AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha de Trabalho nº4 - Funções - 12º ano

Exames 2004-2005

1 Sabe-se que $\log_2 a = \frac{1}{5}$. Qual é o valor de $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$?

(A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -4 *(exame 2004)*

2 Indique o valor de *p* para o qual se verifica a igualdade $\log_p 16 = 4$

(A) -4 (B) 4 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$ *(exame 2004)*

3 No início de 1972, havia quatrocentos lobos num determinado parque natural. As medidas de proteção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que este valor seja ultrapassado. Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função *P* que dá o número aproximado de lobos existentes no parque natural, *t* anos após o início de 1972.

$(A)\ P(t) = \frac{1000}{1+e^{-0,5t}}$ $(B)\ P(t) = \frac{1000}{1+1,5e^{-0,5t}}$ $(C)\ P(t) = \frac{1200}{1+2e^{-t}}$ $(D)\ P(t) = 1000 - \frac{600(t^3+1)}{e^t}$

Qual é a expressão correta? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levam a rejeitar as outras três expressões (apresente três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada).

Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtido(s). *(exame 2005)*

4 Sabe-se que:

- o nível de álcool no sangue de uma pessoa, uma hora depois de ter tomado uma bebida alcoólica, é, numa certa unidade, igual ao quociente entre o peso do álcool ingerido (em gramas) e 70% do peso dessa pessoa (em quilogramas).
- num decilitro de um certo tipo de vinho existem 5 gramas de álcool.

Qual das expressões seguintes dá o nível de álcool no sangue de uma pessoa, em função do seu peso *x* (em quilogramas), uma hora depois de essa pessoa ter bebido dois decilitros desse vinho?

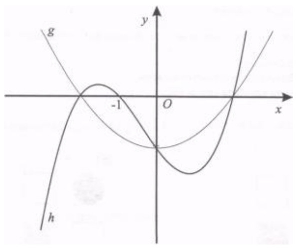
$(A)\ \frac{10}{70x}$ $(B)\ \frac{10}{0,7x}$ $(C)\ \frac{2}{70x}$ $(D)\ \frac{2}{0,7x}$ *(exame 2004)*

5 Na figura estão representadas partes dos gráficos de duas funções polinomiais, *g* e *h*, ambas de domínio IR.

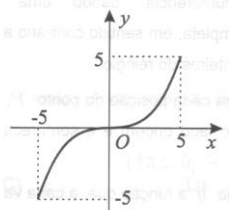
Qual das expressões seguintes pode definir uma função *f*, de domínio IR, tal que $f \times g = h$?

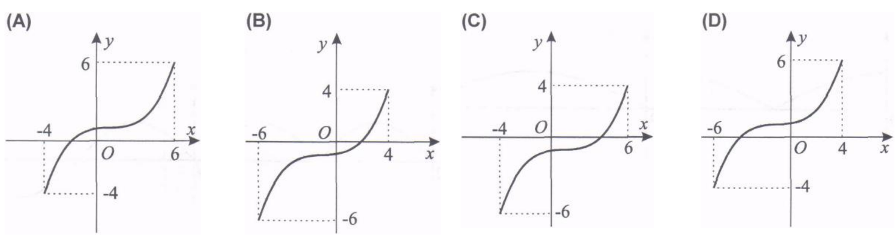
(A) *x*-1 (B) -*x*+1 (C) *x*+1 (D) -*x*-1

(exame 2005)



6 Considere a função *f*, de domínio [-5, 5] e contradomínio [-5, 5], representada graficamente na figura ao lado. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função *g*, definida por $g(x)=1+f(x+1)$?



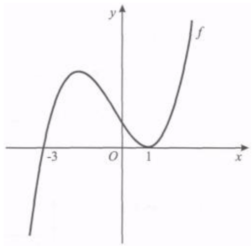


(exame 2005)

7 De uma função *f*, contínua em IR, sabe-se que *f*(3) = 8 e *f*(7) = 1.
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $1 \leq f(6) \leq 8$ (B) A função *f* não tem zeros em [3, 7]
(C) *f*(4) > f(5) (D) 2 pertence ao contradomínio de *f* *(exame 2005)*

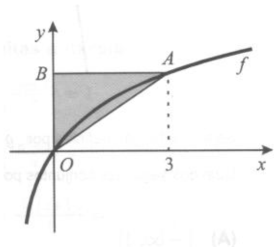
8 Na figura, está representada parte do gráfico de uma função *f* , contínua em IR. A função *f* tem apenas dois zeros: - 3 e 1.
Seja *g* a função definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$
Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função *g* ?



$(A)\ ]-\infty, 1]$ $(B)\ IR \setminus \{-3, 1\}$ $(C)\ ]-\infty, -3[$ $(D)\ [-3, +\infty[$

(exame 2005)

9 Na figura junta, está representada, em referencial o.n. *xOy*, parte do gráfico da função *f*, definida, em]-1 , +∞[, por $f(x) = \log_2(x+1)$. Na mesma figura, está também representado um triângulo retângulo [ABO] . O ponto A tem abcissa 3 e pertence ao gráfico de *f* . O ponto B pertence ao eixo *Oy* . Qual é a área do triângulo [ABO] ?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 *(exame 2005)*

10 Admita que o número de elementos de uma população de aves, *t* anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por $P(t) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)t}, t \geq 0$ em que N e M são duas constantes, denominadas, respetivamente, taxa de natalidade e taxa de mortalidade da população.
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

a) Sabendo que N < M, calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

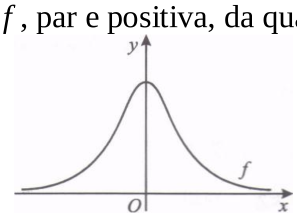
b) No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970. Sabendo que a taxa de natalidade é 7,56 determine a taxa de mortalidade. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais. *(exame 2005)*

11 Para um certo valor de *k*, é contínua em IR a função *g*, definida por $g(x) = \begin{cases} k + \cos x & se\ x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & se\ x > 0 \end{cases}$

Qual é o valor de *k* ?
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 *(exame 2004)*

12 Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função *f* , par e positiva, da qual a reta de equação *y* =0 é assimptota.
Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)}$?



(A) 0 (B) 1 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$ *(exame 2004)*

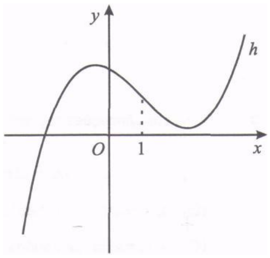
13 Considere uma função *f*, de domínio IR\{5}, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to -\infty} \left[f(x) - x\right] = 0$$

Em cada uma das opções seguintes, estão escritas duas equações, representando cada uma delas uma reta. Em qual das opções as duas retas assim definidas são as assimptotas do gráfico da função *f* ?

(A) $y = x$ e $y = 2$ (B) $y = 2$ e $x = 5$ (C) $y = x$ e $x = 5$ (D) $y = -3$ e $x = 2$ *(exame 2005)*

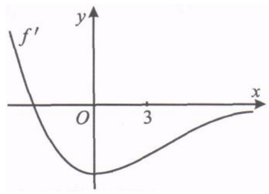
14 Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função polinomial *h*. O ponto de abcissa l é o único ponto de inflexão do gráfico de *h*. Qual das expressões seguintes pode definir h'', segunda derivada da função *h* ?



(A) $(x-1)^2$ (B) $(1+x)^2$ (C) $x-1$ (D) $1-x$

(exame 2004)

15 Seja *f* uma função de domínio IR, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura junta encontra-se parte do gráfico de *f* ’, função derivada de *f*. Sabe-se ainda que $f(0) = 2$. Qual pode ser o valor de $f(3)$?



(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 7 *(exame 2004)*

16 Considere a função *f*, de domínio IR, definida por $f(x) = l + 3\,x^2 e^{-x}$

a) Sem recorrer à calculadora, mostre que a função *f* tem um único mínimo relativo e determine-o.

b) Sem recorrer à calculadora (a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos), mostre que, no intervalo]-l, 0[, existe pelo menos um objeto cuja imagem, por meio de *f*, é 4. *(exame 2004)*

17 Considere a função *f*, de domínio IR\{0}, definida por $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

a) Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

a.1) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1.

a.2) Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

b) O conjunto solução da inequação $f(x) \leq 3 + \ln x$ é um intervalo fechado [*a*, *b*]. Recorrendo à sua calculadora, determine , graficamente, valores para a e b, arredondados às centésimas. Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o gráfico ou gráficos obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. *(exame 2004)*

18 Considere, para cada $\alpha \in \left]0,1\right[$, a função, de domínio IR$^+$, definida por $f(x) = x^{\alpha}$. Prove que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in \left]0,1\right[$, o gráfico da função *f* tem a concavidade voltada para baixo**.**

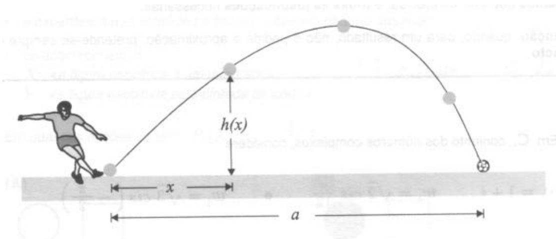
(exame 2004)

19 Seja *f* uma função, de domínio IR$^+$, tal que a sua derivada é dada por $f'(x) = 2 + x\ln x,\ \ \forall x \in IR^+$. Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes:

a) Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1. Seja *P* o ponto de interseção da reta *r* com o eixo O*x*. Sabendo que *f*(l) = 3, determine a abcissa do ponto *P*.

b) Estude a função *f* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. *(exame 2005)*

20 Na figura está representada a trajetória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador da seleção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004. Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu. Considere a função h definida em $[0, a]$ por $h(x) = 2x+10\ln(1-0{,}1x)$. Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projeção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.



a) Recorrendo à calculadora, determine o valor de a, arredondado às centésimas. Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.

b) Sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, estude a função h quanto à monotonia e conclua qual foi a maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

c) Sem utilizar a calculadora, mostre que a taxa de variação média da função h, no intervalo $[1, 3]$, é $\ln\left[e^2\left(\frac{7}{9}\right)^5\right]$. *(exame 2005)*

Soluções: 1)B;2)C;3)B;4)B;5)C;6)D;7)D;8)D;9)C;10.a)0;b)7,58;11)B;12)C;13)A;14)C;15)A; 16.a)1 para x=0;17.a.1)$y=x+e-2$;a.2)$y=0$;b)a=0,15 e b=2,27;19.a)$-\frac{1}{2}$;b)$\cap$ em $]0,e^{-1}[$;$\cup$ em $]e^{-1},+\infty[$ tem 1 P.I.;20.a)7,97;b)3,07

Ladeira
www.ladeiramat.no.sapo.pt