AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

Ficha de Trabalho nº3 - Complexos - 12º ano

Exames 2006-2010

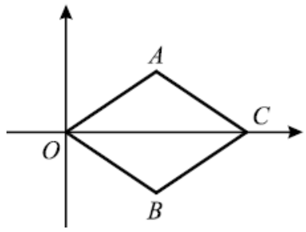
1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = 3 + yi$ e $z_2 = 4i\,z_1$.
(*i* é a unidade imaginária e y designa um número real).

a) Considere que, para qualquer número complexo *z* não nulo, *Arg*(*z*) designa o argumento de *z* que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$. Admitindo que $Arg(z_1) = \alpha$ e que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ determine o valor de $Arg(-z_2)$ em função de α.

b) Sabendo que $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$, determine z_2. Apresente o resultado na forma algébrica.

(2007-2ªfase)

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = e^{i\alpha}$, $\left(\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.



a) Na figura está representado, no plano complexo, o paralelogramo [AOBC].
A e B são as imagens geométricas de *z* e $\bar{z}$, respetivamente.
C é a imagem geométrica de um número complexo, *w*.
Justifique que $w = 2\cos\alpha$.

b) Determine o valor de $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ para o qual $\dfrac{z^3}{i}$ é um número real. (2007-1ªfase)

3. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos; *i* designa a unidade imaginária.

a) Considere $z_1 = (2 - i)\left(2 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ e $z_2 = \dfrac{1}{5}e^{i\left(-\frac{\pi}{7}\right)}$.

Sem recorrer à calculadora, escreva o número complexo $\dfrac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

b) Seja *z* um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no primeiro quadrante. Seja B a imagem geométrica de $\bar{z}$, conjugado de *z*. Seja O a origem do referencial. Sabe-se que o triângulo [AOB] é equilátero e tem perímetro 6.
Represente o triângulo [AOB] e determine *z* na forma algébrica. (2006-2ªfase)

4. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; *i* designa a unidade imaginária.

a) Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{4 + 2i\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6}{3 + i}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

b) Considere que, para qualquer número complexo *z* não nulo, *arg*(*z*) designa o argumento de *z* que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$. Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$, $\dfrac{1}{2} \le |z| \le 1 \wedge \dfrac{3\pi}{4} \le \arg(z) \le \dfrac{5\pi}{4}$ e determine a sua área. (2006-1ªfase)

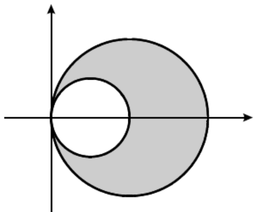
5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja *i* a unidade imaginária.
Seja *n* um número natural tal que $i^n = -i$. Indique qual dos seguintes é o valor de i^{n+1}.

(A) 1 (B) i (C) - 1 (D) - *i* (2007-2ªfase)

6. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

$(A)\, 1$ e i $(B)\, -1$ e i $(C)\, 1-i$ e $1+i$ $(D)\, 1-i$ e $-1+i$ (2007-1ªfase)

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.

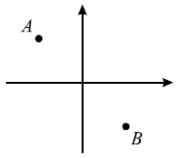


A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências.
Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

$(A)\ |z-1|\geq 1 \wedge |z-2|\leq 2$ $\quad$ $(B)\ |z-1|\geq 2 \wedge |z-2|\leq 1$ $\quad$ (2006-2ªfase)

$(C)\ |z-1|\leq 1 \wedge |z-2|\geq 2$ $\quad$ $(D)\ |z-1|\leq 2 \wedge |z-2|\geq 1$

8. Os pontos A e B, representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo *z*.
Qual dos números complexos seguintes pode ser *z*?
(A) 1 $\quad$ (B) i $\quad$ (C) - 1 $\quad$ (D) - *i* $\quad$ (2006-1ªfase)



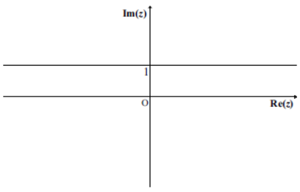
9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1-\sqrt{3}i$ e $z_2 = 8\operatorname{cis}0$.
(i designa a unidade imaginária).

a) Mostre, **sem recorrer à calculadora**, que $-z_1$ é uma raiz cúbica de z_2.

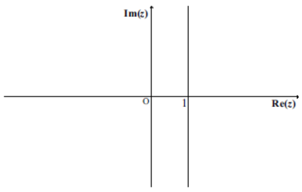
b) No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_3 = z_1 \cdot i^{46}$, respetivamente. Determine o comprimento do segmento [AB]. (2008-1ªfase)

10. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $z+\bar{z}=2$. Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição? (2008-1ªfase)

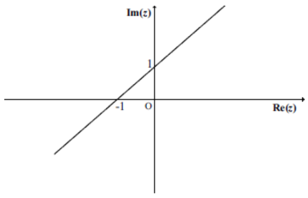
(A)



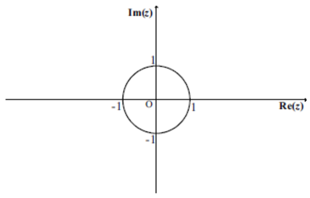
(B)



(C)



(D)



11. Seja $z=3i$ um número complexo. Qual dos seguintes valores é um argumento de z?

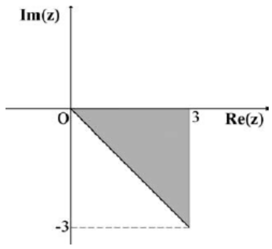
$(A)\ 0$ $\quad$ $(B)\ \frac{1}{2}\pi$ $\quad$ $(C)\ \pi$ $\quad$ $(D)\ \frac{3}{2}\pi$ $\quad$ (2008-1ªfase)

12. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{6}$.

Qual dos seguintes valores é um argumento de (-z)?

$(A)\ -\frac{\pi}{6}$ $\quad$ $(B)\ \frac{5}{6}\pi$ $\quad$ $(C)\ \pi$ $\quad$ $(D)\ \frac{7}{6}\pi$ $\quad$ (2008-2ªfase)

13. Considere a figura, representada no plano complexo. Qual é a condição, em $\mathbb{C}$, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?



$(A)\ \operatorname{Re}(z)\leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4}\leq \arg(z)\leq 0$ $\quad$ $(B)\ \operatorname{Re}(z)\leq 3 \wedge 0\leq \arg(z)\leq \frac{\pi}{4}$ $\quad$ (2008-2ªfase)

$(C)\ \operatorname{Im}(z)\leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4}\leq \arg(z)\leq 0$ $\quad$ $(D)\ \operatorname{Re}(z)\geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4}\leq \arg(z)\leq 0$

14. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1-i$ (i designa a unidade imaginária).

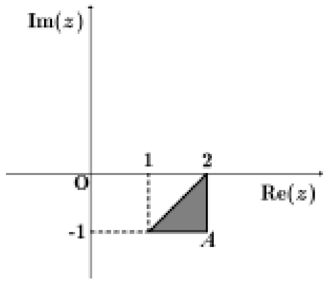
a) Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\dfrac{2z_1 - i^{18} - 3}{1-2i}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z.
Determine uma outra raiz quarta de z, cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante. Apresente o resultado na forma trigonométrica. (2008-2ªfase)

15. Seja k um número real, e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo. Qual é o valor de k para que z_1 seja um número imaginário puro?

$(A)\ -\dfrac{3}{2}$ $\quad (B)\ -\dfrac{2}{3}$ $\quad (C)\ \dfrac{2}{3}$ $\quad (D)\ \dfrac{3}{2}$ (2009-2ªfase)

16. Na figura, está representada uma região do plano complexo. O ponto A tem coordenadas (2, –1). Qual das condições seguintes define em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?



$(A)\ |z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$

$(B)\ |z-1| \leq |z-(2-i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$

$(C)\ |z+1| \geq |z-(2+i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$

$(D)\ |z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge \text{Im}(z) \leq 2 \wedge \text{Re}(z) \geq -1$

(2009-2ªfase)

17. No conjunto dos números complexos, seja $z = \dfrac{\left(e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)^7 + (2+i)^3}{4e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}$.

Determine z na forma algébrica, sem **recorrer à calculadora**. (2009-2ªfase)

18. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo *w*, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos B e C, respetivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de w) e de $(-w)$. Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $|w| = 5$.
Determine a área do triângulo [ABC] . (2009-2ªfase)

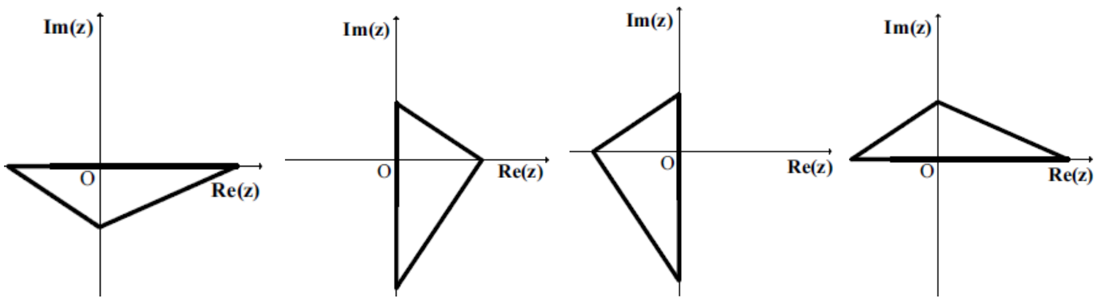
19. Seja z um número complexo, em que um dos argumentos é $\dfrac{\pi}{3}$.

Qual dos valores seguintes é um argumento de $\dfrac{2i}{\overline{z}}$, sendo $\overline{z}$ o conjugado de z?

$(A)\ \dfrac{\pi}{6}$ $\quad (B)\ \dfrac{2}{3}\pi$ $\quad (C)\ \dfrac{5}{6}\pi$ $\quad (D)\ \dfrac{7}{6}\pi$ (2009-1ªfase)

20. Seja *b* um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo.
Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1, $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$? (2009-1ªfase)

(A) (B) (C) (D)

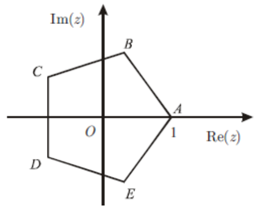


21. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \dfrac{i}{1-i} - i^{18}$ e $z_2 = e^{i\left(\frac{5}{6}\pi\right)}$.

a) Determine z_1 na forma trigonométrica, **sem recorrer à calculadora**.

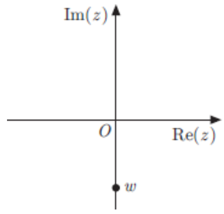
b) Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-i\, z_2)^n = -1$. (2009-1ªfase)

22. A figura representa um pentágono [ABCDE] no plano complexo. Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w. O vértice A tem coordenadas (1,0). Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono? (2010-2ªfase)



(A) $5e^{i\left(\frac{6\pi}{5}\right)}$ (B) $e^{i\left(\frac{6\pi}{5}\right)}$ (C) $e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$ (D) $e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

23. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na figura. A qual das retas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6? (2010-2ªfase)



(A) Eixo real. (B) Bissetriz dos quadrantes ímpares.
(C) Eixo imaginário. (D) Bissetriz dos quadrantes pares.

24. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ e $z_2 = 3$.
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

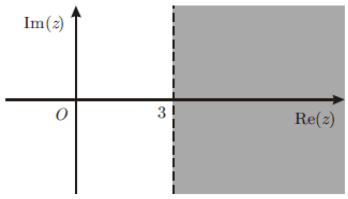
a) Determine o número complexo $w = \dfrac{{z_1}^4 + 4i}{i}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1. (2010-2ªfase)

25. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\theta\right)}$, com $\theta \in \mathbb{R}$.
Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

(A) $-\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{\pi}{8}$ (D) $\dfrac{5\pi}{8}$ (2010-1ªfase)

26. Na figura, está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição $\mathrm{Re}(z) > 3$. Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?



(A) $\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ (B) $3\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ (C) $\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ (D) $3\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ (2010-1ªfase)

27. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = e^{i\frac{\pi}{7}}$ e $z_2 = 2 + i$.
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine o número complexo $w = \dfrac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Mostre que $|z_1 + z_2|^2 = 6 + 4\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) + 2\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$. (2010-1ªfase)

Soluções: $1.a)\ \dfrac{3\pi}{2}+\alpha;\ b)\ -48+12i;\ 2.b)\ \dfrac{\pi}{6};\ 3.a)\ 25e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)};\ b)\ \sqrt{3}+i;\ 4.a)\ \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ou $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)};\ b)\ \dfrac{3\pi}{16};\ 5)A;\ 6)D;\ 7)A;\ 8)D;\ 9.b)\ 4;\ 10)B;\ 11)B;\ 12)D;\ 13)A;\ 14.a)\ \dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i;\ b)\ \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)};$ $15)C;\ 16)A;\ 17)\ -\dfrac{11}{4}+\dfrac{1}{4}i;\ 18)\ 24;\ 19)C;\ 20)C;\ 21.a)\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)};\ b)\ 3;\ 22)B;\ 23)A;\ 24.a)\ \sqrt{32}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)};$ $b)\ |z-3| = \sqrt{5};\ 25)D;\ 26)B;\ 27.a)\ \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$