AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha de Trabalho nº1 - Trigonometria - 12º ano

Exames 2000 a 2003

1. Considere a função ***f***, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = x + \operatorname{sen} x$.

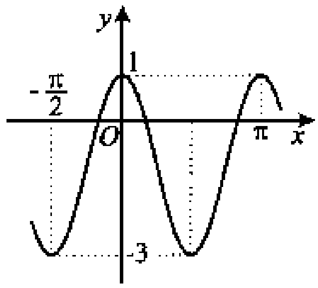
Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

a) Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $f\,'(0)$.

b) Estude a função ***f*** quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

c) Determine os valores de *x*, pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, tais que $f(x) = x + \cos x$. (2003-2ªfase)

2. Considere a expressão $f(x) = a + b\,sen^2 x$. Sempre que se atribui um valor real a ***a*** e um valor real a ***b***, obtemos uma função de domínio IR.

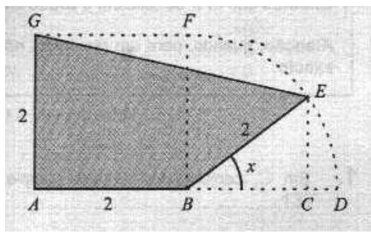


a) Nesta alínea, considere $a = 2$ e $b = -5$.

Sabe-se que $tg\,\theta = \frac{1}{2}$. **Sem recorrer à calculadora**, calcule $f(\theta)$.

b) Para um certo valor de ***a*** e um certo valor de ***b***, a função ***f*** tem o seu gráfico parcialmente representado na figura junta. Conforme essa figura sugere, tem-se que o contradomínio de ***f*** é $[-3,1]$, 0 e π são maximizantes, e $-\frac{\pi}{2}$ *e* $\frac{\pi}{2}$ são minimizantes. Determine ***a*** e ***b***. (2003-1ªfase 2ªCham)

3. Na figura está representado a sombreado um polígono $[ABEG]$. Tem-se que:



- $[ABFG]$ é um quadrado de lado 2;
- FD é um arco de circunferência de centro B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento $[BD]$, de tal forma que se tem sempre $[EC] \perp [BD]$;
- *x* designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE ($x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

a) Mostre que a área do polígono $[ABEG]$ é dada, em função de *x*, por $A(x) = 2(1 + senx + \cos x)$.
(Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio $[ACEG]$)

b) Determine $A(0)$ *e* $A(\frac{\pi}{2})$. Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

c) Recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:
Quais são os valores de x para os quais a área do polígono $[ABEG]$ *é* 4,3?
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas. (2003-1ªfase 1ªcham)

4. Considere as funções ***f*** e ***g***, de domínio IR, definidas por $f(x) = \frac{1}{3} + 2e^{1-x}$ e $g(x) = 2senx - \cos x$.

4.1) Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes.

a) Estude a função ***f*** quanto à existência de assimptotas paralelas aos eixos coordenados.

b) Resolva a equação $f(x) = g(\pi)$, apresentando a solução na forma **ln(ke)**, onde **k** representa um número real positivo. (**ln** designa logaritmo de base e).

4.2) Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) \rangle g(x)$, no intervalo $[0,2\pi]$.
Explique como procedeu. (2002-2ªfase)

5. De uma função f, de domínio $[-\pi, \pi]$, sabe-se que a sua derivada f' está definida igualmente no intervalo $[-\pi, \pi]$ e é dada por $\boldsymbol{f'(x) = x + 2\cos x}$.

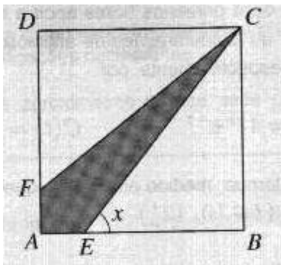
5.1) Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

a) Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

b) Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

5.2) O gráfico de f contém um único ponto onde a reta tangente é paralela ao eixo OX. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto.
Explique como procedeu. (2002-1ªfase 2ªcham)

6. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 1. O ponto E desloca-se sobre o lado $[AB]$, e o ponto F desloca-se sobre o lado $[AD]$, de tal forma que se tem sempre $\overline{AE} = \overline{AF}$. Para cada posição do ponto E, seja x a amplitude do ângulo BEC $\left(x \in \left] \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2} \right[\right)$. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as três alíneas seguintes:

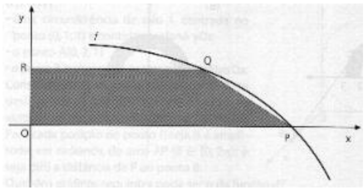


a) Mostre que o **perímetro** do quadrilátero $[CEAF]$ é dado, em função de x, por $f(x) = 2 - \dfrac{2}{tgx} + \dfrac{2}{senx}$.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

c) Mostre que $f'(x) = \dfrac{2 - 2\cos x}{sen^2 x}$ e estude a função f quanto á monotonia. (2002-1ªfase-1ªcham)

7. Considere a função f , de domínio]-π, π[, definida por $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$.



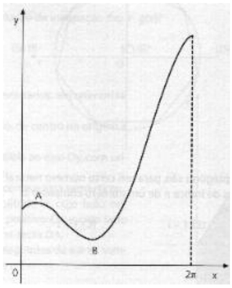
Sem recorrer à sua calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

a) Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

b) Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.

c) Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, uma parte do gráfico da função f. Na mesma figura está também representado um trapézio [OPQR]. O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respetivamente. Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f. Sabendo que o ponto R tem ordenada $\frac{1}{3}$, determine a área do trapézio. (2001-2ª fase)

8. Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio [0, 2π], definida por $f(x)=x+2\cos x$. A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f.
Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

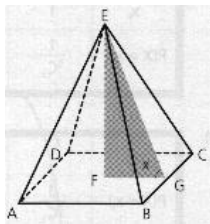


a) Mostre que a ordenada do ponto A é $\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$.

b) Qual é o contradomínio de f ?

c) Considere a reta tangente ao gráfico de f no ponto A. Esta reta interseta o gráfico num outro ponto C. recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C *(arredondado às décimas)*. Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão). (2001-1ªfase-2ªch)

9. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que: a base da pirâmide tem centro F e lado 2; G é o ponto médio da aresta [BC]; x designa a amplitude do ângulo FGE.



a) Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por $A(x) = \dfrac{4\cos x + 4}{\cos x}$ $\left(x \in \left] 0, \dfrac{\pi}{2} \right[\right)$.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido. (2001-1ªfase-1ªcham)

10. Considere a função f, de domínio IR, definida por $f(x) = \dfrac{x + 3sen\frac{x}{2}}{\ln(e^x + 4)}$.

a) Sabe-se que existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, e que o seu valor é um número inteiro. Recorrendo à sua calculadora, conjetureonjecture-o. Explique como procedeu.

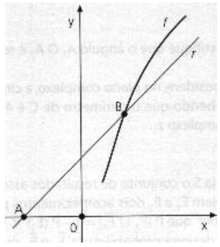
b) Será conclusivo, para a determinação do valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, um método que se baseie exclusivamente na utilização da calculadora ? Justifique a sua resposta. (2001-Prova modelo)

11. Considere a função *f*, de domínio IR, definida por **f(*x*)=2*x*-cos *x***.

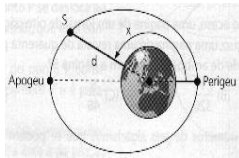
a) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função *f* tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, \pi[$.

b) Mostre que $f'(x)>0$, $\forall x \in$IR, e justifique que o zero de *f*, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

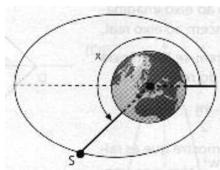
c) Na figura está representada parte do gráfico da função *f* e parte de uma reta *r*, cuja inclinação é 45º, que contém o ponto A(-3, 0) e que interseta o gráfico da função *f* no ponto B. Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. *Apresente o resultado arredondado às unidades*. Nos arredondamentos intermédios, conserve, no mínimo, uma casa decimal. (2000-2ªfase)



12. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala. Na elipse estão assinalados dois pontos: *o apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra;
o perigeu, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra.



O ângulo *x*, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no perigeu, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus. A distância *d*, em km, **do satélite ao centro da Terra**, é dada por $d = \dfrac{7820}{1+0{,}07\cos x}$. Considere que a Terra é uma esfera de raio 6378 km.



a) Determine a altitude do satélite (distância à superfície da Terra) quando este se encontra no apogeu. *Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.*

b) Num certo instante, o satélite está na posição indicada na segunda figura. A distância do satélite ao centro da Terra é, então, 8200 km. Determine o valor de *x*, em graus, *arredondado às unidades*.(2000-1ªfase2ª chm)

13. No ano 2000, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do sol, no dia de ordem *n* do ano, é dado em horas, aproximadamente, por $f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 sen \dfrac{\pi(n-81)}{183}$ $\quad n \in \{1,2,3,...,366\}$ (argumento em radianos).

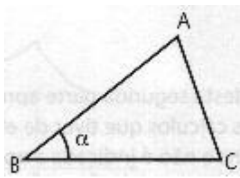
Por exemplo*: no dia 3 de* fevereiro*, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do sol foi de f(34) ≃ 10,3 horas.*

a) No dia 24 de março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do sol ? Apresente o resultado em horas e minutos (*minutos arredondados às unidades*). Recorde que no ano 2000 o mês de fevereiro teve 29 dias.

b) Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do sol é superior a 14,7 horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu. (2000-1ªfase-1ªcham)

14.

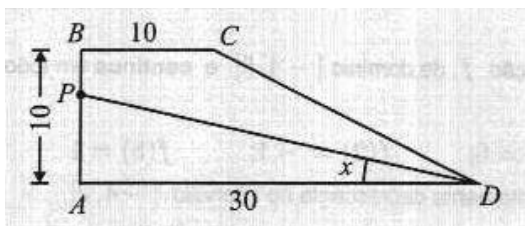
a) Seja [ABC] um triângulo isósceles em que $\overline{BA} = \overline{BC}$. Seja α a amplitude do ângulo ABC. Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada por $\dfrac{\overline{BC}^2}{2} \times sen\alpha \quad (\alpha \in]0, \pi[)$



b) Considere agora um polígono regular de *n* lados, inscrito numa circunferência de raio 1. Utilize o resultado da alínea anterior para mostrar que a área do polígono é dada por $A_n = \dfrac{n}{2} sen\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

c) Determine e interprete o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$. (2000-Prova modelo)

15. Na figura está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$, cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento. Considere que um ponto P se desloca sobre o lado $[AB]$. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA. Pretende-se

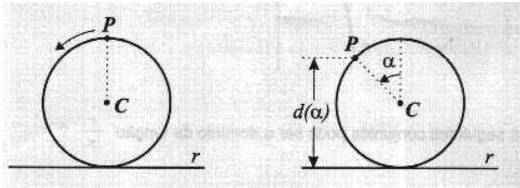


determinar o valor de $\boldsymbol{x}$ para o qual o segmento $[PD]$ divide o trapézio em duas figuras com a mesma área. Qual das equações seguintes traduz este problema?

$(A)\ \dfrac{30^2\, sen\, x}{2}=100$ $(B)\ \dfrac{30^2\, tg\, x}{2}=100$ $(C)\ \dfrac{30\times 10 sen\, x}{4}=150$ $(D)\ \dfrac{30\times 10 tg\, x}{4}=150$

(2003-2ªfase)

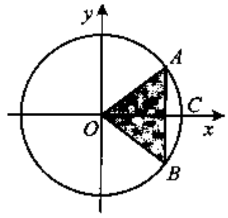
16. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma reta *r*. Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da reta *r*. Seja $d(\alpha)$ a distância de P a *r*, após uma rotação de amplitude α.



Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo α?

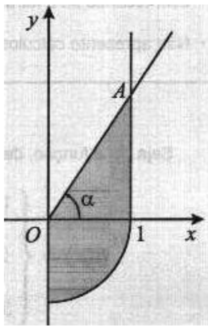
$(A)\ d(\alpha)=1+\cos\alpha$ $(B)\ d(\alpha)=2+sen\alpha$ $(C)\ d(\alpha)=1-\cos\alpha$ $(D)\ d(\alpha)=2-sen\alpha$ (2002-2ªfase)

17. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$. Os pontos A e B pertencem à circunferência. O segmento $[AB]$ é perpendicular ao semieixo positivo Ox. O ponto C é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox. Seja α a amplitude do ângulo COA. $\left(\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ Qual das expressões dá a área do triângulo $[OAB]$, em função de α ?



$(A)\ sen\alpha\cdot\cos\alpha$ $(B)\ \dfrac{tg\alpha\cdot\cos\alpha}{2}$ $(C)\ tg\alpha\cdot sen\alpha$ $(D)\ \dfrac{tg\alpha\cdot sen\alpha}{2}$ (2002-1ªfase-2ªcham)

18. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, um quarto de círculo , de centro na origem e raio 1; uma semirreta paralela ao eixo Oy, com origem no ponto (1,0); um ponto A pertencente a esta semirreta; um ângulo de amplitude α, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta AO. Qual das expressões seguintes dá a área da região a sombreado, em função de α?



$(A)\ \pi+\dfrac{tg\alpha}{2}$ $(B)\ \pi+\dfrac{2}{tg\alpha}$ $(C)\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{tg\alpha}{2}$ $(D)\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{tg\alpha}$

(2001-1ªfase-2ªcham)

19. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{sen\, x}$.

$(A)\ -\infty$ $(B)\ 0$ $(C)\ 1$ $(D)\ +\infty$ (2001-Prova Modelo)

20. Considere a função *h* definida em IR por $h(x)=sen\, x$.

Qual das seguintes equações pode definir uma reta tangente ao gráfico de *h*?

$(A)\ y=\sqrt{2}x-9$ $(B)\ y=x$ $(C)\ y=2x+\pi$ $(D)\ y=-2$ (2000-2ªfase)

21. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

$(A)\ \lim\limits_{x\to+\infty} sen\, x=0$ $(B)\ \lim\limits_{x\to+\infty} sen\, x=+\infty$

(2000-1ªfase-1ªcham)

$(C)\ \lim\limits_{x\to+\infty} sen\, x=1$ (D) Não existe $\lim\limits_{x\to+\infty} sen\, x$

SOLUÇÕES $:1.a)2\ b)P.I.0;\pi\ c)\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\ \ 2.a)1\ b)1;-4\ \ 3.b)4;4\ c)0,2\,\text{e}\,1,4\ \ 4.1.a)y=\frac{1}{3}\ b)\ln(3e)$

$4.2)0;1;4;5;6\ \ 5.1.a)2\ b)P.I.\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\ \ 5.2)-1,03\ \ 6.b)4\ c)\text{crescente}\ \ 7.a)x=-\pi;x=\pi\ \ b)\frac{1}{2}\ \ c)\frac{5\pi}{36}$

$8.b)\left[\dfrac{5\pi-6\sqrt{3}}{6},2+2\pi\right]\ c)3,8\ \ 9.b)+\infty\ \ 10.a)1\ b)\text{Não}\ \ 11.c)8\ \ 12.a)2031\ b)229^{\circ}\ \ 13.a)18h50m\ \ b)38\ \ 14.c)\pi$

$15)B;16)A;17)A;18)C;19)A;20)B;21)D$

joseladeira@gmail.com
www.ladeiramat.no.sapo.pt