pelo que $x+\frac{\pi}{2}\in D_g$.

Assim:

$g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{5}\right]=\cos\left(4x+2\pi-\frac{\pi}{5}\right)=$

$=\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}+2\pi\right)$

Como a função cosseno é periódica de período 2π, então:

$\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}+2\pi\right)=\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)=g(x)$

Portanto, a função *g* é periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

3.3. $x\in D_h$, pelo que $x+3\pi\in D_h$.

Assim, vem que:

$h(x+3\pi)=\tan\left(\frac{x+3\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{3\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\pi\right)$

Como a função tangente é periódica de período π, tem-se que: $\tan\left(\frac{x}{3}+\pi\right)=\tan\left(\frac{x}{3}\right)=h(x)$

Portanto, a função *h* é periódica de período 3π.

3.4. $x\in D_j$, pelo que $x+\frac{2\pi}{a}\in D_j$.

Assim:

$j\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)=\cos\left[a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)+b\right]=\cos(ax+2\pi+b)=$

$=\cos(ax+b+2\pi)$

Como a função cosseno é periódica de período 2π, tem-se que $\cos(ax+b+2\pi)=\cos(ax+b)=j(x)$.

Portanto, a função *j* é periódica de período $\frac{2\pi}{a}$.

4.1. $\frac{\pi}{4}-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$

4.2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$

4.3. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\pi+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}-\pi-\frac{5\pi}{6}=$

$=\frac{4\pi}{6}-\frac{6\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$

4.4. $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)-\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)=$

$=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arccos\left(-1+\frac{1}{2}\right)=$

$=\frac{\pi}{3}-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

5.1. Seja P o período positivo mínimo da função f.
Se $x\in D_f$, então $x+P\in D_f$.

$\forall x\in D_f,\ f(x+P)=f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in D_f,\ \frac{1}{2}\tan\left[\frac{\pi}{6}-2(x+P)\right]=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in D_f,\ \frac{1}{2}\tan\left[\frac{\pi}{6}-2x-2P\right]=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$

Como π é o período positivo mínimo da função tangente, tem-se que: $|-2P|=\pi\Leftrightarrow 2P=\pi\Leftrightarrow P=\frac{\pi}{2}$

A função f é periódica e o período mínimo positivo é $\frac{\pi}{2}$.

5.2. $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=0\Leftrightarrow\tan\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}-2x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow -2x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

A expressão geral dos zeros de f é $x=\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

5.3. $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)+f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\tan\left[\frac{\pi}{6}-2\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]+\frac{1}{2}\tan\left[\frac{\pi}{6}-2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=\frac{1}{2}\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=$

$=\frac{1}{2}\tan\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)+\frac{1}{2}\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

6.1. $x\in D_f$, pelo que $x+2\in D_f$.

Assim:

$f(x+2)=1+\frac{1}{2}\sin\left[\pi(x+2)+\frac{\pi}{6}\right]=1+\frac{1}{2}\sin\left(\pi x+2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=$

$=1+\frac{1}{2}\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}+2\pi\right)$

Como a função seno é periódica de período 2π, então:

$1+\frac{1}{2}\sin\left[\pi x+\frac{\pi}{6}+2\pi\right]=1+\frac{1}{2}\sin\left[\pi x+\frac{\pi}{6}\right]=f(x)$

Portanto, a função f é periódica de período 2.

6.2. $f(-2)-2f\left(-\frac{5}{3}\right)=$

$=1+\frac{1}{2}\sin\left[\pi\times(-2)+\frac{\pi}{6}\right]-2\left[1+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=$

$=1+\frac{1}{2}\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)-2-\sin\left(-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=$

$=-1+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=$

$=-1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-1=-2+\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}$

7.1. $g(x)=\cos^2\left(\frac{x}{12}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{12}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)=\cos^2\left(\frac{x}{12}\right)-\left(1-\cos^2\left(\frac{x}{12}\right)\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)=\cos^2\left(\frac{x}{12}\right)-1+\cos^2\left(\frac{x}{12}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)=2\cos^2\left(\frac{x}{12}\right)-1$

7.2. $g(-3\pi)-g(6\pi)=2\cos^2\left(-\frac{3\pi}{12}\right)-1-\left[2\cos^2\left(\frac{6\pi}{2}\right)-1\right]=$

$=2\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1-2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+1=$

$=2\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

$=2\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\times\frac{1}{2}=1$

8.1. $D_g=\{x\in\mathbb{R}:1-\tan x\neq 0\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_g=\{x\in\mathbb{R}:\tan x\neq 1\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_g=\left\{\frac{x}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.2. $g(\alpha)=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$

$=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)\times\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$

$=(\cos\alpha+\sin\alpha)\times\cos\alpha=$

$=\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)$

8.3. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{4}{5}\wedge\alpha\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, ou seja,

$\cos\alpha=-\frac{4}{5}\wedge\alpha\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$.

$\sin^2\alpha+\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha+\frac{16}{25}=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\frac{9}{25}\Leftrightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}\vee\sin\alpha=-\frac{3}{5}$

Como $\alpha\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, então $\sin\alpha<0$, pelo que $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

Assim:

$g(\alpha)=-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\right)\Leftrightarrow g(\alpha)=-\frac{4}{4}\times\left(-\frac{7}{5}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(\alpha)=\frac{28}{25}$

9.1. Se $t\in D_h$, então $t+\pi\in D_h$.

Assim:

$h(t+\pi)=12-4\cos\left[2(t+\pi)\right]=2-4\cos(2t+2\pi)$

Como a função cosseno é periódica de período 2π, então $12-4\cos(2t+2\pi)=2-4\cos(2t)=h(t)$.

Portanto, a função h é periódica de período π.

9.2. Se $t\in D_h$, então $2t\in D_h$.

$-1\le\cos(2t)\le1\Leftrightarrow4\ge-4\cos(2t)\ge-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow12+4\ge12-4\cos(2t)\ge12-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow16\ge12-4\cos(2t)\ge8$

Então, $D'_h=[8,16]$, pelo que a distância do ponto do casco do navio no fundo do mar, no momento da maré baixa é igual a 8.

10.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\cos x\ne0\wedge\sin x\ne0\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge x\ne k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x\ne\frac{\pi}{2}k,k\in\mathbb{Z}\right\}$

10.2. $f(x)=\sin^2x\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\sin^2x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\sin^2x\left(\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos x\sin x}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\sin^2x\left(\frac{1}{\cos x\sin x}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{\sin^2x}{\cos x\sin x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow f(x)=\tan x$

11.
- O gráfico da função *g* pode obter-se a partir do gráfico da função *f* pela translação de vetor $\vec{u}(0,2)$.
  $D'_g=[-1+2,1+2]=[1,3]$
- O gráfico da função *h* pode obter-se a partir do gráfico da função *f* pela translação de vetor $\vec{v}(-2,0)$.
  $D'_h=[-1,1]$
- O gráfico da função *j* pode obter-se a partir do gráfico da função *f* por uma dilatação vertical de coeficiente 3.
  $D'_j=[-1\times3,1\times3]=[-3,3]$
- O gráfico da função *i* pode obter-se a partir do gráfico da função *f* por uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{3}$.
  $D'_i=\left[-1\times\frac{1}{3},1\times\frac{1}{3}\right]=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$
- O gráfico da função *p* pode obter-se a partir do gráfico da função *f* por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{4}$.
  $D'_p=[-1,1]$
- O gráfico da função *l* pode obter-se a partir do gráfico da função *f* por uma dilatação horizontal de coeficiente 4.
  $D_l=[-1,1]$

Logo, apenas as funções *g*, *j* e *i* têm contradomínios diferentes do de *f*, sendo estes:

$D'_g=[1,3]$; $D'_j=[-3,3]$ e $D'_i=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

12.1. Sabemos que se $x\in D_f$, ou seja, se x toma qualquer valor real $x-\frac{\pi}{3}$ também toma qualquer valor real.

$-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ge-\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ge-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow1+\frac{1}{2}\ge1-\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\ge f(x)\ge\frac{1}{2}$

Portanto, $D'_f=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

12.2. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2f(-\pi)=$

$=\left[1-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]-2\left[1-\frac{1}{2}\cos\left(-\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=$

$=1-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-2\left(1-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)=$

$=1-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)-2+\cos\left(-\frac{4\pi}{3}+2\pi\right)=$

$=1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)-2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=1-\frac{1}{2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-2+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$

$=1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$=-1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-1-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$

12.3. O gráfico de *f* pode obter-se a partir do gráfico da função $y=\cos x$, percorrendo a seguinte sequência de etapas:

(i) Translação de vetor $\vec{u}\left(\frac{\pi}{3},0\right)$

(ii) Contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$

(iii) Reflexão de eixo Ox

(iv) Translação de vetor $\vec{v}(0,1)$

13.1. $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=y \Leftrightarrow \sin y=\frac{1}{2} \wedge y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{6}$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=z \Leftrightarrow \cos z=-\frac{1}{2} \wedge z\in[0,\pi] \Leftrightarrow z=\frac{2\pi}{3}$

$\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

13.2. $\cos\left[\arctan(-1)-\pi\right]+\tan\left[\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

$\arctan(-1)=y \Leftrightarrow \tan y=-1 \wedge y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{4}$

$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\arcsin\left(\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$

$=\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\pi}{3}$

$\cos\left[\arctan(-1)-\pi\right]+\tan\left[\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]=$

$=\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\pi\right)+\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\cos\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi\right)-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}$

14.1. $g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sin(2x)}{3}=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

14.2. Seja P o período positivo mínimo de g.

Se $x\in D_g$, então $x+P\in D_g$, porque $D_g=\mathbb{R}$.

Assim:

$\forall x\in D_g,\ g(x+P)=g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in D_g,\ \frac{\sin\left[2(x+P)\right]}{3}=\frac{\sin(2x)}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in D_g,\ \sin(2x+2P)=\sin(2x)$

Como 2π é o período positivo mínimo da função seno e P é o menor valor positivo para o qual a proposição é verdadeira, terá de ser $2P=2\pi$, pelo que $P=\pi$.

Logo, a função g é periódica de período mínimo positivo π.

15.1. $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:x\neq\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_h=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

15.2. $h(x)=0 \Leftrightarrow 3\tan\left(\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

15.3. Se $x\in D_h$, então $x+2\pi\in D_h$

$h(x+2\pi)=3\tan\left(\frac{x+2\pi}{2}\right)=3\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=$

$=3\tan\left(\frac{x}{2}\right)=h(x)$

Pois a função tangente é periódica de período π

Logo, a função h é periódica de período 2π.

16.1. $f(x)=2 \Leftrightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\tan^2 x-2\tan x+1=0 \wedge \tan x\neq 0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left((\tan x-1)^2=0 \wedge \tan x\neq 0\right) \Leftrightarrow \tan x-1=0 \Leftrightarrow \tan x=1$

Como $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $x=\frac{\pi}{4}$.

Assim, $\cos x=\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16.2. $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(x)=\tan x+\frac{1}{\tan x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos x\sin x}+\frac{\cos^2 x}{\cos x\sin x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(x)=\frac{1}{\sin x\cos x}$

17.1. $2g\left(-\frac{\pi}{3}\right)+g\left(-\frac{11\pi}{4}\right)+g\left(-\frac{25\pi}{6}\right)=$

$=2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)=$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-2\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(-4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

$=2\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

17.2. $2g\left(-\frac{\pi}{3}\right)+g\left(-\frac{11\pi}{4}\right)+g\left(-\frac{25\pi}{6}\right)=$

$=2\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{22\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{50\pi}{6}\right)=$

$= 2\sin\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)+\sin\left(-\frac{11\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right)=$

$= 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(-4\pi-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(-8\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$

$= 2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$

$= -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$= -3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=$

$= -3\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{-3\sqrt{3}+2}{2}$

18.1. $f(13)=24{,}5+2{,}5\cos\left[\frac{\pi(13+9)}{12}\right]=24{,}5+2{,}5\cos\left(\frac{22\pi}{12}\right)=$

$= 24{,}5+2{,}5\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=24{,}5+2{,}5\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$

$= 24{,}5+2{,}5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=24{,}5+2{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

$= 24{,}5+2{,}5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 26{,}7^{\text{o}}$

A temperatura, dentro dessa habitação, às 13 horas desse dia foi 26,7º.

18.2. $\forall t\in[0\,,\,24],\ -1\le\cos\left(\frac{\pi(t+9)}{12}\right)\le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall t\in[0\,,\,24],\ -2{,}5\le 2{,}5\cos\left(\frac{\pi(t+9)}{12}\right)\le 2{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall t\in[0\,,\,24],\ 22\le 24{,}5+2{,}5\cos\left(\frac{\pi(t+9)}{12}\right)\le 27 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall t\in[0\,,\,24],\ 22\le f(t)\le 27$

Portanto, a temperatura mínima e a temperatura máxima registada, dentro dessa habitação, nesse dia, foi respetivamente, de 22 ºC e 27 ºC.

Ficha para praticar 6 **Págs. 28 a 31**

1.1. $2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

As soluções do intervalo $]\pi\,,\,2\pi[$ obtêm-se de $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ para $k=0$.

Assim, $S=\left\{\frac{4\pi}{3}\right\}$.

1.2. $\sqrt{3}+2\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{5}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x-\frac{\pi}{5}=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{15}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{23\pi}{15}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

As soluções do intervalo $]\pi\,,\,2\pi[$ obtêm-se de $x=-\frac{2\pi}{15}+2k\pi$ para $k=1$ e de $x=\frac{23\pi}{15}+2k\pi$ para $k=0$.

$x=-\frac{2\pi}{15}+2\pi \vee x=\frac{23\pi}{15} \Leftrightarrow x=\frac{28\pi}{15} \vee x=\frac{23\pi}{15}$

Assim, $S=\left\{\frac{23\pi}{15},\frac{28\pi}{15}\right\}$.

1.3. $\sin^2(x)=1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \vee \sin x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=1$ obtém-se $x=\frac{3\pi}{2}$, única solução do intervalo $]\pi\,,\,2\pi[$.

Assim, $S=\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.

1.4. $\sqrt{2}\cos(2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee 2x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=1$ obtêm-se as soluções do intervalo $]\pi\,,\,2\pi[$:

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+\pi \Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3} \vee x=\frac{5\pi}{3}$

Assim, $S=\left\{\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

1.5. $\tan\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x-\frac{2\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=1$ obtém-se $x=\frac{2\pi}{3}+\pi \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{3}$, única solução do intervalo $]\pi\,,\,2\pi[$.

Assim, $S=\left\{\frac{5\pi}{3}\right\}$.

1.6. $\sqrt{18}\sin(3x)=-3 \Leftrightarrow 3\sqrt{2}\sin(3x)=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(3x)=-\frac{3}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee 3x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

As soluções do intervalo $]\pi\,,\,2\pi[$ obtêm-se de

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$ para $k\in\{2,3\}$ e de $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$ para $k\in\{1,2\}$.

$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3} \vee x=-\frac{\pi}{12}+\frac{6\pi}{3} \vee x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3} \vee$

$\vee x=\frac{5\pi}{12}+\frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{4} \vee x=\frac{23\pi}{12} \vee x=\frac{13\pi}{12} \vee x=\frac{7\pi}{4}$

Assim, $S=\left\{\frac{13\pi}{12},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{23\pi}{12}\right\}$.

2.1. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=0$ obtêm-se as soluções do intervalo $]-\pi,\pi[$:

$x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{2\pi}{3}$

Assim, $S=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$.

2.2. $\cos(x)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Para $k=0$ obtêm-se as soluções do intervalo $]-\pi,\pi[$:

$x=-\frac{\pi}{6}\vee x=\frac{\pi}{6}$

Portanto, $S=\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$.

2.3. $3\tan x+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=\{0,1\}$ obtêm-se as soluções do intervalo $]-\pi,\pi[$:

$x=-\frac{\pi}{6}\vee x=-\frac{\pi}{6}+\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}\vee x=\frac{5\pi}{6}$

Assim, $S=\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$.

2.4. $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1=0\Leftrightarrow\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=\{0,1\}$ obtêm-se as soluções do intervalo $]-\pi,\pi[$:

$x=-\frac{\pi}{12}\vee x=-\frac{\pi}{12}+\pi\vee x=-\frac{\pi}{12}\vee x=\frac{11\pi}{12}$

Assim, $S=\left\{-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right\}$.

3.1. $\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.2. $\cos^2(3x)=1\Leftrightarrow\cos(3x)=-1\vee\cos(3x)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 3x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$3x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

3.3. $\tan(2x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\tan(2x)=2\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\tan(2x)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\tan(2x)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

3.4. $4\sin\left(\frac{x}{2}\right)+2=0\Leftrightarrow\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee\frac{x}{2}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{7\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.5. $\sin(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\sin(2x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.6. $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.7. $\sin(4x)=\sin(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x=x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 4x=\pi-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 5x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}$

3.8. $\cos(2x)=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\cos(2x)=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos(2x)=\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos(2x)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos(2x)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos(2x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 2x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.9. $\cos(3x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow 3x=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi\ k\in\mathbb{Z}\vee$

$\vee 3x=-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 4x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

3.10. $2\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{8}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee \frac{\pi x}{8}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi x=\frac{4\pi}{3}+16k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee \pi x=-\frac{4\pi}{3}+16k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}+16k,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=-\frac{4}{3}+16k,\ k\in\mathbb{Z}$

3.11. $2\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=0 \vee 2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \vee \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.12. $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x) \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi \vee$

$\vee x-\frac{\pi}{3}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee -x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \vee x=-\frac{5\pi}{6}-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.13. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{11\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.14. $\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\pi+x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-\cos^2 x=-\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-\left(1-\sin^2 x\right)+\sin x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{-1\pm 3}{4} \Leftrightarrow \sin x=-1 \vee \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee$

$\vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.15. $\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-x=x-\frac{\pi}{5}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee$

$\vee \frac{\pi}{2}-x=\left(x-\frac{\pi}{5}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x=-\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee$

$\vee 0x=\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x=-\frac{7\pi}{10}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x\in\varnothing \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{20}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.16. $\sin(2x)+\sin x=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=-\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x)=\sin(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee 2x=\pi+x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.17. $\cos(4x)+\cos(2x)=0 \Leftrightarrow \cos(4x)=-\cos(2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(4x)=\cos(\pi-2\pi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x=\pi-2x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee 4x=-(\pi-2x)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 6x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee 2x=-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \vee x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.18. $2\sin^2 x-1=\cos x \Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right)-1-\cos x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-2\cos^2 x-1-\cos x=0 \Leftrightarrow -2\cos^2 x-\cos x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2}$

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{-1\pm 3}{4} \Leftrightarrow \cos x=-1 \vee \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee$

$\vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.19. $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2}=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi x=2\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=2+4k,\ k\in\mathbb{Z}$

3.20. $\cos^2(2x)-\sin^2(2x)=0 \Leftrightarrow \cos^2(2x)-\left(1-\cos^2(2x)\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos^2(2x)-1+\cos^2(2x)=0 \Leftrightarrow 2\cos^2(2x)-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2(2x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ k\in\mathbb{Z} \vee 2x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right) \vee$

$\vee \left(2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee 2x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$

3.21. $2\cos^2 x-2\sin^2 x=-1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-2\left(1-\cos^2 x\right)=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-2+2\cos^2 x=-1 \Leftrightarrow 4\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \vee \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee$

$\vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3.22. $2\cos^2 x = 8 \Leftrightarrow \cos^2 x = 4 \Leftrightarrow \cos x = 2 \vee \cos x = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing$ pois $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos x \leq 1$

3.23. $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee$

$\vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3.24. $\sqrt{12} + 2\tan(2x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 2\tan(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan(2x) = -\frac{2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \tan(2x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

3.25. $\sqrt{3}\tan^2(-x) + \tan(-x) = 0 \Leftrightarrow \tan(-x)\left[\sqrt{3}\tan(-x) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \tan(-x) = 0 \vee \sqrt{3}\tan(-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan(-x) = 0 \vee \tan(-x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan(-x) = 0 \vee \tan\left(-x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Leftrightarrow -x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{6} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3.26. $\sqrt{3}\sin - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin x}{\cos x} \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan x \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3.27. $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{6\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3.28. $2\cos^2 x - 1 = \sin x + 1 \Leftrightarrow 2\left(1 - \sin^2 x\right) - 1 = \sin x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 x - 1 = \sin x + 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee$

$\vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4.1. $5\cos x + 1 = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{5} \wedge x \in [0, \pi]$

Recorrendo à calculadora determina-se o valor de $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$, ou seja, $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$.

Assim, $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \approx 1,77$ rad.

Portanto, $x \approx 1,77$ rad.

4.2. $\tan x + 3 = 0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \tan x = -3 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Recorrendo à calculadora determina-se o valor de $\arctan(-3)$.

Assim, $\arctan(-3) \approx -1,25$ rad.

Portanto, $x = -1,25$ rad.

4.3. $\sin(2x) = -0,3 \wedge x \in \left[-\frac{5\pi}{4}, -\pi\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x) = -0,3 \wedge 2x \in \left[-\frac{5\pi}{2}, -2\pi\right]$

Recorrendo à calculadora determina-se um valor aproximado de $\arcsin(0,3)$, ficando assim a conhecer $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\sin\alpha = 0,3$.

Portanto, $\arcsin(0,3) \approx 0,305$ rad.

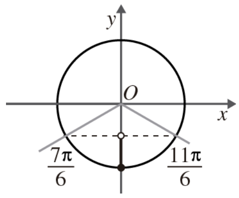
$\sin(2x) = -0,3 \wedge 2x \in \left[-\frac{5\pi}{2}, -2\pi\right] \Rightarrow 2x \approx -2\pi - 0,305$

$\Rightarrow 2x \approx -6,588 \Rightarrow x \approx -3,29$

Portanto, $x \approx -3,29$ rad.

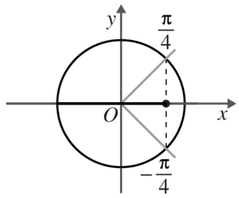
5.1. $2\sin x + 1 < 0 \wedge x \in [0, 2\pi[\Leftrightarrow \sin x < -\frac{1}{2} \wedge x \in [0, 2\pi[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right[$



5.2. $2\cos - \sqrt{2} \leq 0 \wedge x \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow$

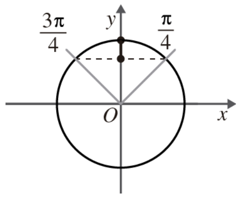
$\Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$



5.3. $\sqrt{2}\sin x - 1 \geq 0 \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$

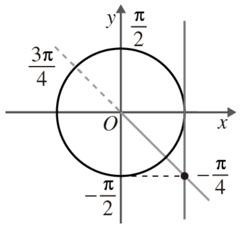
$\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$



5.4. $\tan x + 1 \leq 0 \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow \tan x \leq -1 \wedge x \in [-\pi, \pi[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$



6.1. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(7\pi - x) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \cos x - \cos(\pi - x) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \cos x - (-\cos x) + 1 \Leftrightarrow f(x) = 2\cos x + 1$

6.2. $f(x) = -\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow 2\cos x + 1 = -\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6.3. $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\frac{1}{2} \wedge x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ou seja,

$\sin x = -\frac{1}{3} \wedge x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Como $\sin x < 0$, então $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos\frac{2\sqrt{2}}{3} \vee \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos x < 0$, pelo que $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Assim, $f(x) = 2\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + 1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1$.

7.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2(3x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2(3x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(3x) = -1 \vee \cos(3x) = 1 \Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee$

$\vee 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Assim, uma expressão geral dos zeros da função *f* é

$x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

7.2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2\cos^2(3x) + 2 = 3 - 3\cos(3x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(3x) = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-2) \times (-1)}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow \cos(3x) = \frac{-3 \pm 1}{-4}$

$\Leftrightarrow \cos(3x) = 1 \vee \cos(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee$

$\vee 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \vee$

$\vee x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$

Portanto as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de *f* e de *g* são:

$x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

8.1. $g(t) = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{\pi t}{6} = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi t = -2\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{\pi t}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = -2 + 12k, k \in \mathbb{Z} \vee \pi t = 8\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = -2 + 12k, k \in \mathbb{Z} \vee t = 8 + 12k, k \in \mathbb{Z}$

Por outro lado, sabe-se que $t \in]-\pi, \pi]$, pelo que:

- $-\pi < -2 + 12k \leq \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-\pi + 2}{12} < k \leq \frac{\pi + 2}{12}, k \in \mathbb{Z}$

  $\Leftrightarrow k = 0$

  Portanto, se $k = 0$, $t = -2$.
- $-\pi < 8 + 12k \leq \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \frac{-\pi - 8}{12} < k \leq \frac{\pi - 8}{12}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \varnothing$

  Assim, a função *g* tem apenas um zero, $t = -2$.

8.2. $g(-3) + g(2) = 2\sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right) + \sqrt{3} + 2\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$

$= 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3} = -2 + 3\sqrt{3}$

9. $f(x) = 0 \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2\cos(2x) = 0 \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$

Os zeros de *f* do intervalo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$ obtêm-se para

$k = 0 : x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6}$. Então, a função *f* tem exatamente

dois zeros, $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$ cuja soma é igual a zero.

10.1. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $g(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\vee \cos x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\left(x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)\vee$

$\vee\left(x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi\vee x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

c) $g(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vee \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow\left(x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)\vee$

$\vee\left(x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

10.2. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x=\cos^2 x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x=1-\sin^2 x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}\Leftrightarrow \sin x=-1\vee \sin x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee$

$\vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

11.1. $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Menor solução positiva: $\frac{5\pi}{3}$

11.2. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3x)=\frac{\sqrt{6}}{4}\Leftrightarrow \cos(3x)=\frac{\sqrt{6}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(3x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\vee x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Menor solução positiva: $\frac{\pi}{12}$

11.3. $2\tan\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)+2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Menor solução positiva: $\frac{\pi}{2}$

11.4. $\cos(2x)=\sin x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}-x+2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 2x=-\frac{\pi}{2}+x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\vee x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Menor solução positiva: $\frac{\pi}{6}$

11.5. $\sqrt{3}\tan(-x)=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan(-x)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan(-x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Menor solução positiva: $\frac{\pi}{6}$

11.6. $\sin(4x)+\sin(2x)=0\Leftrightarrow \sin(4x)=-\sin(2x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(4x)=\sin(-2x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x=-2x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 4x=\pi+2x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 2x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

Menor solução positiva: $\frac{\pi}{3}$

11.7. $2\cos^2 x-\sin x=1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\sin x-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(1-\sin^2 x\right)-\sin x-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x-\sin x+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)\times 1}}{2\times(-2)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{-4}\Leftrightarrow \sin x=-1\vee \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee$

$\vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

Menor solução positiva: $\frac{\pi}{6}$

11.8. $2\sin^2(2x)=1\Leftrightarrow \sin^2(2x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vee \sin(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(2x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 2x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)\vee$

$\vee\left(2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\vee 2x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow$

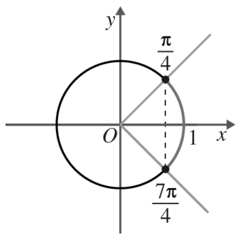
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee$

$\vee x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Menor solução positiva: $\frac{\pi}{8}$

12.1. $2\cos x > \sqrt{2} \wedge x \in [0\,,\,2\pi] \Leftrightarrow \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \in [0\,,\,2\pi]$

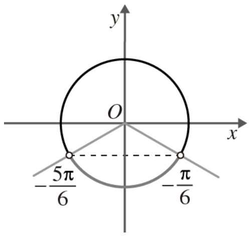
Sabemos que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



$2\cos x > \sqrt{2} \wedge x \in [0\,,\,2\pi] \Leftrightarrow x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}\,,\,2\pi\right]$

12.2. $2\sin x + 1 < 0 \wedge x \in]-\pi\,,\,\pi] \Leftrightarrow \sin x < -\frac{1}{2} \wedge x \in]-\pi\,,\,\pi]$

Sabemos que $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ e $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.



$2\sin x + 1 < 0 \wedge x \in]-\pi\,,\,\pi] \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{5\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{6}\right[$

13.1. $4\sin(2x) + 4 = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$ obtém-se $x = -\frac{\pi}{4}$, única solução da equação no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$,

Logo, $S = \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$.

13.2. $4\cos(2x) + \sqrt{12} = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{\sqrt{12}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$ obtêm-se as soluções do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

$x = \frac{5\pi}{12} \vee x = -\frac{5\pi}{12}$

Logo, $S = \left\{-\frac{5\pi}{2}\,,\frac{5\pi}{12}\right\}$.

13.3. $\sqrt{3}\tan(3x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan(3x) = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan(3x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

As soluções da equação no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ são obtidas para $k \in \{-1\,,0\,,1\}$:

$x = \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{9} \vee x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{9} \vee x = \frac{\pi}{9} \vee x = \frac{4\pi}{9}$

Assim, $S = \left\{-\frac{2\pi}{9}\,,\frac{\pi}{9}\,,\frac{4\pi}{9}\right\}$.

13.4. $2\sin(\pi x) = 1 \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \pi x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}$

As soluções do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ obtêm-se de

$x = \frac{1}{6} + 2k$ para $k = 0$ e de $x = \frac{5}{6} + 2k$ para $k \in \{-1\,,0\}$:

$x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{5}{6} - 2 \vee x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \vee x = -\frac{7}{6} \vee x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$

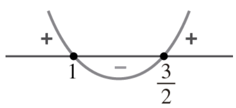
$S = \left\{-\frac{7}{6}\,,\frac{1}{6}\,,\frac{5}{6}\right\}$.

14. $2\cos^2 x - 5\cos x > -3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 3 > 0$

Fazendo $\cos x = y$, vem $2y^2 - 5y + 3 > 0$ **(1)**

$2y^2 - 5y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\times 2\times 3}}{2\times 2} \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \vee y = 1$



Voltando a **(1)** temos que:

$2y^2 - 5y + 3 > 0 \Leftrightarrow y < 1 \vee y > \frac{3}{2}$ e voltando, também, à variável *x*:

$\cos x < 1 \vee \cos x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos x < 1 \vee x \in \varnothing \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos < 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

15.1. $f(x) = g(x) \wedge x \in [0\,,\,4\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \wedge x \in [0\,,\,4\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \wedge x \in [0\,,\,4\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{x}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \frac{x}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \wedge$

$\wedge x \in [0, 4\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{3x}{2} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \wedge x \in [0, 4\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{2\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right) \wedge x \in [0, 4\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = 2\pi \vee x = \frac{10\pi}{3} \vee x = 4\pi$

Portanto, a abcissa do ponto A é $\frac{2\pi}{3}$ e a abcissa do ponto B é $\frac{10\pi}{3}$.

Determinemos as ordenadas destes pontos.

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

$f\left(\frac{10\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$

$= 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

Logo, $A\left(\frac{2\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$ e $B\left(\frac{10\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$.

15.2. $\left[0 \le x \le \frac{2\pi}{3} \wedge 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \le y \le 2\sin(x)\right] \vee$

$\vee \left[\frac{10\pi}{3} \le x \le 4\pi \wedge 2\sin(x) \le y \le 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

16.1. $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)}{1+\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)} =$

$= \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} =$

$= \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$

$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2} - 1$

16.2. $f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1+\cos x} = -1 \wedge x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 - \cos x \wedge x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos x = -1 \wedge x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \wedge x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$

Portanto, $f(x) = -1 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

16.3. $f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{1}{3} \wedge x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cos x = 1 + \cos x \wedge x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos x = 1 \wedge x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \wedge x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3}$

Como se pretende a abcissa do ponto que se situa no primeiro quadrante e tem ordenada igual a $\frac{1}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$.

Logo, a abcissa pedida é $\frac{\pi}{3}$.

17.1. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge 1 - \cos^2 x \ne 0\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \cos^2 x \ne 1\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \cos x \ne -1 \wedge \cos x = 1\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

17.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\tan x}{1 - \cos^2 x} = 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow \tan x = 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in D_g \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Portanto, a função g não tem zeros.

Ficha de teste 3 **Págs. 32 e 33**

1. $\forall x \in D_f, \ \tan^2(3x) \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in D_f, -\tan^2(3x) \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - \tan^2(3x) \le 3$

Portanto, $D'_f = \left]-\infty, 3\right]$.

Resposta: **(C)**

2. $\dot{O}B$ é o lado extremidade de um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, pelo que as coordenadas do ponto B são $\left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$, ou seja,

$\left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) =$

$= \left(-\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Por outro lado, o ponto A é a imagem do ponto B pela reflexão central de centro O, logo $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Já o ponto P tem coordenadas $\left(1, \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, ou seja, $\left(1, -\tan\frac{\pi}{3}\right) = \left(1, -\sqrt{3}\right)$.

Portanto, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $P\left(1, -\sqrt{3}\right)$.

Resposta: **(B)**

3. $2\tan\alpha+1=0 \wedge \alpha\in\left]-\frac{5\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\alpha=-\frac{1}{2} \wedge \alpha\in\left]-\frac{5\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[$

Como $\tan\alpha<0$, então $\alpha\in\left]-\frac{5\pi}{4},-\pi\right[$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

Pelo que:

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{4}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{5}{4}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5} \vee \cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Como $\alpha\in\left]-\frac{5\pi}{4},-\pi\right[$, então $\cos\alpha<0$, pelo que

$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha=\tan\alpha\times\cos\alpha$

Portanto, $\sin\alpha=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Assim:

$\cos\alpha-3\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}-3\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{5\sqrt{5}}{5}=-\sqrt{5}$

Resposta: **(A)**

4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

Por outro lado, $\alpha+\beta=\pi$, isto é, $\beta=\pi-\alpha$.

$\cos\beta=-\frac{5}{7} \Leftrightarrow \cos(\pi-\alpha)=-\frac{5}{7} \Leftrightarrow -\cos\alpha=-\frac{5}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{5}{7}$

$\left(\frac{5}{7}\right)^2+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \frac{25}{49}+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{25}{49} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{24}{49} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{7} \vee \sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{7}$

Como α é um ângulo agudo, $\sin\alpha>0$, pelo que

$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{7}$, logo $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Resposta: **(D)**

5. $\sin\beta\times\sin\alpha<0$, pois $\sin\beta<0$ e $\sin\alpha>0$.

Por outro lado, $\sin\beta+\tan\alpha<0$, pois $\sin\beta<0$ e $\tan\alpha<0$.

Tem-se, ainda, que $\cos\beta-\tan\alpha>0$, pois $\cos\beta>0$ e $\tan\alpha<0$.

Finalmente, $\sin\alpha\times\cos\alpha<0$, pois $\sin\alpha>0$ e $\cos\alpha<0$.

Resposta: **(C)**

6.1. $x\in D_f$, pelo que $\frac{\pi x}{3}\in D_f$, pois $D_f=\mathbb{R}$.

Assim:

$-1\le\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\le1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\ge-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\ge-\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{2}\ge1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\ge1-\sqrt{2}$

$D'_f=\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$

6.2. $x\in D_f$, então $x+6\in D_f$, pois $D_f=\mathbb{R}$.

Assim:

$f(x+6)=1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi(x+6)}{3}\right)=1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x+6\pi}{3}\right)=$

$=1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)=1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}+2\pi\right)$

Como a função seno é periódica de período 2π, então $1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}+2\pi\right)=1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)=f(x)$.

Portanto, a função f é periódica de período 6.

6.3. **a)** $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee$

$\vee \frac{\pi x}{3}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi x=\frac{3\pi}{4}+6k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \vee \pi x=\frac{9\pi}{4}+6k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}+6k,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{9}{4}+6k,\ k\in\mathbb{Z}$

Assim, a expressão geral dos zeros de f é:

$x=\frac{3}{4}+6k,\ k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{9}{4}+6k,\ k\in\mathbb{Z}$

b) O contradomínio da função f é $\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$, pelo que o máximo absoluta de f é $1+\sqrt{2}$.

$f(x)=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow 1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi x=-\frac{3\pi}{2}+6k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}+6k,\ k\in\mathbb{Z}$

c) $f(-2)-f\left(\frac{3}{2}\right)=$

$=1-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\left(1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\times\frac{1}{3}\right)\right)=$

$=1-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)-1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

$=-\sqrt{2}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

$=-\sqrt{2}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

$=-\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{2}\times1=\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{2}$

7.1. Área do triângulo $[ABC]$ = $\frac{\overline{BC}\times\overline{AB}}{2}=\frac{4\times\overline{AB}}{2}=2\overline{AB}$.

Por outro lado, $\theta+\beta=\pi$ rad (θ e β são ângulos suplementares), ou seja, $\beta=\pi-\theta$.

$\cos\beta = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos(\pi - \theta) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{4}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{20}{3}$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{20}{3}\right)^2 = 4^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \frac{400}{9} = 16 + \overline{AB}^2$

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{400}{9} - 16 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{256}{9}$

Como $\overline{AB} > 0$: $\overline{AB} = \sqrt{\frac{256}{9}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{16}{3}$

Então, a área triângulo [*ABC*] é $2 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.

7.2. Sabe-se que $\cos\beta = -\frac{3}{5}$ e β é um ângulo obtuso.

Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \sin^2\beta = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \sin^2\beta = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\beta = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin^2\beta = \frac{16}{25}$

$\Leftrightarrow \sin\beta = \frac{4}{5} \vee \sin\beta = -\frac{4}{5}$, como β é obtuso, $\sin\beta > 0$,

portanto $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

Por definição de tangente:

$\tan\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{\frac{16}{3}}{4} \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{16}{3} \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\theta = \frac{4}{3}$

Então, $\sin\beta + \tan\theta = \frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{32}{15}$.

8.1. **a)** $f(x) = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi]$, pelo que:

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$
$\wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$
$\wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$
$\wedge x \in]-\pi, \pi]$

Os zeros de *f* que no intervalo $]-\pi, \pi]$ obtêm-se para :

$k = 0$: $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2}$

Assim, os zeros de *f* são $x = -\frac{\pi}{6}$ e $x = -\frac{\pi}{2}$.

b) $g(x) = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi[$, pelo que

$4 - 8\sin(2x) = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$
$\wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee c = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$
$\wedge x \in]-\pi, \pi]$

Os zeros de *f* que no intervalo $]-\pi, \pi]$ obtêm-se para :

$k = \{-1, 0\}$:

$x = \frac{\pi}{12} - \pi \vee x = \frac{5\pi}{12} - \pi \vee x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{11\pi}{12} \vee x = -\frac{7\pi}{12} \vee x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow$

Assim, os zeros de *g* são:

$x = -\frac{11}{12}\pi \vee x = -\frac{7\pi}{12} \vee x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$

8.2. **a)** $g(x) \geq 4 \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - 8\sin(2x) \geq -4 x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8\sin(2x) \geq -8 \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x) \leq 1 \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in]-\pi, \pi]$, pois $\sin(2x) \leq 1$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge$
$\wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$
$\wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$
$\wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{2\pi}{15} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{8\pi}{15} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$
$\wedge x \in]-\pi, \pi]$

As soluções do intervalo $]-\pi, \pi]$ são obtidas para $k = 0$:

$x = -\frac{2\pi}{15} \vee x = -\frac{8\pi}{15}$

Assim, $S = \left\{-\frac{8\pi}{15}, -\frac{2\pi}{15}\right\}$.

9. Pretende-se resolver a equação $T(t) = 8$, $t \in [0, 24[$.

Assim:

$10 + 4\sin\left[\frac{\pi(t-8)}{12}\right] = 8 \wedge t \in [0, 24[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\left[\frac{\pi(t-8)}{12}\right] = -2 \wedge t \in [0, 24[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi(t-8)}{12}\right] = -\frac{1}{2} \wedge t \in [0\,,\,24[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\pi(t-8)}{12} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \vee \right.$$

$$\left. \vee \frac{\pi(t-8)}{12} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right] \wedge t \in [0\,,\,24[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\pi(t-8) = -2\pi + 24k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \vee \right.$$

$$\left. \vee \pi(t-8) = 14\pi + 24k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge t \in [0\,,\,24[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t = 6 + 24k,\, k \in \mathbb{Z} \vee t = 22 + 24k,\, k \in \mathbb{Z}) \wedge t \in [0\,,\,24[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 6 \vee t = 22$$

Portanto, nesse dia de outubro e nessa localidade, a temperatura foi igual a 8 ºC às 6 horas e às 22 horas.