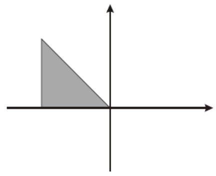
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha de Trabalho nº2 - Complexos - 12º ano

Exames 2004-2005

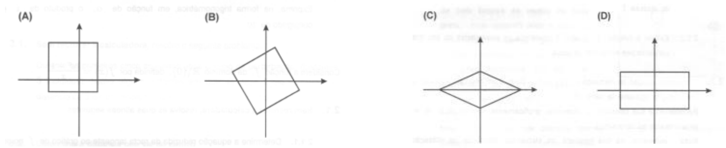
1 Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo retângulo isósceles. Os catetos têm comprimento l, estando um deles contido no eixo dos números reais. Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira? *(exame 2004)*



$(A)\ \mathrm{Re}(z) \geq 0 \wedge \mathrm{Im}(z) \leq 0 \wedge |z| \leq 1$ $\quad (C)\ \mathrm{Re}(z) \geq -1 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq 0 \wedge |z-i| \geq |z+1|$

$(B)\ \mathrm{Re}(z) \leq 0 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq 0 \wedge |z| \leq 1$ $\quad (D)\ \mathrm{Re}(z) \geq -1 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq 0 \wedge |z-i| \leq |z-1|$

2 Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo *w*. Qual poderá ser esse quadrilátero?



(exame 2004)

3 Em C, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2i$. Sejam P_1 e P_2 as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2, respetivamente. Sabe-se que o segmento de reta $[P_1, P_2]$ é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice *n* de um certo número complexo *W*. Qual é o valor de *n* ?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D)10 *(exame 2005)*

4 Em qual das opções seguintes estão duas raízes cúbicas de um mesmo número complexo ?

$(A) e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ $\quad (B) e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\quad (C) e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $\quad (D) e^{i\frac{\pi}{2}}$ e $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ *(exame 2005)*

5 Em C, considere os números complexos $z_1 = -6+3i$ e $z_2 = 1-2i$. Sem recorrer à calculadora, determine $\frac{z_1 + i^{23}}{z_2}$, apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

6 Seja *z* um número complexo, cuja imagem geométrica pertence ao primeiro quadrante (eixos não incluídos). Justifique que a imagem geométrica de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante. *(exame 2004)*

7 Em C, conjunto dos números complexos, considere *z* = 4-3*i* (*i* designa a unidade imaginária).

a) Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma algébrica, $2i + \frac{z^2}{i}$.

b) Seja α um argumento do número complexo *z*. Exprima, na forma trigonométrica, em função de α, o produto de *i* pelo conjugado de *z*. *(exame 2004)*

8 Seja C o conjunto dos números complexos; *i* designa a unidade imaginária.

Considere $w = \frac{2+i}{1-i} - i$. Sem recorrer à calculadora, escreva *w* na forma trigonométrica. *(exame*

9 Considere $z_1 = e^{i\alpha}$ e $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$. Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de $z_1 + z_2$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. *(exame 2005)*

10 Em C, conjunto dos números complexos, considere

$w_1 = 1+i \qquad w_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \qquad w_3 = \sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

a) Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\frac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Represente, no plano complexo, a região definida pela condição: $\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(w_1) \quad \wedge \quad |z - w_3| \leq \sqrt{3}$

(exame 2005)

Soluções: 1)C;2)B;3)C;4)A;5) $\sqrt{8}e^{i\frac{5\pi}{4}}$;7.a)-24-5*i*;b) $5e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ 8) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;10.a) $-1-\frac{\sqrt{3}}{3}i$