

Atividade de diagnóstico

Pág. 6

1.1. $p(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 5$

A distância à origem é nula no instante $t = 5$ s.

1.2. $\frac{p(2) - p(0)}{2 - 0} = \frac{-9 - (-5)}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

A velocidade média do ponto P entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$ é -2 cm/s.

1.3. $p'(t) = 2t - 4$; $p'(0) = -4$

A velocidade do ponto P no instante inicial é -4 cm/s.

1.4. $p'(2) = 2 \times 2 - 4 = 0$

$$p(2) = 2^2 - 4 \times 2 - 5 = -9$$

A velocidade no instante $t = 2$ é 0 cm/s e a distância do ponto P à origem é 9 cm.

2.1. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

$$f'(x) = (x^2)' + (\sqrt{x})' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.2. $g(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}} + x$

$$g'(x) = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right)' + x' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^3}} + 1 = \frac{-\frac{1}{x^2}}{4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^3}} + 1 =$$

$$= \frac{-\frac{1}{x^2}}{4\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}} + 1 = -\frac{\sqrt[4]{x^3}}{4x^2} + 1 = 1 - \frac{\sqrt[4]{x^3}}{4x^2}$$

2.3. $h(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + x^2$

$$h'(x) = \frac{(x)' \times \sqrt[3]{x} - x(\sqrt[3]{x})'}{(\sqrt[3]{x})^2} + (x^2)'$$

$$= \frac{1 \times \sqrt[3]{x} - x \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}} + 2x = \frac{3\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x^2} - x}{3\sqrt[3]{x^2}} + 2x =$$

$$= \frac{3x - x}{3\sqrt[3]{x^4}} + 2x = \frac{2x}{3x\sqrt[3]{x}} + 2x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 2x$$

2.4. $i(x) = 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x^3}$

$$i'(x) = (2\sqrt[3]{x})' + (\sqrt[5]{x^3})' = 2' \times \sqrt[3]{x} + 2(\sqrt[3]{x})' + \frac{(x^3)'}{5\sqrt[5]{(x^3)^4}} =$$

$$= 2 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3x^2}{5\sqrt[5]{x^{12}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3x^2}{5x^2\sqrt[5]{x^2}} =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

3.1. $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = -\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = -\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$$

3.2. $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$$g'(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

3.3. $h(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)' = \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$$

3.4. $i(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x}$

$$i'(x) = (3x^2)' - (5\sqrt{x})' = 6x - 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 6x - \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Pág. 7

4.1. $f(x) = \sqrt{x+3}$

$$f'(x) = (\sqrt{x+3})' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

4.2. $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$

$$g'(x) = \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)' = \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} = \frac{\frac{x-(x-1)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} = \frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}$$

4.3. $h(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} + \sqrt{x}$

$$h'(x) = \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)' + (\sqrt{x})' = \frac{1' \times 3\sqrt{x} - 1(3\sqrt{x})'}{(3\sqrt{x})^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{-3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{9x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-3}{2\sqrt{x} \times 9x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{1}{6x\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5.1. $f(x) = x^2 - x - 10$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x - 1$$
; $D_{f'} = \mathbb{R}$

f é contínua e diferenciável em \mathbb{R} , pelo que é contínua em $[-3, 0]$ e diferenciável em $] -3, 0[$.

Então, pelo Teorema de Lagrange:

$$\exists c \in] -3, 0[: f'(c) = \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)}$$

$$f'(c) = \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} \Leftrightarrow 2c - 1 = \frac{-10 - 2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2c - 1 = -4 \Leftrightarrow 2c = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{3}{2}$$

5.2. $g(x) = \sqrt{x-1}$; $D_g = [1, +\infty[$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$; $D_{g'} =]1, +\infty[$

g é contínua em $[1, +\infty[$ e diferenciável em $]1, +\infty[$.

Logo, g é contínua em $[2, 5]$ e diferenciável em $]2, 5[$.

Então, pelo Teorema de Lagrange:

$\exists c \in]2, 5[: g'(c) = \frac{g(5) - g(2)}{5 - 2}$

$g'(c) = \frac{g(5) - g(2)}{5 - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{c-1}} = \frac{2-1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{c-1}} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{c-1} = 3 \Rightarrow 4(c-1) = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4c - 4 = 9 \Leftrightarrow 4c = 13 \Leftrightarrow c = \frac{13}{4}$

Verificação:

$\frac{1}{2\sqrt{\frac{13}{4}-1}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ Verdadeira

6.1. $f(x) = x^3 - x$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 1$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	\nearrow		\searrow		\nearrow

f é estritamente crescente em $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ e em

$[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}[$.

6.2. $g(x) = x^2 - 3x - 4$; $D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 2x - 3$; $D_{g'} = \mathbb{R}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	\searrow		\nearrow

g é estritamente decrescente em $]-\infty, \frac{3}{2}]$ e estritamente

crescente em $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

7.1. $f(x) = -x^2(x-1)$

$f(x) = -x^3 + x^2$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 + 2x$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee -3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	\searrow	0	\nearrow	$\frac{4}{27}$	\searrow
		Mín.		Máx.	

$f(0) = 0$ e $f(\frac{2}{3}) = -(\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^2 = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[\frac{2}{3}, +\infty[$

e estritamente crescente em $[0, \frac{2}{3}]$.

f tem um mínimo relativo igual a 0 para $x = 0$ e um

máximo relativo igual a $\frac{4}{27}$ para $x = \frac{2}{3}$.

7.2. $g(x) = \frac{x^4}{2} - 2x$; $D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 2x^3 - 2$; $D_{g'} = \mathbb{R}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	\searrow	$-\frac{3}{2}$	\nearrow

$g(1) = \frac{1^4}{2} - 2 \times 1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente

crescente em $[1, +\infty[$.

g tem um mínimo relativo (e absoluto) igual a $-\frac{3}{2}$ para

$x = 1$.

Atividade inicial 1

Pág. 8

1.1. $u_n = 2 + \frac{1}{n}$; $v_n = 3 - \frac{4}{n}$

$u_n \leq v_n \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{n} < 3 - \frac{4}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{4}{n} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{n} \leq 1 \Leftrightarrow n \geq 5$

1.2. a) Para todo o número real $\delta > 0$ existe uma ordem

$p \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$

$|u_n - 2| < \delta \Leftrightarrow \left| 2 + \frac{1}{n} - 2 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\delta > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$

Sendo p um número natural maior que $\frac{1}{\delta}$, tem-se que

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$, ou seja, $\lim u_n = 2$.

b) Para todo o número real $\delta > 0$ existe uma ordem

$p \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |v_n - 3| < \delta$

$|v_n - 3| < \delta \Leftrightarrow \left| 3 - \frac{4}{n} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow$

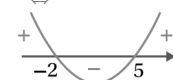
$\Leftrightarrow \left| -\frac{4}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{4}{n} < \delta \Leftrightarrow n\delta > 4 \Leftrightarrow n > \frac{4}{\delta}$

Sendo p um número natural maior que $\frac{4}{\delta}$, tem-se que

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |v_n - 3| < \delta$, ou seja, $\lim v_n = 3$.

2.1. $u_n = 3n + 15$; $v_n = n^2 + 5$
 $u_n \leq v_n \Leftrightarrow 3n + 15 \leq n^2 + 5 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 5$

Cálculo auxiliar:

$$n^2 - 3n - 10 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -2 \vee n = 5$$


2.2. a) $\lim u_n = \lim(3n + 15) = 3 \times (+\infty) + 15 = +\infty$

b) $\lim v_n = \lim(n^2 + 5) = (+\infty)^2 + 5 = +\infty$

Pág. 10

1.1. $u_n = \frac{n+1}{n}$; $v_n = \frac{2n}{n+10}$

$$u_n \leq v_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} \leq \frac{2n}{n+10} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} - \frac{2n}{n+10} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)(n+10) - 2n^2}{n(n+10)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 + 10n + n + 10 - 2n^2}{n(n+10)} \leq 0$$

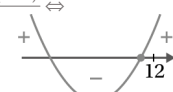
$n(n+10) > 0$

$$\Leftrightarrow n^2 + 10n + n + 10 - 2n^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 11n + 10 \leq 0 \Leftrightarrow n^2 - 11n - 10 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq 12$$

Cálculo auxiliar:

$$n^2 - 11n - 10 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -0,8 \vee n = 11,8$$


1.2. Para $n \geq 12$, $u_n \leq v_n$.

Pelo teorema de comparação de sucessões, $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Pág. 11

2.1. Para $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos n \leq 1 \Leftrightarrow -\cos n \geq -1 \Leftrightarrow 2n - \cos n \geq 2n - 1$$

Como $2n - \cos n \geq 2n - 1$ e $\lim(2n - 1) = +\infty$, então

$$\lim(2n - \cos n) = +\infty.$$

2.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^2 n \geq 0$.

Para $n - \frac{10}{3} > 0$, ou seja, para $n \geq 4$.

$$\frac{n^2 + \cos^2 n}{n - \frac{10}{3}} \geq \frac{n^2}{n - \frac{10}{3}}$$

$$\lim \frac{n^2}{n - \frac{10}{3}} = \lim \frac{n^2}{n} = \lim n = +\infty$$

$$\frac{n^2 + \cos^2 n}{n - \frac{10}{3}} \geq \frac{n^2}{n - \frac{10}{3}}, \forall n \geq 4$$

$$\lim \frac{n^2}{n - \frac{10}{3}} = +\infty \Rightarrow \lim \frac{n^2 + \cos^2 n}{n - \frac{10}{3}} = +\infty$$

3. $\lim u_n = -\infty$; $v_n \geq 3n - 2u_n$

$$\lim(3n - 2u_n) = \lim(3n) - \lim(2u_n) =$$

$$= 3 \times (+\infty) - 2 \times (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

Como $v_n \geq 3n - 2u_n$, com $n \geq 1000$, então $\lim v_n = +\infty$.

4. $\lim \left(\frac{3n+2}{n} \right)^n = \lim \left(3 + \frac{2}{n} \right)^n$

Para $n \in \mathbb{N}$: $\frac{2}{n} > 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{2}{n} > 3 \Leftrightarrow \left(3 + \frac{2}{n} \right)^n > 3^n$

Como $\lim 3^n = +\infty$ e $\left(3 + \frac{2}{n} \right)^n > 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$, então:

$$\lim \left(3 + \frac{2}{n} \right)^n = +\infty$$

Pág. 12

5.1. Para $n \in \mathbb{N}$: $\sin^2 n \leq 1 \Leftrightarrow \sin^2 n - n^2 \leq 1 - n^2$

Como $\sin^2 n - n^2 \leq 1 - n^2$ e $\lim(1 - n^2) = -\infty$, então

$$\lim(\sin^2 n - n^2) = -\infty.$$

5.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos n \leq 1 \rightarrow -\cos n \geq -1$

$$n^3 - \cos n \geq n^3 - 1$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} - n < 0$, então: $\frac{n^3 - \cos n}{\frac{1}{2} - n} \leq \frac{n^3 - 1}{\frac{1}{2} - n}$

Atendendo a que:

$$\lim \frac{n^3}{\frac{1}{2} - n} = \lim \frac{n^3}{-n} = \lim(-n^2) = -\infty$$

então: $\lim \frac{n^3 - \cos n}{\frac{1}{2} - n} = -\infty$

6. $\lim u_n = +\infty$; $v_n \leq -n - u_n$

$$\lim(-n - u_n) = -\infty - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$$

Como $v_n \leq -n - u_n$ e $\lim(-n - u_n) = -\infty$, então

$$\lim v_n = -\infty.$$

Pág. 13

7.1. Para $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$$\lim \left(-\frac{1}{n} \right) = 0 \text{ e } \lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

Pelo teorema das sucessões encastradas: $\lim \frac{\cos n}{n} = 0$

7.2. Para $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq \cos(3n) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \leq \frac{\cos(3n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

$$\lim \left(-\frac{1}{n+1} \right) = 0 \text{ e } \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

Pelo teorema das sucessões encastradas $\lim \frac{\cos(3n)}{n+1} = 0$

7.3. Para $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq \sin(2n) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2n} \leq \frac{\sin(2n)}{2n} \leq \frac{1}{2n}$

$$\lim \left(-\frac{1}{2n} \right) = 0 \text{ e } \lim \frac{1}{2n} = 0$$

Pelo teorema das sucessões encastradas: $\lim \frac{\sin(2n)}{2n} = 0$

7.4. Para $n \in \mathbb{N} : 0 \leq \sin^2(3n+1) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\sin^2(3n+1)}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\lim 0 = 0$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$

Pelo teorema das sucessões enquadradas:

$$\lim \frac{\sin^2(3n+1)}{n} = 0$$

Pág. 14

8.1. Para $n \in \mathbb{N} : -1 \leq \sin(2n) \leq 1$

$-1 + 3n \leq \sin(2n) + 3n \leq 1 + 3n$

$\frac{-1 + 3n}{n+1} \leq \frac{\sin(2n) + 3n}{n+1} \leq \frac{1 + 3n}{n+1}$

$\lim \frac{-1 + 3n}{n+1} = \lim \frac{3n}{n} = 3$ e $\lim \frac{1 + 3n}{n+1} = 3$

Pelo teorema das sucessões enquadradas:

$$\lim \frac{\sin(2n) + 3n}{n+1} = 3$$

8.2. Para $n \in \mathbb{N} : 0 \leq \sin^2 n \leq 1$

$-1 \leq -\sin^2 n \leq 0$

$-1 + n \leq n - \sin^2 n \leq n$

$\frac{-1 + n}{3n+1} \leq \frac{n - \sin^2 n}{3n+1} \leq \frac{n}{3n+1}$

$\lim \frac{-1 + n}{3n+1} = \lim \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$ e $\lim \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}$

Pelo teorema das sucessões enquadradas:

$$\lim \frac{n - \sin^2 n}{3n+1} = \frac{1}{3}$$

8.3. Para $n \in \mathbb{N} : -1 \leq \cos n \leq 1$

$-1 + 4n^2 \leq \cos n + 4n^2 \leq 1 + 4n^2$

$\frac{-1 + 4n^2}{2n^2 + n} \leq \frac{\cos n + 4n^2}{2n^2 + n} \leq \frac{1 + 4n^2}{2n^2 + n}$

$\lim \frac{-1 + 4n^2}{2n^2 + n} = \lim \frac{4n^2}{2n^2} = 2$ e $\lim \frac{1 + 4n^2}{2n^2 + n} = 2$

Pelo teorema das sucessões enquadradas:

$$\lim \frac{\cos n + 4n^2}{2n^2 + n} = 2$$

9.1. Para $n \in \mathbb{N} : \frac{2n-1}{4n} = \frac{2n}{4n} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4n} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4n} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{2n-1}{4n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \left(\frac{2n-1}{4n}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ e $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Pelo teorema das sucessões enquadradas:

$$\lim \left(\frac{2n-1}{4n}\right)^n = 0$$

9.2. $\frac{n-4}{3n+1} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{13}{3}}{3n+1} = \frac{1}{3} - \frac{13}{9n+3}$

$n \geq 1 \Leftrightarrow 9n \geq 9 \Leftrightarrow 9n+3 \geq 9+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9n+3 \geq 12 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{9n+3} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{13}{12} \leq -\frac{13}{9n+3} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{13}{12} \leq \frac{1}{3} - \frac{13}{9n+3} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq \frac{n-4}{3n+1} < \frac{1}{3}$

Para $n \geq 4 : 0 \leq \frac{n-4}{3n+1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{n-4}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\lim 0 = 0$ e $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Pelo teorema das sucessões enquadradas:

$$\lim \left(\frac{n-4}{3n+1}\right)^n = 0$$

10. $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt[2]{2} < \sqrt[2]{2 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[2]{3}$

$\lim \sqrt[2]{2} = 1$ e $\lim \sqrt[2]{3} = 1$

Pelo teorema das sucessões enquadradas: $\lim \sqrt[2]{2 + \frac{1}{n}} = 1$

Pág. 15

11.1. Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$

$\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq \frac{1}{x^2}$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} + \cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = +\infty$$

11.2. $\cos x \leq 1 \Leftrightarrow -\cos x \geq -1 \Leftrightarrow -3x - \cos x \geq -3x - 1$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x - 1) = -3 \times (-\infty) - 1 = +\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x - \cos x) = +\infty$$

11.3. $\sin x \geq 1 \Leftrightarrow x + \sin x \geq 1 + x$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$.

Pág. 16

12.1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x^2 - 3 \wedge f(x) \geq -x^2 + 4x - 5$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3) = 1 - 3 = -2$

$\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 4x - 5) = -1 + 4 - 5 = -2$

Pelo teorema das funções enquadradas: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

12.2. $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow -x^4 \leq x^4 \cos \frac{1}{x} \leq x^4$

$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^4) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4) = 0$

Pelo teorema das funções enquadradas: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^4 \cos \frac{1}{x}\right) = 0$

12.3. $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^4} \leq \frac{1}{x^4} \sin x \leq \frac{1}{x^4}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^4}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0 \Leftrightarrow$

Pelo teorema das funções encaixadas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^4} \sin x\right) = 0$

Pág. 18

13.1. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$; $D_f = \mathbb{R}$

A função f é contínua em \mathbb{R} por se tratar de uma função polinomial e, portanto, é contínua no intervalo $[2, 3] \subset \mathbb{R}$.

$f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 - 4 = 10$

$f(3) = 3^3 + 2 \times 3^2 - 3 - 4 = 38$

$f(2) < 20 < f(3)$

Como f é contínua em $[2, 3]$ e $f(2) < 20 < f(3)$,

podemos concluir, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um $x \in]2, 3[$ tal que $f(x) = 20$.

13.2. A função f é contínua em \mathbb{R} pelo que é contínua em $[1, 2]$.

$f(1) = 1 + 2 - 1 - 4 = -2$

$f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 - 4 = 10$

$f(1) \times f(2) < 0$

Como f é contínua em $[1, 2]$ e $f(1) \times f(2) < 0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que f tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$.

14. $f(a) = g(b)$ e $f(b) = g(a)$

f e g são funções contínuas em $[a, b]$.

Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

h é contínua em $[a, b]$ por ser a diferença de funções contínuas nesse intervalo.

$h(a) = f(a) - g(a) = g(b) - g(a)$

$h(b) = f(b) - g(b) = g(a) - g(b) = -[g(b) - g(a)]$

$h(a) \times h(b) \leq 0$

- Se $h(a) \times h(b) = 0$, então $h(a) = 0$ ou $h(b) = 0$ pelo que $\exists c \in [a, b]: h(c) = 0$, sendo $c = a$ ou $c = b$.
- Se $h(a) \times h(b) < 0$, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]a, b[: h(c) = 0$

Logo, $\exists c \in]a, b[: f(c) - g(c) = 0$, isto é, o gráfico de $f - g$ intersecta o eixo Ox pelo menos uma vez num ponto cuja abscissa pertence ao intervalo $]a, b[$.

Pág. 19

15.1. $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$

Como f é contínua em \mathbb{R} , por se tratar de uma função polinomial, então é contínua em $[-1, 2]$.

Pelo Teorema de Weierstrass, f admite, neste intervalo, um máximo e um mínimo absolutos.

$f'(x) = 4x - 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	-1		$\frac{3}{2}$		2
f'	-	-	0	+	+
f	9	\searrow	$\frac{7}{2}$	\nearrow	-3

$f(-1) = 9$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{2}$ são, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos de f em $[-1, 2]$.

15.2. $g(x) = 2 \sin x - 1$

g é uma função contínua em \mathbb{R} (produto e soma de funções contínuas em \mathbb{R}). Logo, g é contínua em $[0, 2\pi]$.

Pelo Teorema de Weierstrass, g admite, neste intervalo, um máximo e um mínimo absolutos.

$g'(x) = 2 \cos x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3}{2}\pi$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
g'	+	+	0	-	0	+	+
g	-1	\nearrow	1	\searrow	-3	\nearrow	-1

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $g\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -3$ são, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos de g em $[0, 2\pi]$.

15.3. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

- Em $[0, 2[$ e em $]2, 3]$ h é contínua porque está definida por polinómios.
- No ponto $x = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 6) = -2 \\ h(2) &= 2^2 - 3 \times 2 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -2$$

h é contínua no ponto 2 porque existe $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

h é contínua em $[0, 3]$.

Sinal da derivada de h :

Para $x < 2$: $h'(x) = (x^2 - 3x)' = 2x - 3$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Para $x > 2$: $h'(x) = 2 > 0$

x	0		$\frac{3}{2}$		2		3
h'	-	-	0	+		+	+
h	0	\searrow	$-\frac{9}{4}$	\nearrow	-2	\nearrow	0

Como h é contínua em $[0, 3]$, independentemente da existência de derivada no ponto 2, temos que h é

estritamente decrescente em $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ e estritamente

crescente em $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

$h(0) = h(3) = 0$ e $h\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ são, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos de h no intervalo $[0, 3]$.

Atividades complementares

Pág. 21

16. $\lim a_n = +\infty$; $b_n \geq 2 + a_n$

$$\lim(2 + a_n) = 2 + (+\infty) = +\infty$$

Como $b_n \geq 2 + a_n$, para $n \geq 10$, então $\lim b_n = +\infty$.

17. $\lim u_n = +\infty$

$$v_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{se } n < 1000 \\ 3u_n & \text{se } n \geq 1000 \end{cases}$$

$$\lim v_n = \lim(3u_n) = 3 \times (+\infty) = +\infty$$

18. $\lim v_n = -\infty$; $u_n \leq 1 + v_n$

$$\lim(1 + v_n) = 1 + (-\infty) = -\infty$$

Como $u_n \leq 1 + v_n$ e $\lim(1 + v_n) = -\infty$, então $\lim u_n = -\infty$.

19. $\lim a_n = -\infty$; $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq 200 \\ 2a_n & \text{se } n > 200 \end{cases}$

$$\lim b_n = \lim(2a_n) = 2 \times (-\infty) = -\infty$$

20. $\lim u_n = +\infty$; $b_n = \begin{cases} \frac{2n}{n^2 + 1} & \text{se } n < 10 \\ -3u_n & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$

$$\lim b_n = \lim(-3u_n) = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

21.1. Para $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$$

$$n \geq 1 \Leftrightarrow 4n \geq 4 \Leftrightarrow 4n+2 \geq 4+2 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4n+2} \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{4n+2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ e } \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Pelo teorema das sucessões enquadadas:

$$\lim\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = 0$$

21.2. $u_n = \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$: $n \times \frac{1}{n^2 + n} \leq u_n \leq n \times \frac{1}{n^2 + 1}$

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\lim \frac{n}{n^2 + n} = \lim \frac{n}{n^2} = \lim \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim \frac{n}{n^2 + 1} = \lim \frac{n}{n^2} = 0$$

Pelo teorema das sucessões enquadadas: $\lim u_n = 0$.

21.3. Para $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq \sin n \leq 1$ e $-1 \leq \cos n \leq 1$

$$-2 \leq \sin n + \cos n \leq 2$$

$$-\frac{2}{n} \leq \frac{\sin n + \cos n}{n} \leq \frac{2}{n}$$

$$\lim\left(-\frac{2}{n}\right) = 0 \text{ e } \lim \frac{2}{n} = 0$$

Pelo teorema das sucessões enquadadas:

$$\lim \frac{\sin n + \cos n}{n} = 0$$

22.1. Como $\lim\left(\sin \frac{5}{n}\right) = 0$, temos:

$$\lim \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5}{n}\right) \right] = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 0\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

22.2. $u_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^n}$

$$u_n = 2 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\lim u_n = \lim \left[2 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2 - 1 + 0 = 1$$

Cálculo auxiliar:

$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ representa a soma de n termos de uma progressão geométrica (a_n)

de razão $r = \frac{1}{2}$ e $a_1 = \frac{1}{2}$.

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = a_1 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

23.1. Seja $P(n)$ a condição em \mathbb{N} , tal que $n \leq u_n$.

- $P(1)$ é verdadeira porque $1 \leq u_1 \Leftrightarrow 1 \leq 1$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Hipótese: $n \leq u_n$

Tese: $n+1 \leq u_{n+1}$

$$n \leq u_n \Rightarrow$$

(por hipótese)

$$\Rightarrow 2n \leq 2u_n \Rightarrow n+n \leq 2u_n \Rightarrow n \leq 2u_n - n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1 \leq 2u_n + 1 - n \quad (\text{da fórmula de recorrência})$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq u_n$.

23.2. $\lim n = +\infty$

Como $u_n \geq n$, então $\lim u_n = +\infty$.

24.1. $f(x) = \frac{5-2x^3}{x^2+3x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-2x^3}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = -2 \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-2x^3}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -2 \times (+\infty) = -\infty$$

24.2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) \leq f(x)$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

24.3. $\forall x \in \mathbb{R}^-, h(x) \geq f(x)$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

25.1. a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2}{x-a} = \frac{a^2}{0^-} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2}{x-a} = \frac{a^2}{0^+} = +\infty$

25.2. a) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq f(x)$

Como $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = -\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq f(x)$

Como $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = +\infty$.

Pág. 22

26. Para $x > 0$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \cos x \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^{>0}}{3} x \leq \frac{x}{2 - \cos x} \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} x \right) = +\infty \text{ e } \frac{x}{2 - \cos x} \geq \frac{1}{3} x, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x} = +\infty$.

27.1. $f(x) = x^2 - 3 \sin x$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -3 \sin x \leq 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 - 3 \leq x^2 - 3 \sin x \leq 3 + x^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 - 3 \leq f(x) \leq 3 + x^2$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = +\infty$ e $\Leftrightarrow f(x) \geq x^2 - 3, \forall x \in \mathbb{R}$,

podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

27.2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3) = (-\infty)^2 - 3 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 + x^2) = 3 + (-\infty)^2 = +\infty$$

Pelo teorema das funções enquadadas: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

28.1. $x^2 \leq f(x) \leq 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ e } f(x) \geq 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

28.2. $x^2 \leq f(x) \leq 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2) = 0$$

Pelo teorema das funções enquadadas: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

29.1. Para todo o $x \in \mathbb{R} : \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -x + \sin x \leq -x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1) = -(+\infty) + 1 = -\infty$$

$\forall x \in \mathbb{R}, -x + \sin x \leq -x + 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1) = -\infty$

Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \sin x) = -\infty$.

29.2. Seja $x > 0$.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \cos x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq \frac{2 \cos x + 3}{x+1} \leq \frac{5}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x+1} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

Pelo teorema das funções enquadadas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos x + 3}{x+1} = 0$$

29.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{0^+}} = +\infty$

30.1. $f(x) = x^3 + x - 1$

A função f é contínua em \mathbb{R} , por se tratar de uma função polinomial. Logo, f é contínua no intervalo $[0, 1]$.

$$f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1$$

$$f(0) \times f(1) < 0$$

Como f é contínua em $[0, 1]$ e $f(0) \times f(1) < 0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que f tem pelo menos um zero no intervalo $]0, 1[$. Logo, tem pelo menos um zero no intervalo $[0, 1]$.

30.2. $g(x) = x^3 + 3x - 5$

A função g é contínua em \mathbb{R} pelo que é contínua em $[1, 2]$.

$$g(1) = 1^3 + 3 \times 1 - 5 = -1$$

$$g(2) = 2^3 + 3 \times 2 - 5 = 9$$

$$g(1) \times g(2) < 0$$

Como g é contínua em $[1, 2]$ e $g(1) \times g(2) < 0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que g tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$. Logo, tem pelo menos um zero no intervalo $[1, 2]$.

30.3. $h(x) = 1 + x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

A função h é contínua em \mathbb{R} por ser definida pela soma, produto e composta de funções contínuas em \mathbb{R} . Logo, h é contínua em $[1, 2]$.

$$h(1) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} = 1$$

$$h(2) = 1 + 2 \cos \pi = 1 + 2 \times (-1) = -1$$

$$h(1) \times h(2) < 0$$

Como h é contínua em $[1, 2]$ e $h(1) \times h(2) < 0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que h tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$. Logo, tem pelo menos um zero no intervalo $[1, 2]$.

31.1. a) $f(x) = -3x^4 - x + 1 ; f(-1) = -3(-1)^4 - (-1) + 1 = -1$

b) $f(0) = -3 \times 0^4 - 0 + 1 = 1$

c) $f(2) = -3 \times 2^4 - 2 + 1 = -49$

31.2. a) $f(-1) < \frac{1}{4} < f(0)$

Como f é contínua em $[-1, 0]$ e $f(-1) < \frac{1}{4} < f(0)$,

podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que $\exists x \in]-1, 0[: f(x) = \frac{1}{4}$.

b) $f(2) < -10 < f(0)$

Como f é contínua em $[0, 2]$ e $f(2) < -10 < f(0)$, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que $\exists x \in]0, 2[: f(x) = -10$.

32.1.
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x-3} & \text{se } x < 0 \\ 1+2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 3} = -\frac{1}{5}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

32.2. $g(x) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4x-3} = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

$g(x) = 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 2x = 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \wedge x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$

A proposição é falsa.

32.3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{4x-3} = -\frac{1}{3}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2x) = 1$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Logo, g não é contínua no ponto 0.

As alíneas anteriores não contradizem o Teorema de

Bolzano-Cauchy porque g não é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

33. Seja $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ com n ímpar.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0x^n) = a_0 \times (+\infty)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_0x^n) = a_0 \times (-\infty)$

Se $a_0 > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Se $a_0 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Logo, como f é contínua e atendendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, a função não passa de negativa a positiva ou de positiva a negativa sem passar por 0.

34.1. $g(1) = f(1) + 3 = -3 + 3 = 0$

Afirmção verdadeira

34.2. g é contínua em $[1, 4]$ porque é o produto de duas funções contínuas.

$g(1) = 3 \times f(1) = 3 \times (-3) = -9$

$g(4) = 3 \times f(4) > 0$

$g(1) \times g(4) < 0$

Como g é contínua em $[1, 4]$ e $g(1) \times g(4) < 0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que g tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 4[$. Logo, tem pelo menos um zero no intervalo $[1, 4]$.

Afirmção verdadeira

34.3. Como $f(x) \neq 0$ se $x \leq 1$ ou $x \geq 4$ temos que

$f(x+3) \neq 0$ se $x+2 \leq 1$ ou $x+3 \geq 4$, ou seja,

$f(x+3) \neq 0$ se $x \leq -1$ ou $x \geq 1$

Portanto, $g(x) \neq 0, \forall x \in [1, 4]$.

Afirmção falsa

35. A função h é contínua em $[a, b]$ porque é o quociente de duas funções contínuas em $[a, b]$ e $g(x) \neq 0$, qualquer que seja $x \in [a, b]$.

Pelo Teorema de Weierstrass, h admite em $[a, b]$ um mínimo absoluto y_0 e um máximo absoluto y_1 .

Então, $D'_h = h([a, b]) = [y_0, y_1]$.

Pág. 23

36. $f(0) \times f(3) < 0$

Se f fosse contínua no intervalo $[0, 3]$, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, teria pelo menos um zero no intervalo $]0, 3[$.

Como neste intervalo a função não admite zeros, a função não é contínua.

37. $f(a) < g(a)$ e $g(b) < f(b)$

Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

h é contínua em $[a, b]$ por ser a diferença de funções contínuas nesse intervalo.

$h(a) = f(a) - g(a) < 0$ porque $f(a) < g(a)$.

$h(b) = f(b) - g(b) > 0$ porque $g(b) < f(b)$.

$h(a) \times h(b) < 0$

Pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que:

$\exists k \in]a, b[: h(k) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in]a, b[: f(k) - g(k) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists k \in]a, b[: f(k) = g(k)$

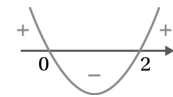
38. $f(x) = x^3 - 3x + k, k \in \mathbb{R}$

$\forall k \in \mathbb{R}$, a função f é contínua em $[0, 1]$.

$f(0) = k$

$f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + k = -2 + k$

$k(-2 + k) < 0 \Leftrightarrow k \in]0, 2[$



Se $k \in]0, 2[$, o Teorema de Bolzano-Cauchy garante que f tem pelo menos um zero em $]0, 1[$.

39. $f(x) = 1; g(x) = 2x^2 \tan x$

Pretende-se mostrar que $\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[: f(c) = g(c)$.

Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

h é contínua em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ por ser a diferença de funções contínuas nesse intervalo.

$h(0) = f(0) - g(0) = 1 - 2 \times 0^2 \times \tan 0 = 1 > 0$

$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 \times \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \times \tan \frac{\pi}{4} =$

$= 1 - 2 \times \frac{\pi^2}{16} \times 1 = 1 - \frac{\pi^2}{8} < 0$

$h(0) \times h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$

Pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que:

$\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[: h(c) = 0$, ou seja, $\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[: f(c) = g(c)$

40.1. $g(x) = 4x^3 - 17x^2 + 17x - 2$

$g(0) = -2; g(1) = 4 - 17 + 17 - 2 = 2;$

$g(2) = 4 \times 8 - 17 \times 4 + 17 \times 2 - 2 = -4;$

$g(3) = 4 \times 27 - 17 \times 9 + 17 \times 3 - 2 = 4$

40.2. $g(x)$ é um polinômio do terceiro grau pelo que tem, no máximo, três zeros. Atendendo a que g é uma função contínua em \mathbb{R} e à alínea anterior, o Teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência desses zeros nos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$.

41. $f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ (1-a)x & \text{se } x > 2 \end{cases}$, com $a \in \mathbb{R}$

Para se aplicar o Teorema de Bolzano-Cauchy, no intervalo $[0, 3]$, a função f tem de ser contínua nesse intervalo.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a^2x^2) = 4a^2 = f(2)$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [(1-a)x] = (1-a) \times 2 = 2 - 2a$

$4a^2 = 2 - 2a \Leftrightarrow 4a^2 + 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow a = -1 \vee a = \frac{1}{2}$

42.1. A função f é contínua em $]2, 5]$ porque é uma função racional e $x - 2 \neq 0, \forall x \in]2, 5]$.

42.2. $f(5) = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

42.3. Se $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \exists c \in]2, 5]: f(c) > L$, com $L \in \mathbb{R}^+$.

Logo, $\exists c \in]2, 5]: f(c) > 10^{2018}$.

Como f é contínua em $]c, 5]$ com $c \in]2, 5]$ e

$f(5) < 10^{2018} < f(c)$ podemos concluir, pelo Teorema de

Bolzano-Cauchy, que $\exists x \in]2, 5]: f(x) = 10^{2018}$.

Logo, $\exists x \in]2, 5]: f(x) = 10^{2018}$.

43.1. $u_n = 1 + \frac{n!}{n^n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{n!}{n^n} > 0$

$u_n = 1 + \frac{n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1}{n \times n \times \dots \times n} = 1 + \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{1}{n}$

$= 1 + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{< 1} \times \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{< 1} \times \dots \times \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$

Portanto, $1 < u_n < 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

43.2. $\lim 1 = 1$ e $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

Pelo teorema das sucessões encaixadas, $\lim u_n = 1$.

44.1. Atendendo a que $\sum_{p=0}^n {}^n C_p$ tem pelo menos duas parcelas,

$a_n = \sum_{p=0}^n {}^n C_p = 1 + n + \underbrace{{}^n C_2 + \dots + {}^n C_n}_{\geq 0} \geq 1 + n$

44.2. Como $\lim(1+n) = +\infty$ e $a_n \geq 1+n, \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim a_n = +\infty$.

45. $n \times \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

$\lim \frac{n^2}{n^2+n} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1, \lim \frac{n^2}{n^2+1} = 1$

Pelo teorema das sucessões encaixadas: $\lim u_n = 1$

46. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{se } -1 \leq x < 4 \\ \frac{2x-8}{x-2} & \text{se } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$

- No intervalo $[-1, 4[$, f é contínua porque está definida pela composta de duas funções contínuas.
- No intervalo $]4, 6]$, f é contínua porque está definida por uma função racional.
- No ponto $x = 4$:

$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{4-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x-8}{x-2} = 0 \\ f(4) &= \frac{2 \times 4 - 8}{4 - 2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$

f é contínua no ponto 4 porque existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

f é contínua no intervalo $[-1, 6]$.

Sinal da derivada de f :

Para $-1 \leq x < 4$:

$f'(x) = (\sqrt{4-x})' = \frac{(4-x)'}{2\sqrt{4-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}} < 0$

Para $4 < x \leq 6$:

$f'(x) = \left(\frac{2x-8}{x-2}\right)' = \frac{(2x-8)'(x-2) - (2x-8)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2) - (2x-8)}{(x-2)^2} = \frac{2x-4-2x+8}{(x-2)^2} = \frac{4}{(x-2)^2} > 0$

x	-1		4		6
f	-	-		+	+
f'	$\sqrt{5}$	\searrow	0	\nearrow	1
	Máx.		Mín.		Máx.

$f(-1) = \sqrt{4-(-1)} = \sqrt{5}; f(6) = \frac{2 \times 6 - 8}{6 - 2} = \frac{4}{4} = 1$

Como f é contínua em $[-1, 6]$, independentemente da existência de derivada no ponto 4, temos que f é estritamente decrescente em $[-1, 4]$ e estritamente crescente em $[4, 6]$.

Máximo absoluto: $\sqrt{5}$ para $x = -1$

Mínimo absoluto: 0 para $x = 4$

47. Seja h a função: $h(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$D_h = \left\{x : x \in D_f \wedge x + \frac{1}{2} \in D_f\right\} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ dado que

$0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq x + \frac{1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \wedge -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

h é contínua em $D_h = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ por ser a diferença de funções contínuas.

$$h(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$h(0) \times h\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$$

- Se $h(0) \times h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, então $\exists x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]: h(x) = 0$

sendo $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

- Se $h(0) \times h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, então, pelo corolário do Teorema

de Bolzano-Cauchy, $\exists x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[: h(x) = 0$.

Em qualquer dos casos, podemos concluir que:

$$\exists x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]: f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Avaliação 1

Pág. 24

1. $\lim u_n = -\infty; v_n > -u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim(-u_n) = -(-\infty) = +\infty$$

Se $\lim(-u_n) = +\infty$ e $v_n > -u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim v_n = +\infty.$$

Resposta: (A)

2. $u_n = -n + \cos n; \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -n + \cos n \leq -n + 1$

$$\lim(-n + 1) = -\infty$$

Como $-n + \cos n \leq -n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim(-n + 1) = -\infty$,

então $\lim u_n = \lim(-n + \cos n) = -\infty$.

Resposta: (B)

3. $u_n \leq w_n \leq v_n$, para $n > 100$ e $\lim u_n = \lim v_n = 1$

Pelo teorema das sucessões enquadradas: $\lim w_n = 1$

Resposta: (C)

4. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

f é contínua em \mathbb{R} por se tratar de uma função polinomial.

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + 1 = -3$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 1$$

$$f(-2) \times f(-1) < 0$$

Pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in]-2, -1[: f(c) = 0$$

Resposta: (A)

5. $3 \in [2, 10]; 4 \in [2, 10]$

Como a função f é decrescente no intervalo $[2, 10]$,

$$f(3) \geq f(4)$$

Resposta: (D)

6. Se $f(a) \times f(b) > 0$, então $f(a)$ e $f(b)$ são ambos positivos ou ambos negativos.

Como a função f é monótona e $f(a)$ e $f(b)$ têm o

mesmo sinal, então $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ ou

$$f(b) \leq f(x) \leq f(a), \forall x \in [a, b] \text{ pelo que}$$

$$f(x) \neq 0, \forall x \in [a, b].$$

Resposta: (D)

7. Seja $k \geq 0$. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que n é par e $n > k$.

$$\text{Logo, } f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \times n = n > k.$$

Se n é par então $n + 1$ é ímpar pelo que:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = (-1)^{n+1} \times (n+1) = -(n+1) < k$$

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, atendendo a que f é

contínua em $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ e que $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < k < f\left(\frac{1}{n}\right)$,

podemos concluir que a equação $f(x) = k$ tem pelo

menos uma solução em qualquer intervalo do tipo

$$\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ par.}$$

De forma análoga se pode concluir que se $k < 0$ e n um

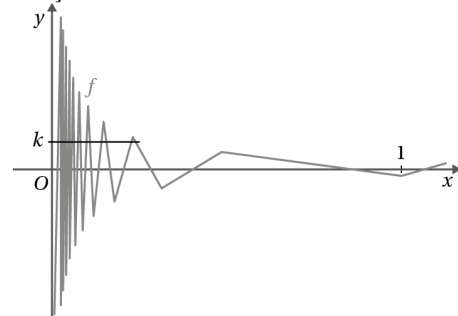
número natural ímpar tal que $-n < k$, a equação

$f(x) = k$ tem pelo menos uma solução em qualquer

intervalo do tipo $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$.

Portanto, a equação $f(x) = k$ tem uma infinidade de

soluções.



Resposta: (A)

Pág. 25

8. Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - x$.

h é contínua em $[0, 1]$ por ser a diferença de duas funções contínuas nesse intervalo.

$$h(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \text{ porque } f(0) \in [0, 1].$$

$$h(1) = f(1) - 1 \leq 0 \text{ porque } f(1) \in [0, 1].$$

$$h(0) \times h(1) \leq 0$$

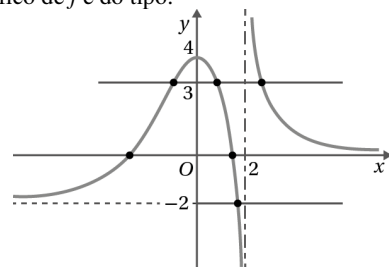
- Se $h(0) \times h(1) = 0$, então $\exists \alpha \in [0, 1]: h(\alpha) = 0$ sendo $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

- Se $h(0) \times h(1) < 0$, então pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists \alpha \in]0, 1[: h(\alpha) = 0$.

Em qualquer dos casos, podemos concluir que:

$$\exists \alpha \in [0, 1]: h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists \alpha \in [0, 1]: f(\alpha) = \alpha$$

9. O gráfico de f é do tipo:



Atendendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy e à monotonia da função f :

- 9.1. a equação $f(x) = 3$ tem três soluções;

9.2. a equação $f(x) = 0$ tem duas soluções;

9.3. a equação $f(x) = -2$ tem uma solução.

10. $f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Seja $x \in \mathbb{R}^+$.

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{\sin x}{x} \leq 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

Pelo teorema das funções enquadadas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

11. $\lim u_n = +\infty$; $v_n \leq 1 - u_n$

$$\lim(1 - u_n) = 1 - (+\infty) = -\infty$$

Como $v_n \leq 1 - u_n$, para $n \geq 100$ e $\lim(1 - u_n) = -\infty$, então

$$\lim v_n = -\infty.$$

12. $\lim a_n = -\infty$; $b_n \geq 2 - 3a_n$

$$\lim(2 - 3a_n) = 2 - 3 \times (-\infty) = +\infty$$

Como $b_n \geq 2 - 3a_n$ e $\lim(2 - 3a_n) = +\infty$, $\lim b_n = +\infty$.

13.1. $u_n = \frac{\sin^2(n+1)}{n+1}$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sin^2(n+1) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\sin^2(n+1)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\lim 0 = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Pelo teorema das sucessões enquadadas: $\lim u_n = 0$

13.2. $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n+1}$. Para $n \in \mathbb{N}$:

$$-1 \leq \cos(n\pi) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \leq \frac{\cos(n\pi)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\lim\left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0 \text{ e } \lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$$

Pelo teorema de sucessões enquadadas: $\lim u_n = 0$

13.3. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \sqrt{\lim \frac{n^2}{n^2+n}} = \sqrt{\lim \frac{n^2}{n^2}} = 1$$

$$\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1$$

Pelo teorema das sucessões enquadadas: $\lim u_n = 1$

14.1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

14.2. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) > f(x)$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

14.3. $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $h(x) < f(x)$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

15.1. $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2+x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2+x} \leq \frac{\sin(2x)}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2+x}$$

Se $x > 1$, $x^2 + x > 0$.

Por exemplo: $g(x) = -\frac{1}{x^2+x}$ e $h(x) = \frac{1}{x^2+x}$

15.2. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ e

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\forall x \in]1, +\infty[$, pelo teorema das funções enquadadas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

16. Seja f a função definida por $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$.

f é uma função polinomial. Logo, é contínua em \mathbb{R} e em particular em $[1, 2]$.

$$f(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 - 1 - 4 = -2$$

$$f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 - 4 = 10$$

$$f(1) \times f(2) < 0$$

Como f é contínua em $[1, 2]$ e $f(1) \times f(2) < 0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que f tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$. Logo, tem pelo menos um zero no intervalo $[1, 2]$, isto é, a equação $x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$ tem pelo menos uma solução nesse intervalo.

17. A função f é contínua em \mathbb{R} por se tratar de uma função

polinomial. Logo, é contínua em $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

Pelo Teorema de Weierstrass, f admite, no intervalo

$\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$, um máximo e um mínimo absolutos.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{3}$$

x	-2		-1		$-\frac{1}{2}$
f'	+	+	0	-	-
f	-1	↗	2	↘	$\frac{13}{8}$

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 1 = -1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{13}{8}$$

$f(-1) = 2$ e $f(-2) = -1$ são, respectivamente o máximo e

o mínimo absolutos de f em $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

Atividade inicial 2

Pág.26

$$1.1. f(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+1)^2}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 4x)'(x+1)^2 - (x^2 + 4x)[(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2} = \\ &= \frac{(2x+4)(x+1)^2 - (x^2 + 4x) \times 2 \times (x+1)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{(x+1)[(2x+4)(x+1) - 2(x^2 + 4x)]}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{(2x+4)(x+1) - 2(x^2 + 4x)}{(x+1)^3} = \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 4x + 4 - 2x^2 - 8x}{(x+1)^3} = \frac{-2x+4}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$1.2. m = f'(0) = 4 \quad e \quad b = f(0) = 0$$

$$y = 4x$$

$$2.1. g(x) = x^3 - x^2; D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x; D_{g'} = \mathbb{R}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \curvearrowright 3x^2 - 2x$$

$$2.2. h'(x) = 6x - 2; D_{h'} = \mathbb{R}$$

$$i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \curvearrowright 6x - 2$$

Pág. 27

$$1.1. f'(x) = 6x^2 - 2x + 2; f''(x) = 12x - 2$$

$$1.2. f'(x) = -\frac{1}{x^2}; f''(x) = \frac{-(-1) \times 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\begin{aligned} 1.3. f'(x) &= \frac{(1-2x)'(x+1) - (1-2x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{-2(x+1) - (1-2x)}{(x+1)^2} = \frac{-2x - 2 - 1 + 2x}{(x+1)^2} = -\frac{3}{(x+1)^2} \\ f''(x) &= \frac{(-3)'(x+1)^2 - (-3)[(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2} = \frac{3 \times 2 \times (x+1)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{6}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$1.4. f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x'\sqrt{x^2 - 1} - x \times (\sqrt{x^2 - 1})'}{(\sqrt{x^2 - 1})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} \times (x^2 - 1)} = -\frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$1.5. f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)'(x+1)^3 - (x-1)[(x+1)^3]'}{[(x+1)^3]^2} = \\ &= \frac{(x+1)^3 - (x-1) \times 3 \times (x+1)^2}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{(x+1)^2 [(x+1) - (x-1) \times 3]}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{x+1 - (x-1) \times 3}{(x+1)^4} = \frac{x+1 - 3x+3}{(x+1)^4} = \frac{-2x+4}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x+4)'(x+1)^4 - (-2x+4)[(x+1)^4]'}{[(x+1)^4]^2} = \\ &= \frac{-2(x+1)^4 - (-2x+4) \times 4 \times (x+1)^3}{(x+1)^8} = \\ &= \frac{(x+1)^3 [-2(x+1) - (-2x+4) \times 4]}{(x+1)^8} = \\ &= \frac{-2(x+1) - (-2x+4) \times 4}{(x+1)^5} = \\ &= \frac{-2x - 2 + 8x - 16}{(x+1)^5} = \frac{6x - 18}{(x+1)^5} = \frac{6(x-3)}{(x+1)^5} \end{aligned}$$

$$1.6. f(x) = 4(x-1)\sqrt{x-1} = (4x-4)\sqrt{x-1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x-4)'\sqrt{x-1} + (4x-4)(\sqrt{x-1})' = \\ &= 4\sqrt{x-1} + (4x-4) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \\ &= 4\sqrt{x-1} + \frac{4x-4}{2\sqrt{x-1}} = 4\sqrt{x-1} + \frac{2x-2}{\sqrt{x-1}} = \\ &= \frac{4(x-1) + 2x-2}{\sqrt{x-1}} = \frac{6x-6}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(6x-6)'\sqrt{x-1} - (6x-6)(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2} = \\ &= \frac{6\sqrt{x-1} - (6x-6) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{6\sqrt{x-1} - \frac{6x-6}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \\ &= \frac{6\sqrt{x-1} - \frac{3x-3}{\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{6(x-1) - (3x-3)}{x-1} = \\ &= \frac{6x-6-3x+3}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{3x-3}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \\ &= \frac{3(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

Pág. 30

$$2.1. f(x) = 3x^2 - x^3; D_f = \mathbb{R}; f'(x) = 6x - 3x^2; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 6 - 6x; D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	+	0	-
f	∪		∩

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e voltada para baixo em $]1, +\infty[$.

2.2. $f(x) = 3x^5 + 10x^3 + 15x; D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 15x^4 + 30x^2 + 15; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 60x^3 + 60x; D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 + 60x = 0 \Leftrightarrow 60x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60x = 0 \vee x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩		∪

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$.

2.3. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - x; D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 1; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24; D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 36x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f''	+	0	-	0	+
f	∪		∩		∪

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e em $]2, +\infty[$ e voltada para baixo em $]1, 2[$.

2.4. $f(x) = \frac{x^4}{6} + 2x^2 + \frac{x}{2}; D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{4}{6}x^3 + 4x + \frac{1}{2}; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{12}{6}x^2 + 4 = 2x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}; D_{f''} = \mathbb{R}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em \mathbb{R} .

2.5. $f(x) = 1 - 2x^2 - \frac{x^4}{3}; D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -4x - \frac{4}{3}x^3; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = -4 - 4x^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}; D_{f''} = \mathbb{R}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em \mathbb{R} .

2.6. $f(x) = 1 - (2x - 1)^3; D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -3(2x - 1)^2 \times 2 = -6(2x - 1)^2; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = -6 \times 2 \times (2x - 1) \times 2 = -24(2x - 1) = -48x + 24; D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -48x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f''	+	0	-
f	∪		∩

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em

$$\left] -\infty, \frac{1}{2} \right[\text{ e voltada para baixo em } \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

Pág. 32

3.1. $f(x) = \frac{4}{9} + 6x^2 - 9x^4; D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 12x - 36x^3; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 12 - 108x^2; D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 108x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
f''	-	0	+	0	-
f	∩	1	∪	1	∩
		P.I.		P.I.	

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} + 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} + 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 1$$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em

$$\left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[\text{ e em } \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[\text{ e voltada para cima em } \left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right[.$$

Os pontos $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

3.2. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x; D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 6x - 4; D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩	$\frac{2}{27}$	∪
		P.I.	

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em

$$\left] -\infty, \frac{2}{3} \right[\text{ e voltada para cima em } \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[.$$

O ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f .

3.3. $f(x) = \frac{3x^5}{10} - x^4 + x^3; D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{15}{10}x^4 - 4x^3 + 3x^2; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 + 3x^2$$

$$f''(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x; D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 12x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

2.2. Derivadas

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$+$
f	\cap	0	\cup	$\frac{3}{10}$	\cup
		P.I.			

$$f(0) = 0; f(1) = \frac{3}{10}$$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$.

O ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f . Apesar de a segunda derivada ser nula em $x = 1$, o gráfico de f não tem aí ponto de inflexão dado que a concavidade não muda de sentido nesse ponto.

3.4. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f''(x) = \frac{(-2)'(x-1)^2 - (-2) \times [(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \frac{2 \times 2 \times (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}; D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f	\cap		\cup

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1[$ e voltada para cima em $]1, +\infty[$.

O gráfico de f não tem pontos de inflexão.

3.5. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}; D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{(-x^2+1)'(x^2+1)^2 - (-x^2+1)[(x^2+1)^2]'}{[(x^2+1)^2]^2}$$

$$= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2+1)^2 - 4x(-x^2+1)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)[-2x(x^2+1) - 4x(-x^2+1)]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+1) - 4x(-x^2+1)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}; D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0 \wedge (x^2+1)^3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	\cap	$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	\cup	0	\cap	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	\cup
		P.I.		P.I.		P.I.	

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2+1} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e em $]0, \sqrt{3}[$ e voltada para cima em $]-\sqrt{3}, 0[$ e em $]\sqrt{3}, +\infty[$.

Os pontos $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ são

pontos de inflexão do gráfico de f .

Pág. 33

3.6. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$

$$\bullet f'(x) = (\sqrt{x+1})' = \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\bullet f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{-(2\sqrt{x+1})'}{(2\sqrt{x+1})^2} = \frac{-2 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{4(x+1)} = -\frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} \quad D_{f''} =]-1, +\infty[$$

Como $f''(x) < 0, \forall x \in]-1, +\infty[$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em todo o domínio e, como tal, não tem pontos de inflexão.

3.7. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1+x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

$$\bullet f'(x) = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

2.2. Derivadas

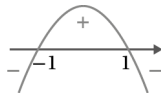
$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{(x)' \sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \\ &= \frac{1 \times \sqrt{1+x^2} - x \times \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2) - x \times 2x}{2\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \\ &= \frac{2+2x^2-2x^2}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$D_{f''} = \mathbb{R}$$

Como $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em todo o domínio e, como tal, não tem pontos de inflexão.

3.8. $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$$



$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (x + \sqrt{1-x^2})' = (x)' + \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)' = -\frac{(x)' \sqrt{1-x^2} - x(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \\ &= -\frac{1 \times \sqrt{1-x^2} - x \times \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{2(1-x^2) - x \times (-2x)}{2\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} \\ &= -\frac{2-2x^2+2x^2}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$D_{f''} =]-1, 1[$$

Como $f''(x) < 0, \forall x \in]-1, 1[$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em todo o domínio e, como tal, não tem pontos de inflexão.

Pág. 35

4.1. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 15$

$$\bullet f'(x) = 6x^2 + 18x$$

$$\bullet f''(x) = 12x + 18$$

$$D_{f''} = D_{f'} = D_f = \mathbb{R}$$

Logo, f é duas vezes diferenciável em \mathbb{R} .

• Zeros da primeira derivada (pontos críticos de f):

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 6x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow 6x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6x = 0 \vee x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \end{aligned}$$

Os pontos críticos são -3 e 0 .

• Sinal da segunda derivada nos pontos críticos:

$$f''(-3) = 12(-3) + 18 = -18 < 0$$

Como $f''(-3) < 0$, f tem um máximo local em -3 .

$$f(-3) = 12$$

$$f''(0) = 12 \times 0 + 18 = 18 > 0$$

Como $f''(0) > 0$, f tem um mínimo local em 0 .

$$f(0) = -15$$

Conclusão: f admite um máximo relativo igual a 12 para $x = -3$ e um mínimo relativo igual a -15 para $x = 0$.

4.2. $f(x) = 12x^2 - 4x^3 - 3x^4$

$$f'(x) = 24x - 12x^2 - 12x^3$$

$$f''(x) = 24 - 24x - 36x^2$$

$$D_{f''} = D_{f'} = D_f = \mathbb{R}$$

Logo, f é duas vezes diferenciável em \mathbb{R} .

• Zeros da primeira derivada (pontos críticos de f):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(2-x-x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 1$$

Os pontos críticos são $-2, 0$ e 1 .

• Sinal da segunda derivada nos pontos críticos:

$$f''(-2) = 24 - 24(-2) - 36(-2)^2 = -72 < 0$$

Como $f''(-2) < 0$, f tem um máximo local em -2 .

$$f''(0) = 24 - 24 \times 0 - 36 \times 0 = 24 > 0$$

Como $f''(0) > 0$, f tem um mínimo local em 0 .

$$f(0) = 12 \times 0^2 - 4 \times 0^3 - 3 \times 0^4 = 0$$

$$f''(1) = 24 - 24 \times 1 - 36 \times 1^2 = -36 < 0$$

Como $f''(1) < 0$, f tem máximo local em 1 .

$$f(1) = 12 \times 1^2 - 4 \times 1^3 - 3 \times 1^4 = 5$$

Conclusão: f admite máximos relativos iguais a 32 e a 5 para $x = -2$ e $x = 1$, respectivamente, e um mínimo relativo igual a 0 para $x = 0$.

4.3. $f(x) = 3x^5 - \frac{15x^4}{4} - 10x^3$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^3 - 30x^2$$

$$f''(x) = 60x^3 - 45x^2 - 60x$$

$$D_{f''} = D_{f'} = D_f = \mathbb{R}$$

Logo, f é duas vezes diferenciável em \mathbb{R} .

• Zeros da primeira derivada (pontos críticos de f):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -1$$

Os pontos críticos são $-1, 0$ e 2 .

• Sinal da segunda derivada nos pontos críticos:

$$f''(0) = 60 \times 0^3 - 45 \times 0^2 - 60 \times 0 = 0$$

Como $f''(0) = 0$, a segunda derivada não nos diz sobre a existência de extremos no ponto $x = 0$.

No entanto, atendendo ao sinal de f' , podemos concluir que f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em

$[2, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1, 2]$.

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f	\nearrow	$\frac{13}{4}$	\searrow	0	\searrow	-44	\nearrow
		Máx.				Mín.	

2.2. Derivadas

$$f(-1) = 3(-1)^5 - \frac{15}{4}(-1)^4 - 10(-1)^3 = \frac{13}{4}$$

$$f(0) = 3 \times 0^5 - \frac{15}{4} \times 0^4 - 10 \times 0 = 0$$

$$f(2) = 3 \times 2^5 - \frac{15}{4} \times 2^4 - 10 \times 2^3 = -44$$

Conclusão: f admite um máximo relativo igual a $\frac{13}{4}$ para $x = -1$ e um mínimo relativo igual a -44 para $x = 2$.

4.4. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2 + 4) - x(x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2 + 4 - x(2x)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} \right)' = \frac{(4 - x^2)'(x^2 + 4)^2 - (4 - x^2)[(x^2 + 4)^2]'}{[(x^2 + 4)^2]^2} = \frac{-2x(x^2 + 4)^2 - (4 - x^2) \times 2(x^2 + 4)'(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^4} = \frac{-2x^3 - 8x - 16x + 4x^3}{(x^2 + 4)^3} = \frac{2x^3 - 24x}{(x^2 + 4)^3}$$

$$D_{f''} = D_{f'} = D_f = \mathbb{R}$$

Logo, f é duas vezes diferenciável em \mathbb{R} .

• Zeros da primeira derivada (pontos críticos de f):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Os pontos críticos são -2 e 2 .

• Sinal da segunda derivada nos pontos críticos:

$$f''(-2) = \frac{2(-2)^3 - 24(-2)}{((-2)^2 + 4)^3} = \frac{1}{16} > 0$$

Como $f''(-2) > 0$, f tem um mínimo local em -2 .

$$f(-2) = \frac{-2}{(-2)^2 + 4} = -\frac{1}{4}$$

$$f''(2) = \frac{2 \times 2^3 - 24 \times 2}{(2^2 + 4)^3} = -\frac{1}{16} < 0$$

Como $f''(2) < 0$, f tem um máximo local em 2 .

$$f(2) = \frac{2}{2^2 + 4} = \frac{1}{4}$$

Conclusão: f admite um mínimo relativo igual a $-\frac{1}{4}$ para

$x = -2$ e um máximo relativo igual a $\frac{1}{4}$ para $x = 2$.

4.5. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(x^2 + 2x)'(x+1)^2 - (x^2 + 2x)[(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2} = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2 + 2x) \times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)[(2x+2)(x+1) - 2(x^2 + 2x)]}{(x+1)^3} = \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$D_{f''} = D_{f'} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

• Zeros da primeira derivada (pontos críticos de f):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

Os pontos críticos são -2 e 0 .

• Sinal da segunda derivada nos pontos críticos:

$$f''(-2) = \frac{2}{(-2+1)^3} = -2 < 0$$

Como $f''(-2) < 0$, f tem um máximo local em -2 .

$$f(-2) = \frac{(-2)^2}{-2+1} = -4$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} = 2 > 0$$

Como $f''(0) > 0$, f tem um mínimo local em 0 .

$$f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$$

Conclusão: f admite um máximo relativo igual a -4 para $x = -2$ e um mínimo relativo igual a 0 para $x = 0$.

4.6. $f'(x) = (x)' \sqrt{x+1} + x(\sqrt{x+1})' = \sqrt{x+1} + x \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1) + x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

$$f''(x) = \left(\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \right)' = \frac{(3x+2)' \times 2\sqrt{x+1} - (3x+2) \times (2\sqrt{x+1})'}{(2\sqrt{x+1})^2} = \frac{3 \times 2\sqrt{x+1} - (3x+2) \times \frac{2(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}}{4(x+1)} = \frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$D_f = [-1, +\infty[; D_{f''} = D_{f'} =]-1, +\infty[$$

- Zeros da primeira derivada (ponto críticos de f):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow 3x+2 = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

O ponto crítico de f é $-\frac{2}{3}$.

- Sinal da segunda derivada no ponto crítico:

$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 4}{4 \left(-\frac{2}{3} + 1\right) \sqrt{-\frac{2}{3} + 1}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$$

Como $f''\left(-\frac{2}{3}\right) > 0$, f tem um mínimo local em $-\frac{2}{3}$.

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \sqrt{-\frac{2}{3} + 1} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Atendendo ao sinal de f' podemos concluir que f é estritamente decrescente em $\left[-1, -\frac{2}{3}\right]$ e estritamente

crescente em $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right]$.

x	-1		$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'		-	0	+
f	0	\searrow	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	\nearrow
	Máx.		Mín.	

$$f(-1) = -1\sqrt{-1+1} = 0$$

Logo, f admite um máximo relativo igual a 0 para $x = -1$.

Conclusão: f admite um máximo relativo igual a 0 para

$x = -1$ e um mínimo relativo igual a $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ para $x = -\frac{2}{3}$.

Pág. 37

5. $x(t) = 4t^2 + 16t - 9$

5.1. $x(0) = 4 \times 0^2 + 16 \times 0 - 9 = -9$

$$x(2) = 4 \times 2^2 + 16 \times 2 - 9 = 39$$

$$x(0) = -9 \text{ e } x(2) = 39$$

5.2. Velocidade média em $[0, 2] = \frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} =$

$$= \frac{39 - (-9)}{2} = 24$$

A velocidade média do ponto entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$ é igual a 24 m/s.

5.3. $x(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 16t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 144}}{2 \times 4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{9}{2} \vee t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$x'(t) = 8t + 16$$

$$x'\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \times \frac{1}{2} + 16 = 20$$

O ponto passa na origem no instante $t = \frac{1}{2}$ s com uma velocidade de 20 m/s.

- 5.4. A velocidade do ponto em função do tempo t , em segundos, é dada por $x'(t) = 8t + 16$.

Como $x'(t)$ é estritamente crescente, o seu valor máximo no intervalo $[0, 5]$ é $x'(5) = 8 \times 5 + 16 = 56$.

A aceleração do ponto, em função do tempo t , em segundos, é dada por $x''(t) = (8t + 16)' = 8$.

A aceleração é constante e igual a 8 m/s².

A velocidade máxima atingida pelo ponto foi de 56 m/s no instante $t = 5$ e a aceleração neste instante foi de 8 m/s².

Pág. 38

6. $p(t) = t^3 - 6t^2$

6.1. $p(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 = -5$

$$p(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 = -32$$

$$\begin{aligned} \text{Velocidade média em } [1, 4] &= \frac{p(4) - p(1)}{4 - 1} = \\ &= \frac{-32 + 5}{3} = -9 \end{aligned}$$

No intervalo $[1, 4]$, a partícula move-se no sentido negativo a uma velocidade média de 9 m/s.

6.2. $p'(t) = 3t^2 - 12t$

$$p'(1) = 3 \times 1^2 - 12 \times 1 = -9$$

$$p'(4) = 3 \times 4^2 - 12 \times 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Aceleração média em } [1, 4] &= \frac{p'(4) - p'(1)}{4 - 1} = \\ &= \frac{0 - (-9)}{3} = 3 \end{aligned}$$

A aceleração média da partícula no intervalo $[1, 4]$ é de 3 m/s².

6.3. $p(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(t - 6) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 6$

$$p''(t) = 6t - 12$$

$$p''(0) = 6 \times 0 - 12 = -12; \quad p''(6) = 6 \times 6 - 12 = 24$$

A partícula passa na origem nos instantes $t = 0$ e $t = 6$ com aceleração de -12 m/s² e 24 m/s², respetivamente.

7. $h(t) = -4,9t^2 + 39,2t + 44,1$

7.1. $h'(t) = -9,8t + 39,2$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 39,2 = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

$$h''(t) = -9,8$$

$$h''(4) = -9,8 < 0$$

$h(t)$ tem um máximo em $t = 4$

$$h(4) = -4,9 \times 4^2 + 39,2 \times 4 + 44,1 = 122,5$$

A altura máxima atingida pelo corpo foi 122,5 m.

7.2. $h(0) = -4,9 \times 0^2 + 39,2 \times 0 + 44,1 = 44,1$

$$h(4) = 122,5$$

$$\text{Velocidade média em } [0, 4] = \frac{h(4) - h(0)}{4 - 0} =$$

$$= \frac{122,5 - 44,1}{4} = \frac{78,4}{4} = 19,6$$

A velocidade média na subida foi de 19,6 m/s.

2.2. Derivadas

7.3. $h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t + 44,1 = 0$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-39,2 \pm \sqrt{1536,64 + 864,36}}{2 \times (-4,9)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \vee t = 9 \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} t = 9$$

$$h'(9) = -9,8 \times 9 + 39,2 = -49$$

$$\frac{-49 \times 3600}{1000} = -176,4$$

$$h''(9) = -9,8$$

$$\frac{-9,8 \times 3600}{1000} = -35,28$$

No instante em que atinge o solo, o corpo tem uma velocidade de $-176,4$ km/h e uma aceleração de $-35,28$ km/h².

Pág. 39

8.1. $f(x) = 4x^3 - 3x^4$

- Domínio e continuidade:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ e } f \text{ é contínua}$$

- Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^4 = 0 \Leftrightarrow x^3(4 - 3x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$$

- Monotonia e extremos:

$$f'(x) = 12x^2 - 12x^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$	0
f	\nearrow	0	\nearrow	\searrow
			Máx.	

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 4 \times 1^3 - 3 \times 1^4 = 1$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente decrescente em $[1, +\infty[$.

Tem um máximo relativo (e absoluto) igual a 1 para $x = 1$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = (12x^2 - 12x^3)' = 24x - 36x^2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0
f	\cap	0	\cup	\cap
		P.I.	P.I.	

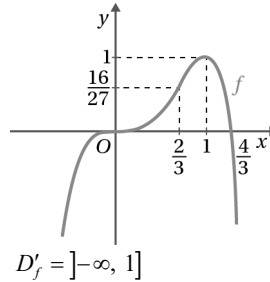
O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em

$]-\infty, 0[$ e em $]\frac{2}{3}, +\infty[$ e voltada para cima em

$]\frac{2}{3}, 0[$. Os pontos $(0, 0)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{16}{27})$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

- Assíntotas: f é uma função polinomial pelo que o seu gráfico não tem assíntotas.

- Gráfico e contradomínio:



Pág. 40

8.2. $f(x) = x^4 - 12x^2$

- Domínio e continuidade: $D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua

- Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{3}$$

- Monotonia e extremos:

$$f'(x) = 4x^3 - 24x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \vee x^2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{6}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	$-$	0
f	\searrow	-36	\nearrow	0	\searrow
		Mín.	Máx.	Mín.	

$$f(-\sqrt{6}) = (-\sqrt{6})^4 - 12(-\sqrt{6})^2 = -36$$

$$f(0) = 0^4 - 12 \times 0 = 0$$

$$f(\sqrt{6}) = \sqrt{6}^4 - 12 \times \sqrt{6}^2 = -36$$

f é estritamente crescente em $[-\sqrt{6}, 0]$ e em

$[-\sqrt{6}, +\infty[$ e estritamente decrescente em

$]-\infty, -\sqrt{6}[$ e em $[0, \sqrt{6}[$.

Tem mínimo relativo (e absoluto) igual a -36 em

$x = -\sqrt{6}$ e $x = \sqrt{6}$ e tem máximo relativo igual a 0 em $x = 0$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = (4x^3 - 24x)' = 12x^2 - 24$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0
f	\cup	-20	\cap	-20
		P.I.	P.I.	

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 12(-\sqrt{2})^2 = -20$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^4 - 12\sqrt{2}^2 = -20$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em

$]-\infty, -\sqrt{2}[$ e em $]\sqrt{2}, +\infty[$ e voltada para baixo em

$]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

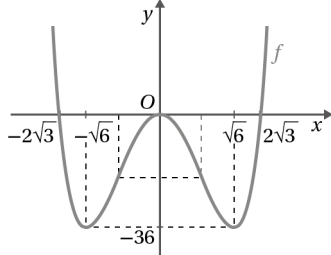
2.2. Derivadas

Os pontos $(-\sqrt{2}, -20)$ e $(\sqrt{2}, -20)$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

- Assintotas:

f é uma função polinomial pelo que o seu gráfico não tem assintotas.

- Gráfico e contradomínio:



$$D_f = [-36, +\infty[$$

Pág. 41

8.3. $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3}$

- Domínio e continuidade:

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua.

- Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2 + 3} = 0 \quad (\text{Equação impossível em } \mathbb{R})$$

f não tem zeros

- Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \frac{(2)'(x^2 + 3) - 2(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-4x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2 + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	\nearrow	$\frac{2}{3}$	\searrow
		Máx.	

$$f(0) = \frac{2}{0^2 + 3} = \frac{2}{3}$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.

Tem máximo relativo (e absoluto) igual a $\frac{2}{3}$ em $x = 0$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-4x}{(x^2 + 3)^2} \right)' \\ &= \frac{(-4x)'(x^2 + 3)^2 - (-4x)[(x^2 + 3)']}{[(x^2 + 3)^2]^2} \\ &= \frac{-4(x^2 + 3)^2 + 4x \cdot 2(x^2 + 3)(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^4} \\ &= \frac{(x^2 + 3)[-4(x^2 + 3) + 8x \cdot 2x]}{(x^2 + 3)^4} = \frac{12x^2 - 12}{(x^2 + 3)^4} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	\cup	$\frac{1}{2}$	\cap	$\frac{1}{2}$	\cup
		P.I.		P.I.	

$$f(-1) = \frac{2}{(-1)^2 + 3} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{2}{1^2 + 3} = \frac{1}{2}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e voltada para baixo em

$]-1, 1[$. Os pontos $(-1, \frac{1}{2})$ e $(1, \frac{1}{2})$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

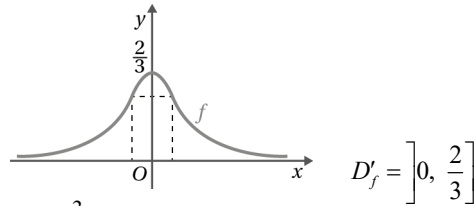
- Assintotas:

Verticais: O gráfico de f não tem assintotas verticais dado que é uma função contínua em \mathbb{R} .

Não verticais: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{2}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é uma assintota ao gráfico de f em $+\infty$ e em $-\infty$.

- Gráfico e contradomínio:



8.4. $f(x) = \frac{3-x}{x-1}$

- Domínio e continuidade:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ e } f \text{ é contínua}$$

- Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 3-x = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 3$$

- Monotonia e extremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3-x)'(x-1) - (3-x)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-(x-1) - (3-x)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Logo, f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$ e não tem extremos.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(-2)'(x-1)^2 - (-2)[(x-1)']^2}{[(x-1)^2]^2} \\ &= \frac{0 + 2 \cdot 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(x-1)^3} = 0 \quad (\text{Equação impossível em } \mathbb{R})$$

2.2. Derivadas

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-		+
f	\cap		\cup

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1[$, voltada para cima em $]1, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

- Assintotas:

$$\text{Verticais: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3-x}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

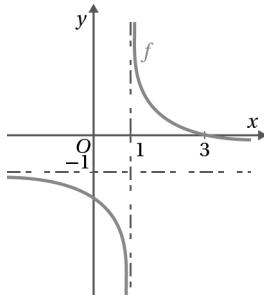
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x=1$ é uma assíntota ao gráfico de f .

$$\text{Não verticais: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

A reta de equação $y=-1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ e em $-\infty$.

- Gráfico e contradomínio:



$$D_f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Pág. 42

$$8.5. \quad f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$$

- Domínio e continuidade:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } f \text{ é contínua}$$

- Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

- Monotonia e extremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[(x-1)^2]' \times x - (x-1)^2 (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{2(x-1)(x-1)' \times x - (x-1)^2}{x^2} = \\ &= \frac{(x-1)[2x - (x-1)]}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f'	+	0	-		-	0	+
f	\nearrow	-4	\searrow		\searrow	0	\nearrow
		Máx.				Mín.	

$$f(-1) = \frac{(-1-1)^2}{-1} = -4$$

$$f(1) = 0$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, 1]$.

f tem um máximo relativo igual a -4 em $x=-1$ e um mínimo relativo igual a 0 em $x=1$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)' = \frac{(x^2-1)' \times x^2 - (x^2-1)(x^2)'}{(x^2)^2} = \\ &= \frac{2x \times x^2 - (x^2-1)2x}{x^4} = \frac{x(2x^2 - 2x^2 + 2)}{x^4} = \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = 0 \text{ (Equação impossível em } \mathbb{R} \text{)}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		+
f	\cap		\cup

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

- Assintotas:

$$\text{Verticais: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x=0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

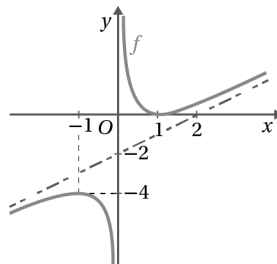
Não verticais:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x}{x} = -2 \end{aligned}$$

A reta de equação $y=x-2$ é uma assíntota do gráfico de f quando $x \rightarrow \pm\infty$.

- Gráfico e contradomínio:



$$D_f' =]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$$

$$8.6. \quad f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x}$$

- Domínio e continuidade:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

f é contínua

- Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2-4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \end{cases}$$

2.2. Derivadas

- Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \frac{(x-2)'(x^2-4x) - (x-2)(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} = \frac{x^2-4x - (x-2)(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = \frac{x^2-4x-2x^2+4x+4x-8}{(x^2-4x)^2} = \frac{-x^2+4x-8}{(x^2-4x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-8}{(x^2-4x)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+4x-8 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{-2} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
f'	-		-		-
f	↘		↘		↘

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$, em $]0, 4[$ e em $]4, +\infty[$ e não tem extremos.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \frac{(-x^2+4x-8)'}{(x^2-4x)^2} = \frac{(-2x+4)(x^2-4x)^2 - (-x^2+4x-8)[(x^2-4x)^2]'}{(x^2-4x)^4} = \frac{(-2x+4)(x^2-4x)^2 - (-x^2+4x-8) \cdot 2(x^2-4x)(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^4} = \frac{(x^2-4x)[(-2x+4)(x^2-4x) - 2(2x-4)(-x^2+4x-8)]}{(x^2-4x)^4} = \frac{(2x-4)(-x^2+4x+2x^2-8x+16)}{(x^2-4x)^3} = \frac{(2x-4)(x^2-4x+16)}{(x^2-4x)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-4)(x^2-4x+16)}{(x^2-4x)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x-4 = 0 \vee x^2-4x+16 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{4 \pm \sqrt{16-64}}{2} \Leftrightarrow x = 2$$

x		0		2		4	
f''	-		+	0	-		+
f	↖		↖	0	↖		↖
				P.I.			

$$f(2) = 0$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]2, 4[$ e voltada para cima em $]0, 2[$ e em $]4, +\infty[$.

O ponto $(2, 0)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f .

- Assíntotas:

$$\text{Verticais: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x^2-4x} = \frac{-2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x^2-4x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-2}{x^2-4x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-2}{x^2-4x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

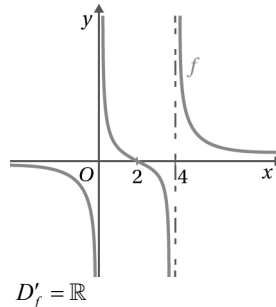
As retas de equações $x = 0$ e $x = 4$ são assíntotas ao gráfico de f .

Não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

- Gráfico e contradomínio:



Pág. 43

8.7. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

- Domínio e continuidade:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-4 \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

f é contínua. $\begin{cases} x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \\ \Leftrightarrow x=\pm 2 \end{cases}$

- Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Verificação:

$$f(2) = \sqrt{2^2-4} = 0$$

$$f(-2) = \sqrt{(-2)^2-4} = 0$$

Os zeros são -2 e 2 .

- Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)'}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

f' não tem zeros

x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
f'	-					+
f	↘	0		0		↗
		Min.		Min.		

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e

estritamente crescente em $[2, +\infty[$.

Tem um mínimo relativo (e absoluto) igual a 0 em $x = -2$ e em $x = 2$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \right)' = \frac{(x)' \sqrt{x^2-4} - x(\sqrt{x^2-4})'}{(\sqrt{x^2-4})^2} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 \times \sqrt{x^2 - 4} - x \frac{(x^2 - 4)'}{2\sqrt{x^2 - 4}}}{x^2 - 4} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 4} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}}}{x^2 - 4} \\ &= \frac{x^2 - 4 - x^2}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} \end{aligned}$$

$f''(x) < 0, \forall x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$
 O gráfico de f tem a concavidade volta para baixo em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$ e não tem ponto de inflexão.

- Assíntotas verticais:
 f não tem assíntotas verticais porque é uma função contínua em $D_f =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.
- Assíntotas não verticais:
 Quando $x \rightarrow -\infty$:

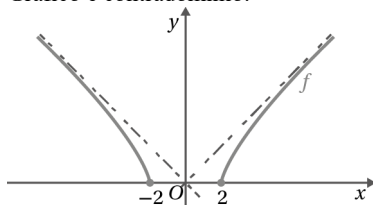
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = -1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4} + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} + x)(\sqrt{x^2 - 4} - x)}{\sqrt{x^2 - 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} - x} \\ &= \frac{-4}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.
 Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} \\ &= \frac{-4}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

- Gráfico e contradomínio:



$D_f' = [0, +\infty[$

8.8. $f(x) = x\sqrt{x+1}$

- Domínio e continuidade:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$
 f é contínua

- Zeros:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

Verificação:

$f(0) = 0\sqrt{0+1} = 0 ; f(-1) = -1\sqrt{-1+1} = 0$

- Monotonia e extremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \sqrt{x+1} + x(\sqrt{x+1})' = \sqrt{x+1} + x \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{2(x+1) + x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2x+2+x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow 3x+2 = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

x	-1		$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'		-	0	+
f	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗
	Máx.		Mín.	

$f(-1) = 0$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \sqrt{-\frac{2}{3}+1} = \frac{-2\sqrt{3}}{9}$

f é estritamente decrescente em $\left[-1, -\frac{2}{3}\right]$ e

estritamente crescente em $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

Tem um máximo relativo igual a 0 em $x = -1$ e um

mínimo relativo (e absoluto) igual a $\frac{-2\sqrt{3}}{9}$ em $x = -\frac{2}{3}$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}\right)' \\ &= \frac{(3x+2)' \times 2\sqrt{x+1} - (3x+2)(2\sqrt{x+1})'}{(2\sqrt{x+1})^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3 \times 2\sqrt{x+1} - (3x+2) \times 2 \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}}{4(x+1)} =$$

$$= \frac{6(x+1) - 3x - 2}{4(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow 3x+4 = 0 \vee x > -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \wedge x > -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

f'' não tem zeros.

2.2. Derivadas

$$f''(x) > 0, \forall x \in]-1, +\infty[$$

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-1, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

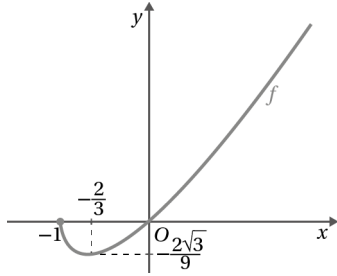
- Assíntotas:

Verticais: O gráfico de f não tem assíntotas verticais porque f é uma função contínua em $D_f =]-1, +\infty[$.

Não verticais: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+1}}{x} = +\infty$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

- Gráfico de contradomínio:



$$D'_f = \left[-\frac{2\sqrt{3}}{9}, +\infty \right[$$

Pág. 45

8.9. $f(x) = x|x+1|$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x \geq -1 \\ -x^2 - x & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

- Domínio e continuidade:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ e } f \text{ é contínua}$$

- Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x|x+1| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee |x+1| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

- Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x > -1 \\ -2x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Para $x > -1$:

$$f'(x) = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Para $x < -1$:

$$f'(x) = 0 \wedge x < -1 \Leftrightarrow -2x-1 = 0 \wedge x < -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \wedge x < -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Como f é contínua no ponto $x = -1$ é suficiente que a derivada mude de sinal nesse ponto para que exista aí um extremo, pelo que não é necessário verificar se existe $f'(-1)$.

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	$+$		$-$	0	$+$
f	\nearrow	0	\searrow	$-\frac{1}{4}$	\searrow
		Máx.		Mín.	

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} + 1 \right| = -\frac{1}{4}$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em

$$\left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[\text{ e estritamente decrescente em } \left[-1, -\frac{1}{2} \right].$$

f tem um máximo relativo igual a 0 em $x = -1$ e um

mínimo relativo igual a $-\frac{1}{4}$ em $x = -\frac{1}{2}$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > -1 \\ -2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-\infty, -1]$

Como f é contínua no ponto $x = -1$ e a segunda derivada muda aí de sinal, o ponto $(-1, 0)$ é um ponto de inflexão do gráfico do gráfico de f .

- Assíntotas:

Verticais: O gráfico de f não tem assíntotas verticais porque f é uma função contínua em \mathbb{R} .

Não verticais:

Quando $x \rightarrow +\infty$:

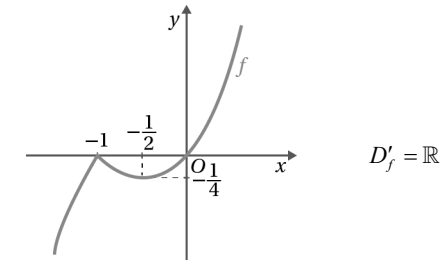
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$$

Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-1) = +\infty$$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

- Gráfico e contradomínio:



Pág. 46

8.10. $f(x) = \frac{x|x|}{x+1}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{-x^2}{x+1} & \text{se } x < 0 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

- Domínio e continuidade:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ e } f \text{ é contínua}$$

Zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x|x|}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee |x| = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = 0$$

- Monotonia e extremos:

Para $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

2.2. Derivadas

$$f'(x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Para $x < 0 \wedge x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{(-x^2)'(x+1) - (-x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{-2x(x+1) + x^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \wedge x < 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} = 0 \wedge x < 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(-x-2) = 0 \wedge x < 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = -2$$

Como f é contínua no ponto $x = 0$, é suficiente que a derivada mude de sinal nesse ponto para que exista aí um extremo, pelo que não é necessário verificar se existe $f'(0)$.

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$		$+$		$+$
f	\searrow	4	\nearrow		\nearrow	0	\nearrow
		Mín.					

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e

estritamente crescente em $[-2, -1[$ e em $]-1, +\infty[$.

Tem um mínimo relativo igual a 4 em $x = -2$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

Para $x > 0$:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \right)' =$$

$$= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x) \times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(x+1)[(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x)]}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - 2x^2 - 4x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$$

Para $x < 0 \wedge x \neq -1$:

$$f''(x) = \left(\frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} \right)' =$$

$$= \frac{(-x^2 - 2x)'(x+1)^2 - (-x^2 - 2x)[(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2} =$$

$$= \frac{(-2x-2)(x+1)^2 - (-x^2-2x) \times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(x+1)[(-2x-2)(x+1) - 2(-x^2-2x)]}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x - 2x - 2 + 2x^2 + 4x}{(x+1)^3} = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
f''	$+$		$-$		$+$
f	\cup		\cap	0	\cup
				P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em

$]-\infty, -1[$ e em $]0, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-1, 0[$.

Como f é contínua no ponto $x = 0$ e a segunda derivada muda aí de sinal, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f .

- Assíntotas:

$$\text{Verticais: } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x|x|}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x|x|}{x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Não verticais:

Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{x'} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

A reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$:

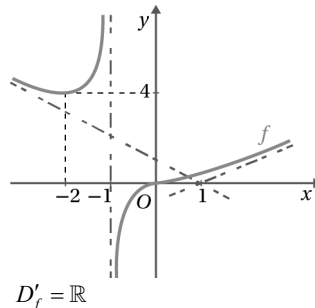
$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{x+1} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + x^2 + x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

A reta de equação $y = -x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

- Gráfico e contradomínio:



Pág. 47

$$8.11. f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} & \text{se } x \leq 1 \\ x - 2\sqrt{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- Domínio e continuidade:

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua, dado ser contínua para $x < 1$, para $x > 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$.

- Zeros:

$$\text{Para } x \leq 1: f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2.2. Derivadas

Para $x > 1$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = x \Leftrightarrow \\ &\Rightarrow 4(x-1) = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Verificação: $f(2) = 2 - 2\sqrt{2-1} = 2 - 2 = 0$

- Monotonia e extremos:

Para $x < 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x)'(1+x^2) - 2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \wedge x < 1 &\Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x < 1 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Para $x > 1$:

$$f'(x) = (x)' - 2(\sqrt{x-1})' = 1 - 2 \times \frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Verificação: $f'(2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1 - 1 = 0$

Como f é contínua no ponto $x = 1$, é suficiente que a derivada mude de sinal nesse ponto para que exista aí um extremo, pelo que não é necessário verificar se existe $f'(1)$.

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
f	\searrow	-1	\nearrow	1	\searrow	0	\nearrow
		Mín.		Máx.		Mín.	

$$f(-1) = \frac{2(-1)}{1+(-1)^2} = -1; f(1) = \frac{2 \times 1}{1+1^2} = 1; f(2) = 0$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, 2]$ e estritamente crescente em $[-1, 1]$ e em $[2, +\infty[$.

f tem um mínimo relativo (e absoluto) igual a -1 em $x = -1$, um mínimo relativo igual a 0 em $x = 2$ e um máximo relativo igual a 1 em $x = 1$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

Para $x < 1$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \right)' = \\ &= \frac{(2-2x^2)'(1+x^2)^2 - (2-2x^2)[(1+x^2)^2]'}{[(1+x^2)^2]^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-4x(1+x^2)^2 - (2-2x^2) \times 2(1+x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^4} = \\ &= \frac{(1+x^2)[-4x(1+x^2) - 2(2x)(2-2x^2)]}{(1+x^2)^4} = \\ &= \frac{-4x - 4x^3 - 8x + 8x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{4x^3 - 12x}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow \frac{4x^3 - 12x}{(1+x^2)^3} = 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x(x^2 - 3) = 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}) \wedge x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = 0$$

Para $x > 1$:

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)' = 0 - \frac{(1)'\sqrt{x-1} - 1(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2} =$$

$$= \frac{0 - \frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in]1, +\infty[$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
f	\cap	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	\cup	0	\cap	1	\cup

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})}{1+(-\sqrt{3})^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; f(0) = 0; f(1) = 1$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em

$]-\infty, -\sqrt{3}[$ e em $]0, 1[$ e voltada para cima em

$]-\sqrt{3}, 0[$ e em $]1, +\infty[$. Como f é contínua no ponto

$x = 1$ e a segunda derivada muda aí de sinal, o ponto $(1, 1)$ é um ponto de inflexão do gráfico do gráfico de f .

Os pontos $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$ são pontos

de inflexão do gráfico de f .

- Assíntotas:

Verticais: $f(x)$ não tem assíntotas verticais porque é uma função contínua em \mathbb{R} .

Não verticais:

Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$

2.2. Derivadas

Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{x} =$$

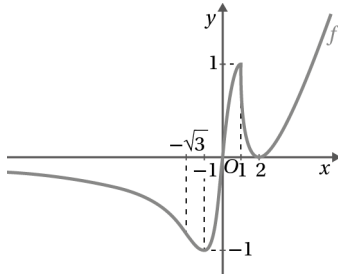
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{2\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}}{x} \right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= 1 - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x} = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 1 - 2 \times 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x-1} - x) = -\infty$$

O gráfico de f não tem assíntota quando $x \rightarrow +\infty$.

- Gráfico e contradomínio:



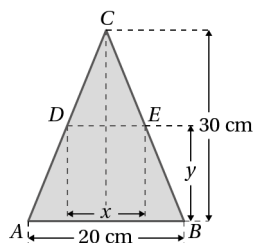
$$D_f' = [-1, +\infty[$$

Pág. 48

- 9.1. Sejam x e y , respectivamente, o comprimento do lado da base e altura do prisma.

$$0 < x < 20 \wedge 0 < y < 30$$

Os triângulos $[ABC]$ e $[DEC]$ são semelhantes.



$$\frac{30-y}{30} = \frac{x}{20} \Leftrightarrow 30-y = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow y = 30 - \frac{3}{2}x$$

$$V(x) = x^2 \times y = x^2 \left(30 - \frac{3}{2}x \right) = 30x^2 - \frac{3}{2}x^3$$

$$V'(x) = 60x - \frac{9}{2}x^2$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 60x - \frac{9}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x \left(60 - \frac{9}{2}x \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{120}{9} = \frac{40}{3}$$

Como $0 < x < 20$, $x = \frac{40}{3}$.

x	0		$\frac{40}{3}$		20
V'		+	0	-	
V		\nearrow	$\frac{16\,000}{9}$	\searrow	
			Máx.		

$$V\left(\frac{40}{3}\right) = 30\left(\frac{40}{3}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{40}{3}\right)^3 = \frac{16\,000}{9}$$

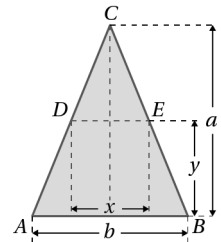
$$x = \frac{40}{3}. \text{ Então } y = 30 - \frac{3}{2} \times \frac{40}{3} = 10$$

O prisma do volume máximo tem lado da base igual a $\frac{40}{3}$ cm e altura 10 cm.

- 9.2. Sejam x e y , respectivamente, o comprimento do lado da base e altura do prisma.

$$0 < x < a \wedge 0 < y < a$$

Os triângulos $[ABC]$ e $[DEC]$ são semelhantes.



$$\frac{a-y}{a} = \frac{x}{b} \Leftrightarrow a-y = \frac{a}{b}x \Leftrightarrow y = a - \frac{a}{b}x$$

$$V(x) = x^2 \times y = x^2 \left(a - \frac{a}{b}x \right) = ax^2 - \frac{a}{b}x^3$$

$$V'(x) = 2ax - \frac{3a}{b}x^2$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax - \frac{3a}{b}x^2 = 0 \Leftrightarrow ax \left(2 - \frac{3}{b}x \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax = 0 \vee 2 - \frac{3}{b}x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2b}{3}$$

Como $0 < x < a$, $x = \frac{2b}{3}$.

x	0		$\frac{2b}{3}$		b
V'		+	0	-	
V		\nearrow	$\frac{4ab^2}{9}$	\searrow	
			Máx.		

$$V\left(\frac{2b}{3}\right) = a\left(\frac{2b}{3}\right)^2 - \frac{a}{b}\left(\frac{2b}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}ab^2$$

$$x = \frac{2b}{3}$$

$$y = a - \frac{a}{b} \times \frac{2b}{3} = \frac{a}{3}$$

O prisma de volume máximo tem lado da base igual a $\frac{2b}{3}$

e altura $\frac{a}{3}$.

Pág. 49

10. Seja $\overline{BP} = x$, com $0 \leq x \leq 1000$.

$$\text{Então, } \overline{AP} = \sqrt{500^2 + x^2} \Leftrightarrow \overline{AP} = \sqrt{250\,000 + x^2}$$

O custo total da instalação é dado por:

$$C = 30 \times \overline{AP} + 18\overline{PC}$$

Como $\overline{AP} = \sqrt{250\,000 + x^2}$ e $\overline{PC} = 1000 - x$, então, em função de x , o custo da instalação é dado por:

$$C(x) = 30\sqrt{250\,000 + x^2} + 18(1000 - x)$$

$$C'(x) = 30 \frac{(250\,000 + x^2)'}{2\sqrt{250\,000 + x^2}} + 18(-1) =$$

$$= 30 \times \frac{2x}{2\sqrt{250\,000 + x^2}} - 18 =$$

$$= \frac{30x - 18\sqrt{250\,000 + x^2}}{\sqrt{250\,000 + x^2}}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 30x - 18\sqrt{250\,000 + x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{250\,000 + x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 9(250\,000 + x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 140\,625 \Leftrightarrow x = 375 \quad (0 \leq x \leq 1000)$$

x	0		375		1000
C''	-	-	0	+	+
C		\searrow	30 000	\nearrow	
			Min.		

$C(375) = 30\sqrt{250\,000 + 375^2} + 18(1000 - 375) = 30\,000$
 O custo mínimo é de 30 000 €, devendo o ponto P ficar a 375 m do ponto B para obter esse custo.

Pág. 51

11.1. $f(x) = x + \sqrt{x}$

$$f'(x) = (x)' + (\sqrt{x})' = 1 + \frac{(x)'}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = 0 + \frac{(1)'2\sqrt{x} - 1 \times (2\sqrt{x})'}{(2\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{0 - 2 \times \frac{(x)'}{2\sqrt{x}}}{4x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

11.2. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{(x)'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(-1)'(x-1)^2 - (-1)[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2} =$$

$$= \frac{0 + 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

11.3. $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

$$f'(x) = (x^2)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)' = 2 + \frac{(1)'x^2 - 1(x^2)'}{(x^2)^2} = 2 + \frac{0 - 2x}{x^4} =$$

$$= 2 - \frac{2x}{x^4} = 2 - \frac{2}{x^3}$$

11.4. $f(x) = x^3(1-x)^2$

$$f'(x) = (x^3)'(1-x)^2 + x^3 \times 2(1-x)(1-x)' =$$

$$= 3x^2(1-x)^2 + x^3 \times 2(1-x)(1-x)' =$$

$$= x^2(1-x)[3(1-x) + 2x(-1)] = (x^2 - x^3)(3 - 5x)$$

$$f''(x) = [(x^2 - x^3)(3 - 5x)]' =$$

$$= (x^2 - x^3)'(3 - 5x) + (x^2 - x^3)(3 - 5x)' =$$

$$= (2x - 3x^2)(3 - 5x) + (x^2 - x^3)(-5) =$$

$$= 6x - 19x^2 + 15x^3 - 5x^2 + 5x^3 = 20x^3 - 24x^2 + 6x$$

11.5. $f(x) = (2x-1)^3$

$$f'(x) = 3(2x-1)^2(2x-1)' = 3(2x-1)^2 \times 2 = 6(2x-1)^2$$

$$f''(x) = [6(2x-1)^2]' = 6 \times 2(2x-1)(2x-1)' =$$

$$= 12(2x-1) \times 2 = 48x - 24$$

11.6. $f(x) = \frac{x}{2(1-x)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x)' \times 2(1-x)^2 - x[2(1-x)^2]'}{[2(1-x)^2]^2} =$$

$$= \frac{2(1-x)^2 - x[2 \times 2(1-x)(1-x)']}{4(1-x)^4} =$$

$$= \frac{2(1-x)[1-x+2x]}{4(1-x)^4} = \frac{x+1}{2(1-x)^3}$$

$$f''(x) = \left(\frac{x+1}{2(1-x)^3}\right)' =$$

$$= \frac{(x+1)' \times 2(1-x)^3 - (x+1)[2(1-x)^3]'}{[2(1-x)^3]^2} =$$

$$= \frac{2(1-x)^3 - (x+1) \times 2 \times 3(1-x)^2(1-x)'}{4(1-x)^6} =$$

$$= \frac{2(1-x)^2[1-x-3(x+1)(-1)]}{4(1-x)^6} = \frac{1-x+3x+3}{2(1-x)^4} =$$

$$= \frac{2x+4}{2(x-1)^4} = \frac{2(x+2)}{2(x-1)^4} = \frac{x+2}{(x-1)^4}$$

11.7. $f(x) = \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^2$

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{2x}\right)\left(1 - \frac{1}{2x}\right)' =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2x}\right)\left(-\frac{(1)'2x - 1(2x)'}{(2x)^2}\right) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2x}\right)\left(\frac{2}{4x^2}\right) = \frac{2x-1}{2x} \times \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{2x^3}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-1)'(2x^3) - (2x-1)(2x^3)'}{(2x^3)^2} =$$

$$= \frac{2(2x^3) - (2x-1) \times 6x^2}{4x^6} =$$

$$= \frac{2x^2(2x-6x+3)}{4x^6} = \frac{3-4x}{2x^4}$$

12.1. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 1$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$$

$$f''(x) = (-3x^2 + 6x - 1)' = -6x + 6$$

$$D_{f''} = D_f = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

2.2. Derivadas

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	+	0	-
f	∪	2	∩
		P.I.	

$$f(1) = -1^3 + 3 \times 1^2 - 1 + 1 = 2$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e voltada para baixo em $]1, +\infty[$.

O ponto $(1, 2)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f .

$$12.2. \quad f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{6} + \frac{x}{3} + 1 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}\right)' = x^3 + 2x^2 \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f''	-	0	+	0
f	∩		∪	∪
		P.I.		

$$f(-2) = \frac{(-2)^5}{20} + \frac{(-2)^4}{6} + \frac{(-2)}{3} + 1 = \frac{7}{5}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e voltada para cima em $]-2, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $\left(-2, \frac{7}{5}\right)$ é um ponto de inflexão.

$$12.3. \quad f(x) = x^4 + x^2 - x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 1$$

$$f''(x) = (4x^3 + 2x - 1)' = 12x^2 + 2 \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, pelo que, não tem pontos de inflexão.

$$12.4. \quad f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f'(x) = -\frac{(1)'(x+1) - 1(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1)'(x+1)^2 - 1[(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2} =$$

$$= \frac{0 - 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} = \frac{-2(x+1)'}{(x+1)^4} = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	+		-
f	∪		∩

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$ e voltada para baixo em $]-1, +\infty[$.

Não tem pontos de inflexão.

$$12.5. \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3}; \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'(x^2+3) - (x^2+1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+3) - 2x(x^2+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{4x}{(x^2+3)^2}\right)' = \frac{(4x)'(x^2+3)^2 - 4x[(x^2+3)^2]'}{[(x^2+3)^2]^2} =$$

$$= \frac{4(x^2+3)^2 - 4x \times 2(x^2+3)(x^2+3)'}{(x^2+3)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+3)[4(x^2+3) - 8x+2x]}{(x^2+3)^4} = \frac{12-12x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12-12x^2}{(x^2+3)^3} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f''	-	0	+	0
f	∩	$\frac{1}{2}$	∪	$\frac{1}{2}$
		P.I.		P.I.

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{(-1)^2+3} = \frac{1}{2}; \quad f(1) = \frac{1^2+1}{1^2+3} = \frac{1}{2}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e voltada para cima em $]-1, 1[$.

Os pontos de coordenadas $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ são pontos de inflexão.

$$12.6. \quad f(x) = \frac{x}{x^2-1}; \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{1(x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(-x^2-1)'(x^2-1)^2 - (-x^2-1)[(x^2-1)^2]'}{[(x^2-1)^2]^2} =$$

$$= \frac{-2x(x^2-1)^2 - (-x^2-1) \times 2(x^2-1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-1)[-2x(x^2-1) - 2(-x^2-1) \times 2x]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x(-x^2+1+2x^2+2)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

2.2. Derivadas

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f''	$-$		$+$	0	$-$		$+$
f	\cap		\cup	0	\cap		\cup
				P.I.			

$$f(0) = \frac{0}{0^2-1} = 0$$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]0, 1[$ e voltada para cima em $]-1, 0[$ e em $]1, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $(0, 0)$ é um ponto de inflexão.

12.7. $f(x) = x\sqrt{x-3}$

$$D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \geq 0\} = [3, +\infty[$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \sqrt{x-3} + x(\sqrt{x-3})' = \sqrt{x-3} + x \times \frac{(x-3)'}{2\sqrt{x-3}} = \\ &= \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{2(x-3)+x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{3x-6}{2\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{3x-6}{2\sqrt{x-3}} \right)' = \\ &= \frac{(3x-6)' \times 2\sqrt{x-3} - (3x-6)(2\sqrt{x-3})'}{(2\sqrt{x-3})^2} = \\ &= \frac{3 \times 2\sqrt{x-3} - (3x-6) \times \frac{2(x-3)'}{2\sqrt{x-3}}}{4(x-3)} = \\ &= \frac{6(x-3) - (3x-6)}{4(x-3)\sqrt{x-3}} = \frac{3x-12}{4(x-3)\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

$$D_{f''} =]3, +\infty[$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-12}{4(x-3)\sqrt{x-3}} = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

x	3		4	$+\infty$
f''		$-$	0	$+$
f	0	\cap	4	\cup
			P.I.	

$$f(4) = 4\sqrt{4-3} = 4$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]3, 4[$ e voltada para cima em $]4, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $(4, 4)$ é um ponto de inflexão.

12.8. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)' \sqrt{x-3} - x(\sqrt{x-3})'}{(\sqrt{x-3})^2} = \frac{\sqrt{x-3} - x \times \frac{(x-3)'}{2\sqrt{x-3}}}{x-3} \\ &= \frac{2(x-3) - x}{2\sqrt{x-3}} = \\ &= \frac{x-6}{2(x-3)\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x-6}{2(x-3)\sqrt{x-3}} \right)' = \\ &= \frac{(x-6)' \times 2(x-3)\sqrt{x-3} - (x-6)[2(x-3)\sqrt{x-3}]'}{(2(x-3)\sqrt{x-3})^2} = \\ &= \frac{2(x-3)\sqrt{x-3} - (x-6) \times 2 \left[\sqrt{x-3} + (x-3) \times \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \right]}{4(x-3)^2(x-3)} = \\ &= \frac{2(x-3)\sqrt{x-3} - 2(x-6) \left[\frac{2(x-3)+x-3}{2\sqrt{x-3}} \right]}{4(x-3)^3} = \\ &= \frac{2(x-3)(x-3) - (x-6)(3x-9)}{4(x-3)^3\sqrt{x-3}} = \\ &= \frac{(x-3)[2(x-3) - 3(x-6)]}{4(x-3)^3\sqrt{x-3}} = \frac{-x+12}{4(x-3)^2\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

$$D_{f''} =]3, +\infty[$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+12}{4(x-3)^2\sqrt{x-3}} = 0 \Leftrightarrow x = 12$$

x	3		12	$+\infty$
f''		$+$	0	$-$
f		\cup	4	\cap
			P.I.	

$$f(12) = \frac{12}{\sqrt{12-3}} = 4$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]3, 12[$ e voltada para baixo em $]12, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $(12, 4)$ é um ponto de inflexão.

12.9. $f(x) = \frac{x}{|x-3|}$; $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-3} & \text{se } x > 3 \\ \frac{x}{3-x} & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Para $x > 3$:

$$f'(x) = \frac{(x)'(x-3) - x(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-3}{(x-3)^2} \right)' = \frac{(-3)(x-3)^2 - (-3)[(x-3)^2]'}{[(x-3)^2]^2} = \\ &= \frac{3 \times 2(x-3)(x-3)'}{(x-3)^4} = \frac{6}{(x-3)^3} > 0, \forall x \in]3, +\infty[\end{aligned}$$

Para $x < 3$:

$$f'(x) = \left(-\frac{x}{x-3} \right)' = -\left(\frac{x}{x-3} \right)' = -\left(\frac{-3}{(x-3)^2} \right)$$

$$f''(x) = \left[-\left(\frac{-3}{(x-3)^2} \right) \right]' = -\left(\frac{6}{(x-3)^3} \right)' > 0, \forall x \in]-\infty, 3[$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 3[$ e em $]3, +\infty[$.

Não tem pontos de inflexão.

13.1. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 100$

$f'(x) = 6x^2 - 30x$

$f''(x) = (6x^2 - 30x)' = 12x - 30$

$D_{f'} = D_{f''} = D_f = \mathbb{R}$

Logo, f é duas vezes diferenciável em \mathbb{R} .

- Zeros da primeira derivada (pontos críticos de f):

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$

Os pontos críticos são 0 e 5.

- Sinal da segunda derivada nos pontos críticos:

$f''(0) = 12 \times 0 - 30 = -30 < 0$

Como $f''(0) < 0$, f tem um máximo local em 0.

$f(0) = 2 \times 0^3 - 15 \times 0^2 + 100 = 100$

$f''(5) = 12 \times 5 - 30 = 30 > 0$

Como $f''(5) > 0$, f tem um mínimo local em 5.

$f(5) = 2 \times 5^3 - 15 \times 5^2 + 100 = -25$

Conclusão: f admite um máximo relativo igual a 100 para $x = 0$ e um mínimo relativo igual a -25 para $x = 5$.

13.2. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f''(x) = (4x^3 - 12x^2)' = 12x^2 - 24x$

$D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$

Logo, f é duas vezes diferenciável em \mathbb{R} .

- Zeros da primeira derivada (pontos críticos de f):

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Os pontos críticos são 0 e 3.

- Sinal da segunda derivada nos pontos críticos:

$f''(0) = 12 \times 0^2 - 24 \times 0 = 0$

Como $f''(0) = 0$, a segunda derivada nada nos diz sobre a existência de extremos no ponto $x = 0$.

No entanto, atendendo ao sinal de f' , podemos concluir que f é estritamente decrescente em $]-\infty, 3[$ e estritamente crescente em $]3, +\infty[$.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
f'	-	0	-	+
f	\searrow		\searrow	\nearrow
			Mín.	

$f(3) = 3^4 - 4 \times 3^3 + 5 = -22$

Conclusão: f admite um mínimo relativo igual a -22 para $x = 3$.

13.3. $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{2}{2x-1}$

$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{(2)'(2x-1) - 2(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{(2x-1)^2}$

$f''(x) = \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{(2x-1)^2} \right)' =$
 $= 0 - \frac{(4)'(2x-1)^2 - 4[(2x-1)']^2}{[(2x-1)^2]^2} =$
 $= \frac{4 \times 2(2x-1)(2x-1)' - 4 \times 2}{(2x-1)^4} = \frac{16}{(2x-1)^3}$

$D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Logo, f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

- Zeros da primeira derivada (pontos críticos de f):

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{4}{(2x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 - 16 = 0 \wedge x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 16 \wedge x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1 = 4 \vee 2x-1 = -4 \wedge x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$

Os pontos críticos são $-\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$.

- Sinal da segunda derivada nos pontos críticos:

$f''\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{16}{\left(2\left(-\frac{3}{2}\right)-1\right)^3} = -\frac{1}{4} < 0$

Como $f''\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$, f tem um máximo local em $-\frac{3}{2}$.

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2}}{4} + \frac{2}{2\left(-\frac{3}{2}\right)-1} = -\frac{7}{8}$

$f''\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{16}{\left(2\left(\frac{5}{2}\right)-1\right)^3} = \frac{1}{4} > 0$

Como $f''\left(\frac{5}{2}\right) > 0$, f tem um mínimo local em $x = \frac{5}{2}$.

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{4} + \frac{2}{2\left(\frac{5}{2}\right)-1} = \frac{9}{8}$

Conclusão: f admite um máximo relativo igual a $-\frac{7}{8}$

para $x = -\frac{3}{2}$ e um mínimo relativo igual a $\frac{9}{8}$ para $x = \frac{5}{2}$.

2.2. Derivadas

13.4. $f(x) = \sqrt{4x-1} + 3 - x$; $D_f = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$

$$f'(x) = \frac{(4x-1)'}{2\sqrt{4x-1}} - 1 = \frac{4}{2\sqrt{4x-1}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{4x-1}} - 1\right)' = \frac{(2)'\sqrt{4x-1} - 2(\sqrt{4x-1})'}{(\sqrt{4x-1})^2} - 0 =$$

$$= \frac{0 - 2 \times \frac{(4x-1)'}{2\sqrt{4x-1}}}{4x-1} = \frac{-4}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$$

f é duas vezes diferenciável em $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

• Zeros da primeira derivada (pontos críticos de f):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{4x-1}}{\sqrt{4x-1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{4x-1} = 0 \wedge x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-1} = 2 \wedge x > \frac{1}{4} \Rightarrow 4x-1 = 4 \wedge x > \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Verificação: $f'\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{4 \times \frac{5}{4} - 1}} - 1 = 1 - 1 = 0$

O ponto crítico é $\frac{5}{4}$.

• Sinal da segunda derivada no ponto crítico:

$$f''\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{-4}{\left(4 \times \frac{5}{4} - 1\right)\sqrt{4 \times \frac{5}{4} - 1}} = -\frac{1}{2} < 0$$

Como $f''\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, f tem um máximo local em $\frac{5}{4}$.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \sqrt{4 \times \frac{5}{4} - 1} + 3 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$$

• Atendendo ao sinal de f' , podemos concluir que f é estritamente crescente em $\left]\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right[$ e estritamente

decrecente em $\left]\frac{5}{4}, +\infty\right[$.

x	$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{4}$	$+\infty$
f'		+	0	-
f	$\frac{11}{4}$	\nearrow	$\frac{15}{4}$	\searrow

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{4 \times \frac{1}{4} - 1} + 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

Logo, f admite um mínimo local igual a $\frac{11}{4}$ para $x = \frac{1}{4}$.

Conclusão: f admite um mínimo relativo igual a $\frac{11}{4}$ para

$x = \frac{1}{4}$ e um máximo relativo igual a $\frac{15}{4}$ para $x = \frac{5}{4}$.

14.1. $h(0) = -4,9 \times 10^2 + 245 \times 0 + 37,5 = 37,5$

$$h(10) = -4,9 \times 10^2 + 245 \times 10 + 37,5 = 1997,5$$

$$\text{Velocidade média em } [0, 10] = \frac{h(10) - h(0)}{10 - 0} =$$

$$= \frac{1997,5 - 37,5}{10} = 196$$

$$\frac{196 \times 3600}{1000} = 705,6$$

A velocidade média nos primeiros 10 segundos foi de 705,6 km/h.

14.2. $h'(t) = -9,8t + 245$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 245 = 0 \Leftrightarrow t = 25$$

$$h''(t) = (-9,8t + 245)' = -9,8$$

$$h''(25) = -9,8 < 0$$

$h(t)$ tem um máximo em $t = 25$

$$h(25) = -4,9 \times 25^2 + 245 \times 25 + 37,5 = 3100$$

A altura máxima atingida pelo corpo foi de 3100 m.

14.3. $h'(20) = -9,8 \times 20 + 245 = 49$

$$h''(20) = -9,8$$

A velocidade do corpo 5 segundos antes de atingir a altura máxima foi de 49 m/s e a aceleração nesse instante foi de $-9,8 \text{ m/s}^2$.

14.4. $h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 245t + 37,5 = 0 \Rightarrow t \approx 50,2$

O corpo esteve no ar cerca de 50,2 segundos.

15. $p(t) = 15t^2 - t^3$

15.1. $p(5) = 15 \times 5^2 - 5^3 = 250$

$$p(10) = 15 \times 10^2 - 10^3 = 500$$

$$\text{Velocidade média em } [5, 10] = \frac{p(10) - p(5)}{10 - 5} =$$

$$= \frac{500 - 250}{5} = 50$$

A velocidade média da partícula no intervalo $[5, 10]$ foi de 50 m/s.

15.2. $p'(t) = 30t - 3t^2$

$$p'(0) = 30 \times 0 - 3 \times 0^2 = 0; \quad p'(2) = 30 \times 2 - 3 \times 2^2 = 48$$

$$\text{Aceleração média em } [0, 2] = \frac{p'(2) - p'(0)}{2 - 0} =$$

$$= \frac{48 - 0}{2} = 24$$

A aceleração média da partícula no intervalo $[0, 2]$ foi de 24 m/s^2 .

15.3. $p''(t) = (30t - 3t^2)' = 30 - 6t$

$$p''(t) = 0 \Leftrightarrow 30 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 5$$

t	0		5	
p''		+	0	-
p		\nearrow	75	\searrow

$$p'(5) = 30 \times 5 - 3 \times 5^2 = 75$$

A velocidade máxima atingida pela partícula nos primeiros 5 segundos foi de 75 m/s. Nesse instante a aceleração da partícula foi 0 m/s^2 .

15.4. $p'(t) = 0 \Leftrightarrow 30t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow 3t(10 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 10$

t	0		10	
p'	0	+	0	-
p	0	\nearrow	500	\searrow

2.2. Derivadas

$$p(10) = 15 \times 10^2 - 10^3 = 500$$

A distância máxima da partícula à origem foi de 500 m.

16.
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2}$$

• Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

• Continuidade: f é contínua

• Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 16)'(x + 2) - (x^2 + 2x + 16)(x + 2)'}{(x + 2)^2} = \frac{(2x + 2)(x + 2) - (x^2 + 2x + 16)}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 12}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x - 12}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	-6		-2		2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	\nearrow	-10	\searrow		\searrow	6	\nearrow
		Máx.					

$$f(-6) = \frac{(-6)^2 + 2(-6) + 16}{-6 + 2} = -10; \quad f(2) = \frac{2^2 + 2 \times 2 + 16}{2 + 2} = 6$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -6]$ e em $[2, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-6, -2[$ e em $]-2, 2]$.

Tem um máximo relativo igual a -10 para $x = -6$ e um mínimo relativo igual a 6 para $x = 2$.

• Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 + 4x - 12}{(x + 2)^2} \right)' = \frac{(x^2 + 4x - 12)'(x + 2)^2 - (x^2 + 4x - 12)[(x + 2)^2]'}{[(x + 2)^2]^2} = \frac{(2x + 4)(x + 2)^2 - (x^2 + 4x - 12) \times 2(x + 2)(x + 2)'}{(x + 2)^4} = \frac{(x + 2)[(2x + 4)(x + 2) - 2(x^2 + 4x - 12)]}{(x + 2)^4} = \frac{32}{(x + 2)^3}$$

$$f''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f	\cap		\cup

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e voltada para cima em $]-2, +\infty[$.

Não tem pontos de inflexão.

• Assíntotas ao gráfico:

Verticais: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2} = \frac{16}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2} = \frac{16}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota do gráfico de f .

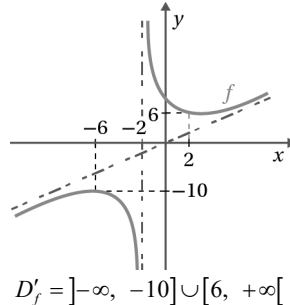
Não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 16}{x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 16}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 16 - x^2 - 2x}{x + 2} = \frac{16}{\pm\infty} = 0$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$

• Gráfico e contradomínio:



Pág. 52

17.1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 1}{x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1 - 0 + \sqrt{0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

f é contínua em $x = 0$ porque existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

f é contínua em $]-\infty, 0[$ por ser definida nesse intervalo por uma função racional e é contínua em $]0, +\infty[$ porque, nesse intervalo, é a soma de funções contínuas. Logo, f é contínua.

17.2. $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x + \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = -1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = -1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

f não é diferenciável em $x = 0$.

17.3. Para $x > 0$: $f'(x) = (1 + x + \sqrt{x})' = 0 - 1 + \frac{(x)'}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$

Para $x < 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x - 1}{x - 1} \right)' = \frac{(2x - 1)'(x - 1) - (2x - 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{2(x - 1) - (2x - 1)}{(x - 1)^2} = -\frac{1}{(x - 1)^2}$$

$$f': \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

17.4. Para $x > 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

2.2. Derivadas

Verificação: $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} - 1 = 0$

Para $x < 0$: $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
f'	-		+	0	-
f	\searrow	1	\nearrow	$\frac{5}{4}$	\searrow
		Mín.		Máx.	

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}; f(0) = 1$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $\left[\frac{1}{4}, +\infty[$

e estritamente crescente em $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

f tem um mínimo relativo igual a 1 para $x = 0$ e um máximo relativo igual a $\frac{5}{4}$ para $x = \frac{1}{4}$.

17.5. Seja a a abscissa do ponto do gráfico onde a t reta é tangente.

$m = f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} - 1$

$t: y = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} - 1\right)x + 2$

$f(a) = 1 - a + \sqrt{a}$

O ponto $(a, 1 - a + \sqrt{a})$ é um ponto da reta t .

$1 - a + \sqrt{a} = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} - 1\right) \times a + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - a + \sqrt{a} = \frac{a}{2\sqrt{a}} - a + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{a} + 2a = a + 4\sqrt{a} \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 2\sqrt{a} \Rightarrow a^2 = 4a \Leftrightarrow a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(a - 4) = 0 \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} a = 4$

Verificação: $4 = 2\sqrt{4} \Leftrightarrow 4 = 4$

$m = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x + 2$ é a equação da reta tangente.

17.6. Para $x > 0$:

$f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)' = \frac{(1)'(2\sqrt{x}) - 1(2\sqrt{x})'}{(2\sqrt{x})^2} =$

$= \frac{-\cancel{2} \times (x)'}{\cancel{2}\sqrt{x}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in]0, +\infty[$

Para $x < 0$:

$f''(x) = \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)' = -\frac{(1)'(x-1)^2 - 1[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2} =$

$= +\frac{2(x-1)(x+1)'}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3} < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

O gráfico não tem pontos de inflexão.

17.7. Assíntotas verticais: O gráfico de f não tem assíntotas verticais porque f é contínua em \mathbb{R} .

Assíntotas não verticais:

Quando $x \rightarrow -\infty$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$

A reta de equação $y = 2$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$

Quando $x \rightarrow +\infty$:

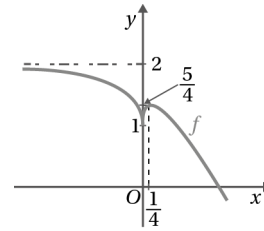
$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{x\sqrt{x}} = -1 + \frac{1}{+\infty} = -1$

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - x + \sqrt{x} + x] = 1 + \infty = +\infty$

O gráfico de f não tem assíntota quando $x \rightarrow +\infty$.

17.8.



17.9. $D_f' =]-\infty, 2[$

18. $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \neq 0$

18.1. $f'(x) = 2x + \frac{(x)'x - k(x)'}{x^2} = 2x - \frac{k}{x^2}$

$f''(x) = \left(2x - \frac{k}{x^2}\right)' = 2 - \frac{(k)'x^2 - k(x^2)'}{(x^2)^2} =$
 $= 2 + \frac{k \times 2x}{x^4} = 2 + \frac{2k}{x^3}$

f' é duas vezes diferenciável.

$f'(3) = 0 \Leftrightarrow 2 \times 3 - \frac{k}{3^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{9} = 6 \Leftrightarrow k = 54$

Para $k = 54, f''(3) = 2 + \frac{2 \times 54}{3^3} = 6 > 0$.

Logo, f tem um mínimo para $x = 3$ se $k = 54$.

18.2. $f''(2) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{2k}{2^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{4} = -2 \Leftrightarrow k = -8$

Para $k = -8, f''(x) = 2 + \frac{-16}{x^3} = \frac{2x^3 - 16}{x^3}$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$2x^3 - 16$	-	-	0	+
x^3	-	0	+	+
f''	+	-	0	+
f	\cup	\cap	P.I.	\cup

O ponto de abscissa 2 é um ponto de inflexão do gráfico de f se $k = -8$.

18.3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{k}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - k}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x^3 - k = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{k}{2}}$ ($x \neq 0$, porque $k \neq 0$)

$f''\left(\sqrt[3]{\frac{k}{2}}\right) = 2 + \frac{2k}{\left(\sqrt[3]{\frac{k}{2}}\right)^3} = 2 + \frac{2k}{\frac{k}{2}} = 2 + \frac{4k}{k} = 6 > 0$

$\sqrt[3]{\frac{k}{2}}$ é o único zero de f' e $f''\left(\sqrt[3]{\frac{k}{2}}\right) > 0$. Como f é duas

vezes diferenciável em $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos concluir que qualquer que seja o valor de k , f não tem máximos.

19.1. A circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$ tem como equação:

$x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2 - x^2}$

Como $y \geq 0$, $y = \sqrt{2 - x^2}$.

$\overline{PS} = \sqrt{2 - x^2}$; $\overline{RS} = 2x$

Então, $A = \overline{PS} \times \overline{RS} = 2x\sqrt{2 - x^2}$.

19.2. $A'(x) = (2x)' \sqrt{2 - x^2} + 2x(\sqrt{2 - x^2})'$
 $= 2\sqrt{2 - x^2} + 2x \times \frac{(2 - x^2)'}{2\sqrt{2 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{2 - x^2}}$
 $= \frac{4 - 4x^2}{\sqrt{2 - x^2}}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x^2 = 0 \wedge 0 < x \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge 0 < x \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$\sqrt{2}$
A'		+	0	-	
A		\nearrow		\searrow	

Máx.

A área é máxima para $x = 1$.

$y = \sqrt{2 - 1^2} = \sqrt{1} = 1$

$P(1, 1)$

20. $f''(x) = x(x+1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
f''	+	0	-	0	+
f	\cup	$f(-1)$	\cap	$f(0)$	\cup
		P.I.		P.I.	

Resposta: (D)

Pág. 53

21. A função f , duas vezes diferenciável em $]0, 2[$, é estritamente decrescente e o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo neste intervalo. Logo, $\forall x \in]0, 2[$, $f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$ pelo que $\forall x \in]0, 2[$, $f'(x) \times f''(x) > 0$

Resposta: (D)

22. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

A segunda derivada tem cinco zeros: $-\sqrt{2}, 0, 1, \sqrt{2}$ e 2

Como $(x-2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, f'' não muda de sinal no ponto $x = 2$ apenas mudando nos restantes quatro zeros.

Portanto, o gráfico de f tem quatro pontos de inflexão.

Resposta: (C)

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

23.1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0^3 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0^2 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

f é contínua em $x = 0$ porque existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

f é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ por ser definida, nestes intervalos, por funções polinomiais.

23.2. $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$

$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0$. Então, f é diferenciável em $x = 0$, sendo $f'(0) = 0$.

$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 3x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$f''(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x} = 2$

$f''(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. Então, f não admite segunda derivada em $x = 0$.

23.3.

$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 3x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

23.4. Para $x < 0$:

$f'(x) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

$f'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$

Para $x \geq 0$:

$f'(x) = 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$

$f(0) = 0$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$, estritamente

crescente em $]0, +\infty[$ e tem um mínimo relativo (e absoluto) igual a 0 para $x = 0$.

23.5. Para $x > 0$: $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

$f''(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$

Para $x < 0$: $f''(x) = 2 > 0, \forall x \in]-\infty, 0[$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em todo o domínio, pelo que, não tem pontos de inflexão.

23.6. $f(x) = 1 - x \Leftrightarrow x^3 + x - 1 = 0$

Seja $g(x) = x^3 + x - 1$

g é contínua em $[0, 1]$ porque é uma função polinomial.

$g(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1$ e $g(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1$

$g(0) \times g(1) < 0$

2.2. Derivadas

Então, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy $\exists c \in]0, 1[: g(c) = 0$, ou seja, $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 1 - c$. Como $f(x)$ é estritamente crescente em $]0, 1[$, a solução que provamos existir é única.

24. Para que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão de abscissa 0, terá de haver aí uma mudança de sinal da segunda derivada. Sendo assim, a opção correta é a (A).

Resposta: (A)

25. $f(x) = x^4$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$

25.1. $f'(x) = 4x^3$

$$f''(x) = (4x^3)' = 12x^2$$

$$f''(0) = 12 \times 0^2 = 0$$

$f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ou seja, no ponto $x = 0$, não há mudança de sinal da segunda derivada de f . Logo, 0 não é um ponto de inflexão.

25.2. $g'(x) = \frac{(x)'}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$g''(x) = \frac{(1)'(3\sqrt[3]{x^2}) - 1 \times (3\sqrt[3]{x^2})'}{(3\sqrt[3]{x^2})^2} = \frac{0 - 3 \times \frac{(x^2)'}{3\sqrt[3]{(x^2)^2}}}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$= -\frac{2x}{9\sqrt[3]{x^8}} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$D_{g''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo não existe $g''(0)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g''	+		-
g	∩	0	∪
		P.I.	

$$g(0) = \sqrt[3]{0} = 0$$

Logo, a origem é um ponto de inflexão do gráfico de g .

26. Sejam $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$, as funções cujos gráficos estão representados. Como os gráficos de f e g são perpendiculares, então $c = -\frac{1}{a}$. Então, $f(x) = ax + b$ e $g(x) = -\frac{1}{a}x + d$.

$$h(x) = f(x) \times g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) =$$

$$= a \left(-\frac{1}{a}x + d \right) + (ax + b) \times \left(-\frac{1}{a} \right) =$$

$$= -x + ad - x - \frac{b}{a} = -2x + ad - \frac{b}{a}$$

$$h''(x) = \left(-2x + ad - \frac{b}{a} \right)' = -2$$

Avaliação 2

Pág. 54

1. Sejam a e b o maximizante o minimizante de $f'(x)$, respetivamente.

Então:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
f'	↗	$f'(a)$	∩	$f'(b)$	↗
f''	+	0	-	0	+

Resposta: (B)

2. O gráfico de f não tem pontos de inflexão em $x = 2$, $x = 4$ ou $x = 5$ porque a segunda derivada não muda de sinal nesses pontos.

Logo, a opção correta é a (A).

Resposta: (A)

3. $f'(x) = 2 + 3x^2 - 2x^3$

$$f''(x) = (2 + 3x^2 - 2x^3)' = 6x - 6x^2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f''	-	0	+	0	-
f	∩		∪		∩

Resposta: (D)

4. No intervalo $]-\infty, 0[$, a concavidade de f é voltada para cima. Então, $f''(-3) > 0$.

No intervalo $[-2, 3]$, f é crescente. Então, $f'(1) > 0$.

No intervalo $]0, 5[$, a concavidade de f é voltada para baixo. Então, $f''(2) < 0$.

No intervalo $]5, +\infty[$, a concavidade é voltada para cima.

Então, $f''(7) > 0$.

Resposta: (C)

5. Se f' é estritamente crescente, então $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, o gráfico f tem a concavidade voltada para cima.

Pág. 55

6. $f(x) = \frac{12}{x+1} + \frac{x}{3}$

6.1. $f'(x) = \frac{(12)'(x+1) - 12(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} = -\frac{12}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{12}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{-36 + (x+1)^2}{3(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 36 = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 6 \vee x+1 = -6 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -7$$

x	$-\infty$	7		-1		5	$+\infty$
f'	+	0	-		-	0	+
f	↗	$-\frac{13}{3}$	∩		∪	$\frac{11}{3}$	↗
		Máx				Mín	

$$f(-7) = \frac{12}{-7+1} + \frac{-7}{3} = -\frac{13}{3} \text{ e } f(5) = \frac{12}{5+1} + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -7]$ e em $[5, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-7, -1[$ e em $]-1, 5]$.

f tem um máximo relativo igual a $-\frac{13}{3}$ para $x = -7$ e um

mínimo relativo igual a $\frac{11}{3}$ para $x = 5$.

- 6.2. a) $t: y = mx + b$

$$m = f'(2) = -\frac{12}{(2+3)^2} + \frac{1}{3} = -1$$

$$f(2) = \frac{12}{2+1} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

2.2. Derivadas

Reta tangente em $x=2$: $y=-x+b$

$\left(2, \frac{14}{3}\right)$ é um ponto da reta t .

$$\frac{14}{3} = -2 + b \Leftrightarrow b = \frac{20}{3}$$

Equação da reta tangente: $y = -x + \frac{20}{3}$

b) $m = m_r = -1$

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow -\frac{12}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow -\frac{12}{(x+1)^2} + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-36 + 4(x+1)^2}{3(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 9 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 3 \vee x+1 = -3 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -4$$

A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -4 é estritamente paralela à reta r .

6.3.
$$f''(x) = \left(-\frac{12}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\right)' =$$

$$= \frac{(-12)'(x+1)^2 - (-12)[(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2} =$$

$$= \frac{12 \times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} = \frac{24}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f	\cap		\cup

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e voltada para cima em $]-1, +\infty[$. Não tem pontos de inflexão.

6.4. Assíntotas verticais: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{12}{0^+} + \frac{-1}{3} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{12}{0^-} - \frac{1}{3} = -\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$):

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{12}{x(x+1)} + \frac{x}{3x}\right) =$$

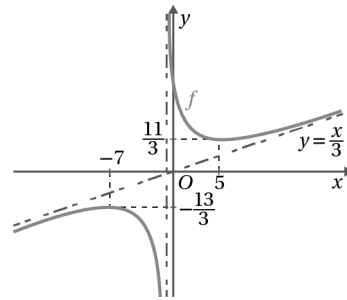
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{12}{x(x+1)} + \frac{x}{3x}\right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{12}{(x+1)^2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{3}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12}{(x+1)^2} = \frac{12}{\pm\infty} = 0$$

A reta de equação $y = \frac{1}{3}x$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

6.5.



$$D'_f =]-\infty, -\frac{13}{3}] \cup \left[\frac{11}{3}, +\infty\right[$$

7.1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(4 + \frac{2}{x-2}\right) = 4 - 2 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x) = 1 + 1 = 2 = g(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$

Como existe $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, g é contínua no ponto 1.

7.2. $g(x) = 4 - \sqrt{x} \Leftrightarrow x^3 + x = 4 - \sqrt{x} \Leftrightarrow x^3 + x + \sqrt{x} - 4 = 0$

Seja $h(x) = x^3 + x + \sqrt{x} - 4$, $D_h = \mathbb{R}_0^+$

h é contínua em $[1, 2]$ porque é definida pela raiz quadrada e pela soma de funções contínuas.

$$h(1) = 1^3 + 1 + \sqrt{1} - 4 = -1 < 0$$

$$h(2) = 2^3 + 2 + \sqrt{2} - 4 = \sqrt{2} + 6 > 0$$

$$h(1) \times h(2) < 0$$

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists c \in]1, 2[: h(c) = 0$, isto é, $\exists c \in]1, 2[: g(c) = 4 - \sqrt{c}$.

7.3.
$$g'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x - 2 - \frac{0}{0}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 2) = 4$$

Cálculo auxiliar:

$$g(1) = 1^3 + 1 = 2$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$g'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4 + \frac{2}{x-2} - 2 - \frac{0}{0}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)} = -2$$

$$g'(1^+) \neq g'(1^-)$$

Logo, g não é diferenciável no ponto 1.

7.4. Para $x < 1$:

$$g'(x) = \left(4 + \frac{2}{x-2}\right)' = 0 + \frac{(2)'(x-2) - 2(x-2)'}{(x-2)^2} =$$

$$= -\frac{2}{(x-2)^2}$$

Para $x > 1$: $g'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$

$$g': \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(x-2)^2} & \text{se } x < 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

7.5. Para $x < 1$: $g'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 1[$

Para $x > 1$: $g'(x) > 0, \forall x \in]1, +\infty[$

Como g é uma função contínua temos que g é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e estritamente crescente em $]1, +\infty[$.

g tem um mínimo relativo igual a 2 para $x = 1$.

7.6. Para $x > 1$:

$$g''(x) = 6x > 0, \forall x \in]1, +\infty[$$

Para $x < 1$:

$$g''(x) = \left(-\frac{2}{(x-2)^2} \right)' = \frac{(-2)'(x-2)^2 - (-2)[(x-2)']^2}{(x-2)^4} = \frac{0 + 2 \times 2(x-2)(x-2)'}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3}$$

$$g''(x) < 0, \forall x \in]-\infty, -1[$$

Como g é contínua em $x = 1$, $g(1) = 2$ e a segunda derivada muda de sinal em $x = 1$, o ponto $(1, 2)$ é um ponto de inflexão do gráfico de g .

8.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(6-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$

$$x + \overline{AC} + x = 6 \Leftrightarrow \overline{AC} = 6 - 2x$$

Seja h a altura do triângulo relativa ao vértice B .

$$h = f(x) = 6x - x^2$$

$$\text{Área do triângulo } [ABC] = \frac{(6-2x)(6x-x^2)}{2}$$

$$= \frac{36x - 6x^2 - 12x^2 + 2x^3}{2} = x^3 - 9x^2 + 18x$$

Seja x_v a abscissa do vértice da parábola: $x_v = \frac{0+6}{2} = 3$

Para que a abscissa de A seja positiva e inferior à abscissa de C , $0 < x < 3$.

8.2. $A'(x) = 3x^2 - 18x + 18$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} \stackrel{x < 3}{\Leftrightarrow} x = 3 - \sqrt{3}$$

x	0		$3 - \sqrt{3}$		3
A'		+	0	-	
A		↗	$6\sqrt{3}$	↘	
			Máx.		

$$A(3 - \sqrt{3}) = (3 - \sqrt{3})^3 - 9(3 - \sqrt{3})^2 + 18(3 - \sqrt{3}) = (3 - \sqrt{3})(9 - 6\sqrt{3} + 3 - 27 + 9\sqrt{3} + 18) = (3 - \sqrt{3})(3\sqrt{3} + 3) = 9\sqrt{3} + 9 - 9 - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

A área máxima do triângulo $[ABC]$ é $6\sqrt{3}$ u.a..

9. $p(t) = 16 - (t-2)^4$

9.1. $p'(t) = 0 - 4(t-2)^3 + (t-2)' = -4(t-2)^3$

$$p'(0) = -4(0-2)^3 = 32$$

$$p'(2) = -4(2-2)^3 = 0$$

Aceleração média em $[0, 2]$:

$$\frac{p'(2) - p'(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 32}{2} = -16$$

A aceleração média entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$ foi de -16 cm/s^2 .

9.2. $p'(t) = 0 \Leftrightarrow -4(t-2)^3 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

$$p''(t) = [-4(t-2)^3]' = -12(t-2)^2 \times (t-2)' = -12(t-2)^2$$

$$p''(t) = 0 \Leftrightarrow -12(t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

A velocidade e a aceleração foram nulas no instante $t = 2$ segundos.

Avaliação global

Pág. 56

1. Se $f'(x) \times f''(x) < 0$, então f' e f'' têm sinais contrários.

Na opção (A) a função é crescente ($f'(x) > 0$) e a concavidade é voltada para cima ($f''(x) > 0$).

Na opção (B) a função é estritamente decrescente ($f'(x) < 0$) e a concavidade é voltada para baixo ($f''(x) < 0$).

Na opção (C) a função é estritamente crescente ($f'(x) > 0$) e a concavidade é voltada para baixo ($f''(x) < 0$), isto é, $f'(x) \times f''(x) < 0$.

A opção correta é a opção (C).

Resposta: (C)

2. Se g'' é uma constante não nula, então a concavidade do gráfico é voltada para cima (ou voltada para baixo) em todo o domínio, o que se verifica nas opções (B) e (C).

Como $g'(1) < 0$, a resposta é (B).

Resposta: (B)

3. $f(0) \times f(2) < 0$, $f(2) \times f(5) < 0$ e f é contínua em $[0, 5]$.

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um zero em $]0, 2[$ e em $]2, 5[$.

Se $f''(x) > 0, \forall x \in]0, 5[$, então $f'(x)$ é estritamente crescente em $]0, 5[$.

Como $f'(2) = 0, f'(x) < 0, \forall x \in]0, 2[$ e

$$f'(x) > 0, \forall x \in]2, 5[$$

Deste modo, f é estritamente decrescente em $[0, 2]$, pelo que o zero que já provamos existir nesse intervalo é único. Analogamente, f é estritamente crescente em $[2, 5]$, pelo que o zero que já provamos existir nesse intervalo é único. Assim, a equação $f(x) = 0$ tem duas soluções.

Resposta: (C)

4. f é contínua no intervalo $[0, 3]$.

$$f(0) < 3 < f(3)$$

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]0, 3[: f(c) = 3$

Resposta: (D)

5. Se $f'(2) = 0$, então 2 é um ponto crítico de f .
 Como o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo e f é duas vezes diferenciável, então $f''(x) < 0, \forall x \in]1, 3[$, ou seja, $f''(2) < 0$.
 Logo, $f(2) = 2$ é o máximo absoluto da função f .
 Como $f(1) < f(3)$, então $f(1) = 0$ é o mínimo absoluto da função f .
 $D_f = [0, 2]$

Resposta: (A)

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$
 Então, 0 é um ponto crítico de f .
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = -1 \Leftrightarrow f''(0) = -1$
 $f''(0) = -1 < 0$
 Então, f tem um máximo para $x = 0$.
 Como $f(0) = 1$, 1 é um máximo de f .

Resposta: (B)

7. Se o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em todo o domínio, então $f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 Se $f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então f' é decrescente em \mathbb{R} , isto é, $f'(2) < f'(1) \Leftrightarrow f'(2) < 0$.

Resposta: (B)

8. Se (u_n) é uma sucessão decrescente de termos positivos, então é convergente e $\lim u_n \geq 0$.
 Se (v_n) é uma sucessão crescente de termos negativos, então é convergente e $\lim v_n \leq 0$. Logo, $\lim v_n \leq \lim u_n$.

Resposta: (D)

- 9.1. Seja y a medida do outro lado do triângulo:

$$2x + y = 6 \Leftrightarrow y = 6 - 2x$$

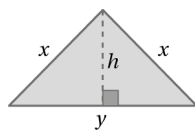
Seja h a altura do triângulo:

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = x^2 - 9 + 6x - x^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{6x - 9}$$

$$A(x) = \frac{y \times h}{2} = \frac{(6 - 2x)(\sqrt{6x - 9})}{2}$$

$$A(x) = (3 - x)\sqrt{6x - 9}$$



- 9.2. $A'(x) = (3 - x)' \sqrt{6x - 9} + (3 - x)(\sqrt{6x - 9})'$
 $= -\sqrt{6x - 9} + (3 - x) \times \frac{(6x - 9)'}{2\sqrt{6x - 9}}$
 $= -\sqrt{6x - 9} + (3 - x) \times \frac{6}{2\sqrt{6x - 9}}$
 $= \frac{-(6x - 9) + 3(3 - x)}{\sqrt{6x - 9}} = \frac{18 - 9x}{\sqrt{6x - 9}}$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{18 - 9x}{\sqrt{6x - 9}} = 0 \Leftrightarrow 18 - 9x = 0 \wedge \frac{3}{2} < x < 3$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

x	$\frac{3}{2}$		2		3
A'		+	0	-	
A		\nearrow	$\sqrt{3}$	\searrow	

$$A(2) = (3 - 2) \times \sqrt{6 \times 2 - 9} = \sqrt{3}$$

O valor de x para o qual a área é máxima é 2.

$$y = 6 - 2 \times 2 = 2$$

O triângulo $[ABC]$ de área máxima é um triângulo equilátero de lado 2.

10.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x < 1 \wedge x \neq -1 \\ \frac{k}{4} + 1 & \text{se } x = 1 \\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

10.1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow \frac{k}{4} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -2$$

10.2. Para $-2 < x < 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

A afirmação é falsa.

11. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

11.1. $f'(x) = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'	+	0	-		-	0	+
f	\nearrow	0	\searrow		\searrow	4	\nearrow

$$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \quad \text{e} \quad f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, 2]$.

f tem um máximo relativo igual a 0 em $x = 0$ e um mínimo relativo igual a 4 em $x = 2$.

2.2. Derivadas

$$\begin{aligned}
 11.2. \quad f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \\
 &= \frac{(x^2 - 2x)'(x-1)^2 - (x^2 - 2x)[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2} = \\
 &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x) \times 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x)]}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in]1, +\infty[; f''(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 1[$$

$1 \notin D_f$

Então, f não tem pontos de inflexão.

Pág. 59

$$12.1. \quad p'(t) = 2kt - 6t^2$$

$$p''(t) = (2kt - 6t^2)' = 2k - 12t$$

$$p''(0,25) = 9 \Leftrightarrow 2k - 12 \times 0,25 \times 9 \Leftrightarrow k = 6$$

$$12.2. \quad p(t) = 6t^2 - 2t^3$$

$$p'(t) = 12t - 6t^2$$

$$p''(t) = 12 - 12t$$

$$p''(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - 12t = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

t	0		1		2
p''	+	+	0	-	-
p'		\nearrow	6	\searrow	

$$p'(1) = 12 \times 1 - 6 \times 1^2 = 6$$

A velocidade máxima atingida foi de 6 m/s e a aceleração da partícula nesse instante foi de 0 m/s².

$$13. \quad f(x) = \frac{x^3}{4}; g(x) = -x^2 + 7x - 11 \text{ e } h(x) = g(x) + k$$

$$13.1. \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 \text{ e } g'(x) = -2x + 7$$

$$\begin{aligned}
 r // s \Rightarrow m_r = m_s \Leftrightarrow f'(a) = g'(a) \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 = -2a + 7 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 3a^2 + 8a - 28 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{14}{3} \vee a = 2
 \end{aligned}$$

Como $a \in \mathbb{R}^+$, $a = 2$.

Para $a = 2$, as retas r e s são paralelas.

$$13.2. \quad h(x) = g(x) + k$$

Então, o gráfico de h é a imagem do gráfico de g pela translação associada ao vetor $(0, k)$.

Para que f e h se interessem num único ponto onde têm uma reta tangente comum, e, uma vez que no ponto de abscissa 2 as retas r e s são paralelas, terá de ser

$$k = f(2) - g(2) = 2 - (-1) = 3$$

Calculo auxiliar:

$$f(2) = \frac{2^3}{4} = 2 \text{ e } g(2) = -2^2 + 7 \times 2 - 11 = -1$$

$$13.3. \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 7x - 8) = -2^2 + 7 \times 2 - 8 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3}{4} \right) = \frac{2^3}{4} = 2$$

Como $h(x) \leq u(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$ e

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2, \text{ então:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = 2$$

$$14.1. \quad f'(x) = 24x^3 + 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 24x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 12x^2(2x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f'	-	0	+	+
f	\searrow	$-\frac{9}{8}$	\nearrow	\nearrow
		Min.		

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = -\frac{9}{8}$$

$$f(0) = 6 \times 0^4 + 4 \times 0^3 - 1 = -1$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ e

estritamente crescente em $]-\frac{1}{2}, +\infty[$. Tem um mínimo

relativo (e absoluto) igual a $-\frac{9}{8}$ para $x = -\frac{1}{2}$.

14.2. f é contínua em \mathbb{R} por ser uma função polinomial. Logo, f é contínua em qualquer intervalo de números reais.

- f é contínua e estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$.

Como $f(-1) = 6(-1)^4 + 4(-1)^3 - 1 = 1$, temos que

$$f(x) \geq 1, \forall x \in]-\infty, -1[.$$

Logo, f não tem zeros em $]-\infty, -1[$.

- f é contínua e estritamente decrescente em

$$\left[-1, -\frac{1}{2}\right]. \text{ Como } f(-1) = 1 \text{ e } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8} \text{ temos}$$

que $f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ pelo que o Teorema de

Bolzano-Cauchy garante a existência de um zero em

$$\left]-1, -\frac{1}{2}\right[. \text{ Atendendo à monotonia de } f, \text{ este zero é}$$

único no referido intervalo.

- f é contínua e estritamente crescente em $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Dado que $f(0) = -1$ e $f(1) = 9$ e f é contínua em

$[0, 1]$, podemos igualmente concluir, pelo Teorema de

Bolzano-Cauchy, que f tem pelo menos um zero em

$]0, 1[$. Este é o único zero de f no intervalo

$$\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\text{ dado } f \text{ ser estritamente crescente neste}$$

intervalo.

Conclusão: f tem dois e só dois zeros, um no intervalo

$] -1, 0[$ e outro no intervalo $]0, 1[$.