Ficha para praticar 7 **Págs. 34 a 37**

1.1. Seja $y = mx + b$ a equação pedida.

O declive, *m*, é igual à tangente trigonométrica da inclinação.

Assim,

$$m = \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Como o ponto $A\left(2\sqrt{3}, 1\right)$ pertence à reta:

$$1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{3} + b \Leftrightarrow 1 = -2 + b \Leftrightarrow b = 3$$

Então, a equação pedida é $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$.

1.2. O declive, *m*, da reta *AB* é:

$$m = \frac{2-1}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Seja α a inclinação da reta *AB*, então,

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, portanto, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Portanto, a inclinação da reta *AB* é $\frac{\pi}{6}$ radianos.

1.3. A reta *AB* tem declive igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pelo que $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ é a equação reduzida da reta *AB*.

Determinemos a ordenada na origem *b*.

O ponto $A\left(2\sqrt{3}, 1\right)$ pertence à reta *AB*, portanto,

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{3} + b \Leftrightarrow 1 = 2 + b \Leftrightarrow b = -1.$$

Assim, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$ é a equação reduzida da reta *AB*.

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto de interseção da reta *AB* com eixo *Ox*.

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

As coordenadas do ponto de interseção são $\left(\sqrt{3}, 0\right)$.

2.1. **a)** Seja $y = mx + b$ a equação pedida.

O declive, *m*, é igual à tangente trigonométrica da inclinação.

Assim:

$m = \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, temos, assim, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Como o ponto $A(-2, 3)$ pertence à reta:

$$3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-2) + b \Leftrightarrow 3 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

A equação pedida é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) Seja $y = mx + b$ a equação pedida.

O declive, *m*, é igual à tangente trigonométrica da inclinação.

Assim:

$m = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \tan\frac{\pi}{4} = -1$ e $y = -x + b$

Como o ponto $A(-2, 3)$ pertence à reta:

$3 = -1 \times (-2) + b \Leftrightarrow 3 = 2 + b \Leftrightarrow b = 1$

A equação pedida é $y = -x + 1$.

c) Seja $y = mx + b$ a equação pedida.

O declive, *m*, é igual à razão trigonométrica de inclinação.

Assim:

$$m = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Assim, $y = -\sqrt{3}x + b$.

Como o ponto $A(-2, 3)$ pertence à reta:

$3 = -\sqrt{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow 3 = 2\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 3 - 2\sqrt{3}$

Portanto, $y = -\sqrt{3}x + 3 - 2\sqrt{3}$ é a equação pedida.

2.2. **a)** O declive, *m*, da reta *AB* é:

$$m = \frac{3-1}{-2-0} = -1$$

Seja α a inclinação da reta *AB*, então:

$\tan\alpha = -1 \wedge \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, ou seja, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ rad.

A inclinação da reta *AB* é $\frac{3\pi}{4}$ rad.

b) O declive da reta *AC* é $m = \frac{3+4}{-2+3} = 7$.

Seja α a inclinação da reta *AC*, então:

$\tan\alpha = 7 \wedge \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, portanto, $\alpha = \arctan 7 \approx 1{,}4$ rad.

A reta *AC* tem inclinação, aproximadamente, igual a 1,4 rad.

c) O declive da reta *BC* é $m = \frac{1+4}{0+3} = \frac{5}{3}$.

Seja α a inclinação da reta *BC*, então:

$\tan\alpha = \frac{5}{3} \wedge \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Portanto, $\alpha = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) \approx 1{,}0$ rad.

A reta *BC* tem inclinação, aproximadamente, igual a 1,0 rad.

3.1. $\overline{BC} = 1$ e $\overline{AB} = 2\overline{BC}$, pelo que $\overline{AB} = 2$.

Assim:

$A\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $D\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

3.2. **a)** O declive, *m*, da reta *OC* é igual a $\tan\alpha$ e $m = \frac{1}{2}$.

$\tan\alpha = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Logo, $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}6^\circ$.

b) O declive, *m*, da reta *OD* é igual a $\tan\beta$ e $m=-\frac{1}{2}$.

$\tan\beta=-\frac{1}{2}\wedge\beta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, pelo que

$\beta=180^\circ-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, ou seja, $\beta\approx153{,}4^\circ$.

Portanto, a inclinação da reta *OD* é, aproximadamente, igual a $153{,}4^\circ$.

3.3. Tem-se que:

$A\hat{O}B=C\hat{O}D=\beta-\alpha=\left[\pi-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\approx$

$\approx 2{,}21$ rad

4. A reta tem inclinação igual a 120º.

O declive, *m*, da reta é igual à tangente trigonométrica da inclinação.

Portanto, $m=\tan(120^\circ)=\tan(180^\circ-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$.

Como a reta passa pela origem, o ponto de coordenadas (0 , 0) pertence à reta.

Por outro lado, como o declive é $-\sqrt{3}$, um vetor diretor da reta tem coordenadas, por exemplo, $(1,-\sqrt{3})$.

Assim, uma equação vetorial da reta é:

$(x,y)=k(1,-\sqrt{3}),\ k\in\mathbb{R}$

5. $2x+5y-3=0\Leftrightarrow 5y=-2x+3\Leftrightarrow y=-\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$, pelo que o declive da reta *r* é igual a $-\frac{2}{5}$.

Seja α a inclinação da reta *r*, então

$\tan\alpha=-\frac{2}{5}\wedge\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\pi\right[$

Portanto, $\alpha=\pi-\arctan\left(\frac{2}{5}\right)\approx 2{,}8$ rad.

Assim, um valor aproximado à décima do radiano da inclinação da reta *r* é 2,8 rad.

6.1. $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)=60^\circ=\frac{\pi}{3}$ rad

6.2. $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)=120^\circ=\frac{2\pi}{3}$ rad

6.3. $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CM}}\right)=150^\circ=\frac{5\pi}{6}$ rad

6.4. $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}}\right)=0^\circ=0$ rad

6.5. $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}}\right)=180^\circ=\pi$ rad

6.6. $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MC}}\right)=30^\circ=\frac{\pi}{6}$ rad

7.1. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ED}=\left\|\overrightarrow{EF}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{ED}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{FD}}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ED}=4\times4\times\cos(120^\circ)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ED}=16\times\cos(180^\circ-60^\circ)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ED}=16\times(-\cos 60^\circ)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ED}=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ED}=-8$

7.2. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=4\times4\times\cos(60^\circ)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=16\times\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=8$

7.3. $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{FC}$ têm o mesmo sentido, pelo que

$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{FC}=\left\|\overrightarrow{ED}\right\|\times\left\|\overrightarrow{FC}\right\|\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{FC}=4\times8\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{FC}=32$

7.4. $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BD}$, portanto $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

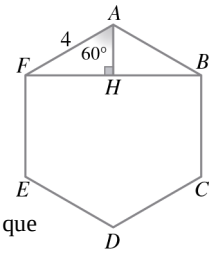
7.5. O triângulo [*BDF*] é equilátero, pelo que $\left(\overrightarrow{FB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{FD}\right)=60^\circ$.

Então, $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FD}=\left\|\overrightarrow{FB}\right\|\left\|\overrightarrow{FD}\right\|\times\cos(60^\circ)$.

Por outro lado:

$\sin 60^\circ=\frac{\overline{FM}}{4}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\overline{FM}}{4}\Leftrightarrow\overline{FM}=2\sqrt{3}$

Logo, $\left\|\overrightarrow{FB}\right\|=2\overline{FM}=4\sqrt{3}$.



Assim:

$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FD}=4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FD}=24$

7.6. $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CB}$ têm sentidos contrários, pelo que

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=-8\times4=-32$

8. A área do trapézio [*BCDE*] é igual a 10, pelo que,

$\frac{\overline{EB}+\overline{DC}}{2}\times\overline{BC}=10\Leftrightarrow\frac{\overline{EB}+4}{2}\times4=10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\overline{EB}+4\right)\times2=10\Leftrightarrow\overline{EB}+4=5\Leftrightarrow\overline{EB}=1$

Por outro lado, tem-se que $\overline{FC}=3$ e $\overline{BC}=4$, pelo que $\overline{BF}=1$.

8.1. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BE}$ têm sentidos contrários, pelo que

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BE}\right\|=-4\times1=-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=-4$

8.2. $\overrightarrow{EB}$ e $\overrightarrow{AD}$ são perpendiculares, portanto $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

8.3. $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{ED}\right\|\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{DC}}\right)$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{DC}}\right)=-\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right)=-\cos\left(E\hat{D}C\right)=-\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}$

Por outro lado:

$\overline{AE}^2+\overline{AD}^2=\overline{ED}^2\Leftrightarrow3^2+4^2=\overline{ED}^2$, logo $\overline{ED}=5$.

$-\cos\left(E\hat{D}C\right)=-\frac{3}{5}$, ou seja, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{DC}}\right)=-\frac{3}{5}$

Então:

$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{ED}\right\|\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{DC}}\right)=5\times4\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-12$

8.4. $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\left\|\overrightarrow{DE}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB}}\right)$

Tem-se que

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CB}}\right)=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DA}}\right)=\cos\left(A\hat{D}E\right)=\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\frac{4}{5}$.

Portanto, $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=5\times4\times\frac{4}{5}=16$.

De outra forma: $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DA}=4\times4=16$

9. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{u,v}\right)=3\times5\times\cos(120^\circ)=$

$=15\times\cos(180^\circ-60^\circ)=-15\times\cos 60^\circ=-15\times\frac{1}{2}=-\frac{15}{2}$

9.1. $(2\vec{u})\vec{v}=2(\vec{u}\cdot\vec{v})=2\times\left(-\frac{15}{2}\right)=-15$

9.2. $(-4\vec{v})(3\vec{u})=(-4\times3)(\vec{v}\cdot\vec{u})=-12(\vec{u}\cdot\vec{v})=-12\times\left(-\frac{15}{2}\right)=90$

9.3. $(\vec{v}+4\vec{u})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+4\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+4\|\vec{u}\|^2=$

$=-\frac{15}{2}+4\times3^2=-\frac{15}{2}+36=\frac{57}{2}$

9.4. $(6\vec{u}-2\vec{v})(3\vec{v})=18\vec{u}\cdot\vec{v}-6\vec{v}\cdot\vec{v}=18\vec{u}\cdot\vec{v}-6\|\vec{v}\|^2=$

$=18\left(-\frac{15}{2}\right)-6\times5^2=-135-150=-285$

10. Seja *m* o declive da reta *r*.

$m=\frac{1}{3}$, portanto $\tan\theta=\frac{1}{3}\wedge\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, ou seja,

$\theta=\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Por outro lado, $\vec{t}(1,-4)$ é um vetor diretor da reta *t*, pelo que o declive m' desta reta é $m'=-\frac{4}{1}=-4$. Logo,

$\tan\alpha=-4\wedge\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, ou seja, $\alpha=\pi-\arctan(4)$.

Assim:

$\beta=\alpha-\theta\Leftrightarrow\beta=\pi-\arctan(4)-\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\beta\approx1,5$ rad

11.1. $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{EF}=\|\overrightarrow{DC}\|\|\overrightarrow{EF}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{EF}}\right)=$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos0^\circ=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times1=2$

11.2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\|\overrightarrow{AC}\|\|\overrightarrow{DB}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}}\right)=$

$=\|\overrightarrow{AC}\|\|\overrightarrow{DB}\|\cos90^\circ=\|\overrightarrow{AC}\|\|\overrightarrow{DB}\|\times0=0$

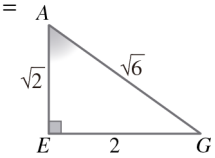
11.3. $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BD}=\|\overrightarrow{BG}\|\|\overrightarrow{BD}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BD}}\right)=$

$=2\times2\times\cos60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

11.4. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}=\|\overrightarrow{AE}\|\|\overrightarrow{AG}\|\cos\left(\overrightarrow{AE}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AG}\right)=$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=$

$=2$



11.5. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}\right)\cdot\overrightarrow{AH}=$

$=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{AH}=\|\overrightarrow{AH}\|^2+0=2^2=4$

11.6. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GH}\right)=$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GH}=$

$=0-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\|\overrightarrow{BG}\|^2+0=-\|\overrightarrow{AB}\|+2^2=$

$=-\left(\sqrt{2}\right)^2+4=-2+4=2$

12. Seja *m* o declive da reta *r*, então, $m=\frac{6-0}{0-3}=-2$.

Seja m' o declive da reta *s*, então $m'=\frac{1-0}{0-(-4)}=\frac{1}{4}$.

Designemos por α e θ as inclinações, em graus, das retas *r* e *s*, respetivamente.

$\tan\alpha=-2\wedge\alpha\in\left]90^\circ,180^\circ\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha=\arctan(-2)\wedge\alpha\in\left]90^\circ,180^\circ\right[$, logo

$\alpha=180^\circ-\arctan(2)\approx116,57^\circ$.

Por outro lado:

$\tan\theta=\frac{1}{4}\wedge\theta\in\left]0^\circ,90^\circ\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\theta=\arctan\left(\frac{1}{4}\right)\wedge\theta\in\left]0^\circ,90^\circ\right[$

Logo, $\theta=\arctan\left(\frac{1}{4}\right)\approx14,04^\circ$.

Assim, $A\hat{C}E=\theta\approx14,04^\circ$.

$E\hat{A}C=180^\circ-\alpha\approx63,43^\circ$

$C\hat{E}A=180^\circ-A\hat{C}E-E\hat{A}C\approx102,53^\circ$

13.1. $(2\vec{u})\vec{v}=2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}\right)=\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt[4]{16}\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

Logo, $2\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times(-1)=-2$.

13.2. $\left(-\sqrt{2}\vec{u}\right)\left(\sqrt{18}\vec{v}\right)=-\sqrt{2}\times\sqrt{18}\times\vec{u}\cdot\vec{v}=$

$=-\sqrt{36}\times(-1)=6$

13.3. $\left(\sqrt{8}\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot2\vec{v}=2\sqrt{8}(\vec{u}\cdot\vec{v})-2(\vec{v}\cdot\vec{v})=$

$=4\sqrt{2}(\vec{u}\cdot\vec{v})-2\|v\|^2=$

$=4\sqrt{2}\times(-1)-2\times\left(\sqrt[4]{8}\right)^2=-4\sqrt{2}-2\sqrt[4]{8^2}=$

$=-4\sqrt{2}-2\sqrt{8}=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-8\sqrt{2}$

13.4. $(2\vec{u}+2\vec{v})\cdot(3\vec{u}-3\vec{v})=$

$=2\times3\times(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=$

$=6\times(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=$

$=6\times\left(\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=$

$=6\times\left(\left(\sqrt[4]{2}\right)^2-\left(\sqrt[4]{8}\right)^2\right)=$

$=6\times\left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)=-6\sqrt{2}$

14.1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=$

$=3\times4\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\times4\times\frac{1}{2}=6$

14.2. Temos que $\overline{AC}=\overline{AB}$, pelo que $A\hat{C}B=C\hat{B}A$, logo $C\hat{B}A=30^\circ$ e, consequentemente, $B\hat{A}C=180^\circ-2\times30^\circ=120^\circ$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=$

$=3\times3\times\cos120^\circ=3\times\times\cos(180^\circ-60^\circ)=$

$=3\times3\times(-\cos60^\circ)=3\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

15.1. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\left\|\overrightarrow{CM}\right\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CM}}\right)$

$=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\cos 180^\circ=$

$=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times(-1)=-8$

15.2. $2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{MB}=2\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\left\|\overrightarrow{MB}\right\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{MB}}\right)$

$=2\times 4\times 2\sqrt{2}\cos 45^\circ=$

$=2\times 4\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16$

15.3. $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)+0=$

$=4\times 4\sqrt{2}\cos 45^\circ=$

$=4\times 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16$

15.4. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right)=$

$=4\times 4\sqrt{2}\times\cos 45^\circ=$

$=4\times 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16$

16. $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\left(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MQ}\right)=$

$=\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=$

$=\left\|RM\right\|^2+\overrightarrow{RM}\cdot\left(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MP}\right)+\overrightarrow{MP}\cdot\left(-\overrightarrow{QM}\right)=$

$=\left\|\overrightarrow{RM}\right\|^2+\overrightarrow{RM}\cdot\vec{0}-\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{QM}=$

$=\left\|RM\right\|^2-\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MP}=$

$=a^2-\left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2=a^2-4^2=a^2-16$

Ficha para praticar 8 **Págs. 38 a 41**

1.1. a) $\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3)-(-2,-4)=(7,1)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(0,-3)-(5,-3)=(-5,0)$

Tem-se, ainda, que $\overrightarrow{AB}+\vec{e}_2=(7,1)+(0,1)=(7,2)$, pelo que:

$\left(\overrightarrow{AB}+\vec{e}_2\right)\cdot\overrightarrow{BC}=(7,2)\cdot(-5,0)=7\times(-5)+2\times 0=-35$

b) $\overrightarrow{AB}=(7,1)$ e $\overrightarrow{BC}=(-5,0)$, pelo que

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=(-5,0)-(7,1)=(-12,-1)$

Por outro lado:

$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,-3)-(-2,-4)=(2,1)$

Assim:

$\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=(-12,-1)\cdot(2,1)=$

$=-12\times 2+(-1)\times 1$

$=-24-1=-25$

1.2. a) O ponto P pertence à reta de equação $y=x-1$, pelo que as suas coordenadas são da forma $(x,x-1)$.

Por outro lado, se $\overrightarrow{OP}$ é perpendicular a $\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Assim, vem:

$\overrightarrow{OP}=P-O=(x,x-1)$ e $\overrightarrow{AB}=(7,1)$

$(x,x-1)\cdot(7,1)=0\Leftrightarrow 7x+x-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$

Portanto, $P\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}-1\right)$, ou seja, $P\left(\frac{1}{8},-\frac{7}{8}\right)$.

b) P pertence à bissetriz dos quadrantes pares quando as suas coordenadas são simétricas, ou seja:

$P(x,-x),\ x\in\mathbb{R}$

Assim:

$\overrightarrow{OP}=P-O=(x,-x)$

$\overrightarrow{AC}=(2,1)$

Portanto,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=2\Leftrightarrow(x,-x)\cdot(2,1)=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-x=2\Leftrightarrow x=2$

Então, $P(2,-2)$.

2.1. $\cos\left(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{(2,-3)\cdot(1,4)}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\times\sqrt{1^2+4^2}}=$

$=\frac{2\times 1+(-3)\times 4}{\sqrt{13}\times\sqrt{17}}=\frac{-10}{\sqrt{221}}$

Logo, $\left(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}\right)=\arccos\left(-\frac{10}{\sqrt{221}}\right)\approx 132{,}3^\circ$

2.2. $\cos\left(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{(-2,3)(-3,1)}{\sqrt{(2)^2+3^2}\times\sqrt{(-3)^2+1^2}}=$

$=\frac{-2\times(-3)+3\times 1}{\sqrt{13}\times\sqrt{10}}=\frac{9}{\sqrt{130}}$

Logo, $\left(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}\right)=\arccos\left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right)\approx 37{,}9^\circ$.

2.3. $\cos\left(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)\left(-1,\sqrt{3}\right)}{\sqrt{\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2}\times\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}}=$

$=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{8}\times\sqrt{4}}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{6}}{2\sqrt{8}}=0$

Logo $\left(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}\right)=90{,}0^\circ$

2.4. $\cos\left(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{\left(\frac{1}{2},-1\right)\cdot\left(1,-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}\times\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}}=$

$=\frac{\frac{1}{2}\times 1+(-1)\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}}\times\sqrt{\frac{17}{16}}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{85}{64}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{85}}{8}}=\frac{6}{\sqrt{85}}$

Logo, $(\vec{u},\vec{v})=\arccos\left(\frac{6}{\sqrt{85}}\right)\approx 49{,}4^\circ$.

3. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(1,3,-1)\cdot(2,-1,2)=$

$=2-3-2=-3$

Como $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$, o ângulo *CBA* é obtuso.

Portanto, como o ângulo de vértice *B* do triângulo é obtuso, o triângulo [*ABC*] é obtusângulo.

4. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares se e somente se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Assim:

$(1,k-2,5)\cdot(5,k+2,-2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5+(k-2)(k+2)-10=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-4-5=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-9=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=3\vee k=-3$

Portanto, $k=-3$ ou $k=3$.

5.1. $r: 4x-5y-2=0\Leftrightarrow y=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}$

A reta *r* tem declive igual a $\frac{4}{5}$.

Como a reta *s* é perpendicular à reta *r*, o seu declive, m', é tal que $m\times m'=-1$, portanto:

$\frac{4}{5}\times m'=-1\Leftrightarrow m'=-\frac{5}{4}$

Portanto, a reta *s* é do tipo $y=-\frac{5}{4}x+b$.

O ponto *B* (2 , –5) pertence à reta *s*, pelo que:

$-5=-\frac{5}{4}\times 2+b\Leftrightarrow -5=-\frac{5}{2}+b\Leftrightarrow b=-5+\frac{5}{2}\Leftrightarrow b=-\frac{5}{2}$

Assim, a equação reduzida da reta *s* é $y=-\frac{5}{4}x-\frac{5}{2}$.

5.2. $C(0,y)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-5)-(-3,4)=(5,-9)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,y)-(-3,4)=(3,y-4)$

O triângulo [*ABC*] é retângulo em *A* se e só se $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(5,-9)\cdot(3,y-4)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15-9\times(y-4)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15-9y+36=0\Leftrightarrow 9y=51\Leftrightarrow y=\frac{51}{9}\Leftrightarrow y=\frac{17}{3}$

O ponto *C* tem coordenadas $\left(0,\frac{17}{3}\right)$.

6.1. $(2,3,1)=(2,6,-2)+\lambda(0,1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}2=2\\3=6+\lambda\Leftrightarrow\lambda=-3\\1=-2-\lambda\end{cases}$

Logo, $A(2,3,1)\in r$.

$(2,5,-1)=(2,6,-2)+\lambda(0,1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}2=2\\5=6+\lambda\Leftrightarrow\lambda=-1\\-1=-2-\lambda\end{cases}$

Logo, $B(2,5,-1)\in r$

6.2. Seja α o plano mediador de [*AB*] e $P(x,y,z)$ um ponto de α.

$M\left(\frac{2+2}{2},\frac{3+5}{2},\frac{1+(-1)}{2}\right)=M(2,4,0)$ é o ponto médio de [*AB*].

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(x-2,y-4,z)\cdot(0,2,-2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y-8-2z=0\Leftrightarrow y-z=4$

$\alpha: y-z=4$

6.3. O ponto *C* se existir, é equidistante dos pontos *A* e *B*. Logo, *C* terá de pertencer ao plano mediador de [*AB*].

Por outro lado, como *C* pertence à reta *s*, é da forma $C(-5+k,k,6-k)$ com $k\in\mathbb{R}$.

Determinemos *k* sabendo que $k\in\alpha: y-z=4$.

$k-(6-k)=4\Leftrightarrow k=5$

Portanto, $C(-5+5,5,6-5)=C(0,5,1)$.

Sabemos que $\overline{AC}=\overline{BC}$ porque *C* pertence ao plano mediador de [*AB*]. Falta verificar que $\overline{AC}=\overline{AB}$:

$\overline{AC}=\sqrt{(0-2)^2+(5-3)^2+(1-1)^2}=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}$

$\overline{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(5-5)^2+(1-1)^2}=\sqrt{4+0+4}=\sqrt{8}$

Como $\overline{AC}=\overline{AB}=\overline{BC}$ o triângulo [*ABC*] é equilátero.

O ponto *C* tem coordenadas $(0,5,1)$.

7.1. $r: 2x-5y-1=0\Leftrightarrow 5y=2x-1\Leftrightarrow y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$

Portanto, o declive da reta *r* é $\frac{2}{5}$.

Como a reta *s* é perpendicular à reta *r*, o seu declive, m', é tal que $m\times m'=-1$, ou seja:

$\frac{2}{5}\times m'=-1\Leftrightarrow m'=-\frac{5}{2}$

Portanto, a reta *s* é do tipo $y=-\frac{5}{2}x+b$.

O ponto $A(2,-1)$ pertence à reta *s*, pelo que:

$-1=-\frac{5}{2}\times 2+b\Leftrightarrow -1=-5+b\Leftrightarrow b=4$

Assim, a equação reduzida da reta *s* é $y=-\frac{5}{2}x+4$.

7.2. Seja $P(x,y)$ as coordenadas de um ponto qualquer da reta tangente à circunferência no ponto *Q*, então:

$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QP}=0$

Tem-se que:

$\overrightarrow{QR}=R-Q=(-4,3)-(-3,-2)=(-1,5)$

$\overrightarrow{QP}=P-Q=(x,y)-(-3,-2)=(x+3,y+2)$

Assim:

$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QP}=0\Leftrightarrow(-1,5)\cdot(x+3,y+2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x-3+5y+10=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5y=x-7\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$

A equação pedida é $y=\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$.

8.1. Seja *M* o ponto médio do segmento [*AB*].

Então, $M\left(\frac{5+3}{2},\frac{-2+0}{2},\frac{1-1}{2}\right)$, ou seja, $M(4,-1,0)$.

Por outro lado:

$\overrightarrow{AB}=B-A=(3,0,-1)-(5,-2,1)=(-2,2,-2)$

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano mediador de [*AB*], então:

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(x-4,y+1,z)\cdot(-2,2,-2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2(x-4)+2(y+1)-2z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+8+2y+2-2z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+2y-2z+10=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-y+z-5=0$

Assim, uma equação do plano mediador de [*AB*] é $x-y+z-5=0$.

8.2. Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano tangente à superfície esférica de centro $C(1,2,1)$ no ponto *B*. Então:

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{BP}=P-B=(x,y,z)-(3,0,-1)=(x-3,z+1)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(1,2,1)-(3,0,-1)=(-2,2,2)$

Assim:

$(x-3,y,z+1)\cdot(-2,2,2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2(x-3)+2y+2(z+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+6+2y+2z+2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+2y+2z+8=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-y-z-4=0$

Portanto, a equação pedida é $x-y-z-4=0$

8.3. Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da superfície esférica de diâmetro [*AB*].

Então, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$.

$\overrightarrow{AP}=P-A=(x,y,z)-(5,-2,1)=(x-5,y+2,z-1)$

$\overrightarrow{BP}=P-B=(x,y,z)-(3,0,-1)=(x-3,y,z+1)$

Assim:

$(x-5,y+2,z-1)\cdot(x-3,y,z+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)(x-3)+(y+2)y+(z-1)(z+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x-5x+15+y^2+2y+z^2-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-8x+2y+14=0$

Portanto, uma equação da superfície esférica de diâmetro [*AB*] é $x^2+y^2+z^2-8x+2y+14=0$.

9.1. Substituindo as coordenadas do ponto $T(-3,-2)$ na equação da circunferência:

$(-3+1)^2+(-2+6)^2=20\Leftrightarrow(-2)^2+4^2=20\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+16=20\Leftrightarrow 20=20$ (verdade)

Portanto, o ponto *T* pertence à circunferência.

9.2. Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da reta tangente à circunferência no ponto *T*, então:

$\overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TP}=0$, sendo *C* o centro da circunferência.

$\overrightarrow{CT}=T-C=(-3,-2)-(-1,-6)=(-2,4)$

$\overrightarrow{TP}=P-T=(x,y)-(-3,-2)=(x+3,y+2)$

Assim:

$(-2,4)\cdot(x+3,y+2)=0\Leftrightarrow -2(x+3)+4(y+2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x-6+4y+8=0\Leftrightarrow 4y=2x-2\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

O declive desta reta é $\frac{1}{2}$, pelo que $\vec{t}(2,1)$ é um vetor diretor.

Por outro lado, sabe-se que o ponto $T(-3,-2)$ pertence à reta. Portanto, uma equação vetorial da reta pedida é:

$(x,y)=(-3,-2)+k(2,1),\ k\in\mathbb{R}$

9.3. Determinemos as coordenadas dos pontos *A* e *B*.

$(x+1)^2+(y+6)^2=20\wedge x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+1)^2+(y+6)^2=20\wedge x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+(y+6)^2=20\wedge x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y+6)^2=16\wedge x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y+6=4\vee y+6=-4)\wedge x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y=-2\vee y=-10)\wedge x=1$

Portanto, $A(1,-2)$ e $B(1,-10)$ ou $A(1,-10)$ e $B(1,-2)$.

Por outro lado:

$\overrightarrow{CA}=A-C=(1-2)-(-1,-6)=(2,4)$

$\overrightarrow{CB}=B-C=(1,-10)-(-1,-6)=(2,-4)$

$\cos A\hat{C}B=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|}=$

$=\frac{(2,4)\cdot(2,-4)}{\sqrt{2^2+4^2}\times\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{2\times2+4\times(-4)}{\sqrt{20}\times\sqrt{20}}=$

$=\frac{-12}{20}=-\frac{12}{20}=-\frac{3}{5}$

Portanto, $A\hat{C}B=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\approx 2{,}21$ rad.

O ângulo *ACB* tem amplitude, aproximadamente, igual a 2,21 rad.

10. $r:3x+y=4\Leftrightarrow y=-3x+4$

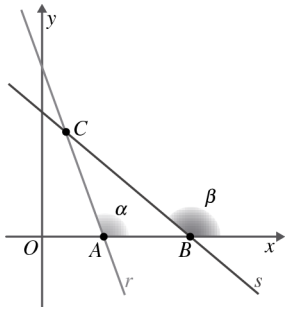
$-3x+4=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

$A\left(\frac{4}{3},0\right)$

$s:y=-\frac{4}{5}x+3$

$-\frac{4}{5}x+3=0\Leftrightarrow -4x+15=0\Leftrightarrow x=\frac{15}{4}$

$B\left(\frac{15}{4},0\right)$



$B\hat{A}C = \alpha =$ inclinação de $r = 180^\circ - \arctan(3) \approx 108,4^\circ$

$C\hat{B}A = 180^\circ - \beta = 180^\circ -$ inclinação de $s =$

$= 180^\circ - \left(180^\circ - \tan^{-}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \approx 38,7^\circ$

$A\hat{C}B = 180^\circ - 108,4^\circ - 38,7^\circ \approx 32,9^\circ$

$B\hat{A}C \approx 108,4^\circ$, $C\hat{B}A \approx 38,7^\circ$ e $A\hat{C}B \approx 32,9^\circ$

11. $4x - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow 3y = 4x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$. O declive da reta r é $\frac{4}{3}$, pelo que $\vec{r}(3,4)$ é um vetor diretor da reta r.

Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da reta s.

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x,y) - (1,-3) = (x-1, y+3)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y+3) \cdot (3,4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 3 + 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y = -3x - 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$

Portanto, $y = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$ é a equação reduzida da reta s.

12.1. a) Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da circunferência de diâmetro [AC].

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \Leftrightarrow (x+2, y-3) \cdot (x-1, y+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) + (y-3)(y+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 + y^2 + y - 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 2y - 5 = 0$

Portanto, $x^2 + y^2 + x - 2y - 5 = 0$ é uma equação da circunferência de diâmetro [AC].

b) Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta [AB] e M o ponto médio deste segmento.

$M\left(\frac{-2-1}{2}, \frac{3+4}{2}\right)$, ou seja, $M\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow (1,1) \cdot \left(x + \frac{3}{2}, y - \frac{7}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \frac{3}{2} + y - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -x + 2$

Portanto, $y = -x + 2$ é a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta [AB].

c) Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da reta t.

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x+2, y-3) \cdot (2,-5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x+2) - 5(y-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x+2) - 5(y-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 4 - 5y + 15 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5y = 2x + 19 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$

Logo, $y = \frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$ é a equação reduzida da reta t.

12.2. $\overrightarrow{AC} = C - A = (1,-1) - (-2,3) = (3,-4)$

Portanto, $(4k, 3k), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ são as coordenadas dos vetores, não nulos, perpendiculares ao vetor $\overrightarrow{AC}$. Como se pretende que tenha norma 10, temos:

$\|(4k, 3k)\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(4k)^2 + (3k)^2} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{16k^2 + 9k^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{25k^2} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5|k| = 10 \Leftrightarrow |k| = 2 \Leftrightarrow k = -2 \vee k = 2$

Logo, $(8,6)$ e $(-8,-6)$ são as coordenadas dos vetores de norma 10 perpendiculares ao vetor $\overrightarrow{AC}$.

13.1. Seja $\vec{n}(a,b,c)$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, não nulo, um vetor normal a $\vec{v}$.

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (-1,2,1) \cdot (a,b,c) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = a - 2b$

Logo, $\vec{n}(a, b, a-2b)$, a e $b \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos.

Por exemplo:

Para $a = 1$ e $b = 1$, temos $\vec{n}(1,1,-1)$.

Para $a = 0$ e $b = 1$, temos $\vec{n}(0,1,-2)$.

Para $a = 1$ e $b = 0$, temos $\vec{n}(1,0,1)$.

Por exemplo: $\vec{n}_1(1,1,-1)$, $\vec{n}_2(0,1,-2)$ e $\vec{n}_3(1,0,1)$.

13.2. Seja $\vec{n}(a,b,c)$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, um vetor normal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1,2,1) \cdot (a,b,c) = 0 \\ (-3,1,0) \cdot (a,b,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ -3a + b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2 \times 3a + c = 0 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5a \\ b = 3a \end{cases}$

Logo, $\vec{n}(a, 3a, -5a), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $a = 1$, $\vec{n}(1,3,-5)$ é perpendicular aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Portanto, $\vec{u}(1,3,-5)$, por exemplo.

14.1. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares quando e apenas quando $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$.

Temos que:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,0,3) - (3,-5,2) = (-4,5,1)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (-4,5,1)\cdot\left(k^2-k,1+2k,-2-3k\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\left(k^2-k\right)+5(1+2k)+(-2-3k)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4k^2+4k+5+10k-2-3k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4k^2+11k+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-11\pm\sqrt{11^2-4(-4)\times 3}}{2\times(-4)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-11\pm\sqrt{169}}{-8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-11+13}{-8}\vee k=\dfrac{-11-13}{-8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{4}\vee k=3$

Portanto, $k=\dfrac{-1}{4}\vee k=3$.

14.2. $\overrightarrow{OA}(3,-5,2)$ e $\overrightarrow{OB}(-1,0,3)$

$\cos\left(A\hat{O}B\right)=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=$

$=\dfrac{(3,-5,2)\cdot(-1,0,3)}{\sqrt{9+25+4}\sqrt{1+0+9}}=\dfrac{-3+0+6}{\sqrt{38}\sqrt{10}}=$

$=\dfrac{3}{\sqrt{380}}$

$A\hat{O}B=\arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{380}}\right)\approx 81{,}1^{\circ}$

15.1. $M\left(\dfrac{-3+1}{2},\dfrac{2-4}{2},\dfrac{4+2}{2}\right)=(-1,-1,3)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,-4,2)-(-3,2,4)=(4,-6,-2)$

$\overrightarrow{MP}=P-M=(x,y,z)-(-1,-1,3)=(x+1,y+1,z-3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}=0 \Leftrightarrow (4,-6,-2)\cdot(x+1,y+1,z-3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x+4-6y-6-2z+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x-6y-2z+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-3y-z+2=0$

O lugar geométrico é o plano mediador do segmento de reta [*AB*] de equação $2x-3y-z+2=0$.

15.2. $\overrightarrow{AP}=P-A=(x,y,z)-(-3,2,4)=(x+3,y-2,z-4)$

$\overrightarrow{BP}=P-B=(x,y,z)-(1,-4,2)=(x-1,y+4,z-2)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0 \Leftrightarrow (x+3,y-2,z-4)\cdot(x-1,y+4,z-2)=0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-1)+(y-2)(y+4)+(z-4)(z-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-x+3x-3+y^2+4y-2y-8+z^2-2z-4z+8=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+y^2+2y+z^2-6z=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1+z^2-6z+9=3+1+1+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14$

O lugar geométrico é uma superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $(-1,-1,3)$ e raio $\sqrt{14}$.

16.1. $x^2-x+y^2+2y+z^2-4z=\dfrac{15}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4}+y^2+2y+1+z^2-4z+4=\dfrac{15}{4}+\dfrac{1}{4}+1+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

A superfície esférica tem centro no ponto de coordenadas $C\left(\dfrac{1}{2},-1,2\right)$.

16.2. Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano α.

$\overrightarrow{AP}=P-A=(x,y,z)-\left(\dfrac{1}{2},-1,5\right)=\left(x-\dfrac{1}{2},y+1,z-5\right)$

$\overrightarrow{CA}=A-C=\left(\dfrac{1}{2},-1,-5\right)-\left(\dfrac{1}{2},-1,2\right)=(0,0,3)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CA}=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2},y+1,z-5\right)\cdot(0,0,3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(z-5)=0 \Leftrightarrow z-5=0 \Leftrightarrow z=5$

Portanto, $z=5$ é uma equação do plano α.

17. $\overline{AB}=12$ e $B(3,8,0)$, pelo que $A(3,-4,0)$.

Como $\overline{BC}=3$ e $\overline{BC}=\overline{CG}$, então $\overline{CG}=3$.

Portanto, $I(3,6,3)$.

$\overrightarrow{IA}=A-I=(3,-4,0)-(3,6,3)=(0,-10,-3)$

$\overrightarrow{IC}=C-I=(0,8,0)-(3,6,3)=(-3,2,-3)$

$\left\|\overrightarrow{IA}\right\|=\sqrt{0^2+(-10)^2+(-3)^2}=\sqrt{100+9}=\sqrt{109}$

$\left\|\overrightarrow{IC}\right\|=\sqrt{(-3)^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{9+4+9}=\sqrt{22}$

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=(0,-10,-3)\cdot(-3,2,-3)=$

$=0\times(-3)+(-10)\times 2+(-3)\times(-3)=-11$

α é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{IA}$ e $\overrightarrow{IC}$, pelo que

$\cos\alpha=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}}{\left\|\overrightarrow{IA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{IC}\right\|}=\dfrac{-11}{\sqrt{109}\times\sqrt{22}}=\dfrac{-11}{\sqrt{2398}}$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Logo, temos que o valor exato de $\tan^2\alpha$ é:

$\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\left(\dfrac{-11}{\sqrt{2398}}\right)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\dfrac{121}{2398}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\dfrac{11}{218}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha=\dfrac{218}{11}-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha=\dfrac{207}{11}$

Portanto, $\tan^2\alpha=\dfrac{207}{11}$.

Ficha de teste 4 **Págs. 42 e 43**

1. $x=-\sqrt{3}y \Leftrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x \Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

A inclinação α da reta *r* é tal que

$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \alpha \in]90^\circ, 180^\circ[$

Portanto, $\alpha=180^\circ-\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=150^\circ$.

Resposta: **(D)**

2. $r: 6y+2kx=12 \Leftrightarrow 6y=-2kx+12 \Leftrightarrow y=-\frac{k}{3}x+2$

Portanto, o declive da reta *r* é igual a $-\frac{k}{3}, k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Por outro lado, tem-se que:

$\begin{cases}-x=1+\lambda\\ 2y=8\lambda\end{cases}, \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1-\lambda\\ y=4\lambda\end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$

Então, $\vec{t}(-1,4)$ é um vetor diretor da reta *t*, pelo que, o declive desta reta é igual a –4.

Como as retas *r* e *t* são perpendiculares, temos que:

$-\frac{k}{3}\times(-4)=-1 \Leftrightarrow \frac{4k}{3}=-1 \Leftrightarrow k=-\frac{3}{4}$.

Resposta: **(D)**

3. $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=a^2+a^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=2a^2$ e como $\overline{AC}>0$, vem que $\overline{AC}=\sqrt{2a^2}$ e, sendo $a\in\mathbb{R}^+$, $\overline{AC}=\sqrt{2}a$.

Portanto, $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{EF}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AC}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=a\times\sqrt{2}a\times\cos(45^\circ) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{2}a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2$

Resposta: **(A)**

4. Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da superfície esférica de diâmetro [*AB*], então esta pode ser definida por $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$.

Assim:

$\overrightarrow{AP}=P-A=(x,y,z)-(-2,0,1)=(x+2,y,z-1)$

$\overrightarrow{BP}=P-B=(x,y,z)-(2,0,4)=(x-2,y,z-4)$

$(x+2,y,z-1)\cdot(x-2,y,z-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+2)+y^2+(z-1)(z-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4+y^2+z^2-4z-z+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4z-z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-5z=0$

A superfície esférica de diâmetro [*AB*] pode ser definida pela equação $x^2+y^2+z^2-5z=0$.

Resposta: **(C)**

5. A reta *r* tem declive $\sqrt{3}$.

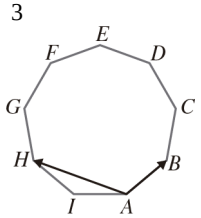
A reta *t* tem declive $-\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}\neq-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})\neq-1$

As retas *r* e *t* são concorrentes não perpendiculares.

Resposta: **(B)**

6. $B\hat{A}H=\frac{6\times\frac{2\pi}{9}}{2}=\frac{2\pi}{3}$



Assim:

$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}}{\left\|\overrightarrow{AH}\right\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}\right)}{\left\|\overrightarrow{AH}\right\|}=$

$=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AH}\right)=1\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

7. $2\vec{u}\cdot(-\vec{v}-3\vec{u}+k\vec{u})=-10 \Leftrightarrow -2\vec{u}\cdot\vec{v}+-6\vec{u}\cdot\vec{u}+2k\vec{u}\cdot\vec{u}=-10$

$\Leftrightarrow -2\vec{u}\cdot\vec{v}-6\|\vec{u}\|^2+2k\|\vec{u}\|=-10$

Como $\|\vec{u}\|=3$ e $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$:

$-2\times(-4)-6\times3^2+2k\times3^2+2k\times3^2=-10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8-54+18k=-10 \Leftrightarrow -46+18k=-10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18k=-10+46 \Leftrightarrow 18k=36 \Leftrightarrow k=2$

Portanto, $k=2$.

8. Como o ponto *B* tem coordenadas $(0,4,0)$, então de acordo com as indicações do enunciado, as coordenadas do ponto *P* são $(0,-4,z), z\in\mathbb{R}^-$ (ordenada –4 porque tem ordenada igual à do ponto *B* e abcissa zero porque pertence ao plano *yOz*).

Portanto:

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,-4,0)-(3,0,0)=(-3,-4,0)$

$\overrightarrow{AP}=P-A=(0,-4,z)-(3,0,0)=(-3,-4,z), z\in\mathbb{R}^-$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\left\|\overrightarrow{AP}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+z^2}=\sqrt{9+16+z^2}=$

$=\sqrt{25+z^2}, z\in\mathbb{R}^-$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=(-3,-4,0)\cdot(-3,-4,z)=$

$=3\times(-3)+(-4)\times(-4)+0\times z=9+16=25$

Temos, ainda, que o ângulo *BAP* é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ e que:

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}}\right)=\cos\left(B\hat{A}P\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25=5\times\sqrt{25+z^2}\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{25\times2}{5}=\sqrt{25+z^2} \Leftrightarrow 10=\sqrt{25+z^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^2=\left(\sqrt{25+z^2}\right)^2 \Leftrightarrow 100=25+z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=100-25 \Leftrightarrow z^2=75 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-\sqrt{75}\vee z=\sqrt{75} \Leftrightarrow z=-5\sqrt{3}\vee z=5\sqrt{3}$

Como a cota do ponto *P* é negativa, temos que $z = -5\sqrt{3}$, isto é, a cota do ponto *P* é igual a $-5\sqrt{3}$.

9. As coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo *Oy* são da forma $(0, y)$. Fazendo, $x = 0$ na equação da circunferência:

$(0+1)^2 + (y-2)^2 = 10 \Leftrightarrow 1 + (y-2)^2 = 10 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow y - 2 = -3 \vee y - 2 = 3 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 5$

Como, o ponto *A* tem ordenada positiva, tem-se que $A(0, 5)$.

Portanto, a circunferência contém o ponto *A* (0 , 5) e o seu centro é o ponto *C*, de coordenadas, $(-1, 2)$.

Por outro lado, tem-se que a reta *r* é tangente à circunferência no ponto *A*, portanto é perpendicular ao segmento de reta [*AC*].

Assim, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta *r*, a sua equação é dada por $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y) - (0, 5) = (x, y-5)$ e

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 2) - (0, 5) = (-1, -3)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x, y-5) \cdot (-1, -3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x(y-5) \times (-3) = 0$

$\Leftrightarrow -x - 3y + 15 = 0 \Leftrightarrow 3y = -x + 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 5$

Então, a equação reduzida da reta *r* é $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

10. $B(0, 6, 0)$; $G(-3, 3, 8)$ e $E(3, 3, 8)$

Reta *BG*:

$\overrightarrow{BG} = G - B = (-3, -3, 8)$

$BG: (x, y, z) = (0, 6, 0) + k(-3, -3, 8), k \in \mathbb{R}$

O ponto *P* pertence a *BG*. Logo, é da forma $P(-3k, 6-3k, 8k)$.

O vetor $\overrightarrow{EP}$ é da forma:

$\overrightarrow{EP} = P - E = (-3k - 3, 3 - 3k, 8k - 8)$

Sabemos que $\overrightarrow{EP} \perp \overrightarrow{BG}$.

$\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3k - 3, 3 - 3k, 8k - 8) \cdot (-3, -3, 8) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k + 9 - 9 + 9k + 64k - 64 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 82k = 64 \Leftrightarrow k = \frac{64}{82} \Leftrightarrow k = \frac{32}{41}$

$P\left(-3 \times \frac{32}{41}, 6 - 3 \times \frac{32}{41}, 8 \times \frac{32}{41}\right)$

$P\left(-\frac{96}{41}, \frac{150}{41}, \frac{256}{41}\right)$

Ficha para praticar 9 **Págs. 44 a 47**

1.1. Por exemplo, $\vec{n}(3,-1,2)$ ou $\vec{n}(6,-2,4)$

1.2. $\alpha: z=-x+3y-10 \Leftrightarrow x-3y+z+10=0$

Por exemplo, $\vec{n}(1,-3,1)$ ou $\vec{n}(-1,3,-1)$

1.3. $\alpha: x-z=y \Leftrightarrow x-y-z=0$

Por exemplo, $\vec{n}(1,-1,-1)$ ou $\vec{n}(-3,3,3)$.

1.4. $\alpha: x=4+3z \Leftrightarrow x-3z-4=0$

Por exemplo, $\vec{n}(1,0,-3)$ ou $\vec{n}(2,0,-6)$.

2.1. Por exemplo, $\vec{n}(-1,4,-2)$ e $A(3,0,-1)$.

2.2. Por exemplo, se $x=0 \wedge z=0$, vem que

$2\times 0+3y-0-2=0 \Leftrightarrow 3y-2=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}$

Portanto, $\vec{n}(2,3,-1)$ e $A\left(0,\frac{2}{3},0\right)$.

2.3. Por exemplo, $\vec{n}(-3,-1,-1)$.

Se $x=-1$ e $y=-2$, vem que:

$-3(-1+1)-(-2+2)-z-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\times 0-0-z-4 \Leftrightarrow -z-4=0$

$\Leftrightarrow z=-4$

Portanto, $A(-1,-2,-4)$.

2.4. Por exemplo, $\vec{n}(-3,0,-2)$.

Se $z=-4$, vem que:

$-3x-2(-4+4)=0 \Leftrightarrow -3x-2\times 0=0 \Leftrightarrow -3x=0 \Leftrightarrow x=0$

Portanto, $A(0,0,-4)$.

3. As equações cartesianas do plano α que passa pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem como vetor normal $\vec{n}(a,b,c)$ é:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

3.1. $3(x+3)+1(y-2)-2(z-0)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+9+y-2-2z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+y-2z+z=0$

Logo, $3x+y-2z+7=0$ é a equação geral do plano α.

3.2. $-1(x-0)-3(y-0)-2(z+4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x-3y-2z-8=0$

Logo, $-x-3y-2z-8=0$ é a equação geral do plano α.

3.3. $0(x-3)+4(y-1)-3(z-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y-4-3z+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y-3z+2=0$

Logo, $4y-3z+2=0$ é a equação geral do plano α.

3.4. $0(x-4)-4(y+1)-0(z-0)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4y-4=0$

Logo, $-4y-4=0$ ou $y+1=0$ é a equação geral do plano α.

4. O plano α é definido pela equação $3x-y+2z-5=0$, pelo que $\vec{n}(3,-1,2)$ é um vetor normal ao plano α.

Assim, a reta que passa em $A(-3,5,-1)$ é é perpendicular a α tem a direção do vetor $\vec{n}(3,-1,2)$.

Portanto, uma equação vetorial desta reta é:

$(x,y,z)=(-3,5,-1)+k(3,-1,2), k\in\mathbb{R}$

5. A reta é perpendicular ao plano α se e somente se os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ forem colineares, sendo $\vec{r}$ um vetor diretor da reta *r* e $\vec{n}$ um vetor normal ao plano α.

Tem-se, então, que $\vec{r}(4,2,-1)$ e $\vec{n}(2,1,-1)$, pelo que, como $\frac{4}{2}\neq\frac{-1}{-1}$, não existe um número real *k* tal que $\vec{r}=k\vec{n}$ e, portanto, o plano α não é perpendicular à reta *r*.

6. $\vec{r}(-2,1,4)$ é um vetor diretor da reta *r* e $\vec{n}(2,-k,-4), k\in\mathbb{R}$ são vetores normais ao plano α.

Por outro lado, a reta *r* e o plano α são perpendiculares se e somente se $\vec{r}$ é colinear com $\vec{n}$. Assim, vem que:

$\vec{r}$ é colinear com $\vec{n}$ se e somente se $\exists\lambda\in\mathbb{R}: \vec{n}=\lambda\vec{r}$.

Portanto:

$(2,-k,-4)=\lambda(-2,1,4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2,-k,-4)=(-2\lambda,\lambda,4\lambda) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\lambda=2 \wedge \lambda=-k \wedge 4\lambda=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=-1 \wedge \lambda=-k \wedge \lambda=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=-1 \wedge \lambda=-k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=-1 \wedge -1=-k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=-1 \wedge k=1$

Então, $k=1$.

7.1. Os planos *ABE* e *CDF* são paralelos, pelo que, os seus vetores normais são colineares.

O plano *ABE* é definido pela equação $x+y+z-3=0$, portanto, $\vec{n}_{ABE}(1,1,1)$, então $\vec{n}(1,1,1)$ é, também, um vetor normal ao plano *CDF*.

Por outro lado, sabe-se que $D(0,-3,0)$ é um ponto do plano *CDF*, logo, uma equação cartesiana deste plano é:

$1(x-0)+1(y+3)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y+3+z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y+z+3=0$

Assim, $x+y+z+3=0$ é a equação geral do plano *CDF*.

7.2. O plano *ABE* é definido pela equação $x+y+z-3=0$, pelo que $\vec{n}(1,1,1)$ é um vetor normal a este plano. A reta que passa por $D(0,-3,0)$ tem a direção do vetor $(1,1,1)$, portanto, uma equação vetorial desta reta é $(x,y,z)=(0,-3,0)+k(1,1,1), k\in\mathbb{R}$.

8.1. O ponto *A* pertence a um plano da família de planos definidos por $2x-ky-z-1=0, k\in\mathbb{R}$, pelo que, substituindo as coordenadas no ponto $A(-3,4,1)$ na equação desta família de planos:

$2\times(-3)-k\times 4-1-1=0 \Leftrightarrow -6-4k-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4k=8 \Leftrightarrow k=-2$

Portanto, $k=-2$ pelo que a equação pedida é $2x+2y-z-1=0$.

8.2. $\vec{r}(2,1,-3)$ é um vetor diretor da reta *r* e $\vec{n}(2,-k,-1), k\in\mathbb{R}$ são vetores normais à família de planos dada.

Por outro lado, tem-se que a reta *r* é paralela à família de planos dada se e somente se:

$\vec{r}\perp\vec{n}$, ou seja, $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$

Assim, vem que:
$(2,1,-3)\cdot(2,-k,-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\times 2+1\times(-k)+(-3)\times(-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4-k+3=0 \Leftrightarrow k=7$

9.1. $C(1,2,0)$ e $D(2,1,0)$

9.2. A reta *r* é perpendicular ao plano *DCE*.
A reta *r* passa na origem *O* referencial e no ponto *F*(3 , 3 , 1).
O vetor $\overrightarrow{OF}$ de coordenadas $(3,3,1)$ é um vetor normal ao plano *DCE*, pois é um vetor diretor da reta *r*.
Portanto, o plano *DCE* pode ser definido por uma equação do tipo $3x+3y+3z+d=0$.
Por outro lado, o ponto $C(1,2,0)$ pertence ao plano *DCE*, pelo que, substituindo as suas coordenadas na equação $3x+3y+z+d=0$, vem:
$3\times 1+3\times 2+0+d=0 \Leftrightarrow 3+6+d=0 \Leftrightarrow d=-9$
Assim, $3x+3y+z-9=0$ é a equação geral do plano *DCE*.

9.3. Seja β o plano pedido paralelo ao plano *DCE*. Assim, $\vec{n}(3,3,1)$ é um vetor normal ao plano β.

Como o ponto $A(1,0,0)$ pertence a β:

$3(x-1)+3(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-3+3y+z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+3y+z-3=0$

Assim, $3x+3y+z-3=0$ é a equação geral do plano paralelo ao plano *DCE* e que passa por *A*.

9.4. A área da base da pirâmide é igual a $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,1,0)-(1,0,0)=(-1,1,0)$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$.

A altura da pirâmide é igual à cota do ponto *E*.

O ponto *E* pertence ao plano *DCE*, cuja equação geral é $3x+3y+z-9=0$ e tem abcissa e ordenada iguais a 1.

Assim, a cota, *z*, do ponto *E* satisfaz a equação:

$3\times 1+3\times 1+z-9=0 \Leftrightarrow 3+3+z-9=0 \Leftrightarrow z=3$

Portanto, a cota do ponto *E* é 3.

Então, o volume da pirâmide é $\frac{2\times 3}{3}=2$.

10.1. Vetor normal ao plano mediador de [*AB*]:

$\overrightarrow{AB}=B-A=(-3,0,1)-(0,-2,1)=(-3,2,0)$

Ponto do plano mediador (ponto médio do segmento de reta [*AB*]):

$M\left(\frac{0-3}{2},\frac{-2+0}{2},\frac{1+1}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},-1,1\right)$

Como o segmento de reta [*AB*] é perpendicular ao plano mediador, temos que:

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, sendo $P(x,y,z)$ um ponto do plano mediador

Logo:

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2},y+1,z-1\right)\cdot(-3,2,0)=0$

$\Leftrightarrow -3x-\frac{9}{2}+2y+2=0 \Leftrightarrow -3x+2y-\frac{5}{2}=0$

$\Leftrightarrow -6x+4y-5=0$

Assim, $-6x+4y-5=0$ é uma equação cartesiana do plano mediador de [*AB*].

10.2. Sabemos que $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$.

$\overrightarrow{AC}=C-A=(2,-3,-2)-(0,-2,1)=(2,-1,-3)$

Vamos verificar que não existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$.

$(-3,2,0)=\lambda(2,-1,-3) \Leftrightarrow \begin{cases}2\lambda=-3\\-\lambda=2\\-3\lambda=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-\frac{3}{2}\\\lambda=-2\\\lambda=0\end{cases}$

Logo, os pontos *A*, *B* e *C* não são colineares.
Determinemos as coordenadas de um vetor normal ao plano θ.
Seja $\vec{n}(a,b,c)$, *a*, *b* e $c\in\mathbb{R}$ um vetor normal ao plano θ, então:

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\cdot(-3,2,0)=0\\(a,b,c)\cdot(2,-1,-3)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3a+2b=0\\2a-b-3c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{3}{2}a\\2a-\frac{3}{2}a-3c=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{3}{2}a\\\frac{a}{2}=3c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{3}{2}a\\\frac{1}{6}a=c\end{cases}$

Logo, $\vec{n}\left(a,\frac{3}{2}a,\frac{1}{6}a\right), a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Por exemplo, se $a=6$, temos: $\vec{n}(6,9,1)$ é um vetor normal ao plano θ.
Assim, uma equação cartesiana do plano θ é:
$6(x-0)+9(y+2)+1(z-1)=0$, pois *A* pertence ao plano θ
$\Leftrightarrow 6x+9y+18+z-1=0$
$\Leftrightarrow 6x+9y+z+17=0$
Portanto, $6x+9y+z+17=0$ é uma equação cartesiana do plano θ.

11. As retas *r* e *s* são paralelas pois os seus vetores diretores, $\vec{r}(2,0,-1)$ e $\vec{s}(2,0,-1)$, respetivamente, são colineares.
O facto de um vetor ser perpendicular a $\vec{r}$ e a $\vec{s}$ não garante que seja perpendicular ao plano α que contém as duas retas.
Vamos, então, determinar as coordenadas de dois vetores do plano α com direções diferentes. Um deles pode ser

$\vec{r}(2,0,-1)$ e o outro pode ser $\overrightarrow{AB}$ sendo *A* e *B* pontos de cada uma das retas.

Seja, por exemplo, $A(1,-3,1)$ e $B(0,1,-4)$, então,

$\overrightarrow{AB} = (0,1,-4)-(1,-3,1) = (-1,4,-5)$.

Sendo $\vec{n}(a,b,c), a, b$ e $c \in \mathbb{R}$ um vetor normal ao plano α, temos:

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{r}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b,c)\cdot(2,0,-1)=0 \\ (a,b,c)\cdot(-1,4,-5)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-c=0 \\ -a+4b-5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2a \\ -a+4b-5(2a)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=2a \\ -a+4b-10a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2a \\ 4b=11a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2a \\ b=\frac{11}{4}a \end{cases}$$

Logo, $\vec{n}\left(a, \frac{11}{4}a, 2a\right), a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Por exemplo, se $a=4$, então $\vec{n}(4,11,8)$ é um vetor normal ao plano α.

Com o ponto $A(1,-3,1)$ pertence ao plano α, então

$4(x-1)+11(y+3)+8(z-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x-4+11y+33+8z-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x+11y+8z+21=0$

Portanto, $4x+11y+8z+21=0$ é uma equação cartesiana do plano α.

12.1. $\vec{n}_\alpha(6,4,2)$ é um vetor normal do plano α.

$\vec{r}(3,2,1)$ é um vetor diretor da reta *r*.

Como $\vec{n}_\alpha = 2\vec{r}$, então $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{r}$ são colineares e, portanto, a reta *r* é perpendicular ao plano α.

12.2. $\vec{n}_\alpha = (-1,2,1)\cdot(2,3,-4) = -2+6-4=0$, então $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{r}$ são perpendiculares e, portanto, a reta *r* é paralela ao plano α.

12.3. $\vec{n}_\alpha(3,-1,0)$ é um vetor normal ao plano α.

$\vec{r}(1,3,2)$ é um vetor diretor de reta *r*.

Como $\vec{n}_\alpha\cdot\vec{r} = (3,-1,0)\cdot(1,3,2) = 3-3+0=0$, então $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{r}$ são perpendiculares e, portanto, a reta *r* é paralela ao plano α.

12.4. $\vec{n}_\alpha(-4,-1,3)$ é um vetor normal ao plano α.

$\vec{r}(4,1,-3)$ é um vetor diretor da reta *r*.

Como $\vec{n}_\alpha = -1\vec{r}$, então $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{r}$ são colineares e, portanto, a reta *r* perpendicular ao plano α.

12.5. $\vec{n}_\alpha(2,0,3)$ é um vetor normal ao plano α.

$\vec{r}(-3,1,-2)$ é um vetor diretor da reta *r*.

Como, não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n}_\alpha = \lambda\vec{r}$, a reta *r* não é perpendicular ao plano α.

E como:

$\vec{n}_\alpha\cdot\vec{r} = (2,0,3)\cdot(-3,1,-2) = -6+0-6=-12\neq 0$, então a reta *r* não é paralela ao plano α.

Portanto, a reta *r* é concorrente não perpendicular ao plano α.

13. Sejam $\vec{n}_\alpha(k,3,2k)$ e $\vec{n}_\beta(3k,1,-3)$, com $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, vetores normais aos planos α e β, respetivamente.

Temos que $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$ e $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta = 0$.

Logo:

$(k,3,2k)\cdot(3k,1,-3)=0 \Leftrightarrow 3k^2+3-6k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-2k+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k-1)^2=0 \Leftrightarrow k-1=0 \Leftrightarrow k=1$

Portanto, $k=1$.

14. $s:(x,y,z)=(1,2,2)+k(2,-3,0), k\in\mathbb{R}$

Da equação vetorial da reta *s*, resulta:

$$\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-3\lambda\ ,\ \lambda\mathbb{R} \\ z=2 \end{cases}$$

Portanto, $P(1+2\lambda,\ 2-3\lambda,\ 2)$ é um ponto genérico da reta *s*.

Substituindo as coordenadas de *P* na equação do plano θ, temos:

$(1+2\lambda)+2(2-3\lambda)-2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1-2\lambda+4-6\lambda-2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8\lambda=3 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{3}{8}$

Logo, *P* tem coordenadas $\left(1+2\left(-\frac{3}{8}\right)\right), 2-3\left(-\frac{3}{8}, 2\right)$ pelo que a reta *s* interseta o plano θ no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{4}, \frac{25}{8}, 2\right)$.

15.1. Determinemos uma equação vetorial da reta *r* que passa pelo ponto *P* e é perpendicular ao plano α.

$\vec{n}(2,1,-1)$ é vetor normal ao plano α e como *r* é perpendicular a este plano, então $\vec{r}(2,1,-1)$ é um vetor diretor da reta *r*.

Assim, $(x,y,z)=(-1,2,0)+k(2,1,-1), k\in\mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta *r*.

15.2. Determinemos, agora, as coordenadas do ponto de interseção da reta *r* com o plano α.

$R(-1+2k,\ 2+k,\ -k), k\in\mathbb{R}$ são as coordenadas de um ponto genérico da reta *r*.

Substituindo na equação do plano α, temos:

$2(-1+2k)+(2+k)-(-k)+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2+4k+2+k+k+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6k+6=0 \Leftrightarrow k=-1$

Logo, $R(-3,1,1)$ é o ponto de interseção da reta *r* com o plano α.

15.3. $d(P,\alpha)=d(P,R)$, ou seja:

$d(P,R)=\sqrt{(-3+1)^2+(1-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

Portanto, a distância do ponto *P* ao plano α é igual a $\sqrt{6}$.

16.1. Temos que $\vec{n}(6,0,1)$ é um vetor normal ao plano *PQV*.

Como a reta *r* é perpendicular ao plano *PQV*, um vetor diretor da reta *r* pode ser $\vec{r}(6,0,1)$.

A reta *r* passa em *N*, determinemos as coordenadas deste ponto.

$P(x, 0, 0)$ pertence ao plano *PQV*, logo:

$6x + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$, portanto, $P(2, 0, 0)$ e como a base da pirâmide é um quadrado, temos que $N(0, 2, 0)$.

Assim, $(x, y, z) = (0, 2, 0) + \lambda(6, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta *r*.

16.2. $V(1, 1, z)$ pertence ao plano *PQV*, pelo que

$6 \times 1 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 6$

Logo, $V(1, 1, 6)$.

Determinemos as coordenadas de um vetor diretor da reta *VN*.

$\overrightarrow{VN} = N - V = (0, 2, 0) - (1, 1, 6) = (-1, 1, -6)$

Como a reta *s* é paralela à reta *VN*, então $\vec{s}(-1, 1, -6)$ é um vetor diretor da reta *s*.

A reta *s* passa pelo ponto *P*, logo

$(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(-1, 1, -6), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta *s*.

16.3. $\overrightarrow{VP} = P - V = (2, 0, 0) - (1, 1, 6) = (1, -1, -6)$

$\overrightarrow{VN} = (-1, 1, -6)$

$\left\|\overrightarrow{VP}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{38}$

$\left\|\overrightarrow{VN}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{38}$

$\overrightarrow{VP} \cdot \overrightarrow{VN} = (1, -1, -6) \cdot (-1, 1, -6) =$

$= 1 \times (-1) + (-1) \times 1 + (-6) \times (-6) =$

$= -1 - 1 + 36 = 34$

Assim,

$$\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{VP}, \overrightarrow{VN}}\right) = \frac{\overrightarrow{VP} \cdot \overrightarrow{VN}}{\left\|\overrightarrow{VP}\right\| \left\|\overrightarrow{VN}\right\|} = \frac{34}{\sqrt{38}\sqrt{38}} = \frac{34}{38} = \frac{17}{19}$$

Portanto, $\cos\alpha = \frac{17}{19}$.

16.4. $\overrightarrow{VN}(-1, 1, -6)$

$\overrightarrow{OV} = V - O = (1, 1, 6)$

Seja $\vec{n}(a, b, c), a, b$ e $c \in \mathbb{R}$, um vetor normal ao plano *OVN*, então:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{VN} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{OV} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 1, -6) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - 6c = 0 \\ a + b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 6c \\ c + a + 6c + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 6c \\ 2a + 12c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6c + 6c \\ a = -6c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -6c \end{cases}$$

Logo, $\vec{n}(-6c, 0, c), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo, se $c = 1, \vec{n}(-6, 0, 1)$ é um vetor normal ao plano *OVN*.

Portanto, como o plano *OVN* passa na origem:

$OVN: -6(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow -6x + z = 0$

17. Sejam $\vec{n}_\beta(5k, 2, -1)$ e $\vec{n}_\theta(-1, 3k^2, 3 + 2k), k \in \mathbb{R}^+$ vetores normais aos planos β e θ, respetivamente.

$\beta \perp \theta \Leftrightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\theta$ e $\vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\theta \Leftrightarrow \vec{n}_\beta \cdot \vec{n}_\theta = 0$

$(5k, 2, -1) \cdot (-1, 3k^2, 3 + 2k) = 0 \wedge k \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5k + 6k^2 - 3 - 2k = 0 \wedge k \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6k^2 - 7k - 3 = 0 \wedge k \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 6 \times (-3)}}{2 \times 6} \wedge k \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(k = \frac{7 + 11}{12} \vee k = \frac{7 - 11}{12}\right) \wedge k \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(k = \frac{3}{2} \vee k = -\frac{1}{3}\right) \wedge k \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

Portanto, $k = \frac{3}{2}$

Ficha para praticar 10 **Págs. 48 a 51**

1.1. $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta *AB*.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (0, -1, 1)$

O ponto *A* pertence à reta *AB*.

Portanto, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$ é um sistema de equações paramétricas da reta *AB*.

1.2. A reta *s* é paralela ao eixo *Ox*, pelo que tem a direção do vetor $\vec{s}(1, 0, 0)$ e passa pelo ponto $C(0, 1, 1)$, portanto $(x, y, z) = (0, 1, 1) + k(2, 0, 0), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta *AB*.

1.3. Os pontos *A*, *B* e *C* são colineares se e somente se, existe um $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

Tem-se que:

$\overrightarrow{AB}(0, 1, -1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 1)$

Assim:

$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (0, 1, -1) = \lambda(-1, 0, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = -\lambda \wedge 1 = 0 \wedge -1 = \lambda$

o que é impossível, então os pontos *A*, *B* e *C* não são colineares.

1.4. Para que os pontos *A*, *B* e *C* determinem um plano, basta que eles não sejam colineares. Portanto, estes pontos definem um plano.

Por outro lado, tem-se que o plano *ABC* passa no ponto *A* e tem a direção dos vetores $\overrightarrow{AB}(0, -1, 1)$ e $\overrightarrow{AC}(-1, 0, 1)$.

Assim, uma equação vetorial do plano *ABC* é:

$(x, y, z) = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, \lambda$ e $\mu \in \mathbb{R}$, ou seja:

$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(0, -1, 1) + \mu(-1, 0, 1), \lambda$ e $\mu \in \mathbb{R}$.

Então, um sistema de equações paramétricas do plano *ABC* é:

$\begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 1 - \lambda, \lambda \text{ e } \mu \in \mathbb{R} \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

1.5. Para verificar se o ponto $P(1,1,1)$ pertence ao plano *ABC*, substitui-se *x* por 1, *y* por 1 e *z* por 1 no sistema de equações paramétricas do plano *ABC*, e resolve-se o sistema:

$$\begin{cases}1=1-\mu\\1=1-\mu\\1=\lambda+\mu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=0\\\lambda=0\\1=0\end{cases}$$

O sistema é impossível, portanto, o ponto $P(1,1,1)$ não pertence ao plano *ABC*.

Por outro lado, para verificar se o ponto *Q*(0 , 0 , 2) pertence ao plano *ABC*, substitui-se *x* e *y* por 0 e *z* por 2 no sistema de equações paramétricas do plano *ABC*, e resolve-se o sistema:

$$\begin{cases}0=1-\mu\\0=1-\lambda\\2=\lambda+\mu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=1\\\lambda=1\\2=1+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=1\\\lambda=1\\2=2\end{cases}$$

O sistema é possível, sendo $\mu=1$ e $\lambda=1$, pelo que o ponto $Q(0,0,2)$ pertence ao plano *ABC*.

2.1. O plano α passa pela origem do referencial, ou seja, pelo ponto $O(0,0,0)$ e tem a direção dos vetores $\vec{u}(0,1,0)$ e $\vec{v}(1,1,0)$, pelo que:

$(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(0,1,0)+\mu(1,1,0),\ \lambda$ e $\mu\in\mathbb{R}$, isto é, $(x,y,z)=\lambda(0,1,0)+\mu(1,1,0),\ \lambda$ e $\mu\in\mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano α.

2.2. A reta *r* é definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases}x=-\lambda\\y=1-\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=1+\lambda\end{cases}$$

pelo que $(x,y,z)=(0,1,1)+\lambda(-1,-1,1),\ \lambda\in\mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta *r*.

2.3. Necessitamos de determinar um vetor $\vec{n}(a,b,c)$ normal a α.

Se $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano α, então é perpendicular aos vetores $\vec{u}(0,1,0)$ e $\vec{v}(1,1,0)$ que são paralelos a α:

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(0,1,0)=0\\(a,b,c)\cdot(1,1,0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a=0\end{cases}$$

Então, $\vec{n}(0,0,c)$, com $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, define a família de vetores normais ao pano α.

Por exemplo, se $c=1$ temos $\vec{n}(0,0,1)$ que é um vetor normal ao pano α.

Sabe-se que o ponto $(0,0,0)$ pertence ao plano α, logo, uma equação cartesiana do plano α é:

$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0\Leftrightarrow z=0$

A equação pedida é $z=0$.

2.4. Um vetor diretor da reta *r* é $\vec{r}(-1,1,1)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(0,0,1)$.

A reta *r* é paralela ao plano α se e somente se $\vec{r}\perp\vec{n}$, ou seja, $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$.

Tem-se que: $(-1,1,1)\cdot(0,0,1)=-1\times0+1\times0+1\times1=1$ diferente de 0, pelo que $\vec{r}\cdot\vec{n}\neq0$ e sendo assim a reta *r* não é paralela ao plano α.

Por outro lado: $\begin{cases}x=-\lambda\\y=1-\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=1+\lambda\end{cases}$ é um sistema de equações paramétricas da reta *r*, pelo que $(-\lambda,1-\lambda,1+\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$ são as coordenadas de um ponto genérico de *r*. Substituindo *x* por $-\lambda$, *y* por $1-\lambda$ e *z* por $1+\lambda$, na equação $z=0$ do plano α, vem que:

$1+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=-1$

Logo, $(1,2,0)$ são as coordenadas do ponto de interseção da reta *r* com o plano α.

3.1. O plano β passa pelo ponto $P(3,-1,5)$ e é perpendicular à reta *r*.

$\vec{r}(3,4,-2)$ é um vetor diretor da reta *r*, portanto, $\vec{r}(3,4,-2)$ é um vetor normal ao plano β.

Assim, uma equação cartesiana do plano β é:

$3(x-3)+4(y+1)-2(z-5)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow3x-9+4y+4-2z+10=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow3x+4y-2z+5=0$

Portanto, $3x+4y-2z+5=0$ é uma equação cartesiana do plano β.

3.2. O eixo *Oz* pode ser definida pela condição $x=0\wedge y=0$.

Assim:

$$\begin{cases}x=0\wedge y=0\\3x+4y-2z+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\wedge y=0\\-2z+5=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\wedge y=0\\z=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Portanto, $\left(0,0,\dfrac{5}{2}\right)$ são as coordenadas do ponto de interseção do plano β com o eixo *Oz*.

4.1. Sejam $\vec{n}(a,b,c)$ os vetores normais ao plano α, então *n* é perpendicular a $\vec{u}(2,-1,0)$ e a $\vec{v}(3,2,-1)$, ou seja, $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ e $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$, o que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(2,-1,0)=0\\(a,b,c)\cdot(3,2,-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=0\\3a+2b-c=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\3a+2\times2a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\3a+4a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\c=7a\end{cases}$, portanto $\vec{n}(a,2a,7a),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a família de vetores normais a α.

4.2. A família de vetores normais a α é:

$\vec{n}(a,2a,7a),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Por exemplo, se $a=1$, $\vec{n}(1,2,7)$.

Assim, o plano α passa pelo ponto de coordenadas $(2,-1,4)$ e $\vec{n}(1,2,7)$ é um vetor normal a este plano,

Logo uma equação cartesiana de α é:

$1(x-2)+2(y+1)+7(z-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2+2y+2+7z-28=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2y+7z-28=0$

Portanto, a equação pedida é $x+2y+7z-28=0$.

5.1. Os pontos *A*, *B* e *C* definem um plano se e somente se não forem colineares, ou seja, se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não forem colineares.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,4,-1)-(-2,0\ 1)=(2,4,-2)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(2,3,-1)-(-2,0,1)=(4,3,-2)$

Como não existe um número real λ tal que $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$, podemos concluir que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares, pelo que os pontos *A*, *B* e *C* definem um plano.

5.2. $\overrightarrow{AB}(2,4,-2)$ e $\overrightarrow{AC}(4,3,-2)$ são vetores paralelos ao plano *ABC*.

Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor normal ao plano *ABC*.

Então:

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot(2,4,-2)=0\\ (a,b,c)\cdot(4,3,-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b-2c=0\\ 4a+3b-2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b-c=0\\ 4a+3b-2c=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c=a+2b\\ 4a+3b-2(a+2b)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=a+2b\\ 4a+3b-2a-4b=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c=a+2b\\ 2a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=a+2(2a)\\ b=2a\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c=a+4a\\ b=2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=5a\\ b=2a\end{cases}$

Portanto, $\vec{n}(a,2a,5a)$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, define a família de vetores normais ao plano *ABC*.

Por exemplo, para $a=1$, obtém-se $\vec{n}(1,2,5)$ que é um vetor normal ao plano *ABC*.

Como o plano *ABC* passa no ponto $A(-2,0,1)$ e admite $\vec{n}(1,2,5)$ como vetor normal, tem-se que uma equação cartesiana do plano *ABC* é:

$1(x+2)+2(y-0)+5(z-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2+2y+5z-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2y+5z-3=0$

Assim, $x+2y+5z-3=0$ é uma equação cartesiana do plano *ABC*.

6. Sejam $\vec{r}(-2,3,-1)$ e $\vec{t}(0,2,-1)$ vetores diretores das retas *r* e *t*, respetivamente. Estes vetores não têm a mesma direção, pelo que as retas *r* e *t* não são paralelas. Por outro lado, o ponto *P* de coordenadas (0 , 3 , 0) pertence quer à reta *r*, quer à reta *t*, pelo que as retas *r* e *t* são concorrentes no ponto *P*. Então, o plano α que contém as retas *r* e *t* é o plano definida por *P* e pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{t}$.

Vamos, determinar um vetor normal a α. Seja $\vec{n}(a,b,c)$ esse vetor.

$\begin{cases}(a,b,c)\cdot\vec{r}=0\\ (a,b,c)\cdot\vec{t}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-2,3,-1)=0\\ (a,b,c)\cdot(0,2,-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+3b-c=0\\ 2b-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+3b-2b=0\\ c=2b\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+b=0\\ c=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{b}{2}\\ c=2b\end{cases}$

Portanto, $\vec{n}\left(\frac{b}{2},b,2b\right), b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ é a família de vetores normais ao plano α.

Por exemplo, para $b=2$, obtém-se $\vec{n}(1,2,4)$ que é um vetor normal ao plano α.

Assim, uma equação cartesiana do plano α é:

$1(x-0)+2(y-3)+4(z-0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2y-6+4z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2y+4z-6=0$

Então, $x+2y+4z-6=0$ é uma equação cartesiana do plano definido pelas retas *r* e *t*.

7.1. Substituindo *x* por 0, *y* por 1 e *z* por –2 na equação vetorial da reta *r*, tem-se que:

$(0,1,-2)=(2,0,-3)+t(-2,1,-1), t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0=2-2t\wedge 1=t\wedge -2=-3-t, t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=1\wedge t=1\wedge t=-1, t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow t=1\wedge t=-1$, o que é impossível, portanto o ponto *A* não pertence à reta *r*.

Substituindo, agora, *x* por 6, *y* por –2 e *z* por –1 na equação vetorial da reta *r*, tem-se que:

$(6,-2,-1)=(2,0,-3)+k(-2,1,-1), t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6=2-2t\wedge -2=t\wedge -1=-3-t, t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2t=-6+2\wedge t=-2\wedge t=-3+1, t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=-2\wedge t=-2\wedge t=-2, t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow t=-2$

Portanto, o ponto *B* pertence à reta *r*.

Assim, o ponto *A* não pertence à reta *r* e o ponto *B* pertence à reta *r*.

7.2. O ponto de interseção da reta *r* com o plano *yOx* tem abcissa nula.

Assim, e substituindo *x* por 0 na equação vetorial da reta *r*:

$(0,y,z)=(2,0,-3)+t(-2,1,-1), t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 0=2-2t\wedge y=t\wedge z=-3-t, t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow t=1\wedge y=1\wedge t=-3-1, t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow t=1\wedge y=1\wedge t=-4$

Logo, a reta *r* interseta o plano *yOx* no ponto de coordenadas $(0,1,-4)$.

7.3. Um vetor diretor da reta *r* é $\vec{r}(-2,1,-1)$. Logo, o vetor $\vec{r}(-2,1,-1)$ é um vetor diretor da reta *t*.

Sabe-se, ainda, que a reta *t* passa pela origem do referencial.

Portanto, uma equação vetorial da reta *t* é:

$(x,y,z)=k(-2,1,-1), k\in\mathbb{R}$

8.1. A reta *PV*, definida por:

$(x,y,z)=(6,-2,0)+k(-1,1\ 0), k\in\mathbb{R}$

admite, por exemplo, como vetor diretor o vetor $\vec{r}(-1,1,0)$.

E como esta reta é perpendicular ao plano *OPQ*, $\vec{r}(-1,1,0)$ é um vetor normal a este plano.
Por outro lado, o ponto $Q(3,3,0)$ pertence ao plano OPQ, portanto uma equação cartesiana deste plano é:
$-1(x-3)+(y-3)+0(z-0)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x+3+y-3=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x+y=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-y=0$
Portanto, $x-y=0$ é uma equação cartesiana do plano *OPQ*.

8.2. A reta *t* é paralela à reta *PV*, pelo que tem a mesma direção que esta reta.
Como $\vec{r}(-1,1,0)$ é um vetor diretor da reta *PV*, então também é um vetor diretor da reta *t*.
Por outro lado, o ponto $Q(3,3,0)$ pertence à reta *t*, pelo que um sistema de equações paramétricas desta reta é:
$$\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=3+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$$

9.1. Determinemos as coordenadas de três pontos não colineares do plano α.
Por exemplo:
Se $x=1$ e $y=1$, $1-1-z+4=0 \Leftrightarrow z=4$.
Logo, $A(1,1,4)$
Se $x=0$ e $y=1$, $0-1-z+4=0 \Leftrightarrow z=3$.
Logo $B(0,1,3)$
Se $y=0$ e $z=0$, $x-0-0+4=0 \Leftrightarrow x=-4$.
Logo $C(-4,0,0)$.
$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,1,3)-(1,1,4)=(-1,0,-1)$
$\overrightarrow{AC}=C-A=(-4,0,0)-(1,1,4)=(-5,-1,-4)$
O plano α passa no ponto *A* e tem a direção dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$
Portanto:
$(x,y,z)=(1,1,4)+\lambda(-1,0,-1)+\mu(-5,-1,-4)$,
$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano α.

9.2. Determinemos as coordenadas de três pontos não colineares do plano α.
Um dos pontos é $A(2,-3,-1)$.
Por exemplo:
Se $x=0$ e $y=0$:
$(0-2)-(0+3)+2(z+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2-3+2z+2=0 \Leftrightarrow z=\frac{3}{2}$
Logo, $B\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$.
Se $x=0$ e $z=1$:
$(0-2)-(y+3)+2(1+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2-y-3+4=0 \Leftrightarrow y=-1$
Logo, $C(0,-1,1)$.
$\overrightarrow{AB}=B-A=\left(0,0,\frac{3}{2}\right)-(2,-3,-1)=\left(-2,3,\frac{5}{2}\right)$
$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,-1,1)-(2,-3,-1)=(-2,2,2)$
O plano α passa no ponto *A* e tem a direção dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, portanto:
$(x,y,z)=(2,-3,-1)+\lambda\left(-2,3,\frac{5}{2}\right)+\mu(-2,2,2)$,
$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ é uma equação do plano α.

9.3. Determinemos as coordenadas de três pontos não colineares do plano α.
Por exemplo:
Se $x=0$, $3\times 0-y+1=0 \Leftrightarrow 0-y+1=0 \Leftrightarrow y=1$
Logo, $A(0,1,2)$.
Se $y=4$, $3x-4+1=0 \Leftrightarrow 3x-3=0 \Leftrightarrow x=1$.
Logo, $B(1,4,0)$
Se $y=-2$, $3x+2+1=0 \Leftrightarrow 3x+3=0 \Leftrightarrow x=-1$.
Logo, $C(-1,-2,1)$.
$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,4,0)-(0,1,2)=(1,3,-2)$
$\overrightarrow{AC}=C-A=(-1,-2,1)-(0,1,2)=(-1,-3,-1)$
O plano α passa no ponto *A* e tem a direção dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Portanto:
$(x,y,z)=(0,1,2)+\lambda(1,3,-2)+\mu(-1,-3,-1)$,
$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano α.

9.4. Determinemos as coordenadas de três pontos não colineares do plano α. Um dos pontos é $A(0,-1,0)$.
Se $x=1$ e $z=2$
$2\times 1-3(y+1)-\frac{2}{2}=0 \Leftrightarrow 2-3y-3-1=0 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}$
Logo $B\left(1,-\frac{2}{3},2\right)$.
Se $y=0$ e $z=-2$:
$2x-3(0+1)+\frac{2}{2}=0 \Leftrightarrow 2x-3+1=0 \Leftrightarrow x=1$
Logo, $C(1,0,-2)$.
$\overrightarrow{AB}=B-A=\left(1,-\frac{2}{3},2\right)-(0,-1,0)=\left(1,\frac{1}{3},2\right)$
$\overrightarrow{AC}=C-A=(1,0,-2)-(0,-1,0)=(1,1,-2)$
O plano α passa no ponto *A* e tem a direção dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, portanto:
$(x,y,z)=(0,-1,0)+\lambda\left(1,\frac{1}{3},2\right)+\mu(1,1,-2)$,
$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano α.

10.1. Vamos determinar um vetor $\vec{n}(a,b,c)$ normal ao plano α.
Se $\vec{n}$ é normal ao plano α é perpendicular aos vetores $\vec{u}(1,2,-1)$ e $\vec{v}(0,-3,1)$ paralelos ao plano α. Assim:
$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u}=0 \\ \vec{n}\cdot\vec{v}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b,c)\cdot(1,2,1)=0 \\ (a,b,c)\cdot(0,-3,1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-c=0 \\ -3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-3b=0 \\ c=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=3b \end{cases}$$
Logo, $\vec{n}(b,b,3b), b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Por exemplo, se $b=1$, tem-se $\vec{n}(1,1,3)$.

Sabemos, então, que o plano α passa no ponto $A(1,-1,2)$ e admite $\vec{n}(1,1,3)$ como vetor normal.

Uma equação cartesiana do plano α é:

$1(x-1)+1(y+1)+3(z-2)=0 \Leftrightarrow x-1+y+1+3z-6=0$

$\Leftrightarrow x+y+3z-6=0$

Portanto, $x+y+3z-6=0$ é uma equação cartesiana do plano α.

10.2. Vamos determinar um vetor $\vec{n}(a,b,c)$ normal ao plano α.

Se $\vec{n}$ é normal ao plano α é perpendicular aos vetores $\vec{u}(-1,2,1)$ e $\vec{v}(2,-1,1)$ paralelos ao plano α.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{v}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-1,2,1)=0\\ (a,b,c)\cdot(2,-1,1)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-a+2b+c=0\\ 2a-b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+2b+b-2a=0\\ c=b-2a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+3b=0\\ c=b-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ c=b-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ c=-b\end{cases}$$

Logo, $\vec{n}(b,b,-b), b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Por exemplo, se $b=1$, tem-se $\vec{n}(1,1,-1)$.

Sabemos que o plano α passa no ponto $A(-1,0,3)$ e admite $\vec{n}(1,1,-1)$ como vetor normal.

Uma equação cartesiana do plano α é:

$1(x+1)+1(y-0)-1(z-3)=0$

$\Leftrightarrow x+1+y-z+3=0$

$\Leftrightarrow x+y-z+4=0$

Portanto, $x+y-z+4=0$ é uma equação cartesiana do plano α.

11. $r:(x,y,z)=(0,-4,7)+k(1,2,-4), k\in\mathbb{R}$

$$s:\begin{cases}x=-3+2k\\ y=-k\\ z=-11+7k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

11.1. $\vec{r}(1,2,-4)$ é um vetor diretor de *r*

$\vec{s}(2,-1,7)$ é um vetor diretor de *s*

$\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{2}$. Logo, as retas *r* e *s* não são paralelas.

$(1,-2,3)=(0,-4,7)+k(1,2,-4), k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1=k\\ -2=-4+2k\Leftrightarrow k=1\\ 3=7-4k\end{cases}\text{, logo } I\in\mathbb{R}.$$

$$\begin{cases}1=-3+2k\\ -2=-k\\ 3=-11+7k\end{cases}\Leftrightarrow k=2\text{, logo } I\in\mathbb{R}.$$

Logo, as retas *r* e *s* intersetam-se em *I*.

11.2. As retas *r* e *s* são concorrentes no ponto $I(1,-2,3)$.

Então, o plano β que contém as outras *r* e *s* é o plano definido pelo ponto *I* e pelos vetores $\vec{r}(1,2,-4)$ e $\vec{s}(2,-1,7)$.

Vamos determinar um vetor um vetor $\vec{n}(a,b,c)$ perpendicular a $\vec{r}$ e a $\vec{s}$.

$$\begin{cases}\vec{r}\cdot\vec{n}=0\\ \vec{s}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1,2,-4)\cdot(a,b,c)=0\\ (2,-1,7)\cdot(a,b,c)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b-4c=0\\ 2a-b+7c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4c-2b\\ 2(4c-2b)-b+7c=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=4c-2b\\ 8c-4b-b+7c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4c-2b\\ -5b+15c=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=4c-2\times3c\\ b=3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2c\\ b=3c\end{cases}$$

Logo, $\vec{n}(-2c,3c,c), c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Por exemplo, se $c=1$, vem que $\vec{n}(-2,3,1)$.

O plano β passa pelo ponto $I(1,-2,3)$ e admite $\vec{n}(-2,3,1)$ como vetor normal, logo:

$-2(x-1)+3(y+2)+1(z-3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+2+3y+6+z-3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+3y+z+5=0$

Portanto, $-2x+3y+z+5=0$ é uma equação artesiana do plano β.

12.1. $x=0\wedge\begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=-1+3\lambda,\lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0\wedge\begin{cases}0=3+2\lambda\\ y=-1+3\lambda,\lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\wedge\begin{cases}\lambda=-\frac{3}{2}\\ y=-1+3\left(-\frac{3}{2}\right),\lambda\in\mathbb{R}\\ z=-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=0\wedge\begin{cases}\lambda=-\frac{3}{2}\\ y=-\frac{11}{2}\\ z=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

Logo, o ponto da reta *s* com abcissa igual a 0 tem coordenadas $\left(0,-\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

12.2. $\vec{r}(2,3,1)$ é um vetor diretor da reta *r*.

$\vec{n}(-4,-2,0)$ é um vetor normal ao plano θ.

Como $\vec{r}\cdot\vec{n}=(2,3,1)\cdot(-4,-2,0)=-8-6+0=-14\neq0$, então $\vec{r}$ não é perpendicular a $\vec{n}$ e, portanto, a reta *r* não é paralela ao plano θ.

Por outro lado, não existe $\lambda\in\mathbb{R}$, tal que $\vec{r}=\lambda\vec{n}$, logo $\vec{r}$ e $\vec{n}$ não são colineares, e, portanto, a reta *s* não é perpendicular ao plano θ.

13. $\vec{n}_k(1,-k,1), k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ é a família de vetores normais ao plano α.

$\vec{r}_k(-2,k,1), k\in\mathbb{R}\{0\}$ é a família de vetores diretores da reta *r*.

A reta *r* e o plano α são paralelos quando e apenas quando $\vec{r}_k\perp\vec{n}_k$, ou seja, $\vec{r}_k\cdot\vec{n}_k=0$. Assim, temos:

$(-2,k,1)\cdot(1,-k,1)=0\Leftrightarrow -2-k^2+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1-k^2=0\Leftrightarrow k^2=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\in\varnothing$, pois $\forall k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, k^2>0$

Na realidade, não existe *k* de modo que a reta *r* seja paralela ao plano α.

14.1. Um vetor diretor da reta *AB*:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -3, 1) - (2, -1, 3) = (2, -2, -2)$

Tomando o vetor diretor $\overrightarrow{AB}$ e, por exemplo, o ponto $A(2, -1, 3)$ obtemos as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

14.2. Sendo a reta *s* paralela ao eixo *Ox*, um vetor diretor da reta *s* é, por exemplo, $\vec{s}(1, 0, 0)$. Uma vez que passa em $B(4, -3, 1)$, uma equação vetorial da reta *s* é:

$(x, y, z) = (4, -3, 1) + \lambda(1, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$

14.3. Vetor normal ao plano mediador de [*AB*]:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -3, 1) - (2, -1, 3) = (2, -2, -2)$

Ponto do plano mediador de [*AB*] é o ponto médio do segmento de reta [*AB*].

$M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (3, -2, 2)$

Como o segmento de reta [*AB*] é perpendicular ao plano mediador: $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Sendo *P* um ponto do plano mediador de coordenadas (x, y, z), uma equação do plano mediador de [*AB*] é dada por:

$(x-3, y+2, z-2) \cdot (2, -2, -2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-3) - 2(y+2) - 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 6 - 2y - 4 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 2y - 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - y - z - 3 = 0$

Portanto, $x - y - z - 3 = 0$ é uma equação cartesiana do plano mediador de [*AB*].

14.4. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície esférica de diâmetro [*AB*]:

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-2, y+1, z-3) \cdot (x-4 \;\; y+3, z-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) + (y+1)(y+3) + (z-3)(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 2x + 8 + y^2 + 3y + y + 3 + z^2 - z - 3z + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 4z + 14 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = -14 + 9 + 4 + 4$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 3$

Logo, $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 3$ é a equação pedida.

15.1. Substituindo as coordenadas do ponto *A* na equação da superfície esférica, temos:

$(2-1)^2 + 1^2 + (-4+2)^2 = 6 \Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + (-2)^2 = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 1 + 4 = 6$

$\Leftrightarrow 6 = 6$, verdade, pelo que, o ponto *A* pertence à superfície esférica.

15.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico do plano α, tangente à superfície esférica no ponto e seja $C(1, 0, -2)$ o centro dessa superfície esférica.

Então, $\overrightarrow{CA}$ é um vetor normal ao plano α.

$\overrightarrow{CA} = A - C = (2, 1, -4) - (1, 0, -2) = (1, 1, -2)$

Assim, o plano α passa pelo ponto $A(2, 1, -4)$ e admite vetor normal $\overrightarrow{CA}(1, 1, -2)$, pelo que:

$1(x-2) + 1(y-1) - 2(z+4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2 + y - 1 - 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y - 2z - 11 = 0$

Portanto, $x + y - 2z - 11 = 0$ é uma equação cartesiana do plano α, tangente à superfície esférica no ponto *A*.

16. O vetor *V* tem abcissa 3, pelo que $V(3, y, z)$.

Por outro lado, este ponto pertence à reta *r*, pelo que substituindo na equação desta reta *x* por 3, vem:

$(3, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(2, 1, 3), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 = 1 + 2\lambda \wedge y = \lambda \wedge z = -1 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \wedge y = 1 \wedge z = -1 + 3 \times 1, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \wedge z = 2, \lambda \in \mathbb{R}$

Logo, $V(3, 1, 2)$.

Reta *s* passa em $V(3, 1, 2)$ e é perpendicular a α.

$s: (x, y, z) + k(2, 1, -2), k \in \mathbb{R}$

Todo o ponto de *s* é da forma $(3 + 2k, 1 + k, 2 - 2k)$

Para determinar as coordenadas de *I*, ponto de interseção de *s* com α, substituímos as coordenadas de *I* na equação de $\alpha: 2x + y - 2z = 1$:

$2(3 + 2k) + (1 + k) - 2(2 - 2k) = 1 \Leftrightarrow 9k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{9}$

Substituindo *k*, obtemos as coordenadas de *I*:

$I\left(3 - \frac{4}{9}, 1 - \frac{2}{9}, 2 + \frac{4}{9}\right) = I\left(\frac{23}{9}, \frac{7}{9}, \frac{22}{9}\right)$

A altura *h* do cone é igual a $\overline{VI}$:

$$h = \overline{VI} = \sqrt{\left(\frac{23}{9} - 3\right)^2 + \left(\frac{7}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{22}{9} - 2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{4}{81} + \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Ficha de teste 5 **Págs. 52 e 53**

1. A reta *r* é definida pela equação $(x, y, z) = (0, -3, 1) + \lambda(1, -1, m), \lambda \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$, portanto, $\vec{r}(1, -1, m)$ é um vetor diretor da reta *r*.

Por outro lado, o plano α é definido pela equação $x - 2y + 6z - 5 = 0$, pelo que $\vec{n}(1, -2, 6)$ é um vetor normal ao plano α.

A reta *r* é paralela ao plano α quando e apenas quando $\vec{r} \perp \vec{n}$, ou seja, $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$.

Assim, vem que

$(1, -1, m) \cdot (1, -2, 6) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 + 6m = 0 \Leftrightarrow 6m = -3$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Resposta: **(B)**

2. Uma reta é paralela ao eixo *Oy* quando tem a direção de um vetor da família de vetores, $\vec{r}(0, y, 0), y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A equação $y=\frac{z}{5}$ não define uma reta (defina um plano)

A reta de equação $(x,y,z)=(5,0,-3)+k(1,0,1), k\in\mathbb{R}$ tem a direção do vetor $\vec{v}(1,0,1)$

A reta de equações paramétricas $\begin{cases}x=2\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$ tem a direção do vetor $\vec{w}(0,-1,1)$.

A reta definida por $x=-3\wedge z=-2$ é paralela ao eixo *Oy*, ou seja, tem a direção do vetor de coordenadas $(0,1,0)$ que tem a direção de *Oy*.

Resposta: **(C)**

3. $x=-1\wedge(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow x=-1\wedge(-1+1^2)+y^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow x=-1\wedge y^2+(z-2)^2=9$

define uma circunferência de raio $\sqrt{9}=3$

$y=2\wedge(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow y=2\wedge(x+1)^2+2^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow y=2\wedge(x+1)^2+(z-2)^2=5$

define uma circunferência de raio $\sqrt{5}$.

$x=-2\wedge(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow x=-2\wedge(-2+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow x=-2\wedge 1+y^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow x=-2\wedge y^2+(z-2)^2=8$

define uma circunferência de raio $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

$y=\sqrt{2}\wedge(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{2}\wedge(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{2}\wedge(x+1)^2+2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{2}\wedge(x+1)^2+(z-2)^2=7$

define uma circunferência de raio $\sqrt{7}$.

Resposta: **(C)**

4. $\alpha: x+by=0, b\in\mathbb{R}$, pelo que $\vec{n}_\alpha(1,b,0), b\in\mathbb{R}$ é um vetor normal a α e $\beta: y+z=0$, pelo que $\vec{n}_\beta(0,1,1)$ é um vetor normal a β .

Por outro lado, os planos α e β são perpendiculares se e somente se $\vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta$, isto é, $\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta=0$.

Assim:

$(1,b,0)\cdot(0,1,1)=0\Leftrightarrow 1\times 0+b\times 1+0\times 1=0\Leftrightarrow b=0$

Portanto, $\alpha\perp\beta$ se e somente se $b=0$.

Resposta: **(A)**

5. A direção do eixo *Oy* é a direção de um qualquer vetor da família de vetores $\vec{u}(0,y,0), y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Um vetor normal ao plano θ é $\vec{n}(0,2,-3)$. O plano θ é paralelo ao eixo *Oy* se e somente se:

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow(0,2,-3)\cdot(0,y,0)=0\Leftrightarrow 2y=0\Leftrightarrow z=0$

Como $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, então o plano θ não é paralelo ao eixo *Oy*.

De modo análogo, a direção do eixo *Oz* é a direção de um qualquer vetor da família de vetores $\vec{v}(0,0,z), z\in\mathbb{R}\{0\}$.

Um vetor normal no plano θ é $\vec{n}(0,2,-3)$.

O plano θ é paralelo ao eixo *Oz* se e somente se:

$\vec{n}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow(0,2,-3)\cdot(0,0,z)=0\Leftrightarrow -3z=0\Leftrightarrow z=0$

Como $z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, então o plano θ não é paralelo ao eixo *Oz*.

O eixo *Ox* tem a direção de um qualquer vetor da família de vetores $\vec{w}(x,0,0), x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sabe-se que $\vec{n}(0,2,-3)$ é um vetor normal a θ .

O plano θ é perpendicular ao eixo *Ox* se e somente se os vetores $\vec{w}$ e $\vec{n}$ forem colineares, o que não é o caso.

Finalmente, tem-se que o plano *yOz* pode ser definido pela equação cartesiana $x=0$. $\vec{n}(1,0,0)$ é um vetor normal a este plano.

Assim, o plano θ é perpendicular ao plano *yOz* se e somente se $n\perp n'$, ou seja:

$n\cdot n'=0\Leftrightarrow(0,2,-3)\cdot(1,0,0)=0\Leftrightarrow 0=0$ (verdade)

Então, o plano θ é perpendicular ao plano *yOz*.

Resposta: **(D)**

6. Os vetores $\vec{u}(3,-2,1)$ **e** $\vec{v}(-2,1,2)$ são vetores diretores do plano α , pelo que $\vec{n}(a,b,c)$ é um vetor normal ao plano α se e somente se $\vec{n}\perp\vec{u}$ e $\vec{n}\perp\vec{v}$, ou seja, $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ e $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.

Assim:

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(3,-2,1)=0\\(a,b,c)\cdot(-2,1,2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b+c=0\\-2a+b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=2b-3a\\-2a+b+2(2b-3a)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=2b-3a\\-2a+b+4b-6a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2b-3a\\5b-8a=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=2\left(\frac{8}{5}a\right)-3a\\b=\frac{8}{5}a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\frac{16}{5}a-3a\\b=\frac{8}{5}a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=\frac{1}{5}a\\b=\frac{8}{5}a\end{cases}$$

Portanto, $\vec{n}\left(a,\frac{8}{5}a,\frac{1}{5}a\right), a\in\mathbb{R}\{0\}$ é família de vetores normais ao plano α .

Por outro lado, pretende-se determinar um vetor desta família que tenha norma igual a $3\sqrt{5}$. Assim, vem que:

$$\|\vec{n}\|=3\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{a^2+\left(\frac{8}{5}a\right)^2+\left(\frac{1}{5}a\right)^2}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+\frac{64}{25}a^2+\frac{1}{25}a^2}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{90}{25}a^2} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{90}{25}}|a| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{25}}|a| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{90}}{5}|a| = 3\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |a| = 3\sqrt{5} \times \frac{5}{3\sqrt{10}} \Leftrightarrow |a| = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |a| = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |a| = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{5\sqrt{2}}{2} \vee a = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Então, se $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, tem-se que

$\vec{n}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{8}{5}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{5}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, ou seja, $\vec{n}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 4\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Portanto, $\vec{n}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 4\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é, por exemplo, um vetor normal ao plano α cuja norma é igual a $3\sqrt{5}$.

7.1. Os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ não são colineares, pelo que os pontos *A*, *C* e *D* definem um plano, e estes vetores são paralelos ao plano *ACD*.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano *ACD*, então:

$\overrightarrow{AC} = (4, 3, -1) - (4, 0, 2) = (0, 3, -3)$

$\overrightarrow{AD} = (1, 3, 2) - (4, 0, 2) = (-3, 3, 0)$

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 3, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 3, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 3c = 0 \\ -3a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 3c \\ 3b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = b \end{cases}$

Portanto, $\vec{n}(b, b, b), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é a família de vetores normais ao plano *ACD*.

Por exemplo, se $b = 1$, $\vec{n}(1, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano *ACD*.

O plano *ACD* é, então, o plano que passa em $A(4, 0, 2)$ e que admite $\vec{n}(1, 1, 1)$ como vetor normal. Assim:

$1(x - 4) + 1(y - 0) + 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4 + y + z - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0$

Então, $x + y + z - 6 = 0$ é uma equação cartesiana do plano *ACD*.

7.2. Sejam $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador de [*CD*] e *M* o ponto médio deste segmento, então, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ é uma equação do plano mediador de [*CD*].

Assim:

$\overrightarrow{PM} = M - P$

$M\left(\frac{4+1}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{5}{2}, 3, \frac{1}{2}\right) - (x, y, z) = \left(\frac{5}{2} - x, 3 - y, \frac{1}{2} - z\right)$

$\overrightarrow{CD} = (1, 3, 2) - (4, 3, -1) = (-3, 0, 3)$

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2} - x, 3 - y, \frac{1}{2} - z\right) \cdot (-3, 0, 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\left(\frac{5}{2} - x\right) + 0(3 - y) + 3\left(\frac{1}{2} - z\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{15}{2} + 3x + \frac{3}{2} - 3z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 3z - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - z - 2 = 0$

Portanto, $x - z - 2 = 0$ é uma equação do plano mediador de [*CD*].

7.3. Seja *M* o ponto médio de [*AD*]: $M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$

$\overrightarrow{CM} = M - C = \left(\frac{5}{2} - 4, \frac{3}{2} - 3, 2 + 1\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right) =$

$= -\frac{3}{2}(1, 1, -2)$

Logo, $\vec{s}(1, 1, -2)$ é um vetor diretor da reta *s*.

Como $C(4, 3, -1)$:

$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ são equações paramétricas da reta *s*.

8.1. Substituindo *x* por –2, *y* por 0 e *z* por 2 na equação vetorial da reta *r*, vem que:

$(-2, 0, 2) = (0, 4, -2) + t(1, -2, 2), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 = 0 + t \wedge 0 = 4 - 2t \wedge 2 = -2 + 2t, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = -2 \wedge t = 2 \wedge t = 2, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = -2 \wedge t = 2$ é impossível.

Portanto não existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$(-2, 0, 2) = (0, 4, -2) + t(1, -2, 2)$

Logo, o ponto *A* não pertence à reta *r*.

8.2. O plano *xOy* pode ser definido pela equação $z = 0$.

Então:

$(x, y, 0) = (0, 4, -2) + t(1, -2, 2), t \in \mathbb{R} \wedge z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 + t \wedge y = 4 - 2t \wedge 0 = -2 + 2t, t \in \mathbb{R} \wedge z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = t \wedge y = 4 - 2t \wedge t = 1 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 2 \wedge z = 0 \wedge t = 1$

Portanto, o ponto de interseção da reta *r* com o plano *xOy* tem coordenadas $(1, 2, 0)$.

8.3. $\vec{r}(1, -2, 2)$ é um vetor diretor da reta *r*. Logo, $\vec{r}$ também é um vetor diretor da reta *s*.

Assim, $s: (x, y, z) = \lambda(1, -2, 2), \lambda \in \mathbb{R}$.

9. Verifiquemos que o ponto $T(2, 1, 3)$ pertence à superfície esférica.

Substituindo as coordenadas do ponto *T* na equação da superfície esférica:

$(2-1)^2 + (1-3)^2 + (-3)^2 = 14 \Leftrightarrow 1 + 4 + 9 = 14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14 = 14$ (verdade)

Portanto, o ponto *T* pertence à superfície esférica.

Determinemos uma equação cartesiana do plano tangente à superfície esférica no ponto *T*.

Sejam $C(1,3,0)$ o centro da superfície esférica e $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano cuja equação se pretende determinar, então $\overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TP}=0$ é uma equação deste plano.

Assim:

$\overrightarrow{CT}=T-C=(2,1,-3)-(1,3,0)=(1,-2,-3)$

$\overrightarrow{TP}=P-T=(x,y,z)-(2,1,-3)=(x-2,y-1,z+3)$

Logo:

$\overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TP}=0\Leftrightarrow(1,-2,-3)\cdot(x-2,y-1,z+3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2-2(y-1)-3(z+3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2-2y+2-3z-9=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2y-3z-9=0$

$x-2y-3z-9=0$ é uma equação cartesiana do plano tangente à superfície esférica no ponto *T*.

10.1. Os pontos *C*, *G* e *F* são não colineares, pelo que definem um plano.

O vetor $\overrightarrow{BA}(-2,6,3)$ é normal ao plano *CGF* e este plano passa pelo ponto *B*.

Como $\overrightarrow{BA}=A-B$, então $B=A-\overrightarrow{BA}$, ou seja:

$B=(-3,4,3)-(-2,6,3)=(-1,-2,0)$

Assim, uma equação cartesiana do plano *CGF* é:

$-2(x+1)+6(y+2)+3(z-0)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x-2+6y+12+3z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+6y+3z+10=0$

Portanto, $-2x+6y+3z+10=0$ é uma equação cartesiana do plano *CGF*.

10.2. $r:\begin{cases}x=k\\y=0\\z=k-2\end{cases},k\in\mathbb{R}$

Como $F\in\mathbb{R}$, *F* é da forma $(k,0,k-2),k\in\mathbb{R}$.

Como $B(-1,-2,0)$, $\overrightarrow{BF}(k+1,2,k-2)$.

Por outro lado, $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

$(k+1,2,k-2)\cdot(-2,6,3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2k-2+12+3k-6=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-4$

Substituindo *k*, temos:

$F(-4,0,-6)$

$\overrightarrow{BF}(-3,2,-6)$

Logo:

$BF:(x,y,z)=(-1,-2,0)+k(-3,2,-6),k\in\mathbb{R}$