

Atividade de diagnóstico

Pág. 118

$$1.1. \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-3}{n+1} - \frac{n-3}{n} = \frac{n-2}{n+1} - \frac{n-3}{n} = \frac{n^2 - 2n - n^2 + 3n - n + 3}{n(n+1)} = \frac{3}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (u_n) é estritamente crescente.

$$1.2. \quad u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - 3^n = 3^n = 3^n \times 3 - 3^n = 2 \times 3^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (u_n) é estritamente crescente.

$$2.1. \quad u_{n+1} - u_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{5}{2}\right)^n = \left(\frac{5}{2}\right)^n \times \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^n = \left(\frac{5}{2}\right)^n \left(\frac{5}{2} - 1\right) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (u_n) é estritamente crescente.

$$2.2. \quad u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (u_n) é estritamente decrescente.

$$2.3. \quad u_n = (-2)^n; u_1 = -2, u_2 = 4, u_3 = -8$$

$u_2 > u_1$ e $u_3 < u_2$

Logo, (u_n) não é monótona.

$$3.1. \quad u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \left(\frac{2}{5} - 1\right) = -\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é estritamente decrescente pelo que

$$u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Como } u_1 = \frac{2}{5} \text{ e } \left(\frac{2}{5}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N} :$$

$$0 < u_n \leq \frac{2}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é limitada.

$$3.2. \quad \text{Se } n \text{ é ímpar: } 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $-2 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que (u_n) é limitada.

$$4. \quad \text{Seja a condição em } \mathbb{N} : n \leq n^3$$

• Para $n=1$, $1 \leq 1^3 \Leftrightarrow 1 \leq 1$ é uma proposição verdadeira.

• Admitindo que para determinado $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n^3$ pretendemos provar que $n+1 \leq (n+1)^3$.

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$n \leq n^3 \Rightarrow n+1 \leq n^3 + 1 \Rightarrow n+1 \leq n^3 + 1 + 3n^2 + 3n \Rightarrow$$

$$3n^2 + 3n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n+1 < (n+1)^3$$

Logo, a propriedade é hereditária.

Portanto, pelo princípio de indução matemática:

$$n \leq n^3, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$5. \quad \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 2 + a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \end{cases}$$

Seja a condição $P(n) \Leftrightarrow a_n = 2n + 2$

• Para $n=1$, vem $a_1 = 2 \times 1 + 2 \Leftrightarrow a_1 = 4$

Proposição verdadeira

• Admitamos, por hipótese, que para determinado $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2n + 2$.

Pretendemos provar que $a_{n+1} = 2(n+1) + 2$.

$$a_{n+1} = 2 + a_{(n+1)-1}$$

Fórmula de recorrência

$$= 2 + a_n = 2 + 2n + 2$$

Por hipótese

$$= 2(n+1) + 2$$

Logo, a propriedade é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2n + 2$$

$$6. \quad S_6 = u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \times \frac{\left(1 - \frac{1}{36}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{729}\right) = \frac{364}{243}$$

7. $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$, dado que (a_n) é uma progressão aritmética de razão r :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{k^{a_{n+1}}}{k^{a_n}} = k^{a_{n+1} - a_n} = k^r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto, se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r ,

(v_n) é uma progressão geométrica de razão k^r .

Pág. 119

$$8.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$

$$8.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = +\infty$$

$$8.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$8.4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n-n^3}{2-4n+2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{2n^3} = -\frac{1}{2}$$

$$8.5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$8.6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{25n-1}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n}{9n}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$8.7. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$8.8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{\sqrt{5n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{\sqrt{5n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}}} = -\infty$$

$$8.9. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{9n^2-1}+n} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

$$8.10. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (2n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+1}{\sqrt{n} + \sqrt{2n-1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(-1 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(\frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{\sqrt{2n-1}}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n}{n^2}} + \sqrt{\frac{2n-1}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{-1 + 0}{0^+} = -\infty$$

8.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \times 3}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3 = 0 \times 3 = 0$

8.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^{n+2}}{4^n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{4^n} + \frac{4^n \times 4^2}{4^n}}{1 - \frac{3^n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n + 16}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{0 + 16}{1 - 0}$

= 16

8.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^{n+1} - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3^n \left(3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right] = +\infty \times (3 - 0) = +\infty$

8.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 - 1}}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}}{2n + 1} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{n \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = 1$$

8.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n} + 3}{2^{-n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{0 + 3}{0 + 1} = 3$

8.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - b^n}{(2b)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{b}\right)^n - 1}{2^n} = \frac{0 - 1}{+\infty} = 0$

8.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - b^n}{2b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{b}\right)^n - 1}{2} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$

Atividade inicial 1

Pág. 120

1. $1061,2080 \times 0,02 = 21,22416$
 $1061,2080 + 21,22416 \approx 1082,43$
 Ao fim do quarto ano terá 1082,43 €.
2. $C = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = 1000 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^3 = 1061,208 \text{ €}$

Pág. 122

1. $r = 2,5\%$; $C = 5000 \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{10} \approx 6400,42 \text{ €}$
 O capital acumulado ao fim dos 10 anos será de 6400,42 €.

Pág. 123

2. $C_0 = 10000, r = 3,6\%$
- 2.1. $C = 10000 \left(1 + \frac{3,6}{100 \times 2}\right)^2 \approx 10363,24$
 Capital acumulado: 10 363,24 €

2.2. $C = 10000 \left(1 + \frac{3,6}{100 \times 4}\right)^4 = 10364,89$

Capital acumulado: 10 364,89 €

3. Opção BTC

$$C = C_0 \left(1 + \frac{1,8}{100 \times 365}\right)^{365} \approx 1,018C_0$$

Opção BCT

$$C = C_0 \left(1 + \frac{1,7}{1000 \times 365}\right)^{365} \approx 1,017C_0$$

A melhor opção é a BTC.

4. $5000 \left(1 + \frac{r}{100 \times 4}\right)^4 = 5082 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{400}\right)^4 = \frac{5082}{5000} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{r}{400} = \sqrt[4]{\frac{2541}{2500}} \Leftrightarrow \frac{r}{400} = \sqrt[4]{\frac{2541}{2500}} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 400 \sqrt[4]{\frac{2541}{2500}} - 400 \Rightarrow r \approx 1,63$$

$r\% \approx 1,63\%$

Pág. 126

5.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{5n}\right)^{5n} = e^5$

5.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{2n}\right)^{2n} = e^{-6}$

5.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{6n}\right)^{6n} = e^{-4}$

Pág. 127

5.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

5.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-2} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{3n}\right)^{3n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-2} = e^6 \times 1 = e^6$$

5.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{(n+3)-3-1} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{n+3} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{-4} = e^2 \times 1 = e^2$$

5.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{-n}\right)^{-n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2} =$

$$= e^{-1} \times 1^{-2} = e^{-1}$$

5.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+1}{5n+3}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{5n} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)}{\cancel{5n} \left(1 + \frac{3}{5n}\right)}\right)^{2n} = \left[\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{5n}\right)^n} \right]^2$

$$= \left(\frac{e^{\frac{1}{5}}}{e^{\frac{3}{5}}}\right)^2 = \left(e^{-\frac{2}{5}}\right)^2 = e^{-\frac{4}{5}}$$

$$6.1. \lim \left(\frac{2^n + 1}{2^n + 2} \right)^{2^{n+2}} = \lim \left(\frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{2}{2^n}} \right)^{2^n \times 2^2} = \left[\frac{\lim \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)^{2^n}}{\lim \left(1 + \frac{2}{2^n} \right)^{2^n}} \right]^4 = \left(\frac{e^1}{e^2} \right)^4 = (e^{-1})^4 = e^{-4}$$

$$6.2. \lim \left(\sqrt{\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+2)!}} \right)^{\frac{2n}{3}} = \lim \left[\left(\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+2)(n+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2n}{3}} = \lim \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{\frac{n}{3}} = \left[\frac{\lim \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n} \right]^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{e^3}{e^2} \right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

$$6.3. \lim \left(\frac{3n^2 + 7n + 2}{3n^2 + n} \right)^{2n+1} = \lim \left(1 + \frac{6n+2}{3n^2+n} \right)^{2n+1} = \lim \left(1 + \frac{2(3n+1)}{n(3n+1)} \right)^{2n+1} = \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{2n} \times \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^1 = \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{2n} \times 1^1 = e^4 \times 1 = e^4$$

$$6.4. \lim \left(\frac{2n+3}{3n+1} \right)^{2n} = \lim \left[\frac{2 \cancel{n} \left(1 + \frac{3}{2n} \right)}{3 \cancel{n} \left(1 + \frac{1}{3n} \right)} \right]^{2n} = \lim \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n \times \frac{\left(1 + \frac{3}{2n} \right)^n}{\left(1 + \frac{1}{3n} \right)^n} \right]^{2n} = \lim \left[\left(\frac{2}{3} \right)^3 \times \frac{\lim \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right]^{2n} = \lim \left[0 \times \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{3}}} \right]^{2n} = 0$$

$$6.5. \lim \left(\frac{5n+3}{n+2} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left[\frac{5n \left(1 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)} \right]^{\frac{n}{2}} = \left[\lim 5^n \times \frac{\lim \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(+\infty \times \frac{e^3}{e^2} \right)^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

$$7.1. \frac{(2\sqrt{6})^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{3}}} = \frac{2^{\sqrt{6} \times \sqrt{2}}}{2^{\sqrt{3}}} = 2^{\sqrt{12} - \sqrt{3}} = 2^{\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{3}} = 2^{2\sqrt{3} - \sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}$$

$$7.2. 3^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2} + \sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = 3^{3\sqrt{2}} = (3^3)^{\sqrt{2}} = 27^{\sqrt{2}}$$

$$8.1. \lim \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{\sqrt{n}} = \lim \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{n} \right)^2 \right]^{\sqrt{n}} = \lim \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right) \right]^{\sqrt{n}} = \lim \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}} \times \lim \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{2}} = e^0 = 1$$

$$8.2. \lim \left(\frac{2n^2 - 4}{2n^2 - 1} \right)^{2n} = \lim \left[\frac{2n^2 \left(1 - \frac{2}{n^2} \right)}{2n^2 \left(1 - \frac{1}{2n^2} \right)} \right]^{2n} = \lim \left[\frac{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{n} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n} \right)}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}n} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}n} \right)} \right]^{2n} = \left[\frac{\lim \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{n} \right)^n \times \lim \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n} \right)^n}{\lim \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}n} \right)^n \times \lim \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}n} \right)^n} \right]^{2n} = \left(\frac{e^{-\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{2}}}{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \times e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \right)^2 = \left(\frac{e^0}{e^0} \right)^2 = \left(\frac{1}{1} \right)^2 = 1$$

$$8.3. \lim \left(2 - \frac{e^n + 1}{e^n} \right)^{e^{n+1}} = \lim \left(2 - \frac{e^n}{e^n} - \frac{1}{e^n} \right)^{e^n \times e} = \lim \left(2 - 1 - \frac{1}{e^n} \right)^{e^n \times e} = \lim \left(1 - \frac{e}{e^n \times e} \right)^{e^n \times e} = e^{-e}$$

$$9.1. 2^{\frac{x}{2}} = 64 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^6 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 6 \Leftrightarrow x = 12$$

$$S = \{12\}$$

$$9.2. \frac{2}{3^{1+3x}} = 162 \Leftrightarrow 162 \times 3^{1+3x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{1+3x} = \frac{2}{162} \Leftrightarrow 3^{1+3x} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{1+3x} = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^{1+3x} = 3^{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3x = -4 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$$

$$9.3. 9^{2x+3} = 3^{x+1} \Leftrightarrow (3^2)^{2x+3} = 3^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{4x+6} = 3^{x+1} \Leftrightarrow 4x+6 = x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$$

9.4. $8^{5x-1} - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (2^3)^{5x-1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{15x-3} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 15x-3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 15x = 3 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 15x = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{30}$
 $S = \left\{ \frac{7}{30} \right\}$

9.5. $(4^{1-x})^2 = 8^{-x} \Leftrightarrow [(2^2)^{1-x}]^2 = (2^3)^{-x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (2^{2-2x})^2 = 2^{-3x} \Leftrightarrow 2^{4-4x} = 2^{-3x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4-4x = -3x \Leftrightarrow x = 4$
 $S = \{4\}$

9.6. $2^{x+1} - 2^{x-2} + 2^{x-1} - 2^x = 40 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x \times 2 - 2^x \times 2^{-2} + 2^x \times 2^{-1} - 2^x = 40 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x \left(2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 \right) = 40 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x \times \frac{5}{4} = 40 \Leftrightarrow 2^x = \frac{4}{5} \times 40 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$
 $S = \{5\}$

9.7. $2^{2x} - 5 \times 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \times 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow 2^x = 1 \vee 2^x = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x = 2^0 \vee 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
 $S = \{0, 2\}$

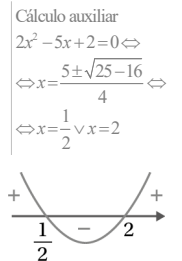
9.8. $5^{3x} - 4 \times 5^x = 5 \times 5^{-x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (5^{3x} - 4 \times 5^x) \times 5^x = 5 \times 5^{-x} \times 5^x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5^{4x} - 4 \times 5^{2x} = 5 \Leftrightarrow (5^{2x})^2 - 4 \times 5^{2x} - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow 5^{2x} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow 5^{2x} = -1 \vee 5^{2x} = 5$
 A equação $5^{2x} = -1$ é impossível
 $\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee 5^{2x} = 5^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
 $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

10. $f(x) = 4^x - 8$ $g(x) = 2^{x+2} + 24$
 Ponto A: $f(0) = 4^0 - 8 = -7 \rightarrow A(0, -7)$
 Ponto B:
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4^x - 8 = 2^{x+2} + 24 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (2^2)^x - 2^x \times 2^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \times 2^x - 32 = 0$
 $\Leftrightarrow 2^x = \frac{4 \pm \sqrt{16+128}}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{4 \pm 12}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x = -4 \vee 2^x = 8 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$
 $f(3) = 4^3 - 8 = 56 \rightarrow B(3, 56)$
 Ponto C: $g(0) = 2^{0+2} + 24 = 28 \rightarrow C(0, 28)$
 $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times |\text{abscissa de B}|}{2} = \frac{|28 - (-7)| \times 3}{2} = \frac{35 \times 3}{2}$
 $= 52,5$
 $A_{[ABC]} = 52,5$ u.a.

11.1. $\left(\frac{1}{5}\right)^x > 0,04 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x > \frac{4}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x > \frac{1}{25} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Leftrightarrow x < 2 ; S =]-\infty, 2[$

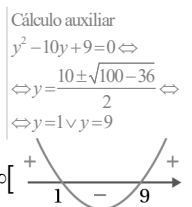
11.2. $25 - 5^x \leq 0 \Leftrightarrow 5^x \geq 5^2 \Leftrightarrow x \geq 2 ; S = [2, +\infty[$

11.3. $2^{2x^2-5x} < 0,25 \Leftrightarrow 2^{2x^2-5x} < \frac{25}{100} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{2x^2-5x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{2x^2-5x} < 2^{-2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 5x < -2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 < 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}, 2 \right[; S = \left] \frac{1}{2}, 2 \right[$



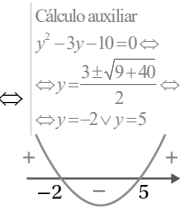
11.4. $10^x - 2 \times 5^x > 0 \Leftrightarrow 10^x > 2 \times 5^x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{10^x}{5^x} > 2 \Leftrightarrow 2^x > 2^1 \Leftrightarrow x > 1$
 $S =]1, +\infty[$

11.5. $3^{2x} + 9 \geq 10 \times 3^x \Leftrightarrow (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 9 \geq 0$
 Fazendo $y = 3^x$, vem:
 $y^2 - 10y + 9 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 \vee y \geq 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3^x \leq 1 \vee 3^x \geq 9 \Leftrightarrow 3^x \leq 3^0 \vee 3^x \geq 3^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$
 $S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$



11.6. $5^{2x} - 3 > 10 \times 5^{-2x} \Leftrightarrow (5^{2x} - 3) \times 5^{2x} > 10 \times 5^{-2x} \times 5^{2x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (5^{2x})^2 - 3 \times 5^{2x} - 10 > 0$

Fazendo $y = 5^{2x}$, temos:
 $y^2 - 3y - 10 > 0 \Leftrightarrow y < -2 \vee y > 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5^{2x} < -2 \vee 5^{2x} > 5^1 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee 2x > 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$
 $S = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

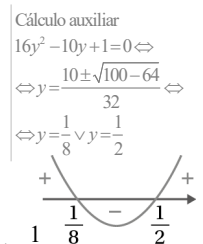


12.1. $\overline{AB} = |f(0) - g(0)| = \left| 4^2 + 2 - \frac{20}{2} \right| = |18 - 10| = 8$

12.2. $0 \notin F$, porque $f(0) - g(0) > 1$.

12.3. $f(x) - g(x) \leq 1 \Leftrightarrow 4^{3x+2} + 2 - \frac{20}{2^{1-3x}} \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4^{3x} \times 4^2 - 20 \times 2^{3x-1} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (2^2)^{3x} \times 16 - 20 \times 2^{3x} \times 2^{-1} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 16 \times (2^{3x})^2 - 10 \times 2^{3x} + 1 \leq 0$

Fazendo $y = 2^{3x}$:
 $16y^2 - 10y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{8} \wedge y \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{3x} \geq \frac{1}{8} \wedge 2^{3x} \leq 2^{-1} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{3x} \geq 2^{-3} \wedge 3x \leq -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x \geq -3 \wedge x \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x \leq -\frac{1}{3}$



$F = \left[-1, -\frac{1}{3} \right]$

Pág. 136

$$13.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1)}{3x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

$$13.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \quad \left| \begin{array}{l} y = -x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$13.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} \times x}{\frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3x} = \frac{1}{3} \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x}} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3} \quad \left| \begin{array}{l} y = 3x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$13.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^2(e^{x-2} - 1)}{x - 2} = e^2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2} =$$

$$= e^2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^2 \times 1 = e^2 \quad \left| \begin{array}{l} y = x - 2 \\ \text{Se } x \rightarrow 2, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$13.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{y} (e^y - 1) \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \quad \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Pág. 137

$$14.1. \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

$$14.2. \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$14.3. \log_2 \sqrt{32} = \log_2 \sqrt{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

Pág. 138

$$15.1. \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

$$15.2. \log_{10} 10 = \log_{10} 10^1 = 1$$

$$15.3. \log_3 \left(\frac{1}{27} \right) = \log_3 \left(\frac{1}{3^3} \right) = \log_3 3^{-3} = -3$$

$$15.4. \log_{\frac{1}{4}} 16 = \log_{\frac{1}{4}} 4^2 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} \right)^{-2} = -2$$

$$15.5. \log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$$

$$15.6. \log_{81} 9 = \log_{81} \sqrt{81} = \log_{81} 81^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$15.7. \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

$$15.8. \log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} = \log_{\sqrt{8}} \sqrt{2^5} = \log_{\sqrt{8}} 2^{\frac{5}{2}} = \log_{\sqrt{8}} (2^3)^{\frac{5}{3} \times \frac{1}{2}} =$$

$$= \log_{\sqrt{8}} 8^{\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}} = \log_{\sqrt{8}} (\sqrt{8})^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$$

ou

$$\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} = y \Leftrightarrow \sqrt{32} = (\sqrt{8})^y = \sqrt{2^5} = (\sqrt{2^3})^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{5}{2}} = \left(2^{\frac{3}{2}} \right)^y \Leftrightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{3}{2}y} \Leftrightarrow \frac{3y}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}$$

$$\text{Logo, } \log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} = \frac{5}{3}$$

$$15.9. \log_7 1 + \log_2 \left(\frac{1}{16} \right) + \log_{\frac{1}{32}} 4 = \log_7 7^0 + \log_2 \left(\frac{1}{2^4} \right) + y =$$

$$= 0 + \log_2 2^{-4} + \left(-\frac{2}{5} \right) = -4 - \frac{2}{5} = -\frac{22}{5}$$

Cálculo auxiliar

$$\log_{\frac{1}{32}} 4 = y \Leftrightarrow 4 = \left(\frac{1}{32} \right)^y \Leftrightarrow 2^2 = \left(\frac{1}{2^5} \right)^y \Leftrightarrow 2^2 = (2^{-5})^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2 = 2^{-5y} \Leftrightarrow -5y = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}$$

Pág. 139

$$16.1. \log(0,01)^2 = \log \left(\frac{1}{100} \right)^2 = \log(10^{-2})^2 = \log 10^{-4} = -4$$

$$16.2. \log \left(\frac{\sqrt{0,001}}{1000} \right) = \log \frac{\sqrt{10^{-3}}}{10^3} = \log \frac{10^{-\frac{3}{2}}}{10^3} = \log 10^{-\frac{3}{2}-3} =$$

$$= \log 10^{-\frac{9}{2}} = -\frac{9}{2}$$

$$16.3. \ln \sqrt[3]{e^2} = \ln e^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$16.4. \ln \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) + \ln(e\sqrt{e}) = \ln \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \right) + \ln \left(e \times e^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \ln e^{-\frac{1}{2}} + \ln e^{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

Pág. 140

$$17.1. 2^{x+1} - 6 = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 6 \Leftrightarrow 2^x \times 2 = 6 \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2 3$$

$$S = \{\log_2 3\}$$

$$17.2. e^x = 10 \Leftrightarrow x = \ln 10$$

$$S = \{\ln 10\}$$

$$17.3. (1,5)^x = 2,25 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{225}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^x = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$S = \{2\}$$

$$17.4. 2^{x+1} - 3 \times 2^{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2^x \times 2 - 3 \times 2^x \times 2^{-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 2^x - \frac{3}{2} \times 2^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(2 - \frac{3}{2} \right) \times 2^x = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 2^x = 3 \Leftrightarrow 2^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_2 6$$

$$S = \{\log_2 6\}$$

$$17.5. x \times 2^x - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2^x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2^x = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \log_2 3$$

$$S = \{0, \log_2 3\}$$

$$17.6. e^x - \frac{2}{e^x} = 1 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2 = e^x \wedge e^x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = -1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

$$S = \{\ln 2\}$$

17.7. $9^x - 2 \times 3^{x+1} + 5 = 0 \Leftrightarrow (3^2)^x - 2 \times 3^x \times 3 + 5 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (3^x)^2 - 6 \times 3^x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3^x = \frac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow 3^x = 1 \vee 3^x = 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \log_3 1 \vee x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \log_3 5$
 $S = \{0, \log_3 5\}$

17.8. $2e^{6x} - 3 = 5e^{3x} \Leftrightarrow 2(e^{3x})^2 - 5e^{3x} - 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^{3x} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \Leftrightarrow e^{3x} = -\frac{1}{2} \vee e^{3x} = 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee 3x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ln 3$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \ln 3 \right\}$$

18. $\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f(2) = g(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + a = 3 \times 2^{1+b} \\ 16 + a = 3 \times 2^{2+b} \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 16 + a - (4 + a) = 3 \times 2^{2+b} - 3 \times 2^{1+b} \\ 16 + a = 3 \times 2^{2+b} \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 3(2^{2+b} - 2^{1+b}) \\ 16 + a = 3 \times 2^{2+b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2+b} - 2^{1+b} = 4 \\ 16 + a = 3 \times 2^{2+b} \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^b \times 4 - 2^b \times 2 = 4 \\ 16 + a = 3 \times 2^{2+b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 2^b = 4 \\ 16 + a = 3 \times 2^2 \times 2^b \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^b = 2 \\ 16 + a = 12 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 8 \end{cases}$
 $a = 8 \quad e \quad b = 1$

Pág. 145

19.1. $\ln e^4 + e^{2 \ln 3} = 4 + e^{\ln 3^2} = 4 + e^{\ln 9} = 4 + 9 = 13$
 19.2. $\frac{5}{2} \ln 4 - 5 \ln 6 + 10 \ln \sqrt{3} = 5 \left(\frac{1}{2} \ln 4 - \ln 6 + 2 \ln \sqrt{3} \right) =$
 $= 5 \left(\ln 4^{\frac{1}{2}} - \ln 6 + \ln (\sqrt{3})^2 \right) = 5 \left(\ln \frac{\sqrt{4}}{6} + \ln 3 \right) =$
 $= 5 \ln \left(\frac{2}{6} \times 3 \right) = 5 \ln 1 = 5 \times 0 = 0$
 19.3. $e^{2+2 \ln \sqrt{5}} = e^2 \times e^{\ln (\sqrt{5})^2} = e^2 \times e^{\ln 5} = e^2 \times 5 = 5e^2$
 19.4. $e^{\ln a - 3 \ln b} = \frac{e^{\ln a}}{e^{\ln b^3}} = \frac{a}{b^3}$
 19.5. $\log_a (\log_b b^a) = \log_a a^3 = 3$
 20. $\log_c b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\log_b b}{\log_b c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_b c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_b c = 2$
 $\log_b a = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\log_a a}{\log_a b} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_a b = -3$
 20.1. $\log_a \left(\frac{\sqrt{a}}{b^2} \right) = \log_a \sqrt{a} - \log_a b^2 = \log_a a^{\frac{1}{2}} - 2 \log_a b =$
 $= \frac{1}{2} - 2 \times (-3) = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}$

20.2. $\log_a (\sqrt{b} \times a^3) = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a a^3 = \frac{1}{2} \log_a b + 3 =$
 $= \frac{1}{2} \times (-3) + 3 = \frac{3}{2}$

20.3. $\log_b c + \frac{1}{\log_c b} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 + 2 = 4$

20.4. $\log_b \frac{\sqrt{b} \times \sqrt[3]{a}}{c^2} = \log_b \left(b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \right) - \log_b c^2 =$
 $= \log_b b^{\frac{1}{2}} + \log_b a^{\frac{1}{3}} - 2 \log_b c = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \log_b a - 2 \times 2 =$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3} \right) - 4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - 4 =$
 $= \frac{9 - 2 - 72}{18} = -\frac{65}{18}$

21.1. $f(x) = 2 \log_2 (x^2 - 1) - \log_2 (x + 1)^2 =$
 $= 2 \log_2 (x^2 - 1) - 2 \log_2 (x + 1) = \quad |x+1 > 0$
 $= 2 \left[\log_2 (x^2 - 1) - \log_2 (x + 1) \right] = 2 \log_2 \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$
 $= 2 \log_2 \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 \log_2 (x-1)$

21.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \log_2 (x-1) = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_2 (x-1) = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x-1 = 2^0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x-1 = 1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 2$

Pág. 146

22.1. $\log_3 (x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = 3^2 \wedge x-1 > 0 \Leftrightarrow x = 10$
 $S = \{10\}$

22.2. $2 \log_3 (x-1) = 2 \wedge x-1 > 0 \Leftrightarrow \log_3 (x-1) = \wedge x > 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x-1 = 3^1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 4$
 $S = \{4\}$

22.3. $\log_3 (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 3^2 \wedge (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-1 = 3 \vee x-1 = -3) \wedge x-1 \neq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$
 $S = \{-2, 4\}$

22.4. $\log_2 5 + \log_2 (x-2) = \log_2 10 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_2 [5(x-2)] = \log_2 10 \wedge x-2 > 0$
 $\Leftrightarrow 5x-10 = 10 \wedge x > 2 \Leftrightarrow 5x = 20 \wedge x > 2 \Leftrightarrow x = 4$
 $S = \{4\}$

22.5. $\ln(3x) - \ln(2x+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln(3x) = \ln(2x+1) \wedge 3x > 0 \wedge 2x+1 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x = 2x+1 \wedge x > 0 \wedge x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$
 $S = \{1\}$

22.6. $2 \log_5 x + \log_5 (5x) = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_5 x^2 + \log_5 (5x) = 4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_5 (x^2 \times 5x) = 4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 5x^3 = 5^4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^3 = 5^3 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 5$
 $S = \{5\}$

22.7. $\log_2(x+1) = 1 - \log_2 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2 3 = 1 \wedge x+1 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_2[3(x+1)] = 1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x+3 = 2^1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

$$S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

22.8. $\log_2(\log_3(x+1)) = 1$
 $D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge \log_3(x+1) > 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x+1 > 3^0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$
 $\log_2(\log_3(x+1)) = 1 \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x+1 = 3^2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 8$
 $S = \{8\}$

22.9. $\log_{x+2}(x^2+3) = 2 \Leftrightarrow$
 $D = \{x \in \mathbb{R} : x+2 > 0 \wedge x+2 \neq 1 \wedge x^2+3 > 0\} =$
 $= x \in]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$
 $\log_{x+2}(x^2+3) = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x+2)} = 2 \wedge x \in D \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln(x^2+3) = 2\ln(x+2) \wedge x \in D \Leftrightarrow \quad |x+2 > 0$
 $\Leftrightarrow \ln(x^2+3) = \ln(x+2)^2 \wedge x \in D \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2+3 = (x+2)^2 \wedge x \in D \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2+3 = x^2+4x+4 \wedge x \in D \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4x = -1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$
 $S = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$

22.10. $\log_3 \sqrt{x^2+x+9} - \log_9(x+1) = 1$ Cálculo auxiliar
 $x^2+x+9=0$
 $\Delta = 1-36 < 0$
 $x^2+x+9 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2+x+9 > 0 \wedge x+1 > 0\} =$
 $=]-1, +\infty[$
 $\log_3 \sqrt{x^2+x+9} - \log_9(x+1) = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(x^2+x+9)^{\frac{1}{2}} - \frac{\log_3(x+1)}{\log_3 9} = 1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3(x^2+x+9) - \frac{\log_3(x+1)}{2} = 1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(x^2+x+9) - \log_3(x+1) = 2 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(x^2+x+9) = \log_3 3^2 + \log_3(x+1) \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(x^2+x+9) = \log_3(9(x+1)) \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2+x+9 = 9x+9 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2-8x = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x(x-8) = 0 \wedge x > -1$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$
 $S = \{0, 8\}$

22.11. $x + \log(1+2^x) = x \log 5 + \log 6 ; D = \mathbb{R}$
 $x + \log(1+2^x) = x \log 5 + \log 6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log 10^x + \log(1+2^x) = \log 5^x + \log 6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log[10^x(1+2^x)] = \log(6 \times 5^x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 10^x(1+2^x) = 6 \times 5^x \Leftrightarrow (2 \times 5)^x(1+2^x) - 6 \times 5^x = 0$
 $\Leftrightarrow 2^x \times 5^x(1+2^x) - 6 \times 5^x = 0 \Leftrightarrow 5^x[2^x(1+2^x) - 6] = 0$
 $\Leftrightarrow 5^x = 0 \vee 2^x + (2^x)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee (2^x)^2 + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x = -3 \vee 2^x = 2 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = 1 \Leftrightarrow x = 1$
 $S = \{1\}$

23.1. $\ln(5x+1) > \ln x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x+1 > x \wedge x > 0 \wedge 5x+1 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4x > -1 \wedge x > 0 \wedge x > -\frac{1}{5} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x > -\frac{1}{4} \wedge x > 0 \wedge x > -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x > 0$
 $S = \mathbb{R}^+$

23.2. $\log_3(3x) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(3x) + \frac{\log_3(x+2)}{\log_3 \frac{1}{3}} \geq 0 \wedge 3x \geq 0 \wedge x+2 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(3x) + \frac{\log_3(x+2)}{-1} \geq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(3x) - \log_3(x+2) \geq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(3x) \geq \log_3(x+2) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x \geq x+2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
 $S = [1, +\infty[$

23.3. $\log_2(x-3) + 2 \geq \log_2(5-x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_2 2^2 \geq \log_2(5-x) \wedge x > 3 \wedge x < 5$
 $\Leftrightarrow \log_2[4(x-3)] \geq \log_2(5-x) \wedge x > 3 \wedge x < 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4x-12 \geq 5-x \wedge 3 < x < 5 \Leftrightarrow 5x \geq 17 \wedge 3 < x < 5$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{17}{5} \wedge 3 < x < 5 \Leftrightarrow \frac{17}{5} \leq x < 5$
 $S = \left[\frac{17}{5}, 5 \right[$

23.4. $\log(1-x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log(1-x) \geq -1 \wedge 1-x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1-x \geq 10^{-1} \wedge x < 1 \Leftrightarrow -x \geq \frac{1}{10} - 1 \wedge x < 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -x \geq -\frac{9}{10} \wedge x < 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{10} \wedge x < 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{10}$
 $S = \left] -\infty, \frac{9}{10} \right]$

23.5. $\log_2(x^2+x) \leq \log_2(3x-3) + 1$
 $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2+x > 0 \wedge 3x-3 > 0\} =]1, +\infty[$



$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

$$3x - 3 > 0 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\log_2(x^2 + x) \leq \log_2(3x - 3) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + x) \leq \log_2(3x - 3) + \log_2 2 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + x) \leq \log_2[2(3x - 3)] \wedge x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \leq 6x - 6 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \wedge x > 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3 \wedge x > 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

$$S = [2, 3]$$

23.6. $\log_3\left(\frac{3-x}{x}\right) > 2 - \log_3(5x)$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3-x}{x} > 0 \wedge 5x > 0 \right\} =$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : 3-x > 0 \wedge x > 0 \} =$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : x < 3 \wedge x > 0 \} =]0, 3[$$

$$\log_3\left(\frac{3-x}{x}\right) > 2 - \log_3(5x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{3-x}{x}\right) + \log_3(5x) > 2 \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{3-x}{x} \times 5x\right) > 2 \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(15 - 5x) > 2 \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 - 5x > 3^2 \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow 5x < 6 \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{6}{5} \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{6}{5}\right[; S = \left]0, \frac{6}{5}\right[$$

23.7. $3 \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3x-1}{4}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x^3 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{4} \wedge x > 0 \wedge 3x-1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 > \frac{3x-1}{4} \wedge x > 0 \wedge x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 > 3x-1 \wedge x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 4x^3 - 3x + 1 > 0 \wedge x > \frac{1}{3}$$

Os zeros inteiros de $P(x) = 4x^3 - 3x + 1$, caso existam, são divisores de 1, ou seja, 1 ou -1.

$$P(-1) = 4 \times (-1)^3 + 3 + 1 = 0$$

-1	4	0	-3	1
	-4	4	-1	
	4	-4	1	0

$$4x^3 - 3x + 1 > 0 \wedge x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 4x + 1) > 0 \wedge x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x-1)^2 > 0 \wedge x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 > 0 \wedge 2x-1 \neq 0 \wedge x > \frac{1}{3} \quad \left| (2x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \right.$$

$$\Leftrightarrow x > -1 \wedge x \neq \frac{1}{2} \wedge x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$S = \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

24.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{y} + 1 \right) (e^y - 1) \right] = \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1+y}{y} (e^y - 1) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y) \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

24.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \quad \left| \begin{array}{l} y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = e^y - 1, \text{ se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

24.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x(x+3)} = \left| \begin{array}{l} y = \ln(x+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = e^y - 1 \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$$

24.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{2 \ln(2-x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - (2 - e^y)}{2y} = \left| \begin{array}{l} y = \ln(2-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 2-x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 2 - e^y \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1 + e^y}{y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} =$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

24.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+4) - \ln 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+4}{4}\right)}{x} = \left| \begin{array}{l} y = \ln\left(\frac{x+4}{4}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = \frac{x+4}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4e^y = x+4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 4e^y - 4 \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{4e^y - 4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{4(e^y - 1)} = 0 =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$$

24.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x^3) - \ln 5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{5+x^3}{5}\right)}{x^3} = \left| \begin{array}{l} y = \ln\left(1 + \frac{x^3}{5}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{x^3}{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3 = 5(e^y - 1) \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x^3}{5}\right)}{x^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{5(e^y - 1)} =$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$$

24.7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\ln \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\ln(x-1)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\frac{1}{2} \ln(x-1)} =$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\ln(x-1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + 1 - 2}{y} = \left| \begin{array}{l} y = \ln(x-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = x-1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = e^y + 1 \\ x \rightarrow 2 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 2 \times 1 = 2$$

$$\begin{aligned}
 24.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\frac{x+3}{x} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right] = \begin{cases} y = \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{3}{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y - 1 = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3}{e^y - 1} \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{cases} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{3}{e^y - 1} \times y \right) = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \\
 &= 3 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = 3 \times \frac{1}{1} = 3
 \end{aligned}$$

Outro processo:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\frac{x+3}{x} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x \\
 &= \ln e^3 = 3 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Atendendo a que a função} \\ \text{logarítmica é contínua.} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+3} - 8}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \times 8 - 8}{x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln 2^x} - 1}{x} \\
 &= 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln 2^x} - 1}{x} = 8 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x} = \\
 &= 8 \times \ln 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x \ln 2} = 8 \ln 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \begin{cases} y = x \ln 2 \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{cases} \\
 &= 8 \ln 2 \times 1 = 8 \ln 2
 \end{aligned}$$

$$25.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \times \frac{e^x}{x^2} - 1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2 \times (+\infty) - 1}{1 - 0} = +\infty \text{ pois}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$25.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{e^x}{x^3}} = \frac{1 + 0}{+\infty} = 0 \text{ porque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\begin{aligned}
 25.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 \times 7^x - 3x^3}{7^x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - 3 \frac{x^3}{7^x} \right) = 3 - 3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{7^x} \\
 &= 3 - 3 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{x^3}} = 3 - 3 \times \frac{1}{+\infty} = 3 - 3 \times 0 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Dado que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln 7^x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 7}}{x^3} = \begin{cases} y = x \ln 7 \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases} \\
 &= (\ln 7)^3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 7}}{x^3 (\ln 7)^3} = (\ln 7)^3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 7}}{(x \ln 7)^3} \\
 &= (\ln 7)^3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^3} = (\ln 7)^3 \times (+\infty) = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 e^{-2x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^3}{e^y} \quad \left| \begin{array}{l} y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right. \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{8}{8} \frac{y^3}{e^y} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^3}} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{+\infty} = 8 \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

Pág. 152

$$25.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - x^5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^5 \left(\frac{5^x}{x^5} - 1 \right) \right] = +\infty \times (+\infty - 1) = +\infty$$

Dado que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{x^5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln 5^x}}{x^5} = (\ln 5)^5 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 5}}{(x \ln 5)^5} \quad \left| \begin{array}{l} y = x \ln 5 \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right. \\
 &= (\ln 5)^5 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^5} = (\ln 5)^5 \times (+\infty) = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)e^x] &= \lim_{y \rightarrow +\infty} [(-y+1)e^{-y}] = \begin{cases} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases} \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1-y}{e^y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-1}{e^x} = \frac{0-1}{+\infty} = 0 \text{ dado que} \\
 &\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + x^2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \frac{\ln x}{x^2} + 1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \times \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^2} + 1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \\
 &= \frac{2 \times 0 \times 0 + 1}{1 - 0} = 1 \text{ dado que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x} + 1}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^{\frac{1}{2}} + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln x + 1}{x + 2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{2} \times 0 + 0}{1 + 0} = 0, \text{ dado que } \dots
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$26.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^2}{x^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y} = \begin{cases} y = x^2 \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \frac{1}{\ln 10} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \frac{1}{\ln 10} \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 5 \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - 5 \frac{\ln x}{x} \right) \right] = \\
 &= +\infty (1 - 5 \times 0) = +\infty, \text{ dado que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x^4)}{5x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + 4 \ln x}{5x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3}{5x} + \frac{4}{5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 + \frac{4}{5} \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

Pág. 153

$$\begin{aligned}
 26.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \log x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \frac{\ln x}{\ln 10}} = \ln 10 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln x} = \\
 &= \ln 10 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{y} \times \ln \left(\frac{1}{y} \right)} = \begin{cases} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases} \\
 &= \ln 10 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{y} \times \ln(y^{-1})} = \ln 10 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\frac{\ln y}{y}} = \\
 &= -\ln 10 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}} = -\ln 10 \times \frac{1}{0^+} = \\
 &= -\ln 10 \times (+\infty) = -\infty
 \end{aligned}$$

$$26.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} = 0 + \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$26.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x^3+1)}{\ln x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x^3 \left(3 + \frac{1}{3x^3} \right) \right]}{\ln x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3 + \ln \left(3 + \frac{1}{3x^3} \right)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x + \ln \left(3 + \frac{1}{3x^3} \right)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x}{\ln x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(3 + \frac{1}{3x^3} \right)}{\ln x} =$$

$$= 3 + \frac{\ln 3}{+\infty} = 3 + 0 = 3$$

$$26.9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) \right]}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x + \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}{x} = 1 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$27.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{x} \ln x \right]} = e^{3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{3 \times 0} = 1$$

$$27.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \ln(1+x) \right]} = e^0 = 1$$

Dado que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \ln(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right]}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right)}{x} =$$

$$= 0 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 0 + 0 = 0$$

Pág. 155

$$28.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^{\frac{1}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2x} \ln \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \right]} = e^{\frac{1}{4}}$$

Dado que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2x} \ln \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \right] \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2(e^y - 1)} \times y \right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$$

$$28.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]} = e^2$$

Dado que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{e^y + 1}{e^y - 1} \times y \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} (e^y + 1) \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} =$$

$$= (1+1) \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = 2 \times \frac{1}{1} = 2$$

$$y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \Leftrightarrow$$

$$e^y = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^y - x e^y = 1 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + x e^y = e^y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1 + e^y) = e^y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$28.3. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} \times \ln x \right)} = e^1 = e$$

$$28.4. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x \times \ln x)} = e^0 = 1$$

Dado que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x \times \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \times x \ln x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) =$$

$$= 1 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \times \ln \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln y^{-1} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\ln y}{y} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$$

$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

Pág. 155

$$29.1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2n} \right)^{\frac{2n-1}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2n-1}{n+1} \ln \left(1 + \frac{3}{2n} \right) \right]} = e^{2 \times \ln 1} = e^{2 \times 0} = e^0 = 1$$

Dado que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n} = 2$

$$29.2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n+3}{3n+1} \right)^{\frac{n+2}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n+2}{n+1} \ln \left(\frac{4n+3}{3n+1} \right) \right]} = e^{(+\infty \times \ln \frac{4}{3})} = e^{+\infty} = +\infty$$

Dado que $\frac{4n+3}{3n+1} \rightarrow \frac{4}{3}$

$$29.3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n^2 \times \ln \left(\frac{n+2}{n+3} \right) \right]} = e^{-\infty} = 0$$

Dado que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n^2 \times \ln \left(\frac{n+2}{n+3} \right) \right] \stackrel{(\infty \times 0)}{=} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{2-3e^u}{e^u-1} \right)^2 \times u \right] =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(2-3e^u)^2}{e^u-1} \times \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u}{e^u-1} =$$

$$= \frac{1}{0^+} \times \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u-1}{u}} = -\infty \times \frac{1}{1} = -\infty$$

$$u = \ln \left(\frac{n+2}{n+3} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^u = \frac{n+2}{n+3} \Leftrightarrow$$

$$n e^u + 3 e^u = n + 2 \Leftrightarrow$$

$$n e^u - n = 2 - 3 e^u$$

$$n(e^u - 1) = 2 - 3 e^u$$

$$n = \frac{2 - 3 e^u}{e^u - 1}$$

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow 0^+$$

porque $\frac{n+2}{n+3} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Pág. 155

$$29.4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^3+n}{n^2+2} \right)^{\frac{1-n}{3n+2}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1-n}{3n+2} \ln \left(\frac{n^3+n}{n^2+2} \right) \right]} = e^{\frac{1}{3} \times (+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

Dado que $\frac{1-n}{3n+2} \rightarrow -\frac{1}{3}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+n}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Dado que $\frac{1-n}{3n+2} \rightarrow -\frac{1}{3}$; $\lim \frac{n^3+n}{n^2+2} = \lim \frac{n^3}{n^2} = \lim n = +\infty$

$$29.5. \lim \left(\frac{3n-1}{n^2+n} \right)^{\frac{1-2n}{4n+1}} = e^{\lim \left[\frac{1-2n}{4n+1} \ln \left(\frac{3n-1}{n^2+n} \right) \right]} = e^{\frac{1}{2} \times \ln 0^+} = e^{\frac{1}{2} \times (-\infty)}$$

$$= e^{+\infty} = +\infty \text{ dado que:}$$

$$\frac{1-2n}{4n+1} \rightarrow -\frac{1}{2}, \lim \frac{3n-1}{n^2+n} = \lim \frac{3n}{n^2} = \lim \frac{3}{n} = 0^+ \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Pág. 158

$$30.1. C = 12\,000 \left(1 + \frac{2,1}{100} \right)^4 \approx 13\,040,20$$

Capital acumulado: 13 040,20 €

$$30.2. 12\,000 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^4 = 12\,837 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{100} \right)^4 = \frac{12\,837}{12\,000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[4]{\frac{12\,837}{12\,000}} \Leftrightarrow r = 100 \sqrt[4]{\frac{12\,837}{12\,000}} - 100 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow r \approx 1,7$$

$$r\% \approx 1,7\%$$

$$31.1. \lim \left(1 + \frac{2}{3n} \right)^{2n} = \left[\lim \left(1 + \frac{2}{3n} \right)^n \right]^2 = \left(e^{\frac{2}{3}} \right)^2 = e^{\frac{4}{3}}$$

$$31.2. \lim \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n-1} = \lim \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \right)^n \times \lim \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{\lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \times 1^{-1} = \frac{e^2}{e^1} = e$$

$$31.3. \lim \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{-n} = \lim \left(1 + \frac{2}{-n} \right)^{-n} = e^2$$

$$31.4. \lim \left(2 + \frac{2-n}{n+1} \right)^{n-1} = \lim \left(\frac{2n+2+2-n}{n+1} \right)^{n-1} = \lim \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{n-1}$$

$$= \lim \left(\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}} \right)^n \times \left(\lim \frac{n+4}{n+1} \right)^{-1} = \frac{\lim \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \times 1^{-1} =$$

$$= \frac{e^4}{e} \times 1 = e^3$$

$$31.5. \lim \left(\frac{n^2+2}{n^2+4} \right)^{n^2-1} = \lim \left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} \right)^{n^2} \times \left(\lim \frac{n^2+2}{n^2+4} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{\lim \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)^{n^2}}{\lim \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)^{n^2}} \times \left(\lim \frac{n^2}{n^2} \right)^{-1} = \frac{e^2}{e^4} \times 1^{-1} = e^{-2}$$

$$31.6. \lim \left(\frac{3-2n}{1-2n} \right)^{3n-1} = \lim \left(\frac{1-\frac{3}{2n}}{1-\frac{1}{2n}} \right)^{3n} \times \left(\lim \frac{3-2n}{1-2n} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{\left[\lim \left(1 - \frac{3}{2n} \right)^n \right]^3}{\left[\lim \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n \right]^3} \times 1^{-1} = \left(\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} \right)^3 \times 1 = \left(e^{\frac{3-\frac{1}{2}}{2}} \right)^3 = e^{-3}$$

$$31.7. \lim \left(\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right)^n = \lim \left(\frac{6n-2-2n-1}{4n+2} \right)^n = \lim \left(\frac{4n-3}{4n+2} \right)^n$$

$$= \lim \left(\frac{1-\frac{3}{4n}}{1+\frac{2}{4n}} \right)^n = \frac{\lim \left(1 - \frac{3}{4n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{2}{4n} \right)^n} = \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = e^{-\frac{5}{4}}$$

$$31.8. \lim \left(\sqrt[3]{\frac{3n+2}{1+3n}} \right)^{2n} = \lim \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^{\frac{2n}{3}} = \lim \left(\frac{1+\frac{2}{3n}}{1+\frac{1}{3n}} \right)^{n \times \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{\left[\lim \left(1 + \frac{2}{3n} \right)^n \right]^{\frac{2}{3}}}{\left[\lim \left(1 + \frac{1}{3n} \right)^n \right]^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(e^{\frac{2-\frac{1}{3}}{3}} \right)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{9}}$$

32.1. Seja a condição $u_n = \frac{1}{1+2n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Para $n=1, u_1 = \frac{1}{1+2 \times 1} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, obtém-se uma proposição verdadeira.
- Admitamos, por hipótese, que a condição se verifica para determinado valor de $n \in \mathbb{N}$.

Provemos que também é válida para $n+1$, ou seja,

$$u_{n+1} = \frac{1}{1+2(n+1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} = \frac{\frac{1}{1+2n}}{1+\frac{2}{1+2n}} = \text{Fórmula de recorrência e por hipótese}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+2n}{1+2n+2}} = \frac{1}{1+2(n+1)}$$

Portanto, a propriedade é hereditária. Pelo princípio de indução matemática ficou provado

que $u_n = \frac{1}{1+2n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

4.1. Limites notáveis

$$32.2. \lim(u_n \times v_n)^{v_n} = \lim\left(\frac{1}{1+2n} \times 2n\right)^{2n} = \lim\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^{2n} =$$

$$= \lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{2n} = \frac{1}{\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$33.1. 2^{-x} = 0,25 \Leftrightarrow 2^{-x} = \frac{25}{100} \Leftrightarrow 2^{-x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$S = \{2\}$$

$$33.2. 2^x + \frac{8}{2^{x+1}} = 5 \Leftrightarrow 2^x + \frac{8}{2^x \times 2} = 5 \Leftrightarrow 2^x + \frac{4}{2^x} - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \times 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow 2^x = 1 \vee 2^x = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^0 \vee 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$33.3. 3^{-x} + 3^{1+x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{3^x} + 3^x \times 3 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 \times (3^x)^2 - 4 \times 3^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \times (3^x)^2 - 4 \times 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \vee 3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \vee 3^x = 3^0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0$$

$$S = \{-1, 0\}$$

$$33.4. 2^{x-1} - 8 \times 8^x = 0 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^3 \times (2^3)^x \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^{3+3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+3x = x-1 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

$$S = \{-2\}$$

$$33.5. 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 13 \Leftrightarrow 3^x \times 3^{-1} + 3^x + 3^x \times 3 = 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x \left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right) = 13 \Leftrightarrow 3^x \times \frac{13}{3} = 13 \Leftrightarrow 3^x = 13 \times \frac{3}{13}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

$$S = \{1\}$$

$$34.1. 3^x - 3 \times 9^x < 0 \Leftrightarrow 3^x < 3^1 \times (3^2)^x \Leftrightarrow 3^x < 3^{1+2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < 1 + 2x \Leftrightarrow x > -1$$

$$S =]-1, +\infty[$$

$$34.2. (4^x - 8)(3 - 9^x) < 0$$

- $4^x - 8 = 0 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
- $3 - 9^x = 0 \Leftrightarrow 3 = (3^2)^x \Leftrightarrow 3^1 = 3^{2x} \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
 $3 - 9^x > 0 \Leftrightarrow 3 > 3^{2x} \Leftrightarrow 1 > 2x \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4^x - 8$	-	-	-	0	+
$3 - 9^x$	+	0	-	-	-
P	-	0	+	0	-

$$(4^x - 8)(3 - 9^x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$S =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$35.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} =$$

$$= 1 - 1 = 0$$

$$35.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{5x} = \frac{1}{5} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^2(e^{3x} - 1)}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{5} \times 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = \frac{3e^2}{5} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \left. \begin{array}{l} y = 3x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{3e^2}{5} \times 1 = \frac{3e^2}{5}$$

$$35.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+3} - e}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e(e^{x+2} - 1)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} = \left. \begin{array}{l} y = x+2 \\ \text{Se } x \rightarrow -2, y \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{e}{-4} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -\frac{e}{4} \times 1 = -\frac{e}{4}$$

$$35.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{1 - e^{x-1}} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{e^{x-1} - 1} = -\lim_{x \rightarrow 1} x \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1} - 1} =$$

$$= -1 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = -\frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = -\frac{1}{1} = -1 \left. \begin{array}{l} y = x-1 \\ \text{Se } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$35.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{-x} - e^x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{-x}(e^{2x} - 1)} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-x}} \times \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = \left. \begin{array}{l} y = 2x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

$$35.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x^2 \binom{0}{0}}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - (y+1)^2}{y} = \left. \begin{array}{l} y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1 \\ \text{Se } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - y^2 - 2y - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + 2y}{y} =$$

$$= 1 - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(y+2)}{y} = 1 - \lim_{y \rightarrow 0} (y+2) = 1 - 2 = -1$$

$$36.1. \log_2 0,25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2$$

$$36.2. \log_{\frac{1}{2}} 0,25 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$36.3. \log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$36.4. \log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{3} = \log_{\sqrt{3}} 3^{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt{3}} \left[(\sqrt{3})^2 \right]^{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

4.1. Limites notáveis

$$36.5. \frac{(\log 0,001)^2}{2 \times \log 1\,000\,000} = \frac{(\log 10^{-3})^2}{2 \times \log 10^6} = \frac{(-3)^2}{2 \times 6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$36.6. \frac{\log_2 1 + \log_2 0,01}{\log_3 \left(\frac{1}{81}\right) \times \log_2 \sqrt[4]{8}} = \frac{0 + \log 10^{-2}}{\log_3 \left(\frac{1}{3^4}\right) \times \log_2 \sqrt[4]{2^3}} = \frac{-2}{\log_3 3^{-4} \times \log_2 2^{\frac{3}{4}}} = \frac{-2}{-4 \times \frac{3}{4}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Leftrightarrow y = -2 \vee y = 4$$

$$(e^x)^2 - 2e^x - 8 = 0 \Leftrightarrow e^x = -2 \vee e^x = 4 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = \ln 4 \Leftrightarrow x = 2 \ln 2$$

$$(e^x)^2 - 2e^x - 8 < 0 \Leftrightarrow e^x > -2 \wedge e^x < 4 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge x < \ln 4 \Leftrightarrow x < 2 \ln 2$$

Zeros e sinal de $e^x - 2$:

$$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

$$e^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \ln 2$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$2 \ln 2$	$+\infty$
N	-	-	-	0
P	-	0	+	+
Q	+		-	0

$$S =]\ln 2, 2 \ln 2[$$

$$39.1. 3^{2+\log_3 x} = 3^2 \times 3^{\log_3 x} = 9 \times x = 9x$$

$$39.2. 3^{2 \log_3 x} = 3^{\log_3 x^2} = x^2$$

$$39.3. 3^{2-\log_3 x} = \frac{3^2}{3^{\log_3 x}} = \frac{9}{x}$$

$$39.4. 2^{4 \log_2 \sqrt{x} + 2 \log_2 x} = 2^{\log_2 (\sqrt{x})^4} \times 2^{\log_2 x^2} = (\sqrt{x})^4 \times x^2 = x^2 \times x^2 = x^4$$

$$39.5. e^{\ln x + \ln \frac{1}{x}} = e^{\ln x} \times e^{\ln \frac{1}{x}} = x \times \frac{1}{x} = 1$$

$$39.6. 2^{3 \log_8 x} = (2^3)^{\log_8 x} = 8^{\log_8 x} = x$$

$$39.7. \log_2 \frac{2^8}{16} - \log_3 \frac{1}{3^x} = \log_2 \frac{2^8}{2^4} - \log_3 3^{-x} = \log_2 2^4 - (-x) = 4 + x$$

$$39.8. \log_3 9^{2x+1} + \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = \log_3 (3^2)^{2x+1} + \ln \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right) = \log_3 3^{4x+2} + \ln e^{-\frac{1}{2}} = 4x + 2 - \frac{1}{2} = 4x + \frac{3}{2}$$

$$40.1. \log_3 \frac{\sqrt[3]{27} \times \sqrt{3}}{81} = \log_3 \frac{3 \times 3^{\frac{1}{2}}}{3^4} = \log_3 \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^4} = \log_3 3^{\frac{3}{2}-4} = \log_3 3^{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}$$

$$40.2. \log \frac{0,001 \times \sqrt{1000}}{(0,01)^3} = \log \frac{10^{-3} \times (10^3)^{\frac{1}{2}}}{(10^{-2})^3} = \log \frac{10^{-3+\frac{3}{2}}}{10^{-6}} = \log_{10} 10^{-3+\frac{3}{2}+6} = \log_{10} 10^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2}$$

$$40.3. \log_2 \frac{64^{10} \times (0,5)^{100}}{\sqrt{32^{10}} \times 0,25^{10}} = \log_2 \frac{(2^6)^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{\sqrt{(2^5)^{10}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{10}} = \log_2 \frac{2^{60} \times 2^{-100}}{(2^{50})^{\frac{1}{2}} \times (2^{-2})^{10}} = \log_2 \frac{2^{-40}}{(2^{50})^{\frac{1}{2}} \times (2^{-2})^{10}} = \log_2 \frac{2^{-40}}{2^{25} \times 2^{-20}} = \log_2 2^{-45} = -45$$

Pág. 159

$$37.1. 7 \times 9^{2x-1} + 3^{4x-1} + 2 \times 9^x = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 \times 9^{2x} \times 9^{-1} + 3^{4x} \times 3^{-1} + 2 \times (3^2)^x = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 \times (3^2)^{2x} \times \frac{1}{9} + 3^{4x} \times \frac{1}{3} + 2 \times 3^{2x} = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{9} \times 3^{4x} + \frac{1}{3} \times 3^{4x} + 2 \times 3^{2x} - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 \times 3^{4x} + 3 \times 3^{4x} + 18 \times 3^{2x} - 144 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 \times 3^{4x} + 18 \times 3^{2x} - 144 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \times (3^{2x})^2 + 9 \times 3^{2x} - 72 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+1440}}{10} \Leftrightarrow 3^{2x} = \frac{-9 \pm 39}{10}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} = -\frac{24}{5} \vee 3^{2x} = 3 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$37.2. 4e^{-10x} = e^{-2x} - 3e^{-6x} \Leftrightarrow 4e^{-10x} \times e^{10x} = (e^{-2x} - 3e^{-6x}) \times e^{10x}$$

$$\Leftrightarrow 4 = e^{8x} - 3e^{4x} \Leftrightarrow (e^{4x})^2 - 3e^{4x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{4x} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow e^{4x} = -1 \vee e^{4x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee 4x = \ln 4 \Leftrightarrow 4x = \ln 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 2 \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{\ln 2}{2} \right\}$$

$$38.1. x^2 \times 2^x + x \times 2^{x+2} > 0 \Leftrightarrow x^2 \times 2^x + x \times 2^x \times 2^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x (x^2 + 4x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow (x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$$

$$38.2. e^{3x} + 5e^x < 6e^{2x} \Leftrightarrow e^x (e^{2x} - 6e^x + 5) < 0 \Leftrightarrow (e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 5 < 0$$

Fazendo $y = e^x$, temos:

$$y^2 - 6y + 5 < 0 \Leftrightarrow y > 1 \wedge y < 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x > 1 \wedge e^x < 5 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < \ln 5$$

$$S =]0, \ln 5[$$

Cálculos auxiliares
 $y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}$
 $\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm 4}{2}$
 $\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 5$

$$38.3. e^x < \frac{8}{e^x - 2} \Leftrightarrow e^x - \frac{8}{e^x - 2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 - 2e^x - 8}{e^x - 2} < 0$$

Zeros e sinal de $(e^x)^2 - 2e^x - 8$.

Seja $y = e^x$.

4.1. Limites notáveis

$$\begin{aligned}
 41.1. \quad f(x) &= \log_2(\sqrt{x})^4 - \frac{\log_2(16x^2)}{\log_2 4} = \log_2 x^2 - \frac{\log_2(16x^2)}{2} = \\
 &= \log_2 x^2 - \frac{1}{2} \log_2(16x^2) = \log_2 x^2 - \log_2(16x^2)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= 2 \log_2 x - \log_2(4x) = 2 \log_2 x - (\log_2 4 + \log_2 x) = \\
 &= 2 \log_2 x - \log_2 x - \log_2 2^2 = \\
 &= \log_2 x - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 41.2. \quad f(x) \leq 0 &\Leftrightarrow \log_2 x - 2 \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \log_2 x \leq 2 \wedge x > 0 \\
 &\Leftrightarrow x \leq 2^2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 4 \Leftrightarrow x \in]0, 4[\\
 \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\} &=]0, 4[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 41.3. \quad f\left(\frac{1}{1024}\right) - 6 \times f\left(\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt{32}}\right) &= f\left(\frac{1}{2^{10}}\right) - 6 \times f\left(\frac{(2^7)^{\frac{1}{3}}}{(2^5)^{\frac{1}{2}}}\right) \begin{matrix} 32=2^5 \\ 128=2^7 \\ 1024=2^{10} \end{matrix} \\
 &= f(2^{-10}) - 6f\left(2^{\frac{7-\frac{5}{2}}{3-\frac{5}{2}}}\right) = f(2^{-10}) - 6f\left(2^{\frac{1}{6}}\right) = \\
 &= \log_2 2^{-10} - 2 - 6\left(\log_2 2^{\frac{1}{6}} - 2\right) = \\
 &= -10 - 2 - 6\left(-\frac{1}{6} - 2\right) = -12 + 1 + 12 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 41.4. \quad a) \quad 2^{f(x)+1} &= x-1 \Leftrightarrow 2^{\log_2 x - 2 + 1} = x-1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2^{\log_2 x} \times 2^{-1} = x-1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = x-1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 2x-2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \\
 S &= \{2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad 2f(x)+1 &> f(2x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2(\log_2 x - 2) + 1 > \log_2(2x) - 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2 \log_2 x - 4 + 1 > \log_2(2x) - 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log_2 x^2 > \log_2(2x) + 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log_2 x^2 - \log_2(2x) > 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2}{2x}\right) > 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} > 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x > 4 \\
 S &=]4, +\infty[
 \end{aligned}$$

$$42.1. \quad \log_{\sqrt{a}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}} = \frac{\log_a b}{\log_a a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}} = 2 \log_a b$$

$$42.2. \quad \log_{a^2} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^2} = \frac{\log_a b}{2} = \frac{1}{2} \log_a b$$

$$42.3. \quad \log_{\frac{1}{a}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a b}{\log_a a^{-1}} = \frac{\log_a b}{-1} = -\log_a b$$

$$42.4. \quad \log_{a^k} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^k} = \frac{\log_a b}{k} = \frac{1}{k} \log_a b$$

$$\begin{aligned}
 43.1. \quad \log_3 x = 2 &\Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9 \\
 S &= \{9\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43.2. \quad \log_x 81 = 4 &\Leftrightarrow 81 = x^4 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^4 = 3^4 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 3 \\
 S &= \{3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43.3. \quad \log_{\frac{1}{3}} |x| = -1 &\Leftrightarrow |x| = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow |x| = 3 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \\
 S &= \{-3, 3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43.4. \quad \log_2(3x-2) &= 2 + \log_2(x-2) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log_2(3x-2) = \log_2 2^2 + \log_2(x-2) \wedge \\
 &\quad \wedge 3x-2 > 0 \wedge x-2 > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log_2(3x-2) = \log_2[4(x-2)] \wedge x > \frac{2}{3} \wedge x > 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3x-2 = 4x-8 \wedge x > 2 \Leftrightarrow x = 6 \\
 S &= \{6\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43.5. \quad 2 \log(2x+1) &= \log(8x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log(2x+1)^2 = \log(8x) \wedge 2x+1 > 0 \wedge 8x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (2x+1)^2 = 8x \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 8x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\
 S &= \left\{\frac{1}{2}\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43.6. \quad \ln(18x-3) &= \ln(6x-1) + \ln(4x^2-6) \\
 D &= \{x \in \mathbb{R} : 18x-3 > 0 \wedge 6x-1 > 0 \wedge 4x^2-6 > 0\} = \\
 &= \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[\quad \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \\
 &\quad \begin{matrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{matrix} \\
 18x &> 3 \wedge 6x > 1 \wedge 2x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x > \frac{1}{6} \wedge x > \frac{1}{6} \wedge \left(x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{6}}{2} \\
 \ln(18x-3) &= \ln(6x-1) + \ln(4x^2-6) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \ln[3(6x-1)] - \ln(6x-1) = \ln(4x^2-6) \wedge x > \frac{\sqrt{6}}{2} \\
 &\Leftrightarrow \ln 3 + \ln(6x-1) - \ln(6x-1) = \ln(4x^2-6) \wedge x > \frac{\sqrt{6}}{2} \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 - 6 = 3 \wedge x > \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \wedge x > \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2}\right) \wedge x > \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \\
 S &= \left\{\frac{3}{2}\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43.7. \quad (\log x)^2 - 2 \log x + 1 &= 0 \Leftrightarrow (\log x - 1)^2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 10 \\
 S &= \{10\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43.8. \quad \log_2 x^2 - 3 \log_2 x + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2 \log_2 x - 3 \log_2 x + 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\log_2 x + 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \\
 S &= \{2\}
 \end{aligned}$$

4.1. Limites notáveis

43.9. $\log_2^2 x - 4 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\log_2 x = -2 \vee \log_2 x = 2) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2^{-2} \vee x = 2^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \vee x = 4$

$$S = \left\{ \frac{1}{4}, 4 \right\}$$

43.10. $(\log_2 x)^2 - (\log_2(2x))^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = (\log_2(2x))^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\log_2 x = \log_2(2x) \vee \log_2 x = -\log_2(2x)) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x = 2x \vee -\log_2 x = \log_2(2x)) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x = 0 \vee \log_2 x^{-1} = \log_2(2x)) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2x \wedge x > 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \left(x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}; S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

44.1. $\log_2(x-1) - \log_2(4x-7) \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2(4x-7) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x-1 \geq 4x-7 \wedge x-1 > 0 \wedge 4x-7 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x \leq 6 \wedge x > 1 \wedge x > \frac{7}{4} \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x > \frac{7}{4}$

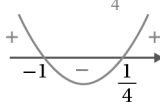
$$S = \left] \frac{7}{4}, 2 \right]$$

44.2. $\log_3(x+2) - \log_3(x+7) > 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(x+2) > \log_3(x+7) + \log_3 3 \wedge$
 $\wedge x+2 > 0 \wedge x+7 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(x+2) > \log_3[3(x+7)] \wedge x > -2 \wedge x > -7 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x+2 > 3x+21 \wedge x > -2 \Leftrightarrow 2x < -19 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x < -\frac{19}{2} \wedge x > -2 \Leftrightarrow x \in \emptyset; S = \emptyset$

44.3. $\log_4(x+2) \geq \log_2(2x+1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+2)}{\log_2 4} \geq \log_2(2x+1) \wedge x+2 > 0 \wedge 2x+1 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+2)}{2} \geq \log_2(2x+1) \wedge x > -2 \wedge x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_2(x+2) \geq 2\log_2(2x+1) \wedge x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_2(x+2) \geq \log_2(2x+1)^2 \wedge x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x+2 \geq (2x+1)^2 \wedge x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x+2 \geq 4x^2+4x+1 \wedge x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4x^2+3x-1 \leq 0 \wedge x > -\frac{1}{2}$

$$S = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right]$$

Cálculos auxiliares
 $4x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{4}$

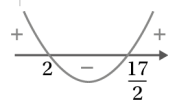


44.4. $\log_2^2 x - 4 \leq 0$. Seja $y = \log_2 x$.
 $y^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq -2 \wedge y \leq 2$
 $\log_2^2 x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 x \geq -2 \wedge \log_2 x \leq 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \geq 2^{-2} \wedge x \leq 4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq 4$

$$S = \left[\frac{1}{4}, 4 \right]$$

44.5. $\ln\left(\frac{5x-2}{2}\right) \geq 2\ln(4-x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5x-2}{2}\right) \geq \ln(4-x)^2 \wedge 5x-2 \geq 0 \wedge 4-x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{5x-2}{2} \geq (4-x)^2 \wedge x > \frac{2}{5} \wedge x < 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{5x-2}{2} \geq 16-8x+x^2 \wedge \frac{2}{5} < x < 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x-2 \geq 32-16x+2x^2 \wedge \frac{2}{5} < x < 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x^2-21x+34 \leq 0 \wedge \frac{2}{5} < x < 4 \Leftrightarrow$

Cálculos auxiliares
 $2x^2 - 21x + 34 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 8 \times 34}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{21 \pm 13}{4}$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{17}{2}$



$$S = [2, 4[$$

44.6. $\log_2^2 x - 4 < 3\log_2 x \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 < 0$

Fazendo $y = \log_2 x$:

$$y^2 - 3y - 4 < 0 \Leftrightarrow y > -1 \wedge y < 4$$


$$\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x > -1 \wedge \log_2 x < 4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 2^{-1} \wedge x < 2^4 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}, 16 \right[$$

$$S = \left] \frac{1}{2}, 16 \right[$$

Cálculos auxiliares
 $y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$
 $\Leftrightarrow y = -1 \vee y = 4$



44.7. $\ln(3e^x - 2) < 2x \Leftrightarrow 3e^x - 2 < e^{2x} \wedge 3e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 > 0 \wedge e^x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 > 0 \wedge x > \ln \frac{2}{3}$$

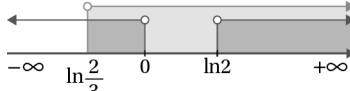
Fazendo $y = e^x$:

$$y^2 - 3y + 2 > 0 \Leftrightarrow y < 1 \vee y > 2$$

$$(e^x) - 3e^x + 2 > 0 \wedge x > \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$


$$\Leftrightarrow (e^x < 1 \vee e^x > 2) \wedge x > \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < 0 \vee x > \ln 2) \wedge x > \ln \frac{2}{3}$$



$$S = \left] \ln \frac{2}{3}, 0 \right[\cup \left] \ln 2, +\infty \right[$$

Cálculos auxiliares
 $y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$
 $\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 2$



$$44.8. \frac{\ln x + 1}{3\ln^2 x + 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{3\ln^2 x + 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x + 1 - 3\ln^2 x - 1}{3\ln^2 x + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{3\ln^2 x - \ln x}{3\ln^2 x + 1} < 0 \Leftrightarrow$$

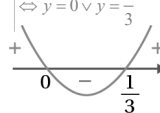
$$\Leftrightarrow 3\ln^2 x - \ln x > 0 \Leftrightarrow (3\ln^2 x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+)$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln x < 0 \vee \ln x > \frac{1}{3} \right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x < 1 \vee x > e^{\frac{1}{3}} \right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, 1[\cup]\sqrt[3]{e}, +\infty[$$

$$S =]0, 1[\cup]\sqrt[3]{e}, +\infty[$$

$\begin{cases} \text{Cálculos auxiliares} \\ 3y^2 - y = 0 \\ \Leftrightarrow y(3y-1) = 0 \\ \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \frac{1}{3} \end{cases}$


Pág. 160

$$45.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} =$$

$$= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = 2 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = 2 \times \frac{1}{1} = 2$$

$\begin{cases} y = \ln(1+2x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 1+2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = e^y - 1 \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{cases}$

$$45.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\begin{cases} y = \ln x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = x \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{cases}$

$$45.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)^2}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln(2x+1)}{x} = 2 \times 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{2x} =$$

$$= 4 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = 4 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = 4 \times \frac{1}{1} = 4$$

$\begin{cases} y = \ln(2x+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 2x+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = e^y - 1 \\ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{cases}$

$$45.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{x+1}}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$\begin{cases} y = \ln(x+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow x = e^y - 1 \end{cases}$

$$45.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\ln(2-x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{\ln(2-x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} x \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(2-x)} = 1 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 - e^y - 1}{y} =$$

$$= -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -1$$

$\begin{cases} y = \ln(2-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 2-x \Leftrightarrow \\ x = 2 - e^y \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{cases}$

$$45.6. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\ln(6-x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)}{\ln(6-x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} x \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{6 - e^y - 5}{y} = 5 \times \left(-\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \right) =$$

$$= 5 \times (-1) = -5$$

$\begin{cases} y = \ln(6-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 6-x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 6 - e^y \\ \text{Se } x \rightarrow 5, y \rightarrow 0 \end{cases}$

$$45.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+2x) - \ln 2}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2+2x}{2}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = 1$$

$\begin{cases} y = \ln(1+x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+1 = e^y \\ \Leftrightarrow x = e^y - 1 \\ \text{Se } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0 \end{cases}$

$$45.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sqrt{x}}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2} \ln x}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$\begin{cases} y = \ln x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = e^y \\ \text{Se } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0 \end{cases}$

$$45.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\ln(2x+1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x(e^{2x} - 1)}{\ln(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (-e^x) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{2x}{\ln(2x+1)} \right) =$$

$$= -1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(2x+1)} =$$

$$= -1 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = -1 \times 1 \times 1 = -1$$

$\begin{cases} y = 2x \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \\ u = \ln(2x+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^u = 2x+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = e^u - 1 \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \end{cases}$

$$45.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{3x}}{\ln(2x+1)} \stackrel{\left(\frac{\infty - \infty}{\infty}\right)}{=} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{3x} - e^x}{3x} \times \frac{3x}{\ln(2x+1)} \right) =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}(1 - e^{-2x})}{3x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\ln\left[x\left(2 + \frac{1}{x}\right)\right]} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{3x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-2x}) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\ln x + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)} =$$

$$= -[+\infty \times 1 \times (+\infty)] = -\infty, \text{ dado que:}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{3x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ $\begin{cases} y = 3x \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-2x}) = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\ln x + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x}} =$

$$= \frac{3}{0^+ + \frac{\ln 2}{+\infty}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$45.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{x^2 + x} . \text{ Fazendo } y = e^x :$$

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = y^2 - 3y + 2 =$$

$$= (y-1)(y-2) = (e^x - 1)(e^x - 2)$$

$\begin{cases} \text{Cálculos auxiliares} \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \\ \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^x - 2)}{x(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2}{x+1} = 1 \times \frac{e^0 - 2}{0+1} = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$45.12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log(x+1)^3 - 3 \log x \right] \stackrel{\left(\frac{\infty - \infty}{\infty}\right)}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log(x+1)^3 - \log x^3 \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{(x+1)^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{x+1}{x} \right)^3 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3 \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 3 \times \log 1 = 0$$

4.1. Limites notáveis

$$\begin{aligned}
 45.13. \quad \lim_{x \rightarrow 1} [\log(x^2 - 1) - \log(x - 1)] & \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \log \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \log(x + 1) = \log 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 45.14. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln(x^2 - 9) - 2 \ln x)] &= \quad (x > 3) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln(x^2 - 9) - \ln x^2)] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\frac{x^2 - 9}{x^2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{9}{x^2} \right) \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\left(1 - \frac{3}{x} \right) \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right) \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) + \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right) \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) + x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) \right] + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -3 + 3 = 0, \text{ dado que:} \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) \right] & \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{-3}{e^y - 1} \times y \right) = \begin{cases} y = \ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) \\ \Leftrightarrow e^y = 1 - \frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow e^y - 1 = -\frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow x = \frac{-3}{e^y - 1} \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \end{cases} \\
 &= -3 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}} = -3 \times \frac{1}{1} = -3 \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right] & \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{e^y - 1} \times y \right) = \begin{cases} y = \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \\ \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow e^y - 1 = \frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow x = \frac{3}{e^y - 1} \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \end{cases} \\
 &= 3 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}} = 3 \times \frac{1}{1} = 3
 \end{aligned}$$

45.15. De acordo com 45.14.:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(\ln(x^2 - 9) - \ln x^2)] &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) \right] + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right] = \\
 &= -3 + 3 = 0, \text{ dado que}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) \right] & \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{-3}{e^y - 1} \times y \right) = \begin{cases} y = \ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) \\ \Leftrightarrow x = \frac{-3}{e^y - 1} \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \end{cases} \\
 &= -3 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}} = -3 \times 1 = -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right] & \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{e^y - 1} \times y \right) = \begin{cases} y = \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \\ \Leftrightarrow x = \frac{3}{e^y - 1} \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \end{cases} \\
 &= 3 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}} = 3 \times 1 = 3
 \end{aligned}$$

$$46.1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \ln x}{1 - \ln x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}} = \frac{2 + 0}{0 - 0} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$46.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \ln x - x) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) \right] = +\infty \times (2 \times 0 - 1) = -\infty$$

$$\begin{aligned}
 46.3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x - 2)}{x} & \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(1 - \frac{2}{x} \right) \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \left(1 - \frac{2}{x} \right)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{x} \right)}{x} = 0 + \frac{0}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46.4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x + 1)} & \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x}} = \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{0}{+\infty}} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46.5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x + 1)} & \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]}{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\ln x}}{1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x}} = \frac{2 + \frac{0}{+\infty}}{1 + \frac{0}{+\infty}} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46.6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{\ln(x + 3)} & \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln \left[x \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right]} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x + \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x}} = \\
 &= \frac{1}{0 + 0} = \frac{1}{0^+} = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46.7. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3x \ln \left(\frac{x + 2}{x} \right) \right] & \stackrel{(\infty \times 0)}{=} 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right] = \begin{cases} y = \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{2}{x} \\ \Leftrightarrow e^y - 1 = \frac{2}{x} \\ \Leftrightarrow x = \frac{2}{e^y - 1} \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \end{cases} \\
 &= 3 \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{e^y - 1} \times y \right) = 6 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}} = \\
 &= 6 \times \frac{1}{1} = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46.8. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{\log x} & \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{\frac{\ln x}{\ln 10}} = \ln 10 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{\ln x} = \\
 &= \ln 10 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right) = \ln 10 \times (1 + 0) = \ln 10
 \end{aligned}$$

4.1. Limites notáveis

$$\begin{aligned}
 47.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}(e^{-x} - 1)}{x^2} = \left. \begin{array}{l} y = 3x \Leftrightarrow x = \frac{y}{3} \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 1) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{\left(\frac{1}{3}y\right)^2} \times (0 - 1) = \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{\frac{1}{9}y^2} \times (-1) = -9 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2} = -9 \times (+\infty) = -\infty
 \end{aligned}$$

$$47.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+3^x}{3x+3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{3^x} + 1}{3 \times \frac{x}{3^x} + 1} = \frac{\frac{2}{+\infty} + 1}{3 \times 0 + 1} = \frac{0 + 1}{1} = 1$$

dado que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\ln 3^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x \ln 3}} = \frac{1}{\ln 3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}} = \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = \left. \begin{array}{l} y = x \ln 3 \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{\ln 3} \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 47.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^5}{2^x + x^{10}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x^5}{e^x}}{\frac{2^x}{e^x} + \frac{x^{10}}{e^x}} = \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x^5}{e^x}}{\left(\frac{2}{e}\right)^x + \frac{x^{10}}{e^x}} &= \frac{1+0}{0+0} = +\infty, \text{ dado que:}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^5}} = \frac{1}{+\infty} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^x = 0 \text{ porque } 0 < \frac{2}{e} < 1$$

$$\begin{aligned}
 47.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(2e^x - 3)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x - \ln(2e^x - 3)] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x}{2e^x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{2 - \frac{3}{e^x}} \right) \ln \frac{1}{2} = -\ln 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 47.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - \ln(3 - 2e^x)] &= (-\infty - \ln(3 - 2e^{-\infty})) = \\
 &= -\infty - \ln(3 - 0) = -\infty
 \end{aligned}$$

$$48.1. \lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{1}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{1}{x-3} \ln(4-x) \right]} = e^{-1} = \frac{1}{e}, \text{ dado que:}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{1}{x-3} \times \ln(4-x) \right] &= \left. \begin{array}{l} y = \ln(4-x) \\ \Leftrightarrow e^y = 4-x \\ \Leftrightarrow x = 4 - e^y \\ x \rightarrow 3 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right\} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4 - e^y - 3} \times y \right) = \\
 &= -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = -\frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = -\frac{1}{1} = -1
 \end{aligned}$$

$$48.2. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{0^+} \times \ln \left(\frac{1}{0^+} \right)} = e^{+\infty \times (+\infty)} = +\infty$$

$$48.3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} \ln(1 + \cos x) \right]} = e^1 = e, \text{ dado que:}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} \times \ln(1 + \cos x) \right] &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^y - 1} \times y \right) = \left. \begin{array}{l} y = \ln(1 + \cos x) \\ \Leftrightarrow e^y = 1 + \cos x \\ \Leftrightarrow \cos x = e^y - 1 \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1
 \end{aligned}$$

$$48.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln x} \ln(x+2) \right]} = e^1 = e, \text{ dado que:}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln x} \times \ln(x+2) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right]}{\ln x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{\ln x} \right) = 1
 \end{aligned}$$

$$48.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \ln(2x^2 + 3) \right]} = e^0 = 1, \text{ dado que:}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \ln(2x^2 + 3) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x^2 + 3)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x^2 \left(2 + \frac{3}{x^2} \right) \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln \left(2 + \frac{3}{x^2} \right)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \ln \left(2 + \frac{3}{x^2} \right)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(2 + \frac{3}{x^2} \right)}{x} \\
 &= 2 \times 0 + \frac{\ln 2}{+\infty} = 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$48.6. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x \times \ln(\tan x)]} = e^0 = 1, \text{ dado que:}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x \times \ln(\tan x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin x}{\tan x} \times \tan x \times \ln(\tan x) \right] = \left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{\tan x} \\ \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\tan x} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \ln \left(\frac{1}{y} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y^{-1}}{y} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x \times \left(-\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} \right) = 1 \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$48.7. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x-x^2} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \times \ln \left(\frac{1}{x-x^2} \right) \right]} = e^0 = 1, \text{ dado que:}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \times \ln \left(\frac{1}{x-x^2} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{x-x^2} \times (x-x^2) \times \ln \left(\frac{1}{x-x^2} \right) \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x-x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x-x^2) \times \ln \left(\frac{1}{x-x^2} \right) \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(1-x)} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \times \ln y \right) = \left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{x-x^2} \Leftrightarrow x-x^2 = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{1} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0
 \end{aligned}$$



$$49.1. \lim \left[\left(\sqrt{1+n^2} \right)^{-n^2} \times n^{n^2} \right] = \lim \frac{n^{n^2}}{(1+n^2)^{\frac{n^2}{2}}} = \lim \frac{(n^2)^{\frac{n^2}{2}}}{(1+n^2)^{\frac{n^2}{2}}} =$$

$$= \lim \left(\frac{n^2}{1+n^2} \right)^{\frac{n^2}{2}} = \lim \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \right)^{\frac{n^2}{2}} = \left[\frac{1}{\lim \left(1+\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$49.2. \lim \frac{(4n^2-16)^n}{(2n)^{2n}} = \lim \left(\frac{4n^2-16}{(2n)^2} \right)^n = \lim \left(\frac{4n^2-16}{4n^2} \right)^n =$$

$$= \lim \left(1 - \frac{16}{4n^2} \right)^n = \lim \left[\left(1 - \frac{2}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right]^n =$$

$$= \lim \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n \times \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = e^{-2} \times e^2 = e^0 = 1$$

$$49.3. \lim \left(\frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n+2}} \right)^{2n^2} = \lim \left[\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{2n^2} = \lim \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \right)^{2n} =$$

$$= \left[\frac{\lim \left(1+\frac{1}{n} \right)^n}{\lim \left(1+\frac{2}{n} \right)^n} \right]^2 = \left(\frac{e}{e^2} \right)^2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$49.4. \lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)^n = \lim \left[\frac{\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}}{\frac{n!}{p!(n-p)!}} \right]^n = \left| u_n = {}^n C_p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \right|$$

$$= \lim \left[\frac{(n+1)! p!(n-p)!}{p!(n+1-p)! n!} \right]^n = \lim \left[\frac{(n+1)n!(n-p)!}{(n+1-p)(n-p)!n!} \right]^n$$

$$= \lim \left(\frac{n+1}{n+1-p} \right)^n = \lim \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1-p}{n}} \right)^n = \frac{\lim \left(1+\frac{1}{n} \right)^n}{\lim \left(1+\frac{1-p}{n} \right)^n} =$$

$$= \frac{e}{e^{1-p}} = e^{-1+p} = e^p$$

$$49.5. \lim \left(1 - \frac{3}{u_n} \right)^{u_{n+1}} = \lim \left(1 - \frac{3}{e^n} \right)^{e^{n+1}} = \lim \left(1 - \frac{3e}{e^n \times e} \right)^{e^n \times e} = e^{-3e}$$

$$50.1. x = \lim \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^{an+b} = \lim \left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{3}{2n}} \right)^{an} \times \lim \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^b =$$

$$= \left[\frac{\lim \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{3}{2n} \right)^n} \right]^a \times 1^b = \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} \right)^a = (e^{-2})^a = e^{-2a}$$

$$50.2. x = e \Leftrightarrow e^{-2a} = e \Leftrightarrow -2a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$51.1. 2^{2+\sin x} + 1 = 5 \times 2^{\sin x}, x \in [0, 2\pi]$$

Fazendo $\sin x = y$ vem:

$$2^{2+y} + 1 = 5 \times 2^y \Leftrightarrow 2^2 \times 2^y - 5 \times 2^y = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 2^y - 5 \times 2^y = -1 \Leftrightarrow -2^y = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^y = 1 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi$$

$$S = \{0, \pi\}$$

$$51.2. 3^{\cos x} + \frac{3}{3^{\cos x}} = 4 \wedge x \in [0, 2\pi]. \text{ Fazendo } y = \cos x, \text{ vem:}$$

$$3^y + \frac{3}{3^y} = 4 \Leftrightarrow (3^y)^2 + 3 = 4 \times 3^y \Leftrightarrow (3^y)^2 - 4 \times 3^y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^y = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow 3^y = 3 \vee 3^y = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

$$S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$51.3. 3^{2+\ln x} - 3^{2-\ln x} = 24. \text{ Fazendo } y = \ln x, \text{ vem:}$$

$$3^{2+y} - 3^{2-y} = 24 \Leftrightarrow 3^2 \times 3^y - 3^2 \times 3^{-y} = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \times 3^y - \frac{9}{3^y} - 24 = 0 \Leftrightarrow 9 \times (3^y)^2 - 9 - 24 \times 3^y = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 \times (3^y)^2 - 24 \times 3^y - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \times (3^y)^2 - 8 \times 3^y - 3 = 0 \Leftrightarrow 3^y = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^y = -\frac{1}{3} \vee 3^y = 3 \Leftrightarrow y \in \emptyset \vee y = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e \quad | y = \ln x$$

$$S = \{e\}$$

$$52.1. 4^x - 3^{x+1} = 3^x - 2^{2x+1} \Leftrightarrow (2^2)^x - 3^x \times 3 = 3^x - 2^{2x} \times 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2 \times 2^{2x} = 3^x + 3 \times 3^x \Leftrightarrow 3 \times 2^{2x} = 4 \times 3^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(2^2)^x}{3^x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} \right)^x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 1$$

$$S = \{1\}$$

$$52.2. \sqrt{5^{x-2}} \times \sqrt[3]{25^{2x-5}} - 2\sqrt{5^{3x-2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}} \times 25^{\frac{2x-5}{3}} = 5^{\frac{3x-2}{2}} \wedge x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}} \times (5^2)^{\frac{2x-5}{3}} = 5^{\frac{3x-2}{2}} \wedge x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}} \times 5^{\frac{4x-10}{3}} = 5^{\frac{3x-2}{2}} \wedge x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{3}} = 5^{\frac{3x-2}{2}} \wedge x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{3} = \frac{3x-2}{2} \wedge x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 8x - 20 = 3x - 2 \wedge x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \wedge x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{2} \wedge x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -6 \vee x = 3) \wedge x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow x = 3$$

$$S = \{3\}$$

52.3. $e^{\ln^4 - \ln x} = \frac{8}{x^2} \Leftrightarrow e^{\frac{\ln^4}{x}} = \frac{8}{x^2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{8}{x^2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4x = 8 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 2 ; S = \{2\}$

52.4. $\ln^2 x + \ln x^3 = 4 \Leftrightarrow (\ln x)^2 + 3 \ln x - 4 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln x = \frac{-3 \pm 5}{5} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\ln x = -4 \vee \ln x = 1) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{-4} \vee x = e$
 $S = \left\{ \frac{1}{e^4}, e \right\}$

52.5. $\ln(2x-4) - \ln(2) = \ln(x-1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-4}{2}\right) = \ln(x-1) \wedge 2x-4 \neq 0 \wedge x-1 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x-2| = x-1 \wedge x \neq -2 \wedge x > 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow [(x-2) = x-1 \vee x-2 = -x+1] \wedge x > 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-2 = -1 \vee 2x = 3) \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

52.6. $4^{\frac{x+1}{2}} - 3^{x+1} = 3^x + 2^{2x} \Leftrightarrow 4^x \times 4^{\frac{1}{2}} - 3^x \times 3 = 3^x + (2^2)^x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4^x \times \sqrt{4} - 4^x = 3^x + 3 \times 3^x \Leftrightarrow 2 \times 4^x - 4^x = 4 \times 3^x$
 $\Leftrightarrow 4^x = 4 \times 3^x \Leftrightarrow \frac{4^x}{3^x} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}} 4$
 $S = \left\{ \log_{\frac{4}{3}} 4 \right\}$

53.1. $\log_2^2 x + 8 < \log_2 x^6 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x + 8 < 0 \wedge x > 0$

Cálculo auxiliar
 Fazendo $y = \log_2 x$:

$y^2 - 6y + 8 < 0 \Leftrightarrow y > 2 \wedge y < 4$

Logo:

$(\log_2 x)^2 - \log_2 x + 8 < 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 x > 2 \wedge \log_2 x < 4 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x > 2^2 \wedge x < 2^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in]4, 16[$

$S =]4, 16[$

53.2. $\frac{e^x - 1}{1 - \ln x} < 0 \rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \ln x \neq 1\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$

• $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

• $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$

x	0		e	$+\infty$
$e^x - 1$	0	+	+	+
$1 - \ln x$		+	0	-
Q		+		-

$S =]e, +\infty[$

53.3. $(x^2 - 4) \log_2 x \geq 0 \rightarrow D = \mathbb{R}^+$

• $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

• $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

x	0		1		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	-	-	-	-	0	+
$\log_2 x$		-	0	+	+	+
P		+	0	-	0	+

$(x^2 - 4) \log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow]0, 1] \cup [2, +\infty[$

$S =]0, 1] \cup [2, +\infty[$

53.4. $2 \times 3^{x+1} < 6 \times 2^{x-1} \Leftrightarrow 2 \times 3^x \times 3 < 6 \times 2^x \times 2^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 \times 3^x < 3 \times 2^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} < \frac{3}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -\log_{\frac{3}{2}} 2 \Leftrightarrow x < -\frac{\ln 2}{\ln \frac{3}{2}}$

$S = \left] -\infty, -\frac{\ln 2}{\ln \frac{3}{2}} \right[$

54.1. $C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{30} = 2C_0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{20} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[20]{2} \Leftrightarrow \frac{r}{100} = \sqrt[20]{2} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = 100 \times \sqrt[20]{2} - 100 \Rightarrow r \approx 2,34$

$r\% \approx 2,34\%$

54.2. $C_0 \left(1 + \frac{2,1}{100}\right)^n = 1,5C_0 \Leftrightarrow (1 + 0,021)^n = 1,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1,021^n = 1,5 \Leftrightarrow n = \log_{1,021} 1,5 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 1,5}{\ln 1,021}$

55. $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = c^2$

$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = \frac{\ln c}{\ln(a+b)} + \frac{\ln c}{\ln(a-b)} =$

$= \frac{\ln(a-b) \times \ln c + \ln(a+b) \times \ln c}{\ln(a+b) \times \ln(a-b)} =$

$= \frac{\ln c [\ln(a-b) + \ln(a+b)]}{\ln(a+b) \times \ln(a-b)} =$

$= \frac{\ln c \times \ln[(a-b)(a+b)]}{\ln(a+b) \times \ln(a-b)} = \frac{\ln c \times \ln(a^2 - b^2)}{\ln(a+b) \times \ln(a-b)} =$

$= \frac{\ln c \times \ln c^2}{\ln(a+b) \times \ln(a-b)} = 2 \frac{\ln c}{\ln(a+b)} \times \frac{\ln c}{\ln(a-b)} =$

$= 2 \log_{a+b} c \times \log_{a-b} c$

56.1. $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b ; \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$

56.2. $\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{\log_k n} = \frac{1}{\log_2 n} + \frac{1}{\log_3 n} + \dots + \frac{1}{\log_{10} n} =$

$= \log_n 2 + \log_n 3 + \dots + \log_n 10$

$= \log_n (2 \times 3 \times \dots \times 10) = \log_n 10! = \frac{1}{\log_{10!} n}$

Avaliação 1

1. $f(16) = -2 \Leftrightarrow \log_a 16 = -2 \Leftrightarrow 16 = a^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \quad (a > 0)$

$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x ; f(128) = \log_{\frac{1}{4}} 128$

$$\log_{\frac{1}{4}} 128 = y \Leftrightarrow 128 = \left(\frac{1}{4}\right)^y \Leftrightarrow 2^7 = (2^{-2})^y \Leftrightarrow 2^7 = 2^{-2y}$$

$$\Leftrightarrow -2y = 7 \Leftrightarrow y = -\frac{7}{2}$$

$$f(128) = -\frac{7}{2}$$

Resposta: (B)

$$2. \quad \lim \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{u_n}\right)^{2u_{n+1}} = \lim \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\frac{n}{2}}\right)^{2 \times \frac{n+1}{2}} = \lim \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \lim \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{n}\right)^n \times \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{n}\right)^1 =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{n}\right)^n \times \lim \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{n}\right)^1 = e^{2\sqrt{2}} \times 1 = e^{2\sqrt{2}}$$

Resposta: (C)

$$3. \quad \log_{12} 6 = \log_{12} \sqrt{36} = \log_{12} 36^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{12} 36 =$$

$$\frac{1}{2} \log_{12} (12 \times 3)$$

$$= \frac{1}{2} (\log_{12} 12 + \log_{12} 3) = \frac{1}{2} (1 + y) = \frac{1+y}{2}$$

Resposta: (D)

$$4. \quad f(x) = \ln x; \quad A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB}$$

$$\overline{AD} = f(a) = \ln a$$

$$\overline{BC} = f(3a) = \ln(3a)$$

$$\overline{AB} = 3a - a = 2a$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{\ln a + \ln(3a)}{2} \times 2a = a \ln(3a^2)$$

Resposta: (D)

$$5. \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \log_4 x \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \frac{\log_2 x}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2 \log_2 x = \log_2 x \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = -4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$$

$$f(2^{-4}) = 2 + \log_2 2^{-4} = 2 - 4 = -2$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{16}, -2\right)$$

Resposta: (A)

$$6.3. \quad 8000 \left(1 + \frac{r}{100 \times 4}\right)^4 = 8210 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{400}\right)^4 = \frac{8210}{8000}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{r}{400} = \sqrt[4]{\frac{821}{800}} \Leftrightarrow \frac{r}{400} = \sqrt[4]{\frac{821}{800}} - 1$$

$$\Leftrightarrow r = 400 \sqrt[4]{\frac{821}{800}} - 400 \Rightarrow r \approx 2,6$$

$$r\% \approx 2,6\%$$

$$7.1. \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 + \log_a x = \log_{\frac{1}{a}} x \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_a x = \frac{\log_a x}{\log_a \left(\frac{1}{a}\right)} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_a x = \frac{\log_a x}{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \left| \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = \log_a a^{-1} = -1 \right.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_a x = -\log_a x \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a x + \log_a x = -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_a x = -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \log_a x = -\frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = a^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$7.2. \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = f\left(a^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \log_a a^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$8.1. \quad 4^{x+1} + 7 = 2^{x+4} \Leftrightarrow 4^x \times 4 + 7 = 2^x \times 2^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^4)^x \times 4 + 7 = 16 \times 2^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times (2^x)^2 - 16 \times 2^x + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \times 4 \times 7}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{16 \pm 12}{8} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \vee 2^x = \frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \log_2 \left(\frac{7}{2}\right)$$

$$S = \left\{-1, \log_2 \frac{7}{2}\right\}$$

$$8.2. \quad 3^{\ln x} + \frac{3}{2^{\ln x}} = 4. \text{ Seja } y = \ln x:$$

$$3^y + \frac{3}{3^y} = 4 \Leftrightarrow (3^y)^2 - 4 \times 3^y + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Leftrightarrow 3^y = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^y = 3 \vee 3^y = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 0$$

$$\ln x = 1 \vee \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e \vee x = 1$$

$$S = \{1, e\}$$

$$9. \quad \log_3 x - 1 > \frac{1}{\log_9 x}$$

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{2} \quad \frac{1}{\log_9 x} = \frac{2}{\log_3 x}$$

$$\log_3 x - 1 > \frac{1}{\log_9 x} \Leftrightarrow \log_3 x - 1 > \frac{2}{\log_3 x} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x - 1 - \frac{2}{\log_3 x} > 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2}{\log_3 x} > 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$$

Pág. 163

$$6.1. \quad C = 8000 \left(1 + \frac{2,1}{100}\right)^5 = 8876,03$$

Capital acumulado: 8876,03 €

$$6.2. \quad 8000 \left(1 + \frac{1,9}{100}\right)^n = 10000 \Leftrightarrow 1,019^n = \frac{10000}{8000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,019^n = 1,25 \Leftrightarrow n = \log_{1,019} 1,25 \Leftrightarrow n = \frac{\ln(1,25)}{\ln(1,019)}$$

- Sinal de $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2$:

Seja $y = \log_3 x$:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

- $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \vee \log_3 x = 2$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 9$$

- $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 < 0 \Leftrightarrow \log_3 x > -1 \wedge \log_3 x < 2 \wedge$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \wedge x < 9 \wedge x \neq 1$$

- $\log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
 $\log_3 x < 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > 0$

	0		$\frac{1}{3}$		1		9	$+\infty$
<i>N</i>		+	0	-		-	0	+
<i>D</i>		-	-	-	0	+	+	+
<i>Q</i>		-	0	+		-	0	+

$$S = \left] \frac{1}{3}, 1 \right[\cup]9, +\infty[$$

10.1. $f(x) = \log_2 8 - \log_2 \sqrt{x+1} - [\log_4 4 + \log_4 (x+1)^3] =$

$$= 3 - \log_2 (x+1)^{\frac{1}{2}} - 1 - 3 \log_4 (x+1) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \log_2 (x+1) = 3 \frac{\log_2 (x+1)}{\log_2 4} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \log_2 (x+1) - 3 \frac{\log_2 (x+1)}{2} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \log_2 (x+1) - \frac{3}{2} \log_2 (x+1) = 2 - 2 \log_2 (x+1)$$

10.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 \log_2 (x+1) = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+1) = 1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x+1 = 2 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$S = \{1\}$$

10.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 2 \log_2 (x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 2 \frac{\log_2 (x+1)}{x} \right)$

$$= 0 - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = -\frac{2}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{x} =$$

$$= -\frac{2}{\ln 2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} =$$

$$= -\frac{2}{\ln 2} \times \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} \right] =$$

$$= -\frac{2}{\ln 2} \times \left(0 + \frac{0}{+\infty} \right) = 0$$

10.4. $f(2x+1) - f(x) =$

$$= 2 - 2 \log_2 (2x+1) - [2 - 2 \log_2 (x+1)] =$$

$$= -2 \log_2 (2x+1) + 2 \log_2 (x+1) =$$

$$= 2 (\log_2 (x+1) - \log_2 (2x+1)) =$$

$$= 2 \log_2 \frac{x+1}{2(x+1)} = 2 \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2 \log_2 2^{-1} = 2 \times (-1) = -2$$

10.5. $f(x) < 2 + \log_{\frac{1}{2}} (x) \Leftrightarrow 2 - 2 \log_2 (x+1) < 2 + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 - 2 \log_2 (x+1) < 2 + \frac{\log_2 x}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \log_2 (x+1) < -\log_2 x \Leftrightarrow \log_2 (x+1) > \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow x+1 > x, \text{ condição universal em } \mathbb{R}^+$$

11.1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{\ln \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{\ln(x-2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{\frac{1}{2} \ln(x-2)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (2x) \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\ln(x-2)} =$$

$$= 6 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + 2 - 3}{y} = 6 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} =$$

$$= 6 \times 1 = 6$$

$\left. \begin{aligned} y &= \ln(x-2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^y = x-2 \\ &\Leftrightarrow x = e^y + 2 \\ x \rightarrow 3 &\Rightarrow y \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}$

11.2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\tan x \times \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right]} = e^0 = 1$, dado que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\tan x \times \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\tan x}{x} \times x \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x \cos x} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln y \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 1 \times 1 \times 0 = 0$$

$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow 0^+ &\Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\}$

12. Se P pertence a uma circunferência de centro na origem e raio 1 então $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 1 - y^2 = x^2$

$$\log_{1+y} x + \log_{1-y} x = \frac{\ln x}{\ln(1+y)} + \frac{\ln x}{\ln(1-y)} =$$

$$= \frac{\ln(1-y) \ln x + \ln(1+y) \ln x}{\ln(1+y) \times \ln(1-y)} =$$

$$= \frac{\ln x [\ln(1-y) + \ln(1+y)]}{\ln(1+y) \times \ln(1-y)} =$$

$$= \frac{\ln x \times \ln[(1-y)(1+y)]}{\ln(1+y) \times \ln(1-y)} =$$

$$= \frac{\ln x \times \ln(1-y^2)}{\ln(1+y) \ln(1-y)} = \frac{\ln x \times \ln x^2}{\ln(1+y) \ln(1-y)} =$$

$$= 2 \frac{\ln x}{\ln(1+y)} \times \frac{\ln x}{\ln(1-y)} = 2 \log_{1+y} x \times \log_{1-y} x$$

Atividade inicial 2

Pág. 164

1.1. $P(0) = e^0 = 1$

Inicialmente, foram contadas 1000 bactérias.

1.2. $P(10) = e^{10} \approx 22\,026,465\,79$ (em milhares)

Foram contadas 22 026 466 bactérias.

2. $P(t) = 2P(0) \Leftrightarrow e^t = 2 \times 1 \Leftrightarrow e^t = 2 \Leftrightarrow t = \ln 2$

$\ln 2 \approx 0,6931$

$0,6931 \text{ min} = 0,6931 \times 60 \text{ s} \approx 42 \text{ s}$

O número de bactérias duplicará aproximadamente 42 s após a contagem inicial.

3. $t.m.v._{(P, 0, 1)} = \frac{P(1) - P(0)}{1 - 0} = e - 1 \approx 1,718$

No primeiro minuto, a taxa média de variação do número de bactérias é, aprox., igual a 1,718 bactérias/min.

4.1.
$$P'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(1+h) - P(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(e^h - 1)}{h} = e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e \times 1 = e$$

A taxa instantânea de variação no instante $t = 1$ s é igual a e bactérias/min

4.2.
$$P'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(2+h) - P(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2+h} - e^2}{h} = e^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^2 \times 1 = e^2$$

A taxa instantânea de variação no instante $t = 2$ s é igual a e^2 bactérias/minuto.

4.3.
$$P'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(3+h) - P(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3+h} - e^3}{h} = e^3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^3 \times 1 = e^3$$

A taxa instantânea de variação no instante $t = 3$ s é igual a e^3 bactérias/minuto.

4.4.
$$P'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{t+h} - e^t}{h} = e^t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^t \times 1 = e^t$$

A taxa instantânea de variação no instante t ($t \geq 0$) é igual a e^t bactérias/minuto.

Pág. 165

1.1. $f'(x) = (\exp(-4x))' = (-4x)' \exp(-4x) = -4 \exp(-4x)$

1.2. $f'(x) = (e^{-2x+x^2})' = (-2x+x^2)' e^{-2x+x^2} = (2x-2)e^{-2x+x^2}$

1.3. $f'(x) = (e^{\sqrt{x}})' = (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

1.4.
$$f'(x) = [(e^{-x} + e^x)^2]' = 2(e^{-x} + e^x)' \times (e^{-x} + e^x) = 2((-x)' e^{-x} + e^x)(e^{-x} + e^x) = 2(e^{-x} - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = 2((e^x)^2 - (e^{-x})^2) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$$

1.5.
$$f'(x) = [(2x-1)^2 e^{-x}]' = [(2x-1)^2]' e^{-x} + (2x-1)(e^{-x})' = 2(2x-1)'(2x-1)e^{-x} + (2x-1)^2((-x)' e^{-x}) = 2 \times 2(2x-1)e^{-x} + (4x^2 - 4x + 1)(-e^{-x}) = (8x-4)e^{-x} + (-4x^2 + 4x - 1)e^{-x} = (8x-4-4x^2+4x-1)e^{-x} = (-4x^2 + 12x - 5)e^{-x}$$

1.6.
$$f'(x) = (e^{\sin x} + e^{\frac{1}{x}})' = (e^{\sin x})' + (e^{\frac{1}{x}})' = (\sin x)' e^{\sin x} + \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} = \cos x e^{\sin x} - \frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}} = \cos x e^{\sin x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

1.7.
$$f'(x) = (e^x \cos x + \frac{1}{e^x})' = (e^x \cos x)' + \left(\frac{1}{e^x}\right)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' + \frac{1' x e^x - 1 \times (e^x)'}{(e^x)^2} = e^x \cos x + e^x (-\sin x) - \frac{e^x}{(e^x)^2} = e^x \cos x - e^x \sin x - e^{-x}$$

1.8.
$$f'(x) = [\cos(e^{-x})]' = -(e^{-x})' \sin(e^{-x}) = -(-x)' e^{-x} \sin(e^{-x}) = e^{-x} \sin(e^{-x})$$

1.9.
$$f'(x) = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{2'(e^x + e^{-x}) - 2(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{-2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Pág. 166

2.1. $f'(x) = (2^x)' = 2^x \ln 2$

2.2.
$$f'(x) = (5^{\sqrt{x}})' = (\sqrt{x})' \times 5^{\sqrt{x}} \ln 5 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 5^{\sqrt{x}} \ln 5 = \frac{5^{\sqrt{x}} \ln 5}{2\sqrt{x}}$$

2.3.
$$f'(x) = (3^{\cos(3x)})' = (\cos(3x))' 3^{\cos(3x)} \ln 3 = -3 \sin(3x) \times 3^{\cos(3x)} \times \ln 3$$

2.4. $f'(x) = (a^{e^x})' = (e^x)' a^{e^x} \ln a = e^x a^{e^x} \ln a$

2.5.
$$f'(x) = \left(\frac{3^x - 1}{3^{x+1}}\right)' = \frac{(3^x - 1)' \times 3^{x+1} - (3^x - 1)(3^{x+1})'}{(3^{x+1})^2} = \frac{3^x \ln 3 \times 3^{x+1} - (3^x - 1)3^{x+1} \ln 3}{(3^{x+1})^2} = \frac{3^{x+1} \ln 3 (3^x - 3^x + 1)}{(3^{x+1})^2} = \frac{\ln 3}{3^{x+1}}$$

Pág. 167

- 3.1. $f'(x) = (\ln(x^2))' = \frac{(x^2)'}{x^2} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$
- 3.2. $f'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$
- 3.3. $f'(x) = (\ln^2(2x))' = 2(\ln(2x))' \ln(2x) =$
 $= 2 \times \frac{(2x)'}{2x} \ln(2x) = \frac{2}{x} \ln(2x) = \frac{2 \ln(2x)}{x}$
- 3.4. $f'(x) = \left[\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) \right]' = \frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\frac{1' \cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos x}} =$
 $= \frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
- 3.5. $f'(x) = (\sqrt{x} \ln x - \sqrt{x})' =$
 $= (\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x}(\ln x)' - (\sqrt{x})' =$
 $= \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \sqrt{\frac{x}{x^2}} =$
 $= \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Pág. 168

- 4.1. $f'(x) = (\log_3(x^2 - 4))' = \frac{(x^2 - 4)'}{(x^2 - 4) \ln 3} = \frac{2x}{(x^2 - 4) \ln 3}$
- 4.2. $f'(x) = (\log \sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x} \ln 10} = \frac{1}{2\sqrt{x} \ln 10} = \frac{1}{2x \ln 10}$
- 4.3. $f'(x) = (x \log_2(x^2 + 2))' =$
 $= x' \log_2(x^2 + 2) + x(\log_2(x^2 + 2))' =$
 $= \log_2(x^2 + 2) + x \times \frac{(x^2 + 2)'}{(x^2 + 2) \ln 2} =$
 $= \log_2(x^2 + 2) + \frac{x \times 2x}{(x^2 + 2) \ln 2} =$
 $= \log_2(x^2 + 2) + \frac{2x^2}{(x^2 + 2) \ln 2}$
- 4.4. $f'(x) = (\log_2(\sin^2 x))' = \frac{(\sin^2 x)'}{\sin^2 x \times \ln 2} =$
 $= \frac{2 \sin x \times (\sin x)'}{\ln 2 \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\ln 2 \sin^2 x} =$
 $= \frac{2 \cos x}{\ln 2 \sin x} = \frac{2}{\ln 2} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\ln 2 \times \tan x}$

- 4.5. $f'(x) = \left(\frac{-1 + \log_3 x}{\log_3 x} \right)' =$
 $= \frac{(-1 + \log_3 x)' \log_3 x - (-1 + \log_3 x)(\log_3 x)'}{\log_3^2 x} =$
 $= \frac{\frac{1}{x \ln 3} \times \log_3 x - (1 - \log_3 x) \times \frac{1}{x \ln 3}}{\log_3^2 x} =$
 $= \frac{\frac{1}{x \ln 3} (\log_3 x + 1 - \log_3 x)}{\log_3^2 x} = \frac{1}{x \ln 3 \times \log_3^2 x} =$
 $= \frac{1}{x \ln 3 \times \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)^2} = \frac{1}{x \ln 3 \times \frac{\ln^2 x}{\ln^2 3}} = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{\ln^2 3}{x \ln^2 x} = \frac{\ln 3}{x \ln^2 x}$

Pág. 169

- 5.1. $f'(x) = \left((x^2 + 1)^{\sqrt{3}} \right)' = \sqrt{3} (x^2 + 1)' (x^2 + 1)^{\sqrt{3}-1} =$
 $= \sqrt{3} \times 2x (x^2 + 1)^{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3}x (x^2 + 1)^{\sqrt{3}-1}$
- 5.2. $f'(x) = \left(\left(\sin \frac{x}{\pi} \right)^\pi \right)' = \pi \left(\sin \frac{x}{\pi} \right)' \left(\sin \frac{x}{\pi} \right)^{\pi-1} =$
 $= \pi \times \left(\frac{x}{\pi} \right)' \cos \frac{x}{\pi} \left(\sin \frac{x}{\pi} \right)^{\pi-1} =$
 $= \pi \times \frac{1}{\pi} \cos \frac{x}{\pi} \left(\sin \frac{x}{\pi} \right)^{\pi-1} = \cos \frac{x}{\pi} \left(\sin \frac{x}{\pi} \right)^{\pi-1}$
- 5.3. $f'(x) = \left((\log_2 x)^e \right)' = e (\log_2 x)' (\log_2 x)^{e-1} =$
 $= e \times \frac{1}{x \ln 2} (\log_2 x)^{e-1} = \frac{e (\log_2 x)^{e-1}}{x \ln 2}$
- 5.4. $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{x}} \right)' = \left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} \right)' = \left(e^{\frac{1}{x} \ln x} \right)' =$
 $= \left(\frac{1}{x} \ln x \right)' e^{\frac{1}{x} \ln x} = \left(\left(\frac{1}{x} \right)' \ln x + \frac{1}{x} (\ln x)' \right) x^{\frac{1}{x}} =$
 $= \left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \right) x^{\frac{1}{x}} = \frac{1 - \ln x}{x^2} x^{\frac{1}{x}}$
- 5.5. $f'(x) = \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)' = \left(e^{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} \right)' = \left(e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \right)' =$
 $= \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)' e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} =$
 $= \left(x' \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)' \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x =$
 $= \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \times \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)' \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^2} \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x =$
 $= \left(\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x =$
 $= \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

6.1. $f(x) = xe^x$

Domínio e continuidade:

$D_f = \mathbb{R}$ f é contínua em \mathbb{R}

Zeros:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Monotonia e extremos:

$f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	$-e^{-1}$	\nearrow

Min.

Concavidades e inflexões

$f''(x) = (e^x(1+x))' = (e^x)(1+x) + e^x(1+x)' = e^x(1+x) + e^x = e^x(x+2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	\cap	$-2e^{-2}$	\cup

PI

Assíntotas:

Verticais: Como $D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua, o gráfico da função não tem assíntotas verticais.

Não verticais ($y = mx + b$):

- Em $+\infty$:

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais quando $x \rightarrow +\infty$

- Em $-\infty$:

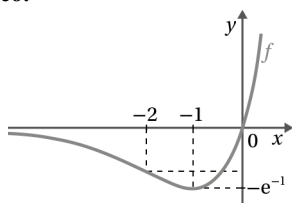
$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{(\infty \cdot 0)}$ $y = -x \Leftrightarrow x = -y$
Se $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty$

$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = -\frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = -\frac{1}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Gráfico:



6.2. $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$

Domínio e continuidade:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f é contínua em D_f .

$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Zeros:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = -2 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

f não tem zeros

Monotonia e extremos:

$f'(x) = \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x + 2)'(e^x - 1) - (e^x + 2)(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1 - e^x - 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}$

Como $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) < 0, f$ é decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e não admite qualquer extremo.

Concavidades e inflexões:

$f''(x) = \left[\frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} \right]' = \frac{(-3e^x)'(e^x - 1)^2 - (-3e^x)[(e^x - 1)']^2}{(e^x - 1)^4} = \frac{-3e^x(e^x - 1)^2 + 3e^x \times 2(e^x - 1)'(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} = \frac{-3e^x(e^x - 1)(e^x - 1 - 2e^x)}{(e^x - 1)^4} = \frac{3e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^3}$

$f''(x) \neq 0, \forall x \in D_f$

O sinal de $f''(x)$ é o sinal de $(e^x - 1)^3$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f	\cap		\cup

Assíntotas:

Verticais:

f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota ao gráfico de f .

Não verticais ($y = mx + b$):

- Quando $x \rightarrow -\infty$:

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x + 2}{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0 + 2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$

$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \frac{0 + 2}{0 - 1} = -2$

- Quando $x \rightarrow +\infty$:

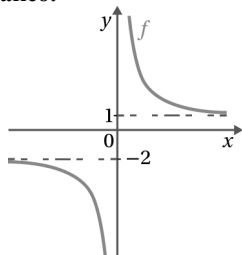
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{x(e^x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{e^x}}{x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 + 0}{+\infty(1 - 0)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$

As retas de equações $y = -2$ e $y = 1$ são assíntotas ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$, respetivamente.

Gráfico:



6.3. $f(x) = 2 - x + e^{-x}$

Domínio e continuidade:

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = (2 - x + e^{-x})' = -1 - e^{-x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$, f é estritamente decrescente em \mathbb{R} pelo que não tem extremos.

Concavidades e inflexões:

$$f''(x) = (-1 - e^{-x})' = e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em \mathbb{R} .

Assíntotas

Verticais: Como $D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua, o gráfico da função não tem assíntotas verticais.

Não verticais ($y = mx + b$):

- Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 + \frac{e^{-x}}{x} \right)$$

$$= 0 - 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = -1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} \quad \left| \begin{array}{l} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= -1 - (+\infty) = -\infty$$

Não existe assíntota em $-\infty$.

- Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x + e^{-x}}{x} =$$

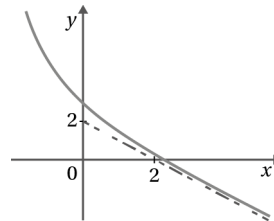
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0 - 1 + 0 = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x + e^{-x} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + e^{-x}) = 2 + 0 = 2$$

A reta de equação $y = -x + 2$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Gráfico:



6.4. $f(x) = e^x \sin x$

Domínio e continuidade:

$$D_f = [-\pi, \pi]$$

f é contínua em $[-\pi, \pi]$

Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$\text{Em } [-\pi, \pi]: x = -\pi \vee x = 0 \vee x = \pi$$

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = (e^x \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Em } [-\pi, \pi], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f'		-	0	+	0	-	
f	0	\searrow	a	\nearrow	b	\searrow	0
			Min.		Máx.		

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}} = a$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2} = b$$

Concavidades e inflexões

$$f''(x) = (e^x (\sin x + \cos x))' =$$

$$= (e^x)' (\sin x + \cos x) + e^x (\sin x + \cos x)' =$$

$$= e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) =$$

$$= e^x (\sin x + \cos x + \cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\text{Em } [-\pi, \pi]: x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
f''		-	0	+	0	-	
f	0	\cap		\cup		\cap	0
			P.I.		P.I.		

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Assíntotas:

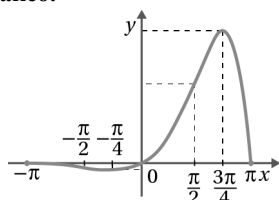
Verticais: Como f é contínua em $D_f = [-\pi, \pi]$, o gráfico

de f não tem assíntotas verticais

Não verticais: Como D_f é um conjunto limitado, o

gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

Gráfico:



$$f(\sqrt{e^3}) = \frac{\ln \sqrt{e^3}}{\sqrt{e^3}} = \frac{3}{2\sqrt{e^3}}$$

Assíntotas:

Verticais

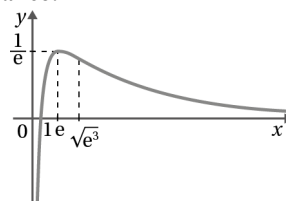
f é contínua em \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Não verticais: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Gráfico:



Pág. 172

7.1. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Domínio e continuidade:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

f é contínua

Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - \ln x \times x'}{x^2} = \frac{1 \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e$$

x	0		e	$+\infty$
f'		+	0	-
f		↗	$\frac{1}{e}$	↘

Máx.

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

Concavidades e inflexões

$$f''(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1 - \ln x)'x^2 - (1 - \ln x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2(1 - \ln x)}{x^3} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 3 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3}$$

x	0		$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f		∩		∪

P.I.

7.2. $f(x) = x^2 \ln x$

Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \ln x + x = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln x + 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
f'		-	0	+
f		↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

Mín.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$$

Concavidades e inflexões:

$$f''(x) = (2x \ln x + x)' = (2x)' \ln x + 2x (\ln x)' + 1 = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f		∩	$-\frac{3}{2e^3}$	∪

P.I.

Assíntotas

Verticais: f é contínua em \mathbb{R}^+

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{y}\right)^2 \ln \frac{1}{y} \right] \begin{cases} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow 0^+, y \rightarrow +\infty \end{cases} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \times \frac{1}{y} \ln y^{-1} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln y}{y} \right) \\ &= -0 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

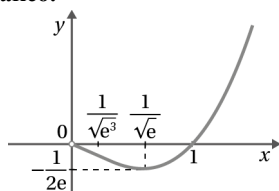
O gráfico de f não tem assíntotas verticais.

Não verticais $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty$$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

Gráfico:



7.3. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

Domínio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x+1} > 0 \right\} =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
Q	$+$	$-$	0	$+$

Zeros:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 1 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = x+1 \wedge x \in D_f \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

f não tem zeros.

Monotonia e extremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \right)' = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)} > 0, \forall x \in D_f \end{aligned}$$

Como $\forall x \in D_f, f'(x) > 0, f$ é estritamente crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]0, +\infty[$.

Concavidades e inflexões:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{x^2+x} \right)' = \frac{1'(x^2+x) - 1 \times (x^2+x)'}{(x^2+x)^2} = \\ &= -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x+1 = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

O gráfico de f não tem pontos de inflexão

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f'	$+$			$-$
f	\cup			\cap

Assíntotas:

Verticais:

f é contínua em $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{-1}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = -\infty$$

As retas de equações $x = -1$ e $x = 0$ são assíntota ao gráfico de f

Não verticais: ($y = mx + b$) :

• Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{x} = \frac{\ln 1}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$$

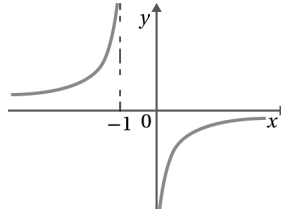
• Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{x} = \frac{\ln 1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Gráfico:



7.4. $f(x) = \frac{1}{x+1} \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right)$ $\begin{cases} \frac{1}{x+1} > 0 \\ \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x > -1 \end{cases}$

Domínio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0 \wedge \frac{1}{x+1} > 0 \right\} =]-1, +\infty[$$

Zeros:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 1 \wedge x > -1 \\ &\Leftrightarrow 1 = x+1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Monotonia e extremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x+1} \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) \right)' = \\ &= \left(\frac{1}{x+1} \right)' \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} \right) \left(\log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) \right)' = \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2} \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} \times \frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)'}{\frac{1}{x+1}} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} \times \frac{(x+1)^2}{\frac{1}{x+1} \ln 2} =$$

$$= \frac{\log_2\left(\frac{1}{x+1}\right)}{(x+1)^2} - \frac{1}{\ln 2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\ln 2 \times \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1}{\ln 2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\ln 2 \times \frac{\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\ln 2} + 1}{\ln 2(x+1)^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1}{\ln 2(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1 = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = e \Leftrightarrow x = e-1$$

x	-1		$e-1$	$+\infty$
f'		-	0	+
f		\searrow		\nearrow

Mín.

$$f(e-1) = \frac{1}{e} \log_2\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times \frac{\ln \frac{1}{e}}{\ln 2} = \frac{1}{e} \times \frac{\ln e^{-1}}{\ln 2} = -\frac{1}{e \ln 2}$$

Concavidades e inflexões:

$$f''(x) = \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1}{\ln 2(x+1)^2} \right)' =$$

$$= \frac{\left(\ln \frac{1}{x+1} + 1 \right)' \ln 2(x+1)^2 - \left(\ln \frac{1}{x+1} + 1 \right) \left[\ln 2(x+1)^2 \right]'}{\left(\ln 2(x+1)^2 \right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1} - \ln 2(x+1)^2 - \left(\ln \frac{1}{x+1} + 1 \right) \ln 2 \times 2(x+1)}{\left(\ln 2 \right)^2 (x+1)^4} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{x+1} \times \ln 2 \times (x+1)^2 - 2 \ln 2 \times (x+1) \left(\ln \frac{1}{x+1} + 1 \right)}{\left(\ln 2 \right)^2 (x+1)^4} =$$

$$= \frac{\ln 2 \times (x+1) \left(-1 - 2 \ln \frac{1}{x+1} - 2 \right)}{\left(\ln 2 \right)^2 (x+1)^4} = \frac{-2 \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) - 3}{(x+1)^3 \ln 2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) - 3 = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{3}{2} \wedge x > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3} - 1$$

x	-1		$\sqrt{e^3} - 1$	$+\infty$
f''		+	0	-
f		\cup		\cap

P.I.

Assíntotas

Verticais

f é contínua em $D_f =]-1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{0^+} \log_2\left(\frac{1}{0^+}\right) =$$

$$= +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Não verticais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \log_2(x+1)^{-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log_2(x+1)}{x+1}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{\ln 2} \times \frac{1}{x+1} \right] =$$

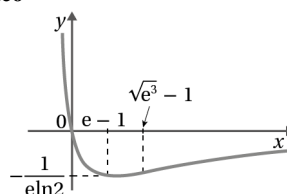
$$= -\frac{1}{\ln 2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = -\frac{1}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}$$

$\left. \begin{array}{l} y = x+1 \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$

$$= -\frac{1}{\ln 2} \times 0 = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Gráfico



Pág. 173

8.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (a - \ln x) \ln x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a - \ln x = 0 \vee \ln x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln x = a \vee \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^a \vee x = 1$

Logo, se $a \neq 0$, f tem dois zeros: e^a e 1

8.2. $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = [(a - \ln x) \ln x]' =$$

$$= (a - \ln x)' \ln x + (a - \ln x) (\ln x)' =$$

$$= -\frac{1}{x} \times \ln x + (a - \ln x) \times \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{-\ln x + a - \ln x}{x} = \frac{a - 2 \ln x}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{a - 2 \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow a - 2 \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{a}{2}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{a - 2 \ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow a - 2 \ln x > 0.$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln x < a \Leftrightarrow \ln x < \frac{a}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{a}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{a}{2}}$	$+\infty$
f'		+	0	-
f		\nearrow	$\frac{a^2}{4}$	\searrow

Máx.

$$f\left(\frac{a}{e^2}\right) = \left(a - \ln e^{\frac{a}{2}}\right) \ln e^{\frac{a}{2}} = \left(a - \frac{a}{2}\right) \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Logo, f tem um máximo absoluto igual a $\frac{a^2}{4}$.

$$8.3. \quad f''(x) = \left(\frac{a-2\ln x}{x}\right)' = \frac{(a-2\ln x)'x - (a-2\ln x)x'}{x^2} = \frac{-\frac{2}{x} \times x - a + 2\ln x}{x^2} = \frac{2\ln x - a - 2}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - a - 2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{a+2}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{2} + 1 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x e^{\frac{a}{2}+1}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x - a - 2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 2\ln x - a - 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x > a + 2 \Leftrightarrow \ln x > \frac{a+2}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{a}{2}+1}$$

x	0		$e^{\frac{a}{2}+1}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f		\cap		\cup

P.I.

Logo, o gráfico de f tem um ponto de inflexão de abscissa $e^{\frac{a}{2}+1}$.

8.4. Assíntotas verticais

f é contínua em \mathbb{R}^+ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a - \ln x) \ln x = -(-\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a - \ln x) \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a \ln x - (\ln x)^2}{x}$$

$$= a \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = a \times 0 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^y}$$

$$= 0 - \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2}} = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$
Se $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - m \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(a - \ln x) \ln x] = -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

Portanto, o gráfico de f tem uma única assíntota.

Pág. 174

9.1. $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^4 e^x)' = (x^4)' e^x + x^4 (e^x)' = 4x^3 e^x + x^4 e^x = e^x (4x^3 + x^4)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (4x^3 + x^4) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + x^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 0 \vee 4 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$$

x	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
f'		+	0	-	+
f		\nearrow	$256e^{-4}$	\searrow	\nearrow

Máx.

Mín.

$$f(-4) = (-4)^4 e^{-4} = 256e^{-4}; \quad f(0) = 0$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -4]$ e em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-4, 0]$.

f tem um máximo relativo igual a $256e^{-4}$ para $x = -4$ e mínimo absoluto igual a 0 para $x = 0$.

9.2. $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (e^x - 2 - 2x)' = e^x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

$$f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 - 2 \times \ln 2 = -2\ln 2$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f'	-	0	+
f		\searrow	\nearrow

Mín.

f é estritamente decrescente em $]-\infty, \ln 2]$ e estritamente crescente em $[\ln 2, +\infty[$.

f tem um mínimo absoluto igual a $-2\ln 2$ para $x = \ln 2$.

9.3. $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = (x \ln^2(x))' = x' \ln^2(x) + x(\ln^2(x))' = \ln^2(x) + x \times 2 \ln x \times (\ln x)' = \ln^2(x) + 2x \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$= \ln^2(x) + 2\ln x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln^2(x) + 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = -2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-2}$$

$$f(e^{-2}) = e^{-2} \ln^2(e^{-2}) = 4e^{-2}$$

x	0		e^{-2}		1	$+\infty$
f'		+	0	-	0	+
f		\nearrow	$4e^{-2}$	\searrow	0	\nearrow

Máx.

Mín.

f é estritamente crescente em $]0, e^{-2}]$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente decrescente $[e^{-2}, 1]$.

f tem um máximo relativo igual a $4e^{-2}$ para $x = e^{-2}$ e mínimo absoluto igual a 0 para $x = 1$.

9.4. $D_f = \mathbb{R}$. Se $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - e^{-x^2}\right)' = -\left(\frac{1' \times x^2 - 1 \times (x^2)'}{x^4}\right) - (-x^2)' e^{-x^2} =$$

$$= \frac{2x}{x^4} + 2x e^{-x^2} = \frac{2}{x^3} + 2x e^{-x^2} = \frac{2 + 2x^4 e^{-x^2}}{x^3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 2 + 2x^4 e^{-x^2} \neq 0$$

Logo, $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		-	+
f	0	\searrow	\nearrow

Máx.

Dado que:

- f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2} - e^{-x^2} \right) = 0 - e^{-\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} - e^{-x^2} \right) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} - e^{-x^2} \right) = -0 - e^{-\infty} = 0$
- f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

$f(0) = 0$ é o máximo absoluto de f .

10.1. $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (e^{x-2x^2})' = (x-2x^2)' e^{x-2x^2} = (1-4x)e^{x-2x^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= ((1-4x)e^{x-2x^2})' = \\ &= (1-4x)' e^{x-2x^2} + (1-4x)(e^{x-2x^2})' = \\ &= -4e^{x-2x^2} + (1-4x)(1-4x)e^{x-2x^2} = \\ &= -4e^{x-2x^2} + (1-8x+16x^2)e^{x-2x^2} = \\ &= e^{x-2x^2}(16x^2-8x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{x-2x^2}(16x^2-8x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 16x^2-8x-3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64+192}}{32} \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{32} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 16}{32} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \vee x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = e^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}} = e^{-\frac{5}{16}}; \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = e^{\frac{3}{4}-\frac{9}{16}} = e^{\frac{3}{8}}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0
f	\cup	$e^{-\frac{5}{16}}$	\cap	$e^{\frac{3}{8}}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em

$]-\infty, -\frac{1}{4}[$ e em $]\frac{3}{4}, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$. $\left(-\frac{1}{4}, e^{-\frac{5}{16}}\right)$ e $\left(\frac{3}{4}, e^{\frac{3}{8}}\right)$ são pontos de inflexão.

$$\begin{aligned} 10.2. \quad f'(x) &= \left(\ln(\sqrt{1+x^2}) \right)' = \frac{(\sqrt{1+x^2})'}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{2x}{2(1+x^2)} = \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{1+x^2 - x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \end{aligned}$$

$$f(-1) = \ln\sqrt{2} \quad f(1) = \ln\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0
f	\cap	$\ln\sqrt{2}$	\cup	$\ln\sqrt{2}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e voltada para cima em $]-1, 1[$.

$(-1, \ln\sqrt{2})$ e $(1, \ln\sqrt{2})$ são pontos de inflexão.

$$\begin{aligned} 11.1. \quad f'(x) &= \left(x - \frac{\ln x}{x} \right)' = 1 - \frac{(\ln x)' \times x - \ln x \times x'}{x^2} = \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11.2. \quad f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} \right)' = \\ &= \frac{(x^2 - 1 + \ln x)' x^2 - (x^2 - 1 + \ln x)(x^2)'}{x^4} = \\ &= \frac{\left(2x + \frac{1}{x}\right)x^2 - (x^2 - 1 + \ln x) \times 2x}{x^4} = \\ &= \frac{x(2x^2 + 1 - 2x^2 + 2 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{3 - 2\ln x}{x^3} \end{aligned}$$

$D_f = \mathbb{R}^+$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - 2\ln x}{x^3} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$3 - 2\ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = e^{\frac{3}{2}} - \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^3 - \frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{2e^3 - 3}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

x	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f	\cup	$\frac{2e^3 - 3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	\cap

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em

$]0, e^{\frac{3}{2}}[$ e voltada pra baixo em $]e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$.

O ponto de abscissa $e^{\frac{3}{2}}$ é um ponto de inflexão.

Pág. 175

$$\begin{aligned} 12. \quad f'(x) &= \left(x - \frac{\ln^2 x}{2} \right)' = 1 - \frac{2\ln x \times (\ln x)'}{2} = 1 - \frac{2\ln x}{2} \\ &= 1 - \frac{2\ln x}{2x} = 1 - \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)' = -\frac{(\ln x)' \times x - \ln x \times x'}{x^2} = \\ &= -\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{x^2} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$f(e) = e - \frac{\ln^2 e}{2} = e - \frac{1}{2}$$

x	0		e	$+\infty$
f''		-	0	+
f		\cap	$e - \frac{1}{2}$	\cup

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, e[$ e voltada para cima em $]e, +\infty[$. O ponto

$(e, e - \frac{1}{2})$ é um ponto de inflexão do gráfico de f .

13. Pretende-se provar que a equação:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

tem uma e uma só solução em $[1, 2]$.

Seja h a função definida em \mathbb{R} por $h(x) = f(x) - g(x)$,

ou seja, $h(x) = e^x - 2x - 2$.

- h é contínua em \mathbb{R} por ser a soma de duas funções contínuas em \mathbb{R} .

Logo, h é contínua em $[1, 2]$.

- $h(1) = e - 2 - 2 = e - 4 < 0$

$$h(2) = e^2 - 4 - 2 = e^2 - 6 > 0$$

Como h é contínua em $[1, 2]$ e $h(1) \times h(2) < 0$, pelo

corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, h admite pelo menos um zero em $]1, 2[$.

$$h'(x) = (e^x - 2x - 2)' = e^x - 2$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	\searrow		\nearrow

$$[1, 2] \subset [\ln 2, +\infty[$$

h é estritamente crescente em $]1, 2[$, pois neste intervalo

$h'(x) > 0$, pelo que o zero cuja existência se provou no

intervalo $]1, 2[$ é único.

Pág. 176

14.1. $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	\searrow	0	\nearrow

Como $]1, 2[\subset]0, +\infty[$, f é crescente em $]1, 2[$

$$g'(x) = (1 + e^{1-x^2})' = -2xe^{1-x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2xe^{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	+	0	-
g	\nearrow	0	\searrow

Como $]1, 2[\subset]0, +\infty[$, g é decrescente em $]1, 2[$.

14.2. Consideremos a função h definida por:

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h(x) = \ln(x^2 + 1) - 1 - e^{1-x^2}$$

A função h é uma função contínua em \mathbb{R} por ser definida pela composta e soma de funções contínuas em \mathbb{R} .

Portanto, h é contínua em $[1, 2]$.

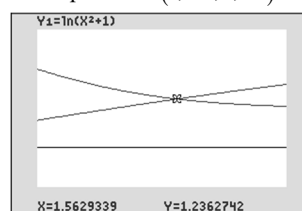
$$h(1) = \ln(2) - 1 - e^0 = \ln 2 - 2 < 0$$

$$h(2) = \ln(5) - 1 - e^{-3} > 0$$

Logo, como h é contínua em $[1, 2]$ e $h(1) \times h(2) < 0$, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy podemos concluir que a equação $h(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]1, 2[$.

Como f é crescente e g é decrescente em $]1, 2[$, existe apenas um ponto de interseção do gráfico de f e g .

Como recurso à calculadora gráfica, determinam-se as coordenadas desse ponto: $P(1,56; 1,24)$



Pág. 177

$$\begin{aligned} 15.1. f'(x) &= \left(e^{\frac{1}{x}} \right)' = \left(\frac{1}{x} \ln x \right)' e^{\frac{1}{x}} = \\ &= \left(\left(\frac{1}{x} \right)' \ln x + \frac{1}{x} (\ln x)' \right) x^{\frac{1}{x}} = \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \right) x^{\frac{1}{x}} = \\ &= (1 - \ln x) \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} = (1 - \ln x) x^{\frac{1}{x}-2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \ln x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e$$

x	0	e	$+\infty$
f'		+	0
f		\nearrow	$\frac{1}{e^e}$

Máx.

f é estritamente crescente em $]0, e[$ e estritamente decrescente em $]e, +\infty[$.

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} \text{ é o máximo absoluto de } f.$$

$$15.2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{+\infty(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \\ &= e^0 = 1, \text{ dado que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0 \end{aligned}$$

15.3. f é contínua em \mathbb{R}^+ .

Tendo em conta os resultados obtidos em 15.1. e 15.2.,

$$D_f = \left] 0, e^{\frac{1}{e}} \right[$$

16.1. $r: y = mx$

($b = 0$, porque a reta r passa na origem)

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - \ln x \times x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

- No ponto de tangência, o declive, m , da reta r , é igual à derivada de f : $m = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

- O ponto de tangência é comum à reta r de equação $y = mx$ e ao gráfico de f , $y = \frac{\ln x}{x}$, pelo que

$$mx = \frac{\ln x}{x}, \text{ ou seja, } m = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Temos $m = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ e $m = \frac{\ln x}{x^2}$ de onde se pode concluir:

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow 1 - \ln x = \ln x \Leftrightarrow 2 \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Como } m = \frac{\ln x}{x^2}, \text{ vem } m = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e^1} = \frac{1}{2e}.$$

A equação da reta r é $y = \frac{1}{2e}x$.

16.2. $s: y = mx + b$

$$f''(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1 - \ln x)'x^2 - (1 - \ln x)(x^2)'}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 + 2 \ln x)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 3 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f'		\searrow	$-\frac{1}{2e^3}$	\nearrow

Min

$$f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1 - \ln e^{\frac{3}{2}}}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^3} = -\frac{1}{2e^3}$$

f' tem mínimo absoluto igual a $-\frac{1}{2e^3}$ para $x = e^{\frac{3}{2}}$.

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

Ponto de tangência: $P\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$\text{Declive: } m = -\frac{1}{2e^3}$$

Equação da reta s :

$$y - \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2e^3}\left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2e^3}x + \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2e^3} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2e^3}x + \frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} \quad \left| 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \right.$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2e^3}x + \frac{4}{2e^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2e^3}x + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$$

16.3. $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

- f é contínua em \mathbb{R}^+ por se tratar da soma e quociente de funções contínuas em \mathbb{R}^+ .

- $f'(1,5) = \frac{1 - \ln(1,5)}{1,5^2} \approx 0,26$

$$f'(2) = \frac{1 - \ln 2}{2^2} \approx 0,08$$

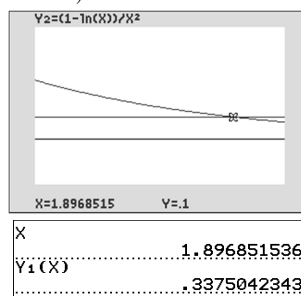
$$f'(2) < 0,1 < f'(1,5)$$

Logo, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um ponto c no intervalo $]1,5; 2[$ tal que $f'(c) = 0,1$, ou seja, em que o declive da reta tangente ao gráfico de f é igual a $0,1$.

Como, neste intervalo, f' é estritamente decrescente, o ponto c cuja existência se provou é único pelo que o ponto de tangência, A , também é único.

Recorrendo à calculadora gráfica, verifica-se que

$A(1,90; 0,34)$



17.1. Para $x < 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln^2(-x)}{x}\right)' = \frac{(\ln^2(-x))' \times x - \ln^2(-x) \times x'}{x^2} = \frac{2(\ln(-x))' \ln(-x) \times x - \ln^2(-x)}{x^2} = \frac{2 \times \frac{-1}{-x} \times \ln(-x) \times x - \ln^2(-x)}{x^2} = \frac{2 \ln(-x) - \ln^2(-x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(-x) - \ln^2(-x) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x)(2 - \ln(-x)) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) = 0 \vee \ln(-x) = 2 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x = 1 \vee -x = e^2 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -e^2$$

Para $x > 0$:

$$f'(x) = (\ln(e^x - 1) - 2x)' = \frac{e^x}{e^x - 1} - 2 = \frac{2 - e^x}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

x	$-\infty$	$-e^2$		-1		0	$\ln 2$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
f	\searrow		\nearrow		\searrow		\nearrow	\searrow
		Min.		Máx.			Máx.	

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -e^2]$, em $[-1, 0[$ e em $[\ln 2, +\infty[$ e estritamente crescente em $[-e^2, -1]$ e em $]0, \ln 2]$.

$$f(-e^2) = -4e^{-2}; f(-1) = 0; f(\ln 2) = -2\ln 2$$

f admite um mínimo relativo igual a $-4e^{-2}$ para $x = -e^2$ e máximos relativos iguais a 0 e a $-2\ln 2$ para $x = -1$ e $x = \ln 2$, respetivamente.

17.2. Assintotas verticais:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f é contínua.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln^2(-x)}{x} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(e^x - 1) - 2x) = \ln(0^+) - 0 = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assintota vertical ao gráfico de f .

Assintotas não verticais:

- Quando $x \rightarrow -\infty$

Começamos por verificar se existe assintota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln^2(-x)}{x} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln^2(-x)}{-x} = \begin{cases} y = \ln(-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x = e^y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty, \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{-e^y} = -\frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2}} = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assintota ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

- Quando $x \rightarrow +\infty$ ($y = mx + b$):

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1) - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(e^x - 1)}{x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln\left(e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} - 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{x} - 2 = 1 + 0 - 2 = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x - 1) - 2x + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln e^x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = 0$$

A reta de equação $y = -x$ é assintota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$

17.3. Atendendo a 17.1. e a 17.2., $D'_f =]-\infty, 0]$.

17.4. f' é contínua em \mathbb{R}^- . Logo, f' é contínua em $[-2, -1]$.

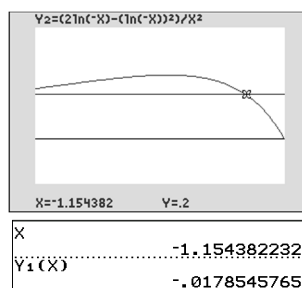
$$f'(-1) = 0 \text{ e } f'(2) = \frac{2\ln(-2) - \ln^2(-2)}{4} \approx 0,23$$

Como $f'(-1) < 0,2 < f'(-2)$ e f' é contínua em $[-2, -1]$, podemos concluir que, pelo Teorema de Bolzano, existe $x \in]-2, -1[$, tal que $f'(x) = 0,2$.

Usando a calculadora gráfica para resolver a equação

$$f'(x) = 0,2, \text{ obtém-se como solução } x \approx -1,15, \text{ cuja imagem por } f \text{ é } -0,02, \text{ aproximadamente.}$$

Logo, $A(-1,15; -0,02)$.



18. $P = \frac{1}{4} P_0 \Leftrightarrow P_0 \times e^{-\frac{t}{250}} = \frac{1}{4} P_0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{250}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{t}{250} = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow t = -250 \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

Logo, $t \approx 347$

Serão necessários 347 dias, aproximadamente.

19.1. Como $Q'(t) = kQ(t)$, $Q(t) = Q_0 e^{kt}$.

A substância reduz-se para metade passados 1600 anos e $Q_0 = 60$. Logo:

$$Q(1600) = 30 \Leftrightarrow 60 e^{1600k} = 30 \Leftrightarrow e^{1600k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1600k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \frac{-\ln 2}{1600}$$

Logo, $Q(t) = 60 e^{kt}$ com $k = \frac{-\ln 2}{1600}$

19.2. $Q(100) = 60 e^{-\frac{\ln 2}{1600} \times 100} \approx 57,5$

A quantidade de rádio passados 100 anos é, aproximadamente igual a 57,5 mg.

20.1. $Q(t) = Q_0 e^{kt}$; $Q'(t) = kQ(t) = kQ_0 e^{kt}$

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = -0,0866 \Leftrightarrow \frac{kQ_0 e^{kt}}{Q_0 e^{kt}} = -0,0866 \Leftrightarrow k = -0,0866$$

Logo, $Q(t) = Q_0 e^{-0,0866t}$.

$$20.2. Q(t) = 0,3Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{-0,0866t} = 0,3Q_0 \Leftrightarrow e^{-0,0866t} = 0,3$$

$$\Leftrightarrow -0,0866t = \ln(0,3) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,3)}{-0,0866}$$

Logo, $t \approx 13,9$. Passaram aproximadamente 13,9 dias.

$$20.3. Q(8) = Q_0 e^{-0,0866 \times 8} = Q_0 e^{-0,6928}$$

$$e^{-0,6928} \approx 0,5$$

Logo, $Q(8) \approx 0,5Q_0$

Passados oito dias há aproximadamente 50% da quantidade inicial da substância radioativa.

Pág. 183

$$21.1. P(0) = 50e^{0,03 \times 0} = 50$$

A população atual do país é de 50 milhões de habitantes.

$$21.2. \frac{P(t+1)}{P(t)} = \frac{50e^{0,03(t+1)}}{50e^{0,03t}} = e^{0,03t+0,03-0,03t} = e^{0,03} \approx 1,03$$

$$\text{Logo, } \frac{P(t+1)}{P(t)} \approx 1,03.$$

A população cresce cerca de 3% ao ano

$$21.3. P(t+x) = 3P(t) \Leftrightarrow 50e^{0,03(t+x)} = 3 \times 50e^{0,03t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{0,03t+0,03x}}{e^{0,03t}} = 3 \Leftrightarrow e^{0,03x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,03x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{0,03}$$

Logo, $x \approx 36,6$.

Este resultado significa que a população do país triplica em cada período de 36,6 anos, aproximadamente.

$$21.4. \frac{P(10)}{P(0)} = \frac{50e^{0,03 \times 10}}{50e^{0,03 \times 0}} \approx 1,350$$

Nos próximos 10 anos a população aumentará 35,0% aproximadamente.

Atividades complementares

Pág. 185

$$22.1. f'(x) = ((x^2 - 2x)e^x)' = (x^2 - 2x)'e^x + (x^2 - 2x)(e^x)' =$$

$$= (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = (2x - 2 + x^2 - 2x)e^x =$$

$$= (x^2 - 2)e^x$$

$$22.2. f'(x) = \left(\frac{1}{x}e^x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)'e^x + \frac{1}{x}(e^x)' = -\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x =$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)e^x = \frac{x-1}{x^2}e^x$$

$$22.3. f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{2e^x+1}\right)' = \frac{(e^x-1)'(2e^x+1) - (e^x-1)(2e^x+1)'}{(2e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(2e^x+1) - (e^x-1)2e^x}{(2e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(2e^x+1-2e^x+2)}{(2e^x+1)^2} = \frac{3e^x}{(2e^x+1)^2}$$

$$22.4. f'(x) = \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)' = x'e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x}} + x \times \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\frac{1}{x}} + x \times \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

$$22.5. f'(x) = (\cos x e^{\sin x})' = (\cos x)' e^{\sin x} + \cos x (e^{\sin x})' =$$

$$= -\sin x e^{\sin x} + \cos x \times (\sin x)' e^{\sin x} =$$

$$= -\sin x e^{\sin x} + \cos x \times \cos x e^{\sin x} =$$

$$= (\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x}$$

$$22.6. f'(x) = \left(e^{\frac{1+x}{1+x^2}}\right)' = \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)' e^{\frac{1+x}{1+x^2}} =$$

$$= \frac{(1+x)'(1+x^2) - (1+x)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} e^{\frac{1+x}{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1+x^2 - (1+x) \times 2x}{(1+x^2)^2} e^{\frac{1+x}{1+x^2}} =$$

$$= \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2} e^{\frac{1+x}{1+x^2}} = -\frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x^2)^2} e^{\frac{1+x}{1+x^2}}$$

$$22.7. f'(x) = \left(3^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \times 3^{\frac{1}{x}} \ln 3 = -\frac{3^{\frac{1}{x}} \ln 3}{x^2}$$

$$22.8. f'(x) = \left(\frac{5^{2x}}{1-5^{2x}}\right)' = \frac{(5^{2x})'(1-5^{2x}) - 5^{2x}(1-5^{2x})'}{(1-5^{2x})^2} =$$

$$= \frac{2 \times 5^{2x} \ln 5 (1-5^{2x}) - 5^{2x} \times (-2) \times 5^{2x} \ln 5}{(1-5^{2x})^2} =$$

$$= \frac{2 \times 5^{2x} \ln 5 (1-5^{2x} + 5^{2x})}{(1-5^{2x})^2} = \frac{2 \times 5^{2x} \ln 5}{(1-5^{2x})^2}$$

$$23.1. f'(x) = \left(-\frac{x}{2} + 1 + 2 \ln x\right)' = -\frac{1}{2} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}$$

$$23.2. f'(x) = (x \ln x - x)' = x' \ln x + x(\ln x)' - 1 =$$

$$= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

$$23.3. f'(x) = (\ln^2 x + \ln(x^2 - 1))' = 2(\ln x)' \ln x + \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} =$$

$$= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$23.4. f'(x) = (\ln(e^x + x))' = \frac{(e^x + x)'}{e^x + x} = \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$

$$23.5. f'(x) = \left(\frac{1}{2} \ln^2(x+1)\right)' = \frac{1}{2} \times 2(\ln(x+1))' \ln(x+1) =$$

$$= \frac{(x+1)'}{x+1} \ln(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
 23.6. \quad f'(x) &= ((x-1)\log_2(x^2-x))' = \\
 &= (x-1)' \log_2(x^2-x) + (x-1)(\log_2(x^2-x))' = \\
 &= \log_2(x^2-x) + (x-1) \times \frac{(x^2-x)'}{(x^2-x)\ln 2} = \\
 &= \log_2(x^2-x) + \frac{(x-1)(2x-1)}{x(x-1)\ln 2} = \\
 &= \log_2(x^2-x) + \frac{2x-1}{x\ln 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23.7. \quad f'(x) &= \left(\ln \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right) \right)' = \frac{\left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right)'}{\frac{1-e^x}{1+e^x}} = \\
 &= \frac{-e^x(1+e^x) - e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2} = \\
 &= \frac{1-e^x}{1+e^x} = \\
 &= \frac{-e^x(1+e^x+1-e^x)(1+e^x)}{(1+e^x)^2(1-e^x)} = \frac{-2e^x}{(1+e^x)(1-e^x)} = \\
 &= \frac{-2e^x}{1-(e^x)^2} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23.8. \quad f'(x) &= (x \log_2 \sqrt{x})' = x' \log_5 \sqrt{x} + x(\log_5 \sqrt{x})' = \\
 &= \log_5 \sqrt{x} + x \times \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x} \ln 5} = \log_5 \sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x} \ln 5} = \\
 &= \log_5 \sqrt{x} + \frac{x}{2x \ln 5} = \log_5 \sqrt{x} + \frac{1}{2 \ln 5}
 \end{aligned}$$

$$23.9. \quad f'(x) = ((\ln x)^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2} (\ln x)' (\ln x)^{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2} (\ln x)^{\sqrt{2}-1}}{x}$$

$$\begin{aligned}
 23.10. \quad f'(x) &= \left[\left(\frac{1}{x} \right)^x \right]' = \left[e^{\ln \left(\frac{1}{x} \right)^x} \right]' = \left[e^{x \ln \left(\frac{1}{x} \right)} \right]' = \left[e^{x \ln x^{-1}} \right]' = \\
 &= (e^{-x \ln x})' = (-x \ln x)' e^{-x \ln x} = \\
 &= [(-x)' \ln x - x(\ln x)'] \left(\frac{1}{x} \right)^x = \\
 &= \left(-\ln x - x \times \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} \right)^x = (\ln x^{-1} - 1) \left(\frac{1}{x} \right)^x = \\
 &= \left(\ln \frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{x} \right)^x
 \end{aligned}$$

$$24.1. \quad f(x) = (x+1)e^x$$

Domínio: $D_f = \mathbb{R}$

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = ((x+1)e^x)' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)e^x = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	$-e^{-2}$	\nearrow

Mín.

$$f(-2) = -e^{-2}$$

Concavidades e inflexões:

$$f''(x) = [(x+2)e^x]' = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)e^x = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	\cap	$-2e^{-3}$	\cup

P.I.

Assíntotas:

Verticais: f é contínua em \mathbb{R} . Logo, o gráfico de f não tem qualquer assíntota vertical.

Não verticais ($y = mx + b$):

• Quando $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right) e^x \right] = \\
 &= (1+0)e^{-\infty} = 1 \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y+1)e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y+1}{e^y} =$$

$$= -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = -\frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^y} + \frac{1}{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} + 0 = 0$$

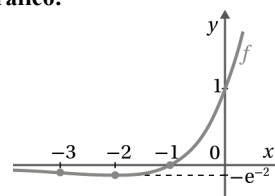
A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

• Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = \\
 &= +\infty \times (+\infty) = +\infty
 \end{aligned}$$

Não há assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Gráfico:



$$24.2. \quad f(x) = \log(x^2+1)$$

Domínio: $D_f = \mathbb{R}$

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = (\log(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 10} = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 10}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	0	\nearrow

Mín.

Concavidades e inflexões:

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)\ln 10} \right)' = \frac{2(x^2+1)\ln 10 - 2x \times 2x \ln 10}{(x^2+1)^2 \ln^2 10}$$

$$= \frac{2\ln 10(x^2+1-2x^2)}{(x^2+1)^2 \ln^2 10} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2 \ln 10}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln 10(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	\cap	$\log 2$	\cup	$\log 2$	\cap

P.I. P.I.

Assintotas

Verticais: f é contínua em \mathbb{R} . Logo, o gráfico de f não tem qualquer assíntota vertical.

Não verticais ($y = mx + b$):

- Quando $x \rightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x \ln 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x \ln 10} =$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \left[2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \left(2 \times 0 + \frac{0}{+\infty} \right) = \frac{1}{\ln 10} (0 + 0) = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 + 1) = +\infty$$

O gráfico de f não tem assíntota em $+\infty$.

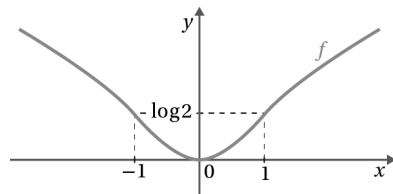
- Quando $x \rightarrow -\infty \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} e$

$$f(x) = \log[(-x)^2 + 1] = \log(x^2 + 1) = f(x)$$

Portanto, f é uma função par e, como tal, se o seu gráfico não tem assíntota em $+\infty$, também não tem em $-\infty$.

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais

Gráfico:



24.3. $f(x) = e^x + 4e^{-x}$

Domínio: $D_f = \mathbb{R}$

Monotonia e extremos

$$f'(x) = (e^x + 4e^{-x})' = e^x - 4e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = -2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	4	\nearrow

Mín

$$f(\ln 2) = e^{\ln 2} + 4e^{-\ln 2} = 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 4$$

Concavidades e inflexões

$$f''(x) = (e^x - 4e^{-x})' = e^x + 4e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$. Logo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e não tem pontos de inflexão.

Assintotas

Verticais: f é contínua em \mathbb{R} . Logo, o gráfico de f não tem assintotas verticais.

Não verticais ($y = mx + b$)

- Quando $x \rightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 4e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} + 4 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x}$$

$$= \frac{0}{-\infty} - 4 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = 0 - 4 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\left| \begin{array}{l} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

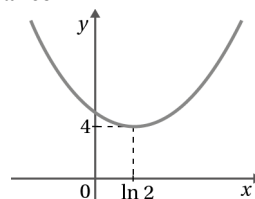
- Quando $x \rightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 4e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x}$$

$$= +\infty + 4 \times \frac{0}{+\infty} = +\infty$$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

Gráfico



24.4. $f(x) = \frac{-2 - \ln x}{x}$

Domínio: $D_f = \mathbb{R}^+$

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \left(\frac{-2 - \ln x}{x} \right)' = \frac{-\frac{1}{x} \times x - (-2 - \ln x)}{x^2} = \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$
f		\searrow	$-e$	\nearrow

Mín.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-2 - \ln e^{-1}}{e^{-1}} = -e$$

Concavidades e inflexões:

$$f''(x) = \left(\frac{1 + \ln x}{x^2} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4} =$$

$$= \frac{x(1 - 2 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - 2\ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
f''		+	0	-
f		∪	$-\frac{3\sqrt{e}}{2}$	∩

P.I.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-2 - \ln e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{3\sqrt{e}}{2}$$

Assíntotas:

Verticais:

f é contínua em \mathbb{R}^+ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 - \ln x}{x} = \frac{-2 - (-\infty)}{0^+} = +\infty$$

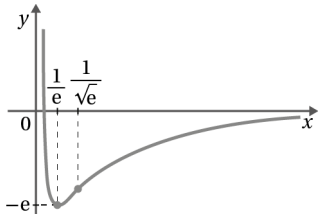
A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} =$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Gráfico:



24.5. $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

Domínio: $D_f = \mathbb{R}$

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1 + e^{-x}}\right)' = \frac{-(-e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$. Logo, f é crescente em todo o domínio e não tem extremos.

Concavidades e inflexões:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}\right)' \\ &= \frac{-e^{-x}(1 + e^{-x})^2 - e^{-x} \times 2 \times (-e^{-x})(1 + e^{-x})}{(1 + e^{-x})^4} \\ &= \frac{(1 + e^{-x})[-e^{-x} - e^{-x} \times e^{-x} + 2e^{-x} \times e^{-x}]}{(1 + e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x} + e^{-x} \times e^{-x}}{(1 + e^{-x})^3} = \frac{-e^{-x}(1 - e^{-x})}{(1 + e^{-x})^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	0	-
f	∪	$\frac{1}{2}$	∩

P.I.

$$f(0) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

Assíntotas:

Verticais: Como f é contínua em \mathbb{R} , o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Não verticais:

• Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{+\infty} = 0, \text{ a reta de}$$

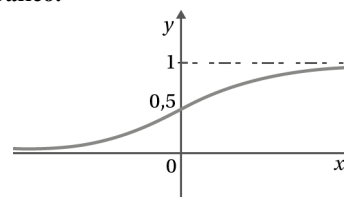
equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

• Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\text{Dado que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1, \text{ a reta}$$

de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Gráfico:



24.6. $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$

Domínio: $D_f = \mathbb{R}^+$

Monotonia e extremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1 + \ln x}{x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1 + \ln x) \times 2x}{x^4} = \\ &= \frac{x(1 - 2 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - 2\ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
f'		+	0	-
f		↗	$\frac{e}{2}$	↘

Máx.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{e}{2}$$

Concavidades e inflexões:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-1 - 2\ln x}{x^3}\right)' = \frac{-2 \times x^3 - (-1 - 2\ln x) \times 3x^2}{x^6} = \\ &= \frac{x^2(-2 + 3 + 6\ln x)}{x^6} = \frac{6\ln x + 1}{x^4} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6\ln x + 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{6} \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f		\cap	$\frac{5\sqrt[3]{e}}{6}$	\cup

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e}}\right) = f\left(e^{-\frac{1}{6}}\right) = \frac{1 + \ln e^{-\frac{1}{6}}}{\left(e^{-\frac{1}{6}}\right)^2} = \frac{5\sqrt[3]{e}}{6}$$

Assíntotas:

Verticais:

f é contínua em \mathbb{R}^+ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Não verticais $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^2}\right) =$$

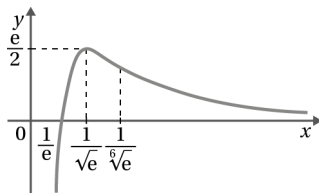
$$= 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \times 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 + 0 \times 0 = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Gráfico :



24.7. $f(x) = x e^{1-|x|}$

Domínio: $D_f = \mathbb{R}$

Monotonia e extremos:

Para $x \neq 0$, tem-se:

$$f(x) = \begin{cases} x^{1-x} & \text{se } x > 0 \\ x e^{1+x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{1-x} + x \times (-e^{1-x}) & \text{se } x > 0 \\ e^{1+x} + x e^{1+x} & \text{se } x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (1-x)e^{1-x} & \text{se } x > 0 \\ (1+x)e^{1+x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x=0 \wedge x > 0) \vee (1+x=0 \wedge x < 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+	+	0
f	\searrow	-1	\nearrow	\nearrow	1
		Min.		Máx.	

$$f(-1) = -1e^0 = -1$$

$$f(1) = 1e^0 = 1$$

Nota: Como f é contínua em \mathbb{R} , f é estritamente crescente em $[-1, 1]$.

Concavidades e inflexões

Para $x \neq 0$:

$$f''(x) = \begin{cases} ((1-x)e^{1-x})' & \text{se } x > 0 \\ ((1+x)e^{1+x})' & \text{se } x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -e^{1-x} + (1-x) \times (-e^{1-x}) & \text{se } x > 0 \\ e^{1+x} + (1+x)e^{1+x} & \text{se } x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -(1-x+1)e^{1-x} & \text{se } x > 0 \\ (1+1+x)e^{1+x} & \text{se } x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (x-2)e^{1-x} & \text{se } x > 0 \\ (x+2)e^{1+x} & \text{se } x < 0 \end{cases} =$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2=0 \wedge x > 0) \vee (x+2=0 \wedge x < 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
f''	-	0	+		-	0	+
f	\cap	$-\frac{2}{e}$	\cup	0	\cap	$\frac{2}{e}$	\cup
		P.I.		P.I.		P.I.	

Assíntotas

Verticais: Como f é contínua em \mathbb{R} , o gráfico não tem assíntotas verticais.

Não verticais ($y = mx + b$) :

• Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{1+x}}{x} = e^{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{1+x}) = e \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x =$$

$$= e \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{-y}) = -e \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = \begin{cases} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$= \frac{-e}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = \frac{-e}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

• Quando $x \rightarrow +\infty$:

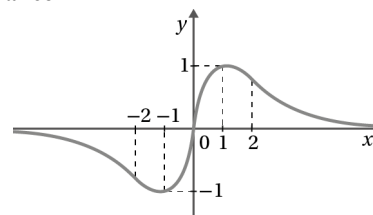
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = e^{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = e \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} =$$

$$= \frac{e}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} = \frac{e}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$

Gráfico



4.2. Derivadas e aplicações de funções exponenciais e de funções logarítmicas

25.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

25.2. $f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	-
f	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow

Máx.

f é estritamente crescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente decrescente em $[1, +\infty[$. f tem um máximo relativo (e absoluto) igual a $\frac{1}{e}$ para $x = 1$.

25.3. $y = mx + b$

$m = f'(0) = e^0(1-0) = 1$

$P(0, 0) \rightarrow f(0) = 0 \times e^0 = 0$

$y = x$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(0, 0)$.

25.4. $f''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} - x e^{-x}) = -2e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}(x-2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f'	\searrow	$-\frac{1}{e^2}$	\nearrow

$f'(2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$

O declive mínimo é o mínimo de f' , ou seja, é igual a $-\frac{1}{e^2}$.

25.5. $g(x) = \ln(2-x), D_g =]-\infty, 2[$

a) Seja $h(x) = f(x) - g(x) = x e^{-x} - \ln(2-x)$

- h é contínua em $]-\infty, 2[$ por ter a diferença de funções contínuas neste intervalo. Logo, h é contínua em $[0, 1] \subset]-\infty, 2[$.

$h(0) = f(0) - g(0) = 0 - \ln 2 = -\ln 2 < 0$

$h(1) = f(1) - g(1) = \frac{1}{e} - 0 = \frac{1}{e} > 0$

$h(0) \times h(1) < 0$

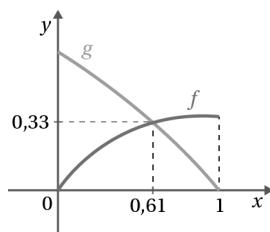
O corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy garante que h tem pelo menos um zero em $]0, 1[$.

Logo, existe pelo menos um ponto de abscissa em $]0, 1[$, onde os gráficos de f e g se intersectam.

Já vimos que f é estritamente crescente em $[0, 1]$.

$g'(x) = \frac{-1}{2-x} = \frac{1}{x-2} < 0, \forall x \in]-\infty, 2[$

Logo, g é estritamente decrescente em $[0, 1]$. Portanto, como em $[0, 1]$, f é estritamente crescente e g é estritamente decrescente, o ponto de interseção cuja existência se provou é único. Recorrendo à calculadora gráfica obtiveram-se as coordenadas do ponto de interseção, com aproximação às centésimas: $(0,61; 0,33)$



b) $\ln[f(x)] \leq g(x) - x \Leftrightarrow \ln(x e^{-x}) \leq \ln(2-x) - x$

$\Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} \leq \ln(2-x) - x$

$\Leftrightarrow \ln x - x \leq \ln(2-x) - x \Leftrightarrow \ln x \leq \ln(2-x)$

$\Leftrightarrow x \leq 2-x \wedge x > 0 \wedge 2-x > 0$

$\Leftrightarrow 2x \leq 2 \wedge x > 0 \wedge x < 2$

$\Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1]$

$S =]0, 1]$

26.1. $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - (x-3) > 0 \Leftrightarrow 5e^{-x} - 3e^{-2x} > 0$

$\Leftrightarrow e^{-x}(5-3e^{-x}) > 0 \Leftrightarrow 5-3e^{-x} > 0 \Leftrightarrow |e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3e^{-x} < 5 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{5}{3} \Leftrightarrow -x < \ln \frac{5}{3} \Leftrightarrow x > -\ln \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x > \ln \frac{3}{5}$

$S = \left] \ln \frac{3}{5}, +\infty \right[$

26.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5e^{-x} - 3e^{-2x}) = 5 \times 0 - 3 \times 0 = 0$

A reta de equação $y = x - 3$ é uma assíntota ao gráfico da função f em $+\infty$.

26.3. Provar que o gráfico de f e a reta r se intersectam, no intervalo $[-1, 0]$, num único ponto, é o mesmo que provar que a função g tem um único zero em $[-1, 0]$.

- g é contínua em \mathbb{R} . (diferença de funções contínuas)

Logo, g é contínua em $[-1, 0]$.

- $g(-1) = 5e - 3e^2 < 0$; $g(0) = 5e^0 - 3e^0 = 2 > 0$

$g(-1) \times g(0) < 0$

O corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de pelo menos um zero de f em $[-1, 0]$.

$g'(x) = (5e^{-x} - 3e^{-2x})' = 6e^{-2x} - 5e^{-x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(6e^{-x} - 5) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow -x = \ln \frac{5}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \ln \left(\frac{6}{5} \right)$

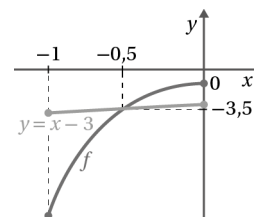
x	$-\infty$	$\ln \frac{6}{5}$	$+\infty$
g'	+	0	-
g	\nearrow		\searrow

g é estritamente crescente em $]-\infty, \ln \frac{6}{5}] \Rightarrow g$ é

estritamente crescente em $[-1, 0]$ dado que $\ln \frac{6}{5} > 0$.

Como g é estritamente crescente em $[-1, 0]$, o zero cuja existência se provou neste intervalo é único.

Recorrendo à calculadora determinaram-se valores aproximados às décimas do ponto de interseção dos gráficos de $y_1 = f(x)$ e $y_2 = x - 3$ tendo-se obtido $(-0,5; -3,5)$.



27. $M(0) = 2048$

27.1. $M(t) = 2048e^{kt}$

$$M(4) = 512 \Leftrightarrow 2048e^{4k} = 512 \Leftrightarrow e^{4k} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (e^k)^4 = 2^{-2}$$

$$\Leftrightarrow e^k = \sqrt[4]{2^{-2}} \Leftrightarrow e^k = 2^{-\frac{2}{4}} \Leftrightarrow e^k = 2^{-0,5}$$

$$M(t) = 2048e^{kt} = 2048(e^k)^t = 2048(2^{-0,5})^t$$

$$M(t) = 2048 \times 2^{-0,5t}$$

27.2. $M(10) = 2048 \times 2^{-0,5 \times 10} = 2048 \times 2^{-5} = 64$

$$M(10) = 64 \text{ g}$$

27.3. $M(t) = 2048 \times 0,1 \Leftrightarrow 2048 \times 2^{-0,5t} = 2048 \times 0,1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{-0,5t} = 0,1 \Leftrightarrow -0,5t = \log_2(0,1) \Leftrightarrow -0,5t = \frac{\ln 0,1}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,1}{-0,5 \ln 2} \Rightarrow t \approx 6,6439$$

$$6,6439 \text{ min} \approx 6 \text{ min } 39 \text{ s}$$

27.4. $t.m.v._{(M,0,1)} = \frac{M(1) - M(0)}{1 - 0} \approx \frac{1448,15 - 2048}{1}$

$$t.m.v._{(M,0,1)} \approx -600 \text{ g/min}$$

$$t.m.v._{(M,1,2)} = \frac{M(2) - M(1)}{2 - 1} \approx \frac{1024 - 1448,15}{1}$$

$$t.m.v._{(M,1,2)} \approx -424 \text{ g/min}$$

27.5. $M'(t) = 2048 \times (-0,5) \times 2^{-0,5t} \times \ln 2 = -1024 \times 2^{-0,5t} \times \ln 2$

$$M'(5) = -1024 \times 2^{-0,5 \times 5} \times \ln 2$$

$$M'(5) \approx -125,5 \text{ g/min}$$

28. $x(t) + y(t) = 1000$

$$x'(t) = ky(t)$$

$$x(0) = 0 \text{ e } x'(0) = 5$$

28.1. $x(t) + y(t) = 1000 \Leftrightarrow y(t) = 1000 - x(t)$

$$x'(t) = ky(t) \Leftrightarrow x'(t) = k(1000 - x(t))$$

$$x'(0) = k(1000 - x(0)) \Leftrightarrow 5 = k(1000 - 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{1000} \Leftrightarrow k = 0,005$$

Logo, $x'(t) = 0,005(1000 - x)$.

28.2. Se $x(t) = 1000 - Qe^{-0,005t}$

$$x'(t) = 0 + 0,005Qe^{-0,005t} \Leftrightarrow x'(t) = 0,005Qe^{-0,005t}$$

Por outro lado:

$$0,005(1000 - x) = 5 - 0,005x(t) = 5 - 0,005(1000 - Qe^{-0,005t})$$

$$= 5 - 5 + 0,005Qe^{-0,005t} = x'(t)$$

Fica assim provado o que se pretendia.

$$x(t) = 1000 - Qe^{-0,005t}$$

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow 1000 - Qe^{-0,005 \times 0} = 0 \Leftrightarrow 1000 - Q \times 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q = 1000$$

29.1. $P(t) = -\frac{10000}{2 - 2^{-0,5t}}$

$$P(t) = 6000 \Leftrightarrow \frac{10\,000}{2 - 2^{-0,5t}} = 6000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\,000 = 6000(2 - 2^{-0,5t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2^{-0,5t} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow -2^{-0,5t} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,5t = \log_2 \frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,5t = -\log_2 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,5t = \frac{\ln 3}{\ln 2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 3}{0,5 \times \ln 2} \Rightarrow t \approx 3,17$$

3,17 semanas \approx 22 dias

29.2. $P(0) - P(2) = 500 \Leftrightarrow \frac{k}{2-1} - \frac{k}{2-2^{-1}} = 500 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k - \frac{k}{\frac{2}{2-1}} = 500 \Leftrightarrow k - \frac{2}{3}k = 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k - 2k = 1500 \Leftrightarrow k = 1500$$

30.1. Se $Q'(t) = kQ(t)$, $Q(t) = Q_0 e^{kt}$

$$Q(t+1) = 0,98Q(t) \Leftrightarrow Q_0 e^{k(t+1)} = 0,98 \times Q_0 e^{kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{kt} \times e^k = 0,98 \times Q_0 e^{kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^k = 0,98 \Leftrightarrow k = \ln(0,98)$$

$$Q(t) = Q_0 e^{\ln(0,98)t}$$

30.2. $Q(10) = 100e^{[\ln(0,98)] \times 10} \rightarrow Q(10) \approx 81,7 \text{ mg}$

30.3. $Q(t) = \frac{1}{2}Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{(\ln(0,98))t} = \frac{1}{2}Q_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{t \ln(0,98)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \times \ln(0,98) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-\ln 2}{\ln(0,98)} \Rightarrow t \approx 34,3$$

Ao fim de 34,3 anos, aproximadamente.

31. $f(x) = 1 + x - x \ln x$, $D_f = \mathbb{R}^+$

31.1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x - x \ln x) = 1 + 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) =$

$$= 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right] = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y^{-1}}{y} = \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x - x \ln x) =$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 - \ln x)]$$

$$= 1 + [+\infty(1 - \infty)] = -\infty$$

31.2. $f'(x) = 1 - \ln x + x \times \frac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

4.2. Derivadas e aplicações de funções exponenciais e de funções logarítmicas

x	0		1	$+\infty$
f'		+	0	-
f		\nearrow	2	\searrow

Máx.

$$f(1) = 2$$

f é estritamente crescente em $]0, 1]$ e estritamente decrescente em $[1, +\infty[$. f admite máximo absoluto igual a 2 para $x = 1$.

31.3. f é contínua em \mathbb{R}^+ Produto e soma de funções contínuas

$$f(1) = 2 > 0$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \exists a \in]1, +\infty[: f(a) < 0$$

$$(\text{por exemplo } a = e^2, \text{ pois } f(e^2) = 1 - e^2 < 0)$$

Logo, como f é contínua em $[1, a]$ e $f(1) \times f(a) < 0$, o

Teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de um zero de f em $]1, a[$.

Atendendo a que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ e f é estritamente

crescente em $]0, 1]$ então $f(x) > 1$ para todo o $x \in]0, 1]$.

Logo, f não tem zeros neste intervalo.

Como f é estritamente decrescente em $[1, +\infty[$, então f

tem no máximo um zero neste intervalo.

Assim, o zero cuja existência se provou é único.

Recorrendo à calculadora obtém-se $x_0 \approx 3,59$ como valor aproximado do zero de f .

$$\mathbf{31.4.} \quad f(x) > 1 + 3x \Leftrightarrow 1 + x - x \ln x > 1 + 3x \Leftrightarrow 2x + x \ln x < 0$$

$$\Leftrightarrow x(2 + \ln x) < 0$$

$$2 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

$$2 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -2 \Leftrightarrow x > e^{-2}$$

x	0		e^{-2}	$+\infty$
x		+	+	+
$2 + \ln x$		-	0	+
$x(2 + \ln x)$		-	0	+

$$S =]0, e^{-2}[$$

$$\mathbf{31.5.} \quad g'(x) = \frac{(\ln x)'(1+x) - (\ln x)(1+x)'}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times (1+x) - \ln x}{(1+x)^2} = \frac{x+1-x \ln x}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1+x-x \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{f(x)}{x(1+x)^2}$$

$$\mathbf{32.} \quad f(x) = 2 \ln(e^x + 1) - x; D_f = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{32.1.} \quad f'(x) = 2 \times \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} - x' = 2 \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 =$$

$$= \frac{2e^x - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	\searrow	$2 \ln 2$	\nearrow

Min.

$$f(0) = 2 \ln 2$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

$f(0) = 2 \ln 2$ é o mínimo absoluto de f .

$$\mathbf{32.2.} \quad f''(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 - e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em todo o domínio.

32.3. f é contínua em \mathbb{R} pelo que o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$):

• Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln(e^x + 1) - x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln(e^x + 1)}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \frac{2 \ln(0 + 1)}{-\infty} - 1 =$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 \ln(e^x + 1) - x + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 \ln(e^x + 1)] = 2 \ln(0 + 1) = 0$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico de f em $x \rightarrow -\infty$

• Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(e^x + 1) - x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \left[e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) \right] - x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln e^x + 2 \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) - x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2 \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}{x} = 1 + \frac{2 \ln(1 + 0)}{+\infty} =$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln(e^x + 1) - x - x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln(e^x + 1) - 2x] =$$

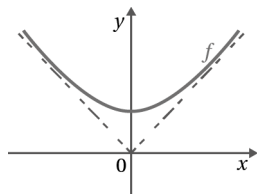
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln e^x + 2 \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) - 2x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + 2 \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) - 2x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)] = 2 \ln(1 + 0) = 0$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

32.4.



$$D_f = [2 \ln 2, +\infty[$$

33.1. $P(0) = \frac{105}{1 + 34 \times e^0} = \frac{105}{35} = 3$

33.2. $P(10) = \frac{105}{1 + 34 \times e^{-1,1244 \times 10}} \approx 105$

33.3.
$$P'(t) = \frac{-105 \times 34 \times (-1,1244) e^{-1,11244t}}{(1 + 34 e^{-1,1244t})^2} = \frac{4014,108 e^{-1,1244t}}{(1 + 34 e^{-1,1244t})^2} > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$$

$P'(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$. Logo, P é estritamente crescente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{105}{1 + 34 e^{-1,1244t}} = \frac{105}{1 + 34 e^{-\infty}} = \frac{105}{1 + 0} = 105$$

O número de elementos da população é crescente e, com o decorrer do tempo, tende e aproximar-se de 105. Como a função é crescente, aproxima-se de 105 sem ultrapassar este valor.

33.4. $P'(t) = \frac{4014,108 e^{-1,1244t}}{(1 + 34 e^{-1,1244t})^2} = \frac{-3570k e^{kt}}{(1 + 34 e^{kt})^2}$ com

$k = -1,1244$.

$P''(t) =$

$$= \frac{-3570k^2 e^{kt} (1 + 34 e^{kt})^2 - 3570k e^{kt} \times 2(134 e^{kt}) \times 34k e^{kt}}{(1 + 34 e^{kt})^4} =$$

$$= \frac{3570k^2 e^{kt} (1 + 34 e^{kt}) (-1 - 34 e^{kt} + 2 \times 34 e^{kt})}{(1 + 34 e^{kt})^4} =$$

$$= \frac{3570k^2 e^{kt} (34 e^{kt} - 1)}{(1 + 34 e^{kt})^3}$$

$$P''(t) = 0 \Leftrightarrow 34 e^{kt} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{kt} = \frac{1}{34} \Leftrightarrow kt = \ln \frac{1}{34} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow kt = -\ln(34) \Leftrightarrow t = \frac{-\ln 34}{k}$$

x	0		$\frac{-\ln 34}{k}$	$+\infty$
P''	+	+	0	-
P'		\nearrow		\searrow

Máx.

P' é máxima para $t = -\frac{\ln 34}{k}$

Como $k = -1,1244$, a taxa de crescimento é máxima para $t \approx 3,1362$.

3,1362 dias = 3 dias e 3 horas

34.1. $P(t) = \frac{300}{3 + A e^{-0,2t}}$

$$P'(t) = \frac{-300(-0,2 A e^{-0,2t})}{(3 + A e^{-0,2t})^2} = 0,2 \frac{300}{3 + A e^{-0,2t}} \times \frac{A e^{-0,2t}}{3 + A e^{-0,2t}}$$

$$= 0,2 P(t) \left(1 - 1 + \frac{A e^{-0,2t}}{3 + A e^{-0,2t}} \right) =$$

$$= 0,2 P(t) \left(1 - \frac{3 + A e^{-0,12t} - A e^{-0,2t}}{3 + A e^{-0,2t}} \right) =$$

$$= 0,2 P(t) \left(1 - \frac{3}{3 + A e^{-0,2t}} \right) = 0,2 P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{100} \right)$$

34.2. $P(0) = P_0 \Leftrightarrow \frac{300}{3 + A e^0} = P_0 \Leftrightarrow \frac{300}{3 + A} = P_0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 300 = 3P_0 + AP_0 \Leftrightarrow AP_0 = 300 - 3P_0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow A = \frac{300 - 3P_0}{P_0} \Leftrightarrow A = \frac{300}{P_0} - 3$

34.3. $P_0 = 3$; $A = \frac{300}{3} - 3 = 97$; $P(t) = \frac{300}{3 + 97 e^{-0,2t}}$

a) $P(t) = 30 \Leftrightarrow \frac{300}{3 + 97 e^{-0,2t}} = 30 \Leftrightarrow 10 = 3 + 97 e^{-0,2t} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 97 e^{-0,2t} = 7 \Leftrightarrow -0,2t = \ln \frac{7}{97} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{7}{97}\right)}{-0,2} \Rightarrow t \approx 13,144$$

13,144 h \approx 13 h 9 min

b) $P(t) = \frac{300}{3 + 97 e^{-0,2t}} = \frac{A}{3 + B e^{kt}} \quad \left| \begin{array}{l} A = 300; B = 97 \\ k = -0,2 \end{array} \right.$

$$P'(t) = \left(\frac{A}{3 + B e^{kt}} \right)' = \frac{-A(3 + B e^{kt})'}{(3 + B e^{kt})^2} = \frac{-A(k B e^{kt})}{(3 + B e^{kt})^2} =$$

$$= \frac{-k A B e^{kt}}{(3 + B e^{kt})^2} = \frac{5820 e^{-0,2t}}{(3 + 97 e^{-0,2t})^2} \quad \left| \begin{array}{l} A = 300; B = 97; k = -0,2 \\ k A B = -5820 \end{array} \right.$$

Como $P'(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$, P é estritamente crescente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{300}{3 + 97 e^{-0,2t}} = \frac{300}{3 + 97 \times 0} = 100$$

O número de bactérias aumenta com o decorrer do tempo e tende a estabilizar em 100.

c)
$$P''(t) = \left[\frac{-k A B e^{kt}}{(3 + B e^{kt})^2} \right]' =$$

$$= \frac{(-k A B e^{kt})'(3 + B e^{kt})^2 - (-k A B e^{kt})[(3 + B e^{kt})^2]'}{(3 + B e^{kt})^4}$$

$$= \frac{-k^2 A B e^{kt} (3 + B e^{kt})^2 - 2(-k A B e^{kt})(3 + B e^{kt})k B e^{kt}}{(3 + B e^{kt})^4}$$

$$= \frac{(3 + B e^{kt})(-3k^2 A B e^{kt} - k^2 A B^2 e^{2kt} + 2k^2 A B^2 e^{2kt})}{(3 + B e^{kt})^4}$$

$$= \frac{-3k^2 A B e^{kt} + k^2 A B^2 e^{2kt}}{(3 + B e^{kt})^3} = \quad \left| \begin{array}{l} A = 300; B = 97 \\ k = -0,2 \\ k^2 A B = 1164 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1164 e^{-0,2t} (97 e^{-0,2t} - 3)}{(3 + 97 e^{kt})^3}$$

$$P''(t) = 0 \Leftrightarrow 97e^{-0,2t} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = \frac{3}{97} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,2t = \ln\left(\frac{3}{97}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{3}{97}\right)}{-0,2} \Rightarrow t \approx 17,380$$

Seja $t_1 = \frac{\ln\left(\frac{3}{97}\right)}{-0,2}$.

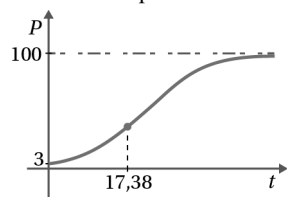
x	0		t_1	$+\infty$
P''		+	0	-
P'		\nearrow		\searrow

Máx.

P' é máxima para $t \approx 17,380$.

17,380 h \approx 17 h 23 min

34.4. t_1 é a abscissa do ponto de inflexão.



35.1. $h(0) = \frac{120}{1+200e^0} \approx 0,597$

A altura da árvore media 59,7 cm (aproximadamente).

35.2. a) $h(10) = \frac{120}{1+200 \times e^{-2}} \approx 4,3$ m

b) $h(20) = \frac{120}{1+200e^{-4}} \approx 25,7$ m

35.3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{120}{1+200e^{-0,2t}} = \frac{120}{1+200 \times 0} = 120$

Com o decorrer do tempo, a altura da árvore tende a estabilizar em 120 m.

35.4. $h(t) = \frac{120}{1+200e^{-0,2t}} = \frac{A}{1+Be^{kt}}$ $A=120; B=200$
 $k=-0,2$

$$h'(t) = \left(\frac{A}{1+Be^{kt}}\right)' = \frac{-A(1+Be^{kt})'}{(1+Be^{kt})^2} = \frac{-A(kBe^{kt})}{(1+Be^{kt})^2} =$$

$$= \frac{-kABe^{kt}}{(1+Be^{kt})^2} = \frac{4800e^{-0,2t}}{(1+200e^{-0,2t})^2}$$
 $A=120; B=200; k=-0,2$
 $kAB=-4800$

$$h''(t) = \left[\frac{-kABe^{kt}}{(1+Be^{kt})^2}\right]' =$$

$$= \frac{(-kABe^{kt})'(1+Be^{kt})^2 - (-kABe^{kt})[(1+Be^{kt})^2]'}{(1+Be^{kt})^4} =$$

$$= \frac{-k^2ABe^{kt}(1+Be^{kt})^2 - 2(-kABe^{kt})(1+Be^{kt})kBe^{kt}}{(1+Be^{kt})^4} =$$

$$= \frac{(1+Be^{kt})[-k^2ABe^{kt} - k^2AB^2(e^{kt})^2 + 2k^2AB^2(e^{kt})^2]}{(1+Be^{kt})^4}$$

$$= \frac{-k^2ABe^{kt} + k^2AB^2(e^{kt})^2}{(1+Be^{kt})^3} = \frac{k^2ABe^{kt}(-1+Be^{kt})}{(1+Be^{kt})^3} =$$

$$= \frac{960e^{-0,2t}(200e^{-0,2t}-1)}{(1+200e^{-0,2t})^3}$$
 $A=120; B=200$
 $k=-0,2$
 $k^2AB=960$

$$h''(t) = 0 \Leftrightarrow 200e^{-0,2t} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = \frac{1}{200} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,2t = -\ln(200) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(200)}{0,2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \approx 26,4916$$

Seja $t_0 = \frac{\ln(200)}{0,2} \approx 26,4916$.

t	0		t_0	$+\infty$
h''		+	0	-
h'		\nearrow		\searrow

Máx.

A taxa de crescimento é máxima decorridos 26,5 anos, aproximadamente.

Avaliação 2

Pág. 188

1. $f(x) = \ln x + \frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-2x}{x^4} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2}{x^3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{-2 \times 3x^2}{x^6} = -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} = \frac{6 - x^2}{x^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{6}$$

x	2		$\sqrt{6}$		3
f''		+	0	-	
f'		\nearrow		\searrow	

Máx.

$$f'(\sqrt{6}) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{6\sqrt{6}} = \frac{6-2}{6\sqrt{6}} = \frac{4}{6\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \times 6} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

Resposta: (A)

2. $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$

$$f(0) = 1, g(0) = 1$$

Os gráficos interseitam-se no ponto (0, 1).

(C) é falsa

Resposta: (C)

3. $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2 = 2(2^{x-1} \ln 2 - 1)$

Resposta: (B)

4. $g'(x) = -e^x - 2 \rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$g''(x) = -e^x \rightarrow g''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Resposta: (D)

5. $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)(1+x) - (\ln x - x)}{(1+x)^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{x} + 1 - 1 - x - \ln x + x}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{(1+x)^2} = \frac{1 - x \ln x}{x(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1 - x \ln x}{x(x+1)^2}$$

Resposta: (D)

6. $Q(t) = Q_0 \times 2^{-0,1t}$

$$Q(t) = \frac{1}{2} Q_0 \Leftrightarrow 2^{-0,1t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{-0,1t} = 2^{-1} \Leftrightarrow -0,1t = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 10$$

Resposta: (D)

7. $h'(x) = 200x + 20e^{-0,2x}$
 $h''(x) = 200 - 4e^{-0,2x}$
 $h''(x) = 0 \Leftrightarrow 200 - 4e^{-0,2x} = 0 \Leftrightarrow e^{-0,2x} = 50 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -0,2x = \ln 50 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 50}{-0,2} \Rightarrow x \approx -19,6$

Resposta: (C)

Pág. 189

8.1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

8.2. $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$f'(x) < 0, \forall x \in D_f$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

f não tem extremos.

8.3. $f''(x) = \left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right]' e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{-2}{(x-1)^2} \left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)' =$
 $= \frac{2 \times 2(x-1)}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} =$
 $= \frac{4}{(x-1)^3} e^{\frac{x+1}{x-1}} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{4}{(x-1)^3} e^{\frac{x+1}{x-1}} \times \frac{x}{x-1} =$
 $= \frac{4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	\cap	$\frac{1}{e}$	\cup	\cup

P.I.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ é um ponto de inflexão.

8.4. f é contínua.

Assíntotas verticais:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e^{0^-} = e^{-\infty} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e^{0^+} = e^{+\infty} = +\infty$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota ao gráfico de f

Assíntotas não verticais:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e^1 = e$ dado que

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$

A reta de equação $y = e$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

9.1. $f(x) = 6 \Leftrightarrow 3^x(3^x - 1) = 6 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = 3^x = -2 \vee 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

9.2. $f'(x) = (3^{2x} - 3^x)' = 2 \times 3^{2x} \ln 3 - 3^x \ln 3 = 3^x \ln 3 (2 \times 3^x - 1)$

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \ln(e^{-x} + e^x)$

10.1. $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

$f(-x) = \ln(e^x + e^{-x}) = f(x), \forall x \in D_f$

Logo, f é uma função par.

10.2. Em $-\infty$: $y = mx + b$

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{-x} + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln[e^{-x}(1 + e^{2x})]}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln e^{-x} + \ln(1 + e^{2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \ln(1 + e^{2x})}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x} = -1 + \frac{0}{-\infty} = -1$

$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^{-x} + e^x) + x] =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^{-x}(1 + e^{2x})) + x] =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^{-x}) + \ln(1 + e^{2x}) + x] =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + \ln(1 + e^{2x}) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{2x}) =$

$= \ln(1 + 0) = 0$

A reta de equação $y = -x$ é assíntota ao gráfico de f em

$-\infty$.

Em $+\infty$:

$f(x) = \ln(e^{-x} + e^x) = \ln[e^x(e^{-2x} + 1)] =$

$= \ln e^x + \ln(e^{-2x} + 1) = x + \ln(e^{-2x} + 1)$

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(e^{-2x} + 1)}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{x} = 1 + 0 = 1$

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \ln(e^{-2x} + 1) - x] =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-2x} + 1) = \ln(0 + 1) = 0$

A reta de equação $y = x$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Logo, o gráfico de f tem duas assíntotas perpendiculares, as retas de equações $y = -x$ e $y = x$ dado que $-1 \times 1 = -1$.

10.3. $f'(x) = \frac{-e^{-x} + e^x}{e^{-x} + e^x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	$\ln 2$	\nearrow

Mín.

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente

crecente em $[0, +\infty[$.

$f(0) = \ln 2$ é o mínimo absoluto de f .

10.4. Atendendo a 10.2. e 10.3., $D_f =]\ln 2, +\infty[$

4.2. Derivadas e aplicações de funções exponenciais e de funções logarítmicas

Logo, a equação $f(x) = k$ é impossível se e só se

$$k \in]-\infty, \ln 2[.$$

$$11.1. f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) - 1$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} - e^x + 1 > 0\} = \mathbb{R}$$

$$e^{2x} - e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x + 1 > 0$$

$$\text{Se } y = e^x, y^2 - y + 1 > 0.$$

$$(e^x)^2 - e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y^2 - y + 1 = 0 \\ \Delta = 1 - 4 < 0 \\ y^2 - y + 1 > 0, \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$11.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^{2x} - e^x + 1) - 1] = \ln(0 - 0 + 1) - 1 = -1$$

A reta de equação $y = -1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

$$11.3. f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) - 1 = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})] - 1 = \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 1 = 2x - 1 + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$11.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - 1 + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x + 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = \ln(1 - 0 + 0) = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 2x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

$$11.5. f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow		\nearrow

Mín.

$$f(-\ln 2) = \ln(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1) - 1 = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) - 1 = \ln\left(\frac{3}{4}\right) - 1$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -\ln 2]$ e estritamente crescente em $[-\ln 2, +\infty[$.

$$f(-\ln 2) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) - 1 \text{ é o mínimo absoluto de } f.$$

$$11.6. f''(x) = \frac{(4e^{2x} - e^x)(e^{2x} - e^x + 1) - (2e^{2x} - e^x)(2e^{2x} - e^x)}{(e^{2x} - e^x + 1)^2} = \frac{4e^{4x} - 4e^{3x} + 4e^{2x} - e^{3x} + e^{2x} - e^x - 4e^{4x} + 2e^{3x} + 2e^{3x} - e^{2x}}{(e^{2x} - e^x + 1)^2} = \frac{-e^{3x} + 4e^{2x} - e^x}{(e^{2x} - e^x + 1)^2} = \frac{e^x(-e^{2x} + 4e^x - 1)}{(e^{2x} - e^x + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -(e^x)^2 + 4e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{-2} \Leftrightarrow e^x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow e^x = 2 - \sqrt{3} \vee e^x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \ln(2 - \sqrt{3}) \vee x = \ln(2 + \sqrt{3})$$

Sejam $x_0 = \ln(2 - \sqrt{3})$ e $x_1 = \ln(2 + \sqrt{3})$.

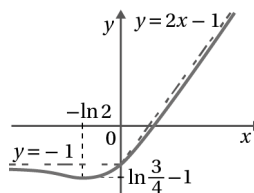
x	$-\infty$	x_0		x_1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	\cap		\cup		\cap

P.I.

P.I.

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, \ln(2 - \sqrt{3})[$ e em $]\ln(2 + \sqrt{3}), +\infty[$ e voltada para cima em $]\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})[$. Os pontos de abscissas $\ln(2 - \sqrt{3})$ e $\ln(2 + \sqrt{3})$ são pontos de inflexão.

11.7.



$$12. P'(t) = kP(t); P(t) = P(0)e^{kt}$$

$$12.1. P(0) = 1000; P(5) = 1335; P(t) = 1000e^{kt} \\ 1000e^{5k} = 1335 \Leftrightarrow e^{5k} = 1,335 \Leftrightarrow 5k = \ln(1,335) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(1,335)}{5} \Rightarrow k \approx 0,05779$$

$$12.2. P(t) = 1000e^{-0,05779t} \\ P(25) = 1000e^{0,05779 \times 25} \approx 4241$$

$$12.3. a) P(t) = 10^6 \Leftrightarrow 1000e^{0,05779t} = 10^6 \Leftrightarrow e^{0,05779t} = 10^3 \Leftrightarrow 0,05779t = \ln 10^3 \Leftrightarrow t = \frac{3 \ln 10}{0,05779} \Rightarrow t \approx 119,532 \text{ min}$$

$$119,532 \text{ min} \approx 119 \text{ min } 32 \text{ s}$$

$$b) P(t) = 2000 \Leftrightarrow 1000e^{-0,05779t} = 2000 \Leftrightarrow e^{-0,05779t} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,05779} \Rightarrow t \approx 12 \text{ min}$$

13. Seja $Q(t)$ a quantidade, em gramas do composto X , t minutos após o início da reação.

Sabemos que $Q'(t) = kQ(t)$. Então, $Q(t) = Ae^{kt}$ sendo A a quantidade inicial, em gramas, da substância X .

$$Q(10) = \frac{1}{3}A \text{ e } Q(15) = 20$$

$$Q(10) = \frac{1}{3}A \Leftrightarrow Ae^{10k} = \frac{1}{3}A \Leftrightarrow e^{10k} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10k = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow k = \frac{-\ln(3)}{10} \Leftrightarrow k = -0,1 \ln(3)$$

$$Q(t) = Ae^{-0,1(\ln 3)t}$$

$$Q(15) = 20 \Leftrightarrow Ae^{-0,1(\ln 3) \times 15} = 20 \Leftrightarrow A = \frac{20}{e^{-1,5 \ln 3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{20}{e^{-1,5 \ln 3}} \Leftrightarrow A = \frac{20}{3^{-1,5}} \Leftrightarrow A = 3^{1,5} \times 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 3^{\frac{3}{2}} \times 20 \Leftrightarrow A = 3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 20 \Leftrightarrow A = 3\sqrt{3} \times 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 60\sqrt{3} \Rightarrow A \approx 103,9$$

$$A = 60\sqrt{3} \text{ g} \approx 103,9 \text{ g}$$

Avaliação global

Pág. 190

1. $A^{x-y} = 2$ e $A^{3y} = 8$
 $A^{3y} = 8 \Leftrightarrow (A^y)^3 = 8 \Leftrightarrow A^y = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow A^y = 2$
 $A^{x-y} = 2 \Leftrightarrow \frac{A^x}{A^y} = 2 \Leftrightarrow A^x = 2A^y$
 $A^x = 2A^y = 2 \times 2 = 4$
Resposta: (A)
2. $f(t) = 10^4 e^{kt}$
 $f(3) = 8 \times 10^4 \Leftrightarrow 10^4 e^{3k} = 8 \times 10^4 \Leftrightarrow$
 $e^{3k} = 8 \Leftrightarrow (e^k)^3 = 8 \Leftrightarrow e^k = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow$
 $e^k = 2 \Leftrightarrow k = \ln 2$

$f(t) = 10^4 e^{(\ln 2)t}$
 $f(0,5) = 10^4 e^{(\ln 2) \times 0,5} \approx 14\,140$ 30 min = 0,5 h

Resposta: (C)

3. $2^{2x} - 8 \times 2^x + 12 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 8 \times 2^x + 12 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} \Leftrightarrow 2^x = 2 \vee 2^x = 6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \log_2 6 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \log_2 (2 \times 3) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \log_2 2 + \log_2 3 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 + \log_2 3$
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 + \frac{\log 3}{\log 2}$

Resposta: (B)

4. $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$; $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$
 $f(\log_2 3) - g(2) = \frac{2^{\log_2 3} + 2^{-\log_2 3}}{2} - \frac{2^2 - 2^{-2}}{2} =$
 $= \frac{3 + 2^{\log_2 3^{-1}}}{2} - \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3} - 4 + \frac{1}{4}}{2} =$
 $= \frac{-1 + \frac{7}{12}}{2} = \frac{-\frac{5}{12}}{2} = -\frac{5}{24}$
 $= -\frac{5}{24}$

Resposta: (A)

5. $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{|1 - 3^x - 2|}}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0 \wedge |1 - 3^x - 2| > 0\}$
 $1 - |3^x - 2| > 0 \Leftrightarrow |3^x - 2| < 1 \Leftrightarrow 3^x - 2 > -1 \wedge 3^x - 2 < 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3^x > 1 \wedge 3^x < 3 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in]0, 1[$

$D_f =]0, 1[$

Resposta: (A)

6. $f(x) = x e^{2x} - 1$
- $f'(x) = x' e^{2x} + x (e^{2x})' = e^{2x} + 2x e^{2x} = e^{2x} (2x + 1)$
 ((A) é verdadeira)
 - $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x + 1) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$
 ((B) é verdadeira)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{2x} - 1) = +\infty$ ((C) é verdadeira)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{2x} - 1) \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} ((-y) e^{-2y} - 1) =$
 $= -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{2y}} - 1 = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y}{e^{2y}} - 1 =$
 $= -\frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u} - 1 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u}} - 1 =$
 $= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{+\infty} - 1 = -\frac{1}{2} \times 0 - 1 = -1$ ((D) é falsa)

Resposta: (D)

Pág. 191

7.1. a) $M(0) = \frac{1,25}{1 + 0,25 \times e^0} = \frac{1,25}{1,25} = 1$

$M(0) = 1$ g

b) $M(1) = \frac{1,25}{1 + 0,25 \times e^{-0,4}} \approx 1,07$

$M(1) \approx 1,07$ g

7.2. $M(t) = 1,2M(0) \Leftrightarrow \frac{1,25}{1 + 0,25 e^{-0,4t}} = 1,2 \times 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1,25 = 1,2 + 1,2 \times 0,25 \times e^{-0,4t} \Leftrightarrow 0,3 e^{-0,4t} = 0,05$

$\Leftrightarrow e^{-0,4t} = \frac{0,05}{0,3} \Leftrightarrow -0,4t = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow t = \frac{-\ln 6}{-0,4}$

$\Rightarrow t \approx 4,4794 \Leftrightarrow t \approx 4$ h 28 min 46 s

Ao fim de 4 h 28 min 46 s

7.3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1,25}{1 + 0,25 e^{-0,4t}} = \frac{1,25}{1 + 0,25 \times 0} = 1,25$

Com o decorrer do tempo a massa da cultura de bactérias tende a estabilizar em 1,25 g.

7.4. $t.v.m_{[0,1]} = \frac{M(1) - M(0)}{1 - 0} \approx 0,07$ g/h

$t.v.m_{[1,2]} = \frac{M(2) - M(1)}{2 - 1} \approx 0,05$ g/h

No intervalo [0, 1] a massa da cultura de bactérias cresce a uma velocidade média de 0,07 g/h enquanto que no intervalo [1, 2] a velocidade média de crescimento é 0,05 g/h.

7.5. $M(t) = \frac{1,25}{1 + 0,25 e^{-0,4t}} = \frac{A}{1 + B e^{kt}}$ $\begin{cases} A = 1,25; B = 0,25 \\ k = -0,4 \end{cases}$

$M'(t) = \left(\frac{A}{1 + B e^{kt}} \right)' = \frac{-A(1 + B e^{kt})'}{(1 + B e^{kt})^2} = \frac{-A(k B e^{kt})}{(1 + B e^{kt})^2} =$

$= \frac{-k A B e^{kt}}{(1 + B e^{kt})^2} = \frac{0,125 e^{-0,4t}}{(1 + 0,25 e^{-0,4t})^2}$ $\begin{cases} A = 1,25; B = 0,25; k = -0,4 \\ k A B = -0,125 \end{cases}$

$M'(3) = \frac{0,5 e^{-0,4 \times 3}}{(1 + 0,25 \times e^{-0,4 \times 3})^2} \approx 0,03$

No instante $t = 3$ a massa da cultura de bactérias cresce à velocidade de 0,03 g/hora.

7.6. $M''(t) = \left[\frac{-k A B e^{kt}}{(1 + B e^{kt})^2} \right]' =$ $\begin{cases} A = 1,25; B = 0,25 \\ k = -0,4 \end{cases}$

$= \frac{(-k A B e^{kt})'(1 + B e^{kt})^2 - (-k A B e^{kt}) \left[(1 + B e^{kt})^2 \right]'}{(1 + B e^{kt})^4}$

$$\begin{aligned} &= \frac{-k^2 AB e^{kt} (1 + B e^{kt})^2 - 2(-kAB e^{kt})(1 + B e^{kt})k B e^{kt}}{(1 + B e^{kt})^4} = \\ &= \frac{(1 + B e^{kt})[-k^2 AB e^{kt} - k^2 AB^2 (e^{kt})^2 + 2k^2 AB^2 (e^{kt})^2]}{(1 + B e^{kt})^4} = \\ &= \frac{-k^2 AB e^{kt} + k^2 AB^2 (e^{kt})^2}{(1 + B e^{kt})^3} = \frac{k^2 AB e^{kt} (-1 + B e^{kt})}{(1 + B e^{kt})^3} = \\ &= \frac{0,05 e^{-0,4t} (0,25 e^{-0,4t} - 1)}{(1 + 0,25 e^{-0,4t})^3} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 1,25; B = 0,25; \\ k = -0,4 \\ k^2 AB = 0,05 \end{array} \right. \end{aligned}$$

O sinal de M'' depende do sinal de $(0,25 e^{-0,4t} - 1)$.

$$0,25 e^{-0,4t} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-0,4t} < \frac{1}{0,25} \Leftrightarrow e^{-0,4t} < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,4t < \ln 4 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 4}{-0,4}$$

A condição é universal em \mathbb{R}_0^+ porque $\frac{\ln 4}{-0,4} < 0$.

Logo, como $\forall t \in \mathbb{R}_0^+, 0,25 e^{-0,4t} - 1 < 0$ temos:

$M''(t) < 0, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$ pelo que $M'(t)$ é decrescente em \mathbb{R}_0^+ .

Assim, o valor máximo de $M'(t)$ é $M'(0) = 0,08$.

O crescimento foi máximo no instante $t = 0$ e foi de 0,08 g/h.

8.1. $C = 6000 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^5 \approx 6463,70 \text{ €}$

8.2. $6000 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^n > 7500 \Leftrightarrow 1,015^n > \frac{7500}{6000} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n > \log_{1,015} \left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(1,25)}{\ln(1,015)} \Rightarrow n \geq 15$

Ao fim de 15 anos.

8.3. $6000 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^n = 12\,000 \Leftrightarrow 1,015^n = 2 \Leftrightarrow n > \log_{1,015} 2 \Leftrightarrow$
 $n > \frac{\ln 2}{\ln 1,015} \approx 47$. Terão de passar 47 anos.

9.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+2} - 9}{\ln(x+1)} \stackrel{(0)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3^2(3^x - 1)}{x} \times \frac{x}{\ln(x+1)} \right] =$
 $= 3^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln 3^x} - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} =$ $y = \ln(x+1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = e^y - 1$
 $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$
 $= 9 \times \ln 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln 3} - 1}{x \ln 3} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} =$ $u = x \ln 3$
 $x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$
 $= 9 \ln 3 \times \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \times 1 = 9 \ln 3 \times 1 = 9 \ln 3$

9.2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2} - 1}{e^{5x-5} - 5} \stackrel{(0)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2(x-1)} - 1}{x-1} \times \frac{x-1}{e^{5(x-1)} - 1} \right] =$
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2(x-1)} - 1}{2(x-1)} \times \frac{1}{5} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5(x-1)}{e^{5(x-1)} - 1}$ $u = 2(x-1)$
 $x \rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow 0$
 $= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \times \frac{1}{5} \times \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v}{e^v - 1}$ $v = 5(x-1)$
 $x \rightarrow 1 \Rightarrow v \rightarrow 0$
 $= 2 \times 1 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{\lim_{v \rightarrow 0} \frac{e^v - 1}{v}} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{5}$

9.3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3x} \ln(1-x) \right]} = e^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

Dado que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3x} \times \ln(1-x) \right] &= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{-x} \ln(1-x) \right] \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \\ &= -\frac{1}{3} \times \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^y - 1} \times y \right) = \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \ln(1-x) \\ \Leftrightarrow e^y = 1-x \\ \Leftrightarrow -x = e^y - 1 \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right. \\ &= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

10. $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln \sqrt{x}}$

10.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \ln \sqrt{x} \neq 0\}$

$$\ln \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

A proposição é falsa.

10.2. Seja $y = mx + b$ a assíntota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$, caso exista.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x \ln \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln \sqrt{x}} \right) = 0$$

A reta de equação $y = \frac{1}{2}x$ é uma assíntota ao gráfico de f

quando $x \rightarrow +\infty$.

A proposição é verdadeira.

10.3. $f(x) < 2; f(e^2) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{\ln \sqrt{e^2}} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{\ln e} = \frac{e^2}{2} - 1 > 2$

A proposição é falsa.

10.4. $f'(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{\ln \sqrt{x}} \right)' = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\frac{1}{2} \ln x} \right)' =$

$$= \frac{1}{2} - 2 \times \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$$

A proposição é verdadeira.

11.1. $g'(x) = e^x - (e^x + x e^x) = -x e^x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	+	0	-
g	\nearrow	0	\searrow

Máx.

g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente

decrescente em $[0, +\infty[$.

Como $g(0) = 0, g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

11.2. $f'(x) = \frac{x'(e^x - 1) - x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - 1 - x e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$

O sinal de $f'(x)$ é o sinal de $g(x)$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.2. Derivadas e aplicações de funções exponenciais e de funções logarítmicas

Como $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ pelo que não tem extremos.

11.3. f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

O gráfico de f não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais

Em $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{+\infty - 0} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f ,

em $+\infty$. Em $-\infty$: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x e^x - x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x) = \\ &= \frac{1}{0 - 1} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{-y}) = \begin{cases} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases} \\ &= -1 \times \left(- \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} \right) = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

11.4. Atendendo a **11.2.** e **11.3.**, $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

12.1. $f(1) = 1$ e $f'(1) = 0$

$$f(2) = 2 - 3 \ln 2$$

$$f'(x) = a + b \ln x + \frac{bx + c}{x}$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f(2) = 2 - 3 \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + (b + c) \ln 1 = 1 \\ a + b \ln 1 + \frac{b + c}{1} = 0 \\ 2a + (2b + c) \times \ln 2 = 2 - 3 \ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 + b + c = 0 \\ 2 + (2b + c) \ln 2 = 2 - 3 \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 - b \\ (2b - 1 - b) \ln 2 = -3 \ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 - b \\ b - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

12.2. $f(x) = x + (-2x + 1) \ln x$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x + (-2x + 1) \ln x] = 0 + 1 \times (-\infty) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + (-2x + 1) \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2x \ln x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - 2 \ln x + \frac{\ln x}{x} \right) \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} = +\infty \times (1 - \infty + 0) = -\infty$

12.3. $f'(x) = 1 + (-2) \ln x + (-2x + 1) \frac{1}{x} = 1 - 2 \ln x - 2 + \frac{1}{x} = -1 - 2 \ln x + \frac{1}{x}$

$$f''(x) = -2 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2x + 1}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Logo o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o domínio.

12.4. a) $f(x) = x \Leftrightarrow x + (-2x + 1) \ln x = x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-2x + 1) \ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2x + 1 = 0 \vee \ln x = 0) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 1$$

O gráfico de f intersesta a reta de equação $y = x$ nos pontos de abcissas $\frac{1}{2}$ e 1 .

b) Atendendo a **12.3.** e **12.4.:** $x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$

13.1. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge 2 - \frac{1}{x} > 0 \right\} =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	-	-	-	0	$+$
x	-	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x - 1}{x}$	$+$		-	0	$+$

13.2. f é contínua.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \ln \left(2 - \frac{1}{x} \right) \right]^{(0 \times \infty)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - y} \ln y = \begin{cases} y = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 - y \\ \Rightarrow x = \frac{1}{2 - y} \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{2 - y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln y}{y}}{\frac{2 - y}{y}} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \left[x \ln \left(2 - \frac{1}{x} \right) \right] = \frac{1}{2} \times \ln 0^+ = -\infty$$

A reta de equação $y = \frac{1}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais: $y = mx + b$

• Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(2 - \frac{1}{x} \right) = \ln 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x \ln 2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \ln \left(2 - \frac{1}{x} \right) - x \ln 2 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\ln \left(2 - \frac{1}{x} \right) - \ln 2 \right) \right] = \begin{cases} y = \ln \left(1 - \frac{1}{2x} \right) \\ \Leftrightarrow e^y = 1 - \frac{1}{2x} \\ \Leftrightarrow e^y - 1 = -\frac{1}{2x} \\ \Leftrightarrow -2x = \frac{1}{e^y - 1} \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{cases} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{1}{2x} \right) \right]^{(\infty \times 0)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-2x \ln \left(1 - \frac{1}{2x} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^y - 1} \times y \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A reta de equação $y = (\ln 2)x - \frac{1}{2}$ é uma assíntota do gráfico de f em $-\infty$.

• Quando $x \rightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) = \ln 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x \ln 2] = \quad (\text{tendo em contas os cálculos já efetuados})$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2x \ln\left(1 - \frac{1}{2x}\right) \right] = \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \ln\left(1 - \frac{1}{2x}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2x = \frac{1}{e^y - 1} \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^y - 1} \times y \right) = -\frac{1}{2}$$

A reta de equação $y = (\ln 2)x - \frac{1}{2}$ também é assíntota

ao gráfico de f em $+\infty$.

Pág. 193

$$14.1. P'(t) = \frac{-1500(-0,9 \times 295 e^{-0,9t})}{(5 + 295 e^{-0,9t})^2} = \frac{398\,250 e^{-0,9t}}{(5 + 295 e^{-0,9t})^2}$$

$$\begin{aligned} 0,9P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{300}\right) &= 0,9 \frac{1500}{5 + 295 e^{-0,9t}} \left(1 - \frac{1500}{300(5 + 295 e^{-0,9t})}\right) = \\ &= \frac{1350}{5 + 295 e^{-0,9t}} \left(\frac{1500 + 88\,500 e^{-0,9t} - 1500}{300(5 + 295 e^{-0,9t})} \right) = \\ &= \frac{1350 \times 88\,500 e^{-0,9t}}{300(5 + 295 e^{-0,9t})^2} = \frac{398\,250 e^{-0,9t}}{(5 + 295 e^{-0,9t})^2} = P'(t) \end{aligned}$$

$$14.2. a) P(0) = \frac{1500}{5 + 295 e^0} = 5$$

$$b) \text{t.v.m}_{[0,1]} = \frac{P(1) - P(0)}{1 - 0} \approx \frac{12,0 - 5}{1} \approx 7,0$$

t.v.m_[0,1] ≈ 7,0 indivíduos /semana

$$\text{t.v.m}_{[1,2]} = \frac{P(2) - P(1)}{1} \approx \frac{27,9 - 12,0}{1} \approx 15,9$$

t.v.m_[1,2] ≈ 15,9 indivíduos/semana

$$\begin{aligned} c) P(t) = 200 &\Leftrightarrow \frac{1500}{5 + 295 e^{-0,9t}} = 200 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1500}{200} = 5 + 295 e^{-0,9t} \Leftrightarrow \frac{7,5 - 5}{295} = e^{-0,9t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,9t = \ln\left(\frac{1}{118}\right) \Leftrightarrow t = \frac{-\ln(118)}{-0,19} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\ln(118)}{0,9} \end{aligned}$$

$$\text{Se } t = \frac{\ln(118)}{0,9}, e^{-0,9t} = e^{-0,9 \times \frac{\ln(118)}{0,9}} = e^{\ln(118)^{-1}} = \frac{1}{118},$$

pelo que:

$$P'\left(\frac{\ln(118)}{0,9}\right) = \frac{398250 \times \frac{1}{118}}{\left(5 + 295 \times \frac{1}{118}\right)^2} = \frac{3375}{56,25} = 60$$

Quando 200 indivíduos foram infetados a taxa de crescimento era de 60 indivíduos/semana.

d) $P'(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$. $P(t)$ é estritamente crescente.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1500}{5 + 295 e^{-0,9t}} = \frac{1500}{5 + 295 \times 0} = 300$$

O número máximo de indivíduos infetados tende a aproximar-se de 300.

$$\begin{aligned} 14.3. P''(t) &= \left[\frac{398\,250 e^{-0,9t}}{(5 + 295 e^{-0,9t})^2} \right]' = \left[\frac{A e^{kt}}{(5 + B e^{kt})^2} \right]' \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 398\,250; \\ B = 295 \\ k = -0,9 \end{array} \right. \\ &= \frac{(A e^{kt})'(5 + B e^{kt})^2 - (A e^{kt})[(5 + B e^{kt})^2]'}{(5 + B e^{kt})^4} = \\ &= \frac{kA e^{kt}(5 + B e^{kt})^2 - 2(A e^{kt})(5 + B e^{kt})k B e^{kt}}{(5 + B e^{kt})^4} = \\ &= \frac{(5 + B e^{kt})(5kA e^{kt} + kAB e^{2kt} - 2kAB e^{2kt})}{(5 + B e^{kt})^4} = \\ &= \frac{5kA e^{kt} - kAB e^{2kt}}{(5 + B e^{kt})^3} = \frac{-kA e^{kt}(B e^{kt} - 5)}{(5 + B e^{kt})^3} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 398\,250; \\ B = 295 \\ k = -0,9 \\ kA = -358425 \end{array} \right. \\ &= \frac{358\,425 e^{-0,9t} (295 e^{-0,9t} - 5)}{(5 + 295 e^{-0,9t})^3} \end{aligned}$$

$$P''(t) = 0 \Leftrightarrow 295 e^{-0,9t} - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,9t} = \frac{5}{295} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,9t} = \frac{1}{59} \Leftrightarrow \Leftrightarrow -0,9t = -\ln(59) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 59}{0,9}$$

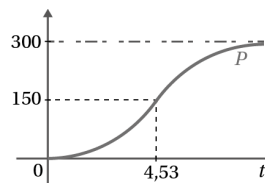
x	0		$\frac{\ln 59}{0,9}$	$+\infty$
P''		+	0	-
P'		↗	0	↘

Máx.

$$P\left(\frac{\ln 59}{0,9}\right) = \frac{1500}{5 + 295 e^{-0,9 \times \frac{\ln 59}{0,9}}} = \frac{1500}{5 + 295 \times \frac{1}{59}} = 150$$

Quando a taxa de crescimento foi máxima, foram infetados 150 indivíduos.

14.4.



$$15. 3000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = 3630; 4000 - 3630 = 370$$

O investidor não recuperou porque perdeu 370 €.

$$16.1. T(t) = 24 + A^{-kt} \Leftrightarrow A e^{-kt} = T(t) - 24$$

$$T'(t) = -kA e^{-kt} \Leftrightarrow T'(t) = -k(T - 24) \quad \left| A e^{-kt} = T(t) - 24 \right.$$

$$16.2. T(0) = 80; T(t) = 24 + A^{-kt}$$

$$80 = 24 + A e^0 \Leftrightarrow A = 80 - 24 \Leftrightarrow A = 56$$

$$T(12) = 60; T(t) = 24 + 56 e^{-kt}$$

$$60 = 24 + 56 e^{-12k} \Leftrightarrow e^{-12k} = \frac{60 - 24}{56} \Leftrightarrow -12k = \ln\left(\frac{9}{14}\right) \Rightarrow k \approx 0,0368$$

$$16.3. T(t) = 30 \Leftrightarrow 24 + 56 e^{-0,0368t} = 30 \Leftrightarrow e^{-0,0368t} = \frac{30 - 24}{56} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,0368t = \ln\left(\frac{3}{28}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{3}{28}\right)}{-0,0368} \Rightarrow t \approx 60,7$$

Terão de decorrer 61 min, aproximadamente.