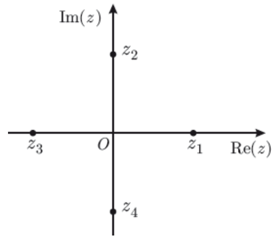
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MORTÁGUA

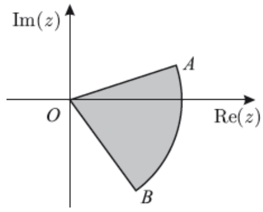
Ficha de Trabalho nº4 - Complexos - 12º ano **Exames 2011-2014**



1. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4.

Qual é o número complexo que, com $n \in IN$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4 ***(2011-1ªfase)***



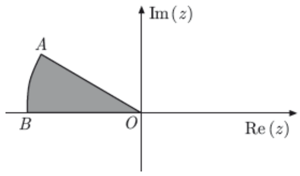
2. Na figura está representado, no plano complexo, a sombreado, um setor circular. Sabe-se que: o ponto A está situado no 1.º quadrante; o ponto B está situado no 4.º quadrante; [AB] é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$; o arco AB está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$. Qual dos números seguintes é o valor da área do setor circular AOB?

$(A)\,\dfrac{\pi}{5}$ $(B)\,\dfrac{4\pi}{5}$ $(C)\,\dfrac{2\pi}{5}$ $(D)\,\dfrac{8\pi}{5}$ ***(2011-1ªfase)***

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1$, $z_2 = 5i$ e $z_3 = e^{i\left(\frac{n\pi}{40}\right)}$, $n \in IN$. Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

3.1. O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$. Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio. Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

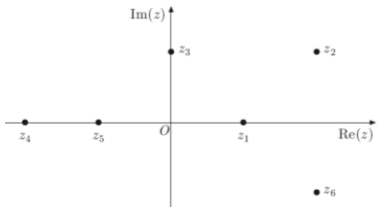
3.2. Determine o menor valor de *n* natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. ***(2011-1ªfase)***



4. Na figura está representado, no plano complexo, a sombreado, um setor circular. Sabe-se que: o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $-\sqrt{3}+i$; o ponto B tem abcissa negativa, ordenada nula, e pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$. Qual das condições seguintes define, em $\mathbb{C}$, a região a sombreado, incluindo a fronteira? (Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$).

$(A)\,|z| \le 2 \wedge \dfrac{2\pi}{3} \le \arg(z) \le \pi$ $(B)\,|z| \le 2 \wedge \dfrac{5\pi}{6} \le \arg(z) \le \pi$

$(C)\,|z| \le 4 \wedge \dfrac{2\pi}{3} \le \arg(z) \le \pi$ $(D)\,|z| \le 4 \wedge \dfrac{5\pi}{6} \le \arg(z) \le \pi$



5. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de seis números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6.

Qual é o número complexo que pode ser igual a $(z_2 + z_4) \times i$? ***(2011)***

(A) z_1 (B) z_3 (C) z_5 (D) z_6

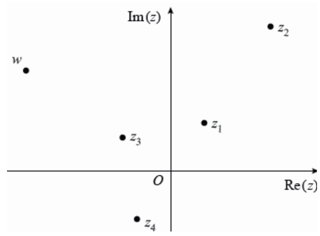
6. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os dois itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

6.1. Considere $z_1 = 1 + 2i$ e $w = \dfrac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}}$ com $b \in IR$ e $n \in IN$

Determine o valor de *b* para o qual *w* é um número real.

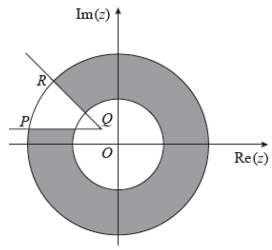
6.2. Seja *z* um número complexo tal que $|z| = 1$. Mostre que $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$ ***(2011-2ªfase)***

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexo: *w*, z_1, z_2, z_3 e z_4. Qual é o número complexo que pode ser igual a $\frac{w}{3i}$? ***(2012-1ªfase)***



(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

8. Na figura está representada, a sombreado, no plano complexo, parte de uma coroa circular. Sabe-se que: O é a origem do referencial; o ponto Q é a imagem geométrica do complexo $-1+i$; a reta PQ é paralela ao eixo real; as circunferências têm centro na origem; os raios das circunferências são iguais a 3 e a 6. Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi,\pi[$. Qual das condições seguintes pode definir, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região a sombreado, incluindo a fronteira?



$(A)\, 3\leq|z|\leq 6 \wedge -\pi\leq \arg(z-1+i)\leq\frac{3\pi}{4}$ $(B)\, 9\leq|z|\leq 36 \wedge -\pi\leq \arg(z+1-i)\leq\frac{3\pi}{4}$ ***(2012-1ªfase)***

$(C)\, 3\leq|z|\leq 6 \wedge -\pi\leq \arg(z+1-i)\leq\frac{3\pi}{4}$ $(D)\, 9\leq|z|\leq 36 \wedge -\pi\leq \arg(z-1+i)\leq\frac{3\pi}{4}$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1=(-2+i)^3$ e $z_2=\frac{1+28i}{2+i}$

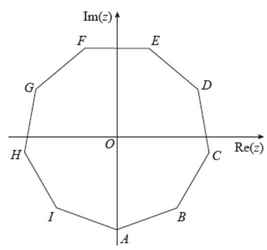
9.1. Resolva a equação $z^3+z_1=z_2$, sem recorrer à calculadora. Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

9.2. Seja *w* um número complexo não nulo. Mostre que, se *w* e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice *n* de um mesmo número complexo *z*, então $z=1$ ou $z=-1$ ***(2012-1ªfase)***

10. Seja *k* um número real, e sejam $z_1=2+i\ e\ z_2=3-k\,i$ dois números complexos. Qual é o valor de *k* para o qual $z_1\times\overline{z_2}$ é um imaginário puro?

$(A)\frac{3}{2}$ $(B)-\frac{3}{2}$ $(C)1$ $(D)6$ ***(2012-2ªfase)***

11. Na figura está representado, no plano complexo, um polígono regular [ABCDEFGHI]. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice *n* de um número complexo *z*. O vértice A tem coordenadas (0,-3). Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice F?



$(A)3e^{i\frac{7\pi}{18}}$ $(B)3e^{i\frac{11\pi}{18}}$ $(C)3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $(D)3e^{i\frac{5\pi}{9}}$ ***(2012-2ªfase)***

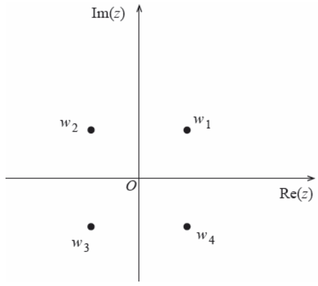
12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

12.1. Seja *n* um número natural. Determine, na forma trigonométrica, $\frac{\sqrt{3}\times i^{4n-6}+2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{2e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}}$.

12.2. Seja $\alpha\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que $z_1=e^{i\alpha}$ e $z_2=e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$. Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de z_1+z_2, no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante. ***(2012-2ªfase)***

13. Na figura ao lado, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: w_1, w_2, w_3 e w_4. Qual é o número complexo que, com $n \in IN$, pode ser igual a $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$?

(A) $w1$ (B) $w2$ (C) $w3$ (D) $w4$ ***(2013-1ªfase)***



14. Em C, conjunto dos números complexos, considere $z = -8 + 6i \text{ e } w = \dfrac{-i \times z^2}{\overline{z}}$. Seja α um argumento do número complexo *z*. Qual das opções seguintes é verdadeira?

$(A)\, w = 10e^{i\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (B)\, w = 2e^{i\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (C)\, w = 10e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (D)\, w = 2e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ ***(2013-1ªfase)***

15. Em C, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e $z_2 = 1 + i$.

15.1. Sabe-se que $\dfrac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo *w.* Determine *w* na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

15.2 Seja $z_3 = e^{i\alpha}$. Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi, -\pi[$, sabendo que $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real. ***(2013-1ªfase)***

16. Considere, em C, conjunto dos números complexos, z = 2+*b*i, com *b*<0.

Seja $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Qual dos números complexos seguintes pode ser o conjugado de *z* ?

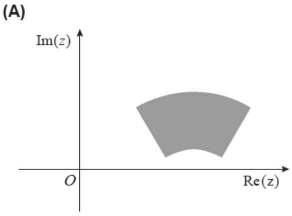
$(A)\dfrac{3}{2}e^{i\alpha} \quad (B) 3e^{i(-\alpha)} \quad (C) 3e^{i\alpha} \quad (D)\dfrac{3}{2}e^{i(-\alpha)}$ ***(2013-2ªfase)***

17. Considere, em C, conjunto dos números complexos, a condição

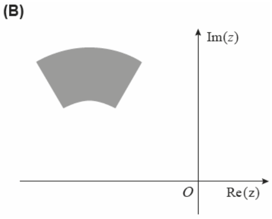
$$\frac{3}{2} \le |z - 3 + i| \le 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \le \arg(z - 3 + i) \le \frac{2\pi}{3}$$ ***(2013-2ªfase)***

Considere como arg*(z)* a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$. Qual das opções seguintes pode representar, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada?

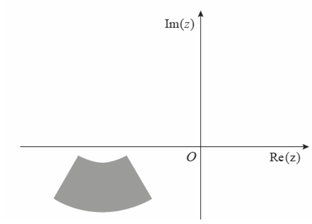
(A)



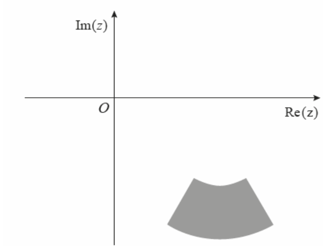
(B)



(C)



(D)

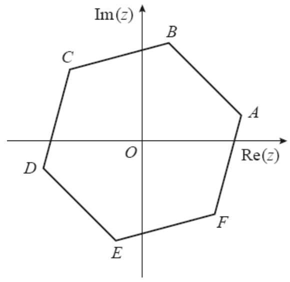


18. Seja C o conjunto dos números complexos.

18.1. Considere $z_1 = \dfrac{1 + \sqrt{3}\, i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \dfrac{-2}{i\, z_1}$. Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural *n* tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

18.2. Seja $\alpha \in [-\pi, \pi[$. Mostre que $\dfrac{\cos(\pi - \alpha) + i \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha + i\, sen\alpha} = e^{i(\pi - 2\alpha)}$ ***(2013-2ªfase)***

19. Na figura, está representado, no plano complexo, um polígono regular [ABCDEF]. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das n raízes de índice n de um número complexo z. O vértice C tem coordenadas $\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice E ?



$(A)\, 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{13}{12}\pi\right)}$ $(B)\, 4e^{i\left(\frac{13}{12}\pi\right)}$ $(C)\, 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{17}{12}\pi\right)}$ $(D)\, 4e^{i\left(\frac{17}{12}\pi\right)}$ ***(2014)***

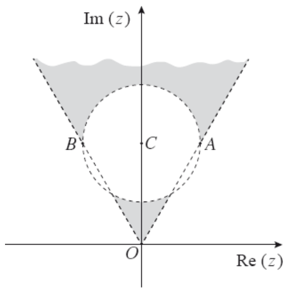
20. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

20.1. Considere $z_1 = \dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$ e $z_2 = cis\,\alpha, com\,\alpha \in \left[0, \pi\right[$. Determine os valores de α , de modo que $z_1 \times \left(z_2\right)^2$ seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

20.2. Seja z um número complexo tal que $|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10$. Mostre que $|z| \leq 2$ ***(2014)***

21. Na figura, estão representadas, no plano complexo, duas semirretas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$ e uma circunferência de centro C e raio $\overline{BC}$. Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto A é a imagem geométrica do complexo $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$
- o ponto B é a imagem geométrica do complexo $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$
- o ponto C é a imagem geométrica do complexo 2i



Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo $\left[-\pi, \pi\right[$. Qual das condições seguintes define a região sombreada, excluindo a fronteira?

$A)\, |z-2i| < \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \dfrac{\pi}{4} < \arg(z) < \dfrac{3\pi}{4}$ $(B)\, |z-2i| < \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \dfrac{\pi}{3} < \arg(z) < \dfrac{2\pi}{3}$

$(C)\, |z-2i| > \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \dfrac{\pi}{3} < \arg(z) < \dfrac{2\pi}{3}$ $(D)\, |z-2i| > \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \dfrac{\pi}{4} < \arg(z) < \dfrac{3\pi}{4}$ ***(2014)***

22. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

22.1. Considere $z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ e $w = \dfrac{\left(z-i\right)^4}{1+zi}$. No plano complexo, seja O a origem do referencial. Seja A a imagem geométrica do número complexo $\bar{z}$ e seja B a imagem geométrica do número complexo w. Determine a área do triângulo [AOB], sem utilizar a calculadora.

22.2. Seja $\alpha \in \left]0, \pi\right[$. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha\, z + 1 = 0$. Apresente as soluções, em função de α , na forma trigonométrica. ***(2014)***

$Soluções: (1)B (2)B (3.1) 4e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\ e\ 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} (3.2) 30 (4)B (5)C (6.1) 3 (7)A (8)C (9.1) 2e^{i0}; 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}; 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

$(10)D (11)B (12.1) \dfrac{1}{2}e^{i\left(\frac{13\pi}{10}\right)} (13)C (14)A (15.1) -1 (15.2) -\dfrac{3\pi}{2} (16)C (17)A (18.1) 6 (19)D (20.1) \dfrac{\pi}{8}\ e\ \dfrac{5\pi}{8} (21)C$

$(22.1) \dfrac{9}{2} (22.2) e^{i\alpha}\ e\ e^{i(-\alpha)}$