AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

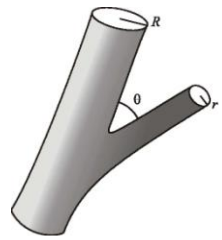
Ficha de Trabalho nº3 - Trigonometria - 12º ano

Exames 2006-2010

1. Considere a função *g*, definida no intervalo $]1,7[$, por $g(x)=\dfrac{\sin x+\ln x}{x}$. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, visualize o gráfico da função *g* e reproduza-o na sua folha. Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema: "Seja *g*' a função derivada de *g*. O conjunto solução da inequação $g'(x)<0$ é um intervalo aberto $]a,b[$. Determine os valores de *a* e de *b*." Apresente os resultados arredondados às centésimas. Justifique a sua resposta.

(2007-2ªfase)

2. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r. A secção da artéria principal tem área *A* e a da ramificação tem área *a*.



Seja $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros). Sabe-se que $a=A\sqrt{\cos\theta}$. Admitindo que o modelo descrito se adequa com exatidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R=\sqrt[4]{2}.r$

(2007-2ªfase)

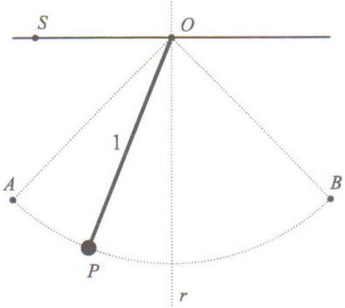
3. Considere as funções *f* e *g*, definidas em IR por $f(x)=e^{x-1}$ e $g(x)=\sin x$. Considere ainda a função *h*, definida em IR por $h(x)=f'(x)-g'(x)$. Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

a) Mostre que a função *h* tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Tendo em conta a), justifique que existe $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tal que as retas tangentes aos gráficos de *f* e *g*, nos pontos de abcissa *a*, são paralelas.

(2007-1ªfase)

4. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto *O*.
O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à reta vertical *r*. A reta *r* passa pelo ponto *O* e é perpendicular à reta *OS*.
No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A. Admita que, *t* segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto *P* tal que a amplitude, em radianos, do ângulo *SOP* é dada (aproximadamente) por $\alpha(t)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\cos(\sqrt{9{,}8}\ t)$.

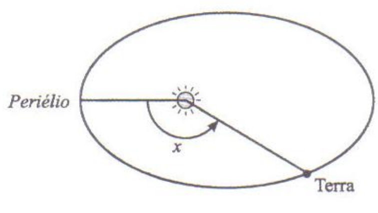


Nas duas alíneas seguintes, não utilize a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) Determine a distância do centro da esfera à reta *OS*, no instante inicial.

b) Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na reta *r*.
Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

(2006-1ªfase)



5. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol. Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos $\left(x \in [0,2\pi[\right)$. Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra. A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x, por $d = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos x)$.

a) Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

b) Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\sin x$, em que t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x e T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

b.1) Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$. Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

b.2) Sabe-se que a última passagem da Terra pelo periélio ocorreu a uma certa hora do dia 4 de janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

(2006-1ªfase)

6. Considere a função f definida no intervalo $[1,2]$ por $f(x) = \cos(x-1) + \ln x$.

Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b, a função g, definida no intervalo $[1,2]$ por $g(x) = a \cdot f(x) + b$, tem por contradomínio o intervalo $[4,5]$.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e de b, arredondados às centésimas. Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos. Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

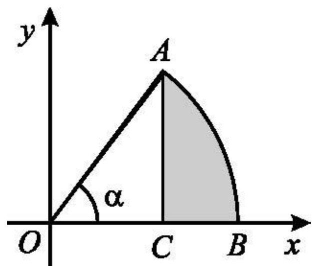
(2006-1ªfase)

7. Seja $f : [0,2\pi] \rightarrow IR$ a função definida por $f(x) = 3 - 2\cos x$.

Indique o valor de x para o qual $f(x)$ é máximo.

$(A)\,0$ $\qquad (B)\,\frac{\pi}{2}$ $\qquad (C)\,\pi$ $\qquad (D)\,\frac{3\pi}{2}$

(2007-2ªfase)



8. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2+y^2=1$. O ponto G pertence ao eixo Ox e o segmento de reta [AC] é perpendicular a este eixo.
α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB. Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?

$(A)\,\pi\times\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha$ $\qquad$ $(B)\,\pi\times\alpha+\sin\alpha+1-\cos\alpha$

$(C)\,1+\alpha-\sin\alpha+\cos\alpha$ $\qquad$ $(D)\,1+\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha$

(2006-2ªfase)

9. Considere a função *g*, de domínio *IR*, definida por $g(x)=2+sen(4x)$.
Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Determine *g*'(0), recorrendo à **definição de derivada** de uma função num ponto.

b) Estude a monotonia da função *g*, no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

(2008)

10. Seja *f* a função de domínio $\left[-\pi,+\infty\right[$, definida por $f(x)=\begin{cases} e^{-4x+1} & se\, x\geq 0 \\ \dfrac{3sen(x)}{x^2} & se -\pi\leq x<0\end{cases}$

Estude a função *f* quanto à existência de assímptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

(2008)

11. Na figura 4 estão representadas duas retas paralelas, a reta AB (em que A e B são pontos fixos) e a reta *s*.
O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a reta *s*.
Para cada posição do ponto S, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja *a(x)* a área do triângulo [ABS].
Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função *a*.
Numa pequena composição, explique por que razão cada um dos outros 3 gráficos não pode representar a função *a*.

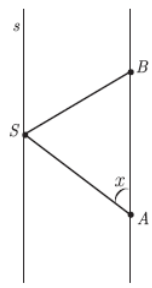


Fig. 4

Gráfico 1

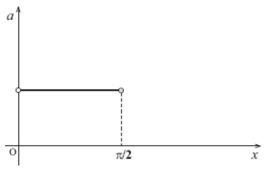


Gráfico 2

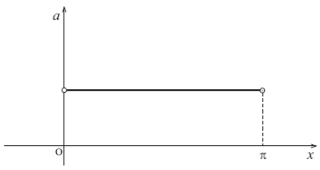


Gráfico 3

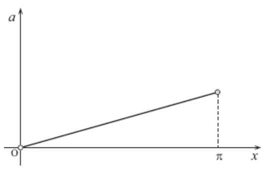
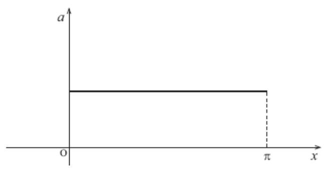


Gráfico 4



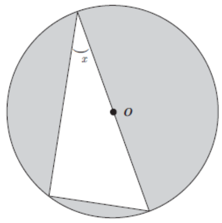
(2008)

12. Para um certo número real positivo *k*, é contínua a função *f*, de domínio *IR*, definida por $f(x)=\begin{cases}\log_2(k+x) \text{ se } x\geq 0\\ \dfrac{sen(2x)}{x} \quad se\ x<0\end{cases}$. Qual é o valor de *k*?

(A) 1 $\qquad$ (B) 2 $\qquad$ (C) 3 $\qquad$ (D) 4

(2009)

13. Na figura está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1. Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.
Qual das expressões seguintes representa, em função de *x*, a área da parte sombreada?



$(A)\, \pi - sen(2x)$ $\quad (B)\, \frac{\pi}{2} - sen(2x)$ $\quad (C)\, \pi - 2sen(2x)$ $\quad (D)\, \frac{sen(2x)}{4}$

(2009)

14. Seja *f* a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = sen(2x)\cos x$.

a) Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f*, no ponto de abcissa 0.

b) No domínio indicado, determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo [ABC], em que:

- A é o ponto do gráfico da função *f* cuja ordenada é máxima;
- B e C são os pontos de interseção do gráfico da função *f* com a reta de equação y = 0,3.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.
Desenhe o triângulo [ABC], assinalando os pontos que representam os seus vértices.
Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

(2009)

15. Considere a função *f*, de domínio $\left]-\infty, 2\pi\right]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{x - \text{sen}(2x)}{x} & \text{se } 0 \langle x \le 2\pi \end{cases} \quad \text{com } a, b \in IR.$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

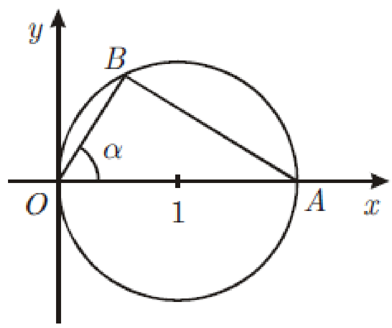
a) Prove que a reta de equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma assímptota oblíqua do gráfico de *f*.

b) Determine o valor de *b*, de modo que *f* seja contínua em $x = 0$.

(2010)

16. Na Figura estão representados, num referencial o.n. xOy , uma circunferência e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro [OA];
- o ponto A tem coordenadas (2, 0);
- o vértice O do triângulo [OAB] coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.



Para cada posição do ponto *B*, seja *α* a amplitude do ângulo *AOB*, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

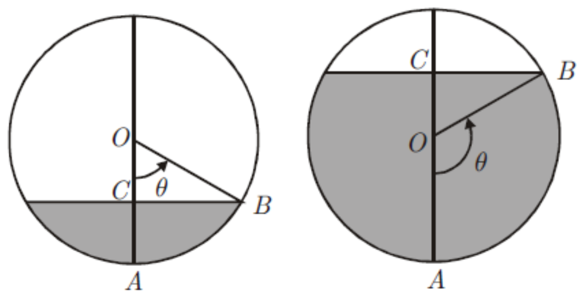
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do triângulo [*OAB*] é dado, em função de *α*, por $f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + sen\alpha)$.

b) Determine o valor de *α* para o qual o perímetro do triângulo [*OAB*] é máximo.

(2010)

17. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera. As Figuras representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas.



Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.
Sabe-se que:

- o ponto *O* é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco *AB* é igual à amplitude do ângulo ao centro *AOB* correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por *h*, de domínio $\left[0,\pi\right]$.

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $h(\theta)=3-3\cos(\theta)$, para qualquer $\theta\in\left]0,\pi\right[$.

b) Resolva a condição $h(\theta)=3,\ \theta\in\left]0,\pi\right[$. Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

(2010)

$Soluções: 1)\, a\cong 1{,}36\, e\, b\cong 4{,}61;\ 2)\,\dfrac{\pi}{3};\ 4.a)\,\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ b)\,0{,}5;\ 5.a)\,152{,}1\, e\, 147{,}1;\ b.2)\,147{,}7;\ 6)\, a\cong 3{,}37\, e\, b\cong 0{,}63;\ 7)\, C;$

$8)\, D;\ 9.a)\,4;\ b)\uparrow \left]0,\dfrac{\pi}{8}\right]\, e\, em\left[\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{\pi}{2}\right[\downarrow \left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right] Máx=g\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=3\, e\, \min=g\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=1;\ 10)\, x=0\, A.V.\, e\, y=0\, A.H.$

$12)\, D;\ 13)\, A;\ 14.a)\, y=2x;\ b)\,0{,}2;\ 15.b)\,-2;\ 16.b)\,\dfrac{\pi}{4};\ 17.b)\,\dfrac{\pi}{2}$

joseladeira@gmail.com
www.ladeiramat.no.sapo.pt