Atividade de diagnóstico

Pág. 62

1.1. $D_f = \mathbb{R}$

Seja *P* o período fundamental da função *f*.

Se $x \in D_f$, então $x + P \in D_f$.

$\forall x \in D_f,\ f(x+P) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in D_f,\ 2\sin\left(x + P - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in D_f,\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6} + P\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Como 2π é o período fundamental da função seno, $P = 2\pi$. Logo, o período fundamental de *f* é igual a 2π.

1.2. $D_f = \mathbb{R}$. Seja *P* o período fundamental da função *f*.

Se $x \in D_f$, então $x + P \in D_f$.

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \cos(\pi + 2(x + P)) = 1 + \cos(\pi + 2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi + 2x + 2P) = \cos(\pi + 2x)$

Como 2π é o período fundamental da função cosseno, $2P = 2\pi$, pelo que $P = \pi$.

Logo, o período fundamental de *f* é igual a π.

1.3. $D_f = \mathbb{R}$

Seja *P* o período fundamental da função *f*.

Se $x \in D_f$, então $x + P \in D_f$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+P) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(3x + 3P) = \sin(3x)$

Como 2π é o período fundamental da função seno, $3P = 2P$, pelo que $P = \frac{2\pi}{3}$.

Logo, o período fundamental de *f* é igual a $\frac{2\pi}{3}$.

1.4. $D_f = \mathbb{R}$

Seja *P* o período fundamental da função *f*.

Se $x \in D_f$, então $x + P \in D_f$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{x+P}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Como 2π é o período fundamental da função cosseno, $\frac{P}{2} = 2\pi$, pelo que $P = 4\pi$.

Logo, o período fundamental de *f* é igual a 4π.

1.5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x : 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Seja *P* o período fundamental da função *f*.

Se $x \in D_f$, então $x + P \in D_f$, sendo

$\forall x \in D_f, \tan\left(4(x+P) - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$

Como π é o período fundamental da função tangente, $4P = \pi$, pelo que $P = \frac{\pi}{4}$.

Logo, o período fundamental de *f* é igual a $\frac{\pi}{4}$.

1.6. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Seja *P* o período fundamental da função *f*.

Se $x \in D_f$, então $x + P \in D_f$, sendo

$\forall x \in D_f,\ \tan\left(\frac{x+P}{3}\right) = \tan\left(\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in D_f,\ \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{P}{3}\right) = \tan\left(\frac{x}{3}\right)$

Como π é o período fundamental da função tangente, $\frac{P}{3} = \pi$, pelo que $P = 3\pi$.

Logo, o período fundamental de *f* é igual a 3π.

2. $D_f = \mathbb{R}$. Seja *P* o período fundamental da função *f*.

Se $x \in D_f$, então $x + P \in D_f$.

$\forall x \in D_f, \cos(a(x+P)) = \cos(ax) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in D_f,\ \cos(ax + aP) = \cos(ax)$

Como 2π é o período fundamental da função cosseno, $|a|P = 2\pi$, pois o período de uma função é positivo.

$|a|P = 2\pi \Leftrightarrow P = \frac{2\pi}{|a|}$

Logo, o período da função *f* definida por $f(x) = \cos(ax)$, $a \neq 0$ é $P_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.

3.1. $D_f = \mathbb{R}$. Se $x \in D_f$, $2x - \frac{\pi}{2} \in D_f$. Assim, tem-se:

$-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 1 \leq 1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 2$

Logo, $D'_f = [0, 2]$

3.2. Seja *P* o período fundamental de *f*.

Se $x \in \mathbb{R}$, então $x + P \in \mathbb{R}$.

$f(x+P) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \sin\left(2(x+P) - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{2} + 2P\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

Como o período fundamental da função seno é 2π, $2P = 2\pi \Leftrightarrow P = \pi$. Logo, o período fundamental de *f* é π.

3.3. **a)** Como o máximo de *f* é 2, tem-se:

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$

$\Leftrightarrow -\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

A expressão geral dos maximizantes de *f* é $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Como o mínimo de *f* é 0 tem-se:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

A expressão geral dos minimizantes de *f* é $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ Equação resolvida em 3.3.b)

A expressão geral dos zeros de *f* é $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4.1. $2\sin x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2 + \sin x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -2 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

4.2. $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

5.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\sin(x+\pi)}{2 + \sin x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin(x+\pi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x+\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} - \pi + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} - \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

5.2. $D_f = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{1 - 2\sin(-x+\pi)}{2 + \sin(-x)} = \frac{1 - 2\sin x}{2 - \sin x}$$

$$-f(x) = -\frac{1 - 2\sin(x+\pi)}{2 + \sin x} = -\frac{1 + 2\sin x}{2 + \sin x} = \frac{-1 - 2\sin x}{2 + \sin x}$$

Logo, $\exists x \in \mathbb{R} : f(-x) \neq -f(x)$, como, por exemplo:

$$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1 - 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2 - \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1 - 2\times\frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1-1}{\frac{3}{2}} = 0$$

$$-f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-1 - 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2 + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{-1 - 2\times\frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = -\frac{4}{5}$$

Logo, a função *f* **não** é ímpar.

Pág. 63

6.1. Seja $x \in \mathbb{R}$.

$$-1 \leq \cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1 \leq 1 - \cos(3x) \leq 1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \cos(3x) \leq 2$$

Logo, $D'_f = [0, 2]$.

6.2. $D_f = \mathbb{R}$. Seja *P* o período fundamental de *f*.

$\forall x \in D_f,\ x + P \in D_f$

$$f(x+P) = f(x) \Leftrightarrow 1 - \cos(3(x+P)) = 1 - \cos(3x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x + 3P) = \cos(3x)$$

Como o período fundamental da função cosseno é 2π,

$3P = 2\pi \Leftrightarrow P = \frac{2\pi}{3}$.

Logo, o período fundamental de *f* é $\frac{2\pi}{3}$.

6.3. **a)** Como o máximo de *f* é 2, tem-se:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 1 - \cos(3x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos(3x) = 1 \Leftrightarrow \cos(3x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

A expressão geral dos maximizantes de *f* é $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Como o mínimo de *f* é 0, tem-se:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

A expressão geral dos zeros de *f* é $x = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

c) A expressão geral dos zeros de *f* é igual à expressão geral dos minimizantes de *f*, pois é também o conjunto-solução da equação $f(x) = 0$.

A expressão geral dos zeros de *f* é $x = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

7.1. $\cos^2 x + \cos x = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x = 0 \vee \cos x + 1 = 0) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x = 0 \vee \cos x = -1) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \pi$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

7.2. $\sin x = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(2x) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} - x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$

$\wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{3\pi}{2}$

$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

$k = 0: x = \frac{\pi}{6}; x = -\frac{\pi}{2} < 0$

$k = 1: x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

$k = 2: x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi > 2\pi$

$k = 3: x = \frac{\pi}{6} + 2\pi > 2\pi$

$k = -1: x = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\pi < 0$

8.1. $D_f = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = 1 - \cos(-2 \times (-x) + 3\pi) = 1 - \cos(2x + 3\pi)$

$= 1 - \cos(-(2x + 3\pi)) = 1 - \cos(-2x - 3\pi) =$

$= 1 - \cos(-2x - 3\pi + 6\pi) = 1 - \cos(-2x + 3\pi) = f(x)$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \wedge f(-x) = f(x)$, então *f* é uma função par.

8.2. $\sin(2x_0) = \frac{3}{5} \wedge x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$f(x_0) = 1 - \cos(-2x_0 + 3\pi) =$

$= 1 - \cos(-2x_0 + \pi) = 1 + \cos(2x_0)$

Como $\sin(2x_0) = \frac{3}{5}$ e $\sin^2(2x_0) + \cos^2(2x_0) = 1$, tem-se:

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2(2x_0) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(2x_0) = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2(2x_0) = \frac{16}{25}$

Como $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow 2x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(2x_0) = \frac{4}{5}$

Assim, $f(x_0) = 1 + \cos(2x_0) = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$.

9.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Se $x \in D_f$, então $x - \frac{\pi}{4} \in D_f$. Logo, como

$D'_{\tan} = \mathbb{R}, D'_f = \mathbb{R}$.

9.2. Se P_0 o período fundamental de *f*. Tem-se:

$\forall x \in D_f, x + P_0 \in D_f$

$f(x + P_0) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(x + P_0 - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4} + P_0\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Como o período fundamental da função tangente é π, $P_0 = \pi$.

Logo, o período fundamental de *f* é π.

9.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

A expressão geral dos zeros de *f* é $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

9.4. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$f(x - \pi) = 1 \wedge x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(x - \pi - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 \wedge x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \wedge x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

Assim:

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$

$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 0: x = \frac{\pi}{4} < \pi$; $k = 1: x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \in 3.\text{º}Q$

$k = 2: x = \frac{\pi}{4} + 2\pi > \frac{3\pi}{2}$

10.1. $\tan(3x) = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{7} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{21} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

10.2. $\sqrt{3} + \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

10.3. $\tan^2 x = \tan x \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x(\tan x - 1) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \vee \tan x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Atividade inicial

Pág. 64

1. $a=2: f(x)=2\cos(bx+c)+d$

$a=\frac{1}{2}: f(x)=\frac{1}{2}\cos(bx+c)+d$

$b=2: f(x)=a\cos(2x+c)+d$

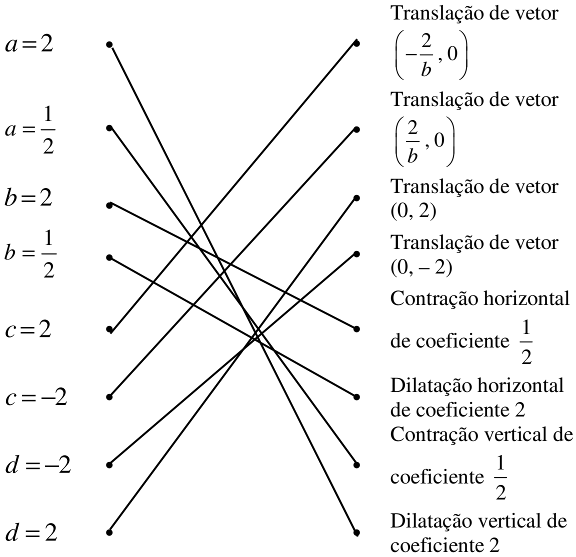
$b=\frac{1}{2}: f(x)=a\cos\left(\frac{1}{2}x+c\right)+d$

$c=2: f(x)=a\cos(bx+2)+d=a\cos\left[b\left(x+\frac{2}{b}\right)\right]+d$

$c=-2: f(x)=a\cos(bx-2)+d=a\cos\left[b\left(x-\frac{2}{b}\right)\right]+d$

$d=-2: f(x)=a\cos(bx+c)-2$

$d=2: f(x)=a\cos(bx+c)+2$



2.1. $f(x)=\frac{2}{3}\cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right)+4=\frac{2}{3}\cos\left[\frac{1}{2}(x+\pi)\right]+4$

O gráfico de *f* obtém-se do gráfico de *g* por uma contração vertical de coeficiente $\frac{2}{3}$ seguida de uma dilatação horizontal de coeficiente 2 e de uma translação de vetor $(-\pi, 4)$

2.2. Seja $x\in\mathbb{R}$

$-1\le\cos x\le1 \Leftrightarrow -1\le\cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right)\le1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\times(-1)\le\frac{2}{3}\cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right)\le\frac{2}{3}\times1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}+4\le\frac{2}{3}\cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right)+4\le\frac{2}{3}+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{10}{3}\le f(x)\le\frac{14}{3}$

Logo, $D'_f=\left[\frac{10}{3},\frac{14}{3}\right]$.

Como o período fundamental da função cosseno é 2π, $P_0=2\times2\pi=4\pi$, pois obteve-se de *g* por uma dilatação horizontal de coeficiente 2.

Logo, o período fundamental de *f* é $P_0=4\pi$.

Pág. 67

1.1. $f(x)=2\cos x+2\sqrt{3}\sin x=4\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt3}{2}\sin x\right)=$

$=4\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

1.2. $f(x)=\sqrt2\cos x+\sqrt2\sin x=2\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos x+\frac{\sqrt2}{2}\sin x\right)=$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1.3. $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt3}-\frac{\sin x}{3}=$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{3\cos x}{\sqrt3}-\sin x\right)=$ $\qquad \frac{3}{\sqrt3}=\frac{3\sqrt3}{\sqrt3\sqrt3}=\frac{3\sqrt3}{3}=\sqrt3$

$=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=$

$=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=\frac{2}{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

1.4. $f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt2\left(\frac{1}{\sqrt2}\sin x-\frac{1}{\sqrt2}\cos x\right)=$ $\qquad \frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{\sqrt2\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$

$=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}\sin x-\frac{\sqrt2}{2}\cos x\right)=$

$=\sqrt2\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)=$

$=\sqrt2\left(-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)=$

$=\sqrt2\left(-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}+\pi\right)=$

$=\sqrt2\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$ (Por exemplo)

Pág. 68

2.1. $\sin\frac{\pi}{7}\cos x+\cos\frac{\pi}{7}\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{7}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x+\frac{\pi}{7}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{7}+2k\pi\vee x=\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{7}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{13\pi}{42}+2k\pi\vee x=\frac{43\pi}{42}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2.2. $\sqrt2\sin x+\sqrt2\cos x=1\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt2}{2}\sin x+\frac{\sqrt2}{2}\cos x\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=1\Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi\vee x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi\vee x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2.3. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{3} = -\pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2.4. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Pág. 69

3.1. $\cos(2x) + 3\cos x = -2 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 3\cos x = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee$

$\vee x = -\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0:\ x = \pi\ ;\ x = \frac{2\pi}{3}\ ;\ \cancel{x = -\frac{2\pi}{3}} < 0$

$k = 1:\ x = \cancel{\pi + 2\pi} > 2\pi\ ;\ x = \cancel{\frac{2\pi}{3}} + 2\pi > 25\ ;\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$

Em $[0\,,2\pi]$: $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}$

3.2. $\sin(4x) + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2\times 2x) + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin(2x)\cos(2x) + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x)(2\sin(2x) + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \vee 2\sin(2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \vee \sin(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \vee \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee$

$\vee\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0: x = \frac{\pi}{4}\ ;\ x = \frac{7\pi}{12}\ ;\ x = -\frac{\pi}{12}$

$k = 1: x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \cancel{\frac{3\pi}{4}}\ ;\ x = \cancel{\frac{7\pi}{12}} + \pi = \cancel{\frac{19\pi}{12}}$

$k = -1: x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}\ ;\ x = \frac{7\pi}{12} - \pi = -\frac{5\pi}{12}$

$k = -2: x = \frac{\pi}{4} - \pi = \cancel{-\frac{3\pi}{4}}$

Em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $S = \left\{-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right\}$

3.3. $\cos(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{4} - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0: x = \frac{\pi}{4}\ ;\ x = -\frac{\pi}{12}$

$k = 1: x = \cancel{\frac{\pi}{4} + 2\pi}\ ;\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

$k = 2: x = -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$

$k = 3: x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{23\pi}{12}$

$k = -1: x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}\ ;\ x = -\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{9\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$

Em $[-\pi\,, 2\pi]$: $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{23\pi}{12}\right\}$

4.1. $\cos x + 2\cos\frac{x}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow$ | $\cos x = \cos\left(2\times\frac{x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2} - 1 + \cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{4} \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{-2 \pm 6}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = -2 \vee \cos\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4.2. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4.3. $\cos(2x)=\sin x \Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\sin^2 x-\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x-\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1\pm 3}{-4} \Leftrightarrow \sin x=-1 \vee \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=-1 \vee \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

4.4. $\sin(4x)\cos x-\sin x\cos(4x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(4x-x)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee 3x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \vee x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

4.5. $\sin x+\sin(2x)=0 \Leftrightarrow \sin x+2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x(1+2\cos x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \vee 1+2\cos x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=0 \vee \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=k\pi \vee x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Pág. 70

5.1. $\cos(3x)=\cos(2x+x)=\cos(2x)\cos x-\sin(2x)\sin x=$

$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cos x-2\sin x\cos x\sin x=$

$=\cos^3 x-\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x\cos x=$

$=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x=$

$=\cos^3 x-3\left(1-\cos^2 x\right)\cos x=$

$=\cos^3 x-3\cos x+3\cos^3 x=4\cos^3 x-3\cos x$

5.2. $\cos(x+y)+\cos(x-y)=$

$=\cos x\cos y-\sin x\sin y+\cos x\cos y+\sin x\sin y=$

$=2\cos x\cos y$

5.3. $\frac{1+\sin(2x)}{\cos(2x)}=\frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$

$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$

$=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$

6. $\cos x=\cos\left(2\times\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-1+\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x \Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Logo, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

7.1. $\tan(2x)=\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}$

$=\frac{2\times\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

7.2. $\tan(x-y)=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=\frac{\sin x\cos y-\sin y\cos x}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}=$

$=\frac{\frac{\sin x\cos y-\sin y\cos x}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}-\frac{\sin y\cos x}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}+\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\sin y}{\cos y}}=$

$=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

Pág. 72

8.1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}5\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=$ | $y=5x$; Se $x\to 0$, $y\to 0$

$=5\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=5\times 1=5$

8.2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x\times\cos(2x)}=$

$=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=$ | $y=2x$; Se $x\to 0$, $y\to 0$

$=2\times\frac{1}{\cos 0}\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\times 1\times 1=2$

8.3. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)\sin x}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(3x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin x}=$

$=1\times 3\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\times\frac{x}{\sin x}\right)=$

$=3\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=$

$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\times\frac{1}{1}=$ | $y=3x$; Se $x\to 0$, $y\to 0$

$=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\times 1=3\times 1=3$

8.4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\beta x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{\alpha}{\beta}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=$ | $y=\alpha x$; Se $x\to 0$, $y\to 0$

$=\frac{\alpha}{\beta}\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{\alpha}{\beta}\times 1=\frac{\alpha}{\beta}$

8.5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\alpha x)}{\beta x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(\alpha x)}{\cos(\alpha x)}}{\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\beta x\cos(\alpha x)}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(\alpha x)}\times\frac{\alpha}{\beta}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=$

$=1\times\frac{\alpha}{\beta}\times\lim_{y\to\infty}\frac{\sin y}{y}=\frac{\alpha}{\beta}\times 1=\frac{\alpha}{\beta}$

8.6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+x)}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$

8.7. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2x)}{3x}=-\frac{2}{3}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=$

$=-\frac{2}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=-\frac{2}{3}\times 1=-\frac{2}{3}$

8.8. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\pi}{2x}\times\sin(4x)\right]=2\pi\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}=$

$=2\pi\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\pi\times 1=2\pi$

$y=4x$
Se $x\to 0$, $y\to 0$

8.9. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{x}\right)\overset{(\infty\times 0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{3}\times\frac{\pi}{x}\times\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\right)=$

$y=\frac{\pi}{x}$
Se $x\to+\infty$, $y\to 0$

$=\frac{\pi}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\frac{\pi}{3}\times\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}=\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}$

Pág. 73

8.10. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-\pi}=$

$y=x-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+y$
Se $x\to\frac{\pi}{2}$, $y\to 0$

$=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{\pi+2y-\pi}=-\frac{1}{2}\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$

8.11. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x+\sin(2x)}{1+\cos(2x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x+2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x(1+2\sin x)}{1+\cos^2 x-1+\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x(1+2\sin x)}{2\cos^2 x}=$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1+2\sin x}{2\cos x}=\frac{1+2\times 1}{2\times 0^+}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

8.12. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\cos(2x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1-\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$

$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\frac{2}{2}}=1$

Pág. 74

9.1. Sabe-se que toda a função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$, assim como a função cosseno. Assim, para $x<0$ e $x>0$, *f* é contínua por ser definida pela composta, soma e quociente de funções contínuas.

No ponto $x=0$, tem-se:

$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=$

$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=$

$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\times\frac{0}{2}=0$

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\sin(\pi x)}{x+1}=\frac{0+0}{1}=0=f(0)$

Assim, $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$.

Como existe $\lim_{x\to 0}f(x)$, *f* é contínua no ponto 0.

Conclui-se que *f* é contínua em $\mathbb{R}$.

9.2. Já vimos que *f* é contínua em $\mathbb{R}$ pelo que o seu gráfico não admite qualquer assíntota vertical.

Vamos averiguar a existência de assíntotas não verticais: $(y=mx+b)$

Quando $x\to+\infty$:

$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+\sin(\pi x)}{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(\pi x)}{x(x+1)}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x(x+1)}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x^2+x}$

$=0+\lim_{x\to+\infty}\left[\sin(\pi x)\times\frac{1}{x^2+x}\right]=0$

atendendo a que $\forall x\in\mathbb{R}, -1\le\sin(\pi x)\le 1$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+x}=0$ (produto de uma função limitada por uma função de limite nulo).

$b=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(\pi x)}{x+1}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}+\lim_{x\to+\infty}\left[\sin(\pi x)\times\frac{1}{x+1}\right]=1+0=1$

atendendo, novamente, a que $\forall x\in\mathbb{R}, -1\le\sin(\pi x)\le 1$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ (produto de uma função limitada por uma função de limite nulo).

A reta de equação $y=1$ é uma assíntota ao gráfico de *f* para $x\to+\infty$.

Para $x\to-\infty$:

$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[(1-\cos x)\frac{1}{x^2}\right]=0$

dado que $\forall x\in\mathbb{R}^-, 0\le 1-\cos x\le 2$,e $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$ (produto de uma função limitada por uma função de limite nulo).

$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[(1-\cos x)\frac{1}{x}\right]=0$

(produto de uma função limitada por uma função de limite nulo)

A reta de equação $y=0$ é uma assíntota ao gráfico de *f* para $x\to-\infty$.

Logo, o gráfico de *f* tem duas assíntotas.

9.3. f é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, é contínua em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \sin\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 1} = 1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

Como f é contínua em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy a equação $f(x) = \frac{1}{2}$ admite, pelo menos, uma solução no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Pág. 76

10.1. $f'(x) = \left(\sin(-2x+1)\right)' = (-2x+1)'\cos(-2x+1) =$
$= -2\cos(-2x+1)$

10.2. $f'(x) = \left(x^2 - \sin(2x)\right)' = \left(x^2\right)' - (2x)'\cos(2x) =$
$= 2x - 2\cos(2x)$

10.3. $f'(x) = \left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)'\sin x + x^2(\sin x)' =$
$= 2x\sin x + x^2\cos x$

10.4. $f'(x) = \left(3\sin^2(x+2)\right)' = 3 \times 2\sin(x+2) \times \left(\sin(x+2)\right)' =$
$= 6\sin(x+2) \times (x+2)\cos(x+2) =$
$= 6\sin(x+2)\cos(x+2) =$
$= 3 \times 2\sin(x+2)\cos(x+2) = 3\sin(2x+4)$

10.5. $f'(x) = \left(3\sin(x+2)^2\right)' = 3\left((x+2)^2\right)'\cos(x+2)^2 =$
$= 3 \times 2(x+2)(x+2)'\cos(x+2)^2 =$
$= 6(x+2)\cos(x+2)^2$

10.6. $f'(x) = \left(x\sin x^2 + 2\sin(2x)\right)' =$
$= x'\sin x^2 + x\left(\sin x^2\right)' + 2(2x)'\cos(2x) =$
$= \sin x^2 + x \times \left(x^2\right)'\cos x^2 + 2 \times 2\cos(2x) =$
$= \sin x^2 + 2x^2\cos x^2 + 4\cos(2x)$

10.7. $f'(x) = \left(\cos^3 x\right)' = 3\cos^2 x \times (\cos x)' = -3\cos^2 x\sin x$

10.8. $f'(x) = \left(-\cos^4 x\right)' = -4\cos^3 x \times (\cos x)' = 4\cos^3 x\sin x$

10.9. $f'(x) = \left(-\cos^3 x^3\right)' = -3\cos^2 x^3 \times \left(\cos x^3\right)' =$
$= -3\left(\cos^2 x^3\right) \times \left(x^3\right)' \times \left(-\sin x^3\right) =$
$= 3\left(\cos^2 x^3\right) \times 3x^2\sin x^3 =$
$= 9x^2\cos^2 x^3\sin x^3$

10.10. $f'(x) = \left(\frac{1}{1+\cos x}\right)' =$
$= \frac{1' \times (1+\cos x) - 1 \times (1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} =$
$= \frac{0 - (-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

10.11. $f'(x) = \left(\frac{2-\sin x}{\cos x}\right)' =$
$= \frac{(2-\sin x)'\cos x - (2-\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$
$= \frac{-\cos x\cos x - (2-\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} =$
$= \frac{-\cos^2 x + 2\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} =$
$= \frac{2\sin x - \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x}$

10.12. $f'(x) = \left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)' =$
$= \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} =$
$= \frac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} =$
$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$

10.13. $f'(x) = \left(\frac{1}{\cos x - 1}\right)' = \frac{1'(\cos x - 1) - 1 \times (\cos x - 1)'}{(\cos x - 1)^2} =$
$= \frac{\sin x}{(\cos x - 1)^2}$

10.14. $f'(x) = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)' =$
$= \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) -}{(\sin x + \cos x)^2}$
$\frac{-(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} =$
$= \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) -}{(\sin x + \cos x)^2}$
$\frac{-(\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$
$= \frac{+\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x +}{(\sin x + \cos x)^2}$
$\frac{+\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}{(\sin x + \cos x)^2} =$
$= \frac{1+1}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$

10.15. $f'(x)=\left(\sqrt{\frac{1}{1-\cos x}}\right)'=\frac{\left(\frac{1}{1-\cos x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1}{1-\cos x}}}=$

$=\frac{\frac{1'\times(1-\cos x)-1\times(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{1-\cos x}}}=$

$=\frac{\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{1-\cos x}}}=\frac{\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}}{\frac{2}{\sqrt{1-\cos x}}}=-\frac{\sin x\sqrt{1-\cos x}}{2(1-\cos x)^2}$

Pág. 77

11.1. $f'(x)=\left(2\tan\frac{1}{x}\right)'=2\left(\frac{1}{x}\right)'\left(1+\tan^2\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x^2}\left(1+\tan^2\frac{1}{x}\right)$

11.2. $f'(x)=\left(\tan^2\left(x^2+2\right)\right)'=2\tan\left(x^2+2\right)\times\left(\tan\left(x^2+2\right)\right)'=$

$=2\tan\left(x^2+2\right)\times\frac{\left(x^2+2\right)'}{\cos^2\left(x^2+2\right)}=\frac{2\times2x\tan\left(x^2+2\right)}{\cos^2\left(x^2+2\right)}$

$=\frac{\frac{4x\sin\left(x^2+2\right)}{\cos\left(x^2+2\right)}}{\cos^2\left(x^2+2\right)}=\frac{4x\sin\left(x^2+2\right)}{\cos^3\left(x^2+2\right)}$

11.3. $f'(x)=\left(\tan\left(x\sin^2x\right)\right)'=\frac{\left(x\sin^2x\right)'}{\cos^2\left(x\sin^2x\right)}=$

$=\frac{x'\sin^2x+x\left(\sin^2x\right)'}{\cos^2\left(x\sin^2x\right)}=\frac{\sin^2x+2x\sin x(\sin x)'}{\cos^2\left(x\sin^2x\right)}=$

$=\frac{\sin^2x+x\times2\sin x\cos x}{\cos^2\left(x\sin^2x\right)}=\frac{\sin^2x+x\sin(2x)}{\cos^2\left(x\sin^2x\right)}$

11.4. $f'(x)=\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)'=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1'\tan x-1\times(\tan x)'}{\tan^2x}=$

$=\frac{1}{\cos^2x}-\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\tan^2x}=\frac{1}{\cos^2x}-\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{\sin^2x}$

$=\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}=-\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{-\cos(2x)}{\sin^2x\cos^2x}$

Pág. 78

12.1. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=$

$=\lim_{h\to0}\frac{1+\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right)-\left(1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)\right)}{h}=$

$=\lim_{h\to0}\frac{1+\cos(\pi+2h)-1-\cos\pi}{h}=$

$=\lim_{h\to0}\frac{\cos(\pi+2h)+1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\cos(2h)+1}{h}=$

$=\lim_{h\to0}\frac{(1-\cos(2h))(1+\cos(2h))}{h(1+\cos(2h))}=$

$=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos^2(2h)}{h(1+\cos(2h))}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2(2h)}{h(1+\cos(2h))}=$

$=2\lim_{h\to0}\frac{\sin(2h)}{2h}\times\lim_{h\to0}\frac{\sin(2h)}{1+\cos(2h)}=$ | $y=2h$; Se $h\to0$, $y\to0$

$=2\times\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}\times\frac{0}{1+1}=2\times1\times0=0$

12.2. $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+\sin\frac{h}{2}-0}{h}=$

$f(0)=0+\sin0$

$=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}+\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}=1+\frac{1}{2}\times\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=$ | $y=\frac{h}{2}$; Se $h\to0$, $y\to0$

$=1+\frac{1}{2}\times\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=1+\frac{1}{2}\times1=\frac{3}{2}$

12.3. $f'(\pi)=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1+\tan(2(\pi+h))-1}{h}=$

$=\lim_{h\to0}\frac{\tan(2\pi+2h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\tan(2h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\sin(2h)}{\cos(2h)}}{h}=$

$=\lim_{h\to0}\frac{\sin(2h)}{h\cos(2h)}=2\times\lim_{h\to0}\frac{\sin(2h)}{2h}\times\lim_{h\to0}\frac{1}{\cos(2h)}=$ | $y=2h$; Se $h\to0$, $y\to0$

$=2\times\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}\times\frac{1}{1}=2\times1\times1=2$

13. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:kx\neq\frac{\pi}{2}+m\pi,\ m\in\mathbb{Z}\right\}=$

$=\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}:x=\frac{\pi}{2k}+\frac{m\pi}{k},\ m\in\mathbb{Z}\right\}$

$\forall x\in D_f,\ x+P_0\in D_f$

$f(x+P_0)=f(x)\Leftrightarrow\tan\left[k(x+P_0)\right]=\tan(kx)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\tan(kx+kP_0)=\tan(kx)$

Como a função tangente é periódica de período fundamental π, $kP_0=\pi\Leftrightarrow P_0=\frac{\pi}{k}$.

Logo, *f* é uma função periódica de período fundamental $P_0=\frac{\pi}{k}$.

Pág. 79

14.1. $D_f=\mathbb{R}$. As funções definidas por $\cos(2x)$ e $\cos x$ são periódicas de período fundamental $P_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$ e $P_2=2\pi$, respetivamente.

Dado que $2P_1=P_2$, pode concluir-se que 2π é período das funções. Logo, a função *f* tem período fundamental menor ou igual a 2π.

Assim, vamos fazer o estudo pedido no intervalo $[0,2\pi[$.

$f'(x)=\left(\frac{\cos(2x)}{2}-\cos x\right)'=\frac{-2\sin(2x)}{2}-(-\sin x)=$

$=-\sin(2x)+\sin x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\sin(2x)+\sin x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2\sin x\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\sin x(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \vee \cos x=\frac{1}{2}$$

No intervalo $[0\,,2\pi[$:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{5\pi}{6} \vee x=\pi$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	
	Máx.		Mín.		Máx.		Mín.		

No intervalo $[0\,,2\pi[$:

f é estritamente decrescente em $\left[0\,,\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\pi,\frac{5\pi}{3}\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right[$.

f tem um máximo relativo igual a $-\frac{1}{2}$ para $x=0$, um máximo relativo (e absoluto) igual a $\frac{3}{2}$ para $x=\pi$ e um mínimo relativo (e absoluto) igual a $-\frac{3}{4}$ para $x=\frac{\pi}{3}$ e $x=\frac{5\pi}{3}$.

14.2. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:1-\cos x\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:\cos x\neq 1\}=$
$=\{x\in\mathbb{R}:x\neq 2k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\}$

As funções definidas por $\sin x$ e $\cos x$ são periódicas de período 2π. Logo, a função *f* é periódica de período fundamental menor ou igual a 2π.
Como *f* não está definida em $x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, vamos fazer o seu estudo em $]0\,,2\pi[$.

$$f'(x)=\left(\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\right)'=$$
$$=\frac{(1+\sin x)'(1-\cos x)-(1+\sin x)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}=$$
$$=\frac{\cos x(1-\cos x)-(1+\sin x)\times\sin x}{(1-\cos x)^2}=$$
$$=\frac{\cos x-\cos^2 x-\sin x+\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}=\frac{\cos x-\sin x-1}{(1-\cos x)^2}$$

Em $]0\,,2\pi[$:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow \cos x-\sin x=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee \frac{\pi}{4}+x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}$$
$$(x\in\,]0\,,2\pi[)$$

x	0		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	
			Mín.		

No intervalo $]0\,,2\pi[$: *f* é estritamente decrescente no intervalo $\left]0\,,\frac{3\pi}{2}\right]$ e estritamente crescente no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$. *f* tem um mínimo relativo (e absoluto) igual a 0 para $x=\frac{3\pi}{2}$.

14.3. $D_f=\mathbb{R}$. As funções definidas por $\cos x$ e $\sin(2x)$ são periódicas de período fundamental $P_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$ e $P_2=2\pi$, respetivamente. Dado que $P_2=2P_1$, pode concluir-se que 2π é período das duas funções. Logo, a função *f* tem período fundamental menor ou igual a 2π.
Vamos, por exemplo, fazer o estudo pedido no intervalo $[0\,,2\pi]$.

$$f'(x)=(2\cos x+\sin(2x))'=-2\sin x+2\cos(2x)$$
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2\sin x+2\cos(2x)=0 \Leftrightarrow \cos x(2x)-\sin x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-\sin^2 x-\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}$$
$$\Leftrightarrow \sin x=-1 \vee \sin x=\frac{1}{2}$$

Em $[0\,,2\pi[$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{5\pi}{6} \vee x=\frac{3\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'	2	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
f	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗	0	↗	

$f(0)=2$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

f é estritamente crescente em $\left[0\,,\frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{6},2\pi\right[$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$. *f* tem um máximo relativo (e absoluto) igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ para $x=\frac{\pi}{6}$, um mínimo relativo (e absoluto) igual a $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ para $x=\frac{5\pi}{6}$ e um mínimo relativo igual a 2 para $x=0$.

Pág. 80

15.1. $f'(x)=(x+\cos(2x))'=1-2\sin(2x)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\sin(2x)=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee 2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi \vee x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, \pi]$, $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$.

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
f'	1	+	0	–	0	+	1
f	1	↗		↘		↗	$\pi + 1$
	Mín.		Máx.		Mín.		Máx.

$f(0) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}$

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{12} + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12}$; $f(\pi) = \pi + 1$

f é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$. *f* tem um mínimo relativo igual a 1 para $x = 0$, um mínimo relativo (e absoluto) igual a $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12}$ para $x = \frac{5\pi}{12}$, um máximo relativo igual a $\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}$ para $x = \frac{\pi}{12}$ e um máximo relativo (e absoluto) igual a $\pi + 1$ para $x = \pi$.

$f''(x) = (1 - 2\sin(2x))' = -4\cos(2x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, \pi]$, $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f''	–	–	0	+	0	–	–
f	1	∩	$\frac{\pi}{4}$	∪	$\frac{3\pi}{4}$	∩	$\pi + 1$
			P.I.		P.I.		

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ e $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ e em $\left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ e voltada para cima em $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

Os pontos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ são pontos de inflexão do gráfico de *f*.

15.2. $D_f = [0, \pi]$

$f'(x) = \left(\sqrt{3}x - \sin(2x)\right)' = \sqrt{3} - 2\cos(2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, \pi]$, $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{11\pi}{12}$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
f'	–	–	0	+	0	–	–
f	0	↘		↗		↘	
			Mín.		Máx.		

$f(0) = 0 - \sin 0 = 0$

$f(\pi) = \pi\sqrt{3} - 2\sin(2\pi) = \pi\sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{2} = \frac{\pi\sqrt{3} - 6}{12}$

$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{11\pi\sqrt{3}}{12} - \sin\frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2} = \frac{11\pi\sqrt{3} + 6}{12}$

f é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$ e em $\left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$. *f* tem um máximo relativo igual a 0 para $x = 0$, um máximo relativo (e absoluto) igual a $\frac{11\pi\sqrt{3} + 6}{12}$ para $x = \frac{11\pi}{12}$, um mínimo relativo (e absoluto) igual a $\frac{\pi\sqrt{3} - 6}{12}$ para $x = \frac{\pi}{12}$ e um mínimo relativo igual a $\pi\sqrt{3}$ para $x = \pi$.

$f''(x) = \left(\sqrt{3} - 2\cos(2x)\right)' = 4\sin(2x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, \pi]$, $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f''	0	+	0	–	0
f	0	∪	$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$	∩	$\pi\sqrt{3}$
			P.I.		

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\pi}{2} - \sin\pi = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

No intervalo $[0, \pi]$: o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e voltada para baixo em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. O ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)$ é um ponto de inflexão.

15.3. $f'(x) = \left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)' =$

$= 4\cos^3 x \times (\cos x)' - 4\sin^3 x \times (\sin x)' =$

$= -4\sin x \cos^3 x - 4\cos x \sin^2 x =$

$= -4\sin x \cos x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = -2 \times 2\sin x \cos x =$

$= -2\sin(2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, \pi]$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'	0	–	0	+	0
f	1	↘	–1	↗	1

$f(0) = \cos^2 - \sin^2 0 = 1 - 0 = 1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

$f(\pi) = \cos^2\pi - \sin^3\pi = 1 - 0 = 1$

f é estritamente decrescente em $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]$.

f tem um máximo relativo (e absoluto) igual a 1 para $x=0$ e $x=\pi$ e um mínimo relativo (e absoluto) igual a – 1 para $x=\frac{\pi}{2}$.

$$f''(x)=\left(-2\sin(2x)\right)'=-4\cos(2x)$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -4\cos(2x)=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

No intervalo $[0\,,\pi]$: $f''(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{3\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f''	–	–	0	+	0	–	–
f	1	∩	0	∪	0	∩	1
			P.I.		P.I.		

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos^4\frac{\pi}{4}-\sin^4\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^4\frac{3\pi}{4}-\sin^4\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ e em $\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ e voltada para cima em $\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$.

Os pontos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ são pontos de inflexão.

15.4. $f'(x)=(x+\tan x)'=1+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$

$f'(x)>0,\ \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, pelo que *f* é estritamente crescente em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, logo não tem extremos.

$$f''(x)=\left(\frac{\cos^2 x+1}{\cos^2 x}\right)'=$$

$$=\frac{\left(\cos^2 x+1\right)'\cos^2 x-\left(\cos^2 x+1\right)\left(\cos^2 x\right)'}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{-2\cos x\sin x\cos^2 x+\left(\cos^2 x+1\right)\times 2\cos x\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{-2\sin x\cos^3 x+2\sin x\cos^3 x+2\sin x\cos x}{\cos^4 x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\sin x}{\cos^3 x}=0\ \underset{x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow}\ \sin x=0\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f''		–	0	+	
f		∩	0	∪	
			P.I.		

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ e voltada para cima em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

O ponto de coordenadas (0, 0) é um ponto de inflexão.

16.1. $f'(x)=\left(\frac{\sin x-2}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x+(\sin x-2)\sin x}{\cos^2 x}=$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x)=0\wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 1-2\sin x=0\wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow\sin x=\frac{1}{2}\wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		+	0	–	
f		↗	$-\sqrt{3}$	↘	
			Máx.		

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{6}-2}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$

f é estritamente crescente em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$.

f tem um máximo (absoluto) igual a $-\sqrt{3}$ para $x=\frac{\pi}{6}$.

16.2. Como o domínio de *f* é limitado, então *f* não tem assíntotas não verticais.

$-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ não pertencem ao domínio de *f* . No entanto, são pontos aderentes a este conjunto.

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x-2}{\cos x}=\frac{1-2}{0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-2}{0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Logo, as retas de equações $x=-\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{\pi}{2}$ são assíntotas ao gráfico de *f*.

16.3. Tendo em conta as conclusões das alíneas **16.1.** e **16.2.** e dado que *f* é contínua, $D'_f=\left]-\infty\,,-\sqrt{3}\right]$

Pág. 81

16.4. $f''(x)=\left(\frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\right)'=$

$$=\frac{-2\cos x\times\cos^2 x-(1-2\sin x)\times 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{-2\cos^3 x+2\sin x\cos x-4\sin^2 x\cos x}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{\cos x\left(-2\cos^2 x+2\sin x-4\sin^2 x\right)}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{-2\left(1-\sin^2 x\right)+2\sin x-4\sin^2 x}{\cos^3 x}=$$

$$=\frac{-2\sin^2 x+2\sin x-2}{\cos^3 x}$$

$f''(x)=0 \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x+2\sin x-2=0 \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{-4} \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing \quad (\Delta<0)$

Conclui-se que $\forall x\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ f''(x)<0$.

Logo, o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em todo o domínio.

16.5. $r: y=mx+b$

$b=f(0)=\frac{\sin 0-2}{\cos^2 0}=\frac{-2}{1}=-2$

$m=f'(0)=\frac{1-2\sin 0}{\cos^2 0}=\frac{1}{1}=1$

A equação da reta *r* é $y=x-2$.

$f''(x)<0,\ \forall x\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f'$ é estritamente decrescente em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f'$ é injetiva. Logo, não podem existir dois valores de x tais que $f'(x)=1$, pelo que não existe qualquer outra reta tangente ao gráfico de *f* que seja paralela à reta *r*.

Pág. 82

17. As funções definidas por $\sin\frac{x}{2}$ e $\cos x$ são periódicas de período fundamental $P_1=2\times 2\pi=4\pi$ e $P_2=2\pi$, respetivamente. Logo, a função *f* é periódica de período maior ou igual a 4π.

Assim, vamos estudar esta função em $[0,4\pi]$.

Zeros:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}+\frac{\cos x-3}{4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\frac{x}{2}+\cos x-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\frac{x}{2}+1-2\sin^2\frac{x}{2}-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sin^2\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+6}}{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=$

$=1-\sin^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=$

$=1-2\sin^2\frac{x}{2}$

Em $[0,4\pi]$: $x=\pi$ é o único zero de *f* em $[0,4\pi]$

Monotonia e extremos:

$f'(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\frac{\cos x-3}{4}\right)'=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{4}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\times 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=0 \vee \sin\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \vee x=\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Em $[0,4\pi]$: $x=\pi \vee x=3\pi$

x	0		π		3π		4π
f'	+	+	0	–	0	+	+
f	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	–2	↗	$-\frac{1}{2}$
			Máx.		Mín.		

Concavidade e pontos de inflexão:

$f''(x)=\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{4}\right)'=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\cos x}{4}=$

$=-\frac{1}{4}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}+\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x=-\sin\frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

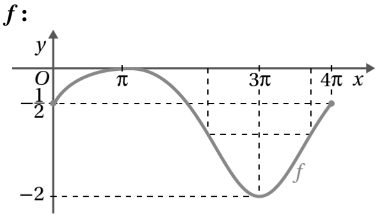
$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{3x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pi+4k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Em $[0,4\pi]$: $x=\pi \vee x=\frac{7\pi}{3} \vee x=\frac{11\pi}{3}$

x	0		π		$\frac{7\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{3}$		4π
f''	$-\frac{1}{4}$	–	0	–	0	+	0	–	$-\frac{1}{4}$
f	$-\frac{1}{2}$	∩	0	∪	$-\frac{9}{8}$	∪	$-\frac{9}{8}$	∩	$-\frac{1}{2}$
					P.I.		P.I.		

Gráfico de *f*:



Pág. 83

18. **Zeros:**

$f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\tan^2 x=0 \Leftrightarrow \tan^2 x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x=-1 \vee \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $x=-\frac{\pi}{4} \vee x=\frac{\pi}{4}$

Assíntotas:

O gráfico de *f* não tem assíntotas não verticais em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, pois o domínio é um conjunto limitado.

Como a função *f* é contínua, vamos averiguar a existência de assíntotas não verticais apenas em $x=-\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{\pi}{2}$ por se tratar de pontos aderentes a D_f mas que não pertence a D_f.

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\left(1-\tan^2 x\right)=1-(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(1-\tan^2 x\right)=1-(+\infty)=-\infty$$

Logo, as retas de equações $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{\pi}{2}$ são assíntotas verticais ao gráfico de *f*.

Monotonia e extremos:

$$f'(x)=\left(1-\tan^2 x\right)'=-2\tan x\times(\tan x)'=$$
$$=-2\tan x\times\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)=0\Leftrightarrow \tan x=0$$

Em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $x=0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f'		+	0	–	
f		↗	1	↘	

Máx.

Concavidades e pontos de inflexão:

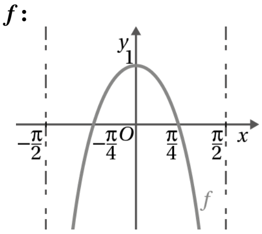
$$f''(x)=\left(-2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)\right)'=-2\left(\tan x+\tan^3 x\right)=$$
$$=-2\left(1+\tan^2 x+3\tan^2 x\times(\tan x)'\right)=$$
$$=-2\left(1+\tan^2 x+3\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)\right)=$$
$$=-2\left(3\tan^4 x+3\tan^2 x+\tan^2 x+1\right)=$$
$$=-2\left(3\tan^4 x+4\tan^2 x+1\right)$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 3\tan^4 x+4\tan^2 x+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{6}\Leftrightarrow \tan^2 x=\frac{-4\pm 2}{6}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tan^2 x=-1\vee \tan^2 x=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $f''(x)>0$. Logo, o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

Gráfico de *f* :



Pág. 84

19.1. Para $x\in\mathbb{R}$.

$$-1\le\sin(2x)\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\sin(2x)\le 2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-1\le 2\sin(2x)-1\le 2-1\Leftrightarrow -3\le f(x)\le 1$$

$D'_f=[-3,1]$

Se o gráfico de *g* intersetar o gráfico de *f*, a ordenada do ponto de interseção tem de pertencer ao contradomínio de *f*, ou seja, *g*(*x*) tem de estar compreendido entre – 3 e 1.

$$-3\le g(x)\le 1\Leftrightarrow -3\le 2x-5\le 1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5\ge -3\\2x-5\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge 2\\2x\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1,3]$$

Portanto, se $x<1$ ou $x>3$ a equação $f(x)=g(x)$ é impossível.

19.2. Por **19.1.**, $f(x)=g(x)$ só poderá ter soluções em $[1,3]$.

Seja $h(x)=f(x)-g(x)=2\sin(2x)-1-(2x-5)$
$=2\sin(2x)-2x+4$

- *h* é contínua em ℝ por ser a soma de funções contínuas em ℝ.
  Logo, *h* é contínua em $[1,3]$.
- $h(1)=2\sin(2)+2>0$
  $h(3)=2\sin(6)-2<0$

Como *h* é contínua em [1, 3] e $h(1)\times h(3)<0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que *h* admite pelo menos um zero em]1, 3[.

$$h'(x)=\left(2\sin(2x)-2x+4\right)'=2\times 2\cos(2x)-2=$$
$$=4\cos(2x)-2$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow 4\cos(2x)-2=0\Leftrightarrow\cos(2x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee 2x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi\vee x=\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[1,3]$: $x=\frac{5\pi}{6}$ $\frac{\pi}{6}\approx 0,5$; $\frac{5\pi}{6}\approx 2,6$

x	1		$\frac{5\pi}{6}$		3
h'	–	–	0	+	+
h	$h(1)>0$	↘	$h\left(\frac{5\pi}{6}\right)<0$	↗	$h(3)<0$

Mín.

$h(1)\approx 0,81$; $h\left(\frac{5\pi}{6}\right)\approx -2,73$; $h(3)\approx -1,58$

No intervalo $\left[1,\frac{5\pi}{6}\right]$ *h* é estritamente decrescente e no intervalo $\left[\frac{5\pi}{6},3\right]$ *h* é estritamente crescente.

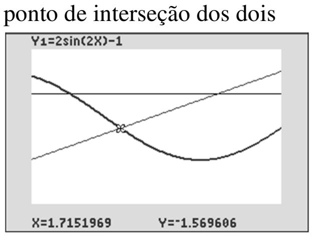
No entanto, $\forall x\in\left[\frac{5\pi}{6},3\right]$, $h(x)\ne 0$ dado que

$h\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-\frac{5\pi}{3}+4<0$ e $h(3)=2\sin 6-2<0$.

Logo, *h* admite um único zero em [1, 3], pelo que a equação $f(x)=g(x)$ tem uma e uma só solução.

19.3. Recorrendo à calculadora gráfica e considerando as funções $y_1=f(x)$ e $y_2=g(x)$, determinou-se, no intervalo [1, 3], abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos.

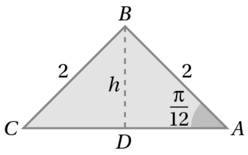
Assim, a solução da equação $f(x)=g(x)$,



com aproximação às décimas, é 1,7.

Pág. 85

20.1. $A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{DB}}{2}$



$\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\overline{DB}}{2}\Leftrightarrow\overline{DB}=2\sin\dfrac{\pi}{12}$

$\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\overline{DA}}{2}\Leftrightarrow\overline{DA}=2\cos\dfrac{\pi}{12}$

$\overline{AC}=2\times\overline{DA}=2\times2\cos\dfrac{\pi}{12}=4\cos\dfrac{\pi}{12}$

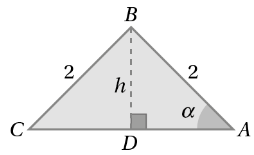
$$A_{[ABC]}=\frac{4\cos\frac{\pi}{12}\times2\sin\frac{\pi}{12}}{2}=4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\times2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{6}=2\times1=1$$

A medida da área do triângulo [*ABC*] é igual a 1 u.a..

20.2. Tendo em conta a figura ao lado:

$A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{CA}\times\overline{DB}}{2}$



$\overline{DA}=2\cos\alpha$; $\overline{DB}=2\sin\alpha$

Logo, a área do triângulo [*ABC*], em função de θ é dada por:

$$A(\theta)=\frac{2\times2\cos\alpha\times2\sin\alpha}{2}=2\times2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin(2\alpha)$$

$$A'(\theta)=\left(2\sin(2\alpha)\right)'=2\times2\cos(2\alpha)=4\cos(2\alpha)$$

$$A'(\theta)=0\Leftrightarrow4\cos(2\alpha)=0\Leftrightarrow\cos(2\alpha)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$$

Como α é a medida da amplitude de um ângulo agudo $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
A'		+	0	–	
A		↗	2	↘	

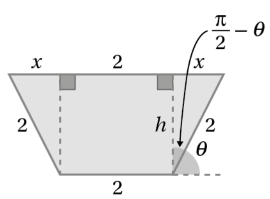
Máx.

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2\times1=2$$

Logo, a medida da área máxima do triângulo [*ABC*] é 2 u.a. se $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

Pág. 87

21. O caudal que o canal pode suportar é máximo se a secção do canal, com a forma de um trapézio isósceles, tiver a área máxima.



$\dfrac{h}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$h=2\sin\theta$

$\dfrac{x}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$x=2\cos\theta$

A área do trapézio em função de θ , é dada por:

$$A=\frac{2+2x+2}{2}\times h=(2+x)\times h$$

$$A(\theta)=(2+2\cos\theta)\times2\sin\theta=4\sin\theta+2\times2\sin\theta\cos\theta=$$

$$=4\sin\theta+2\sin(2\theta)$$

$$A'(\theta)=4\cos\theta+2\cos2\theta$$

$$A'(\theta)=0\Leftrightarrow2\cos(2\theta)+2\cos\theta=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos(2\theta)=-\cos(\theta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos(2\theta)=\cos(\pi-\theta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2\theta=\pi-\theta+2k\pi\vee2\theta=-\pi+\theta+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow3\theta=\pi+2k\pi\vee\theta=-\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\vee\theta=-\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Como $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]:\theta=\dfrac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
A'		+	0	–	–
A		↗		↘	

Máx.

O caudal que o canal pode suportar é máximo se $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ rad.

Pág. 90

22.1. $f(x)=-1+2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; $D_f=[0,\pi]$

Período positivo mínimo: $P_0=\dfrac{2\pi}{3}$

Contradomínio:

Tem-se que $0\le x\le\pi\Leftrightarrow0\le3x\le3\pi\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{6}\le3x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{19\pi}{6}$

Assim:

$$-1\le\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\le1\Leftrightarrow$$

$3\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{19\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow-1+2\times(-1)\le-1+2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\le-1+2\times1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-3\le f(x)\le1$$

Logo, $D'_f=[-3,1]$

Zeros:

$$f(x)=0\Leftrightarrow-1+2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee3x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\vee3x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\vee x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$$

Em $[0,\pi]:x=0\vee x=\dfrac{2\pi}{9}\vee x=\dfrac{2\pi}{3}\vee x=\dfrac{8\pi}{9}$

Para facilitar o esboço vamos determinar os maximizantes, os minimizantes de f bem como os pontos de inflexão, além de $f(0)$ e $f(\pi)$.

Maximizantes e minimizantes:

$$f(x)=-3 \Leftrightarrow -1+2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-3 \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-1 \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{9} \vee x=\frac{7\pi}{9}$$

$$f(x)=-1 \Leftrightarrow -1+2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{9}$$

Pontos de inflexão:

Os pontos de inflexão pertencem à reta: $y=d \Leftrightarrow y=-1$

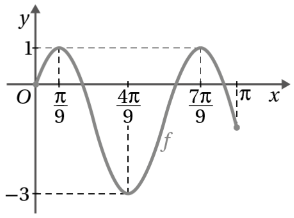
$$f(x)=-1 \Leftrightarrow -1+2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{6}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[0,\pi]$: $x=\frac{5\pi}{18} \vee x=\frac{11\pi}{18} \vee x=\frac{17\pi}{18}$

Esboço do gráfico:



Pág. 91

22.2. $f(x)=1-2\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$; $D_f=[0\ ,1]$

Período positivo mínimo: $P_0=\frac{2\pi}{2\pi}=1$

Contradomínio:

$$0\le x\le 1 \Leftrightarrow 2\pi\times 0-\frac{\pi}{2}\le 2\pi x-\frac{\pi}{2}\le 2\pi\times 1-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le 2\pi x-\frac{\pi}{2}\le\frac{3\pi}{2}$$

Assim: $-1\le\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\le 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1-2\times 1\le 1-2\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\le 1-2\times(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 3$$

Logo , $D'_f=[-1\ ,3]$.

Zeros:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee 2\pi x-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee 2\pi x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}+k \vee x=\frac{2}{3}+k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[0,1]$: $x=\frac{1}{3} \vee x=\frac{2}{3}$

Maximizantes e minimizantes:

$$f(x)=-1 \Leftrightarrow 1-2\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=1 \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=1+2k,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+k,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=3 \Leftrightarrow 1-2\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=3 \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=2+2k,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1+k,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,1] \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Pontos de inflexão:

Os pontos de inflexão pertencem à reta $y=d \Leftrightarrow y=1$.

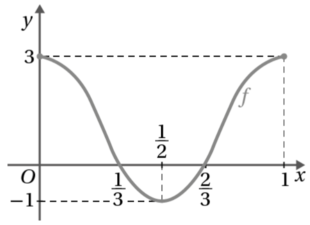
$$f(x)=1 \Leftrightarrow 1-2\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x-\frac{\pi}{2}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\pi x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[0,1]$: $x=\frac{1}{4} \vee x=\frac{3}{4}$

Esboço do gráfico:



Pág. 92

23.1. $f(x)=3-3\cos\left(-2x-\frac{\pi}{3}\right)$; $D_f=[0\ ,2\pi]$

Período positivo mínimo: $P_0=\frac{2\pi}{|-2|}=\pi$

Contradomínio:

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, tem-se:

$$-1 \leq \cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3\times 1 \leq -1 - 2\cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 3 - 3\times(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 6$$

Logo, $D'_f = [0, 6]$.

Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3\cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow -2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $[0, 2\pi]$: $x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}$

Maximizantes e minimizantes:

Os minimizantes coincidem com os zeros de f.

<u>Maximizantes:</u>

$$f(x) = 6 \Leftrightarrow 3 - 3\cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = 6 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$$

Pontos de inflexão:

Os pontos pertencem à reta de equação: $y = d \Leftrightarrow y = 3$

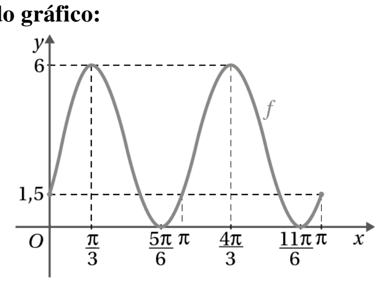
$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3\cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $[0, 2\pi]$: $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{7\pi}{12} \vee x = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{19\pi}{12}$

Esboço do gráfico:



23.2. $f(x) = 3 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; $D_f = [0, 4]$

Período positivo mínimo: $P_0 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Contradomínio:

Se $0 \leq x \leq 4$ então:

$$\frac{\pi}{2}\times 0 - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}\times 4 - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$$

$$1 \leq \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\times 1 \leq 3 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 - 2\times(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 5$$

$D'_f = [1, 5]$

Zeros: Como $0 \notin D'_f$, f não tem zeros.

Maximizantes e minimizantes:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 3 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 2k, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{4} + 2k, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + 4k, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow 3 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 5 \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5}{4} + 2k, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} + 4k, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 4] \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Pontos de inflexão:

Pertencem à reta de equação: $y = d \Leftrightarrow y = 3$

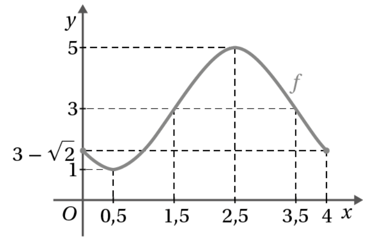
$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 3 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Em $[0, 4]$: $x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{7}{2}$

Esboço do gráfico:



Pág. 94

24.1. $f(x)=2+2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$; $D_f=\left]0,\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Período fundamental: $P_0=\frac{\pi}{2}$

Contradomínio: $D'_f=\mathbb{R}$

Zeros:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2+2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $\left]0,\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$: $x=\frac{\pi}{8}\vee x=\frac{5\pi}{8}$

Assíntotas:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2+2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2+2\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^+$$
$$=2+2\times(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(2+2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2+2\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-$$
$$=2+2\times(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(2+2\tan\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2+2\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)^+$$
$$=2+2\times(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\left(2+2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2+2\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$
$$=2+2\times(+\infty)=+\infty$$

As retas de equações $x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\pi$ são assíntotas ao gráfico de *f*.

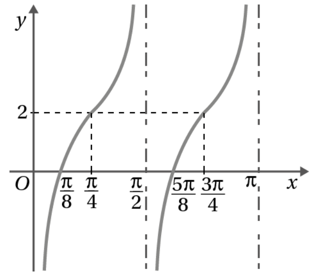
Pontos de inflexão:

Os pontos de inflexão pertencem à reta $y=d \Leftrightarrow y=2$.

$$f(x)=2 \Leftrightarrow 2+2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{2}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $\left]0,\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$: $x=\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{3\pi}{4}$

Esboço do gráfico:



Pág. 95

24.2. $f(x)=2\sqrt{3}-2\tan\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$; $D_f=\left]0,4\right[\setminus\{2\}$

Período fundamental: $P_0=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

Contradomínio: $D'_f=\mathbb{R}$

Zeros:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}-2\tan\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2}=\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}+2k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $\left]0,4\right[\setminus\{2\}$: $x=\frac{5}{3}\vee x=\frac{11}{3}$

Assíntotas:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2\sqrt{3}-2\tan\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\sqrt{3}-2\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$$
$$=2\sqrt{3}-2\times(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(2\sqrt{3}-2\tan\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$
$$=2\sqrt{3}-2\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^-=2\sqrt{3}-2\times(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(2\sqrt{3}-2\tan\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$
$$=2\sqrt{3}-2\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^+=2\sqrt{3}-2\times(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to4^-} f(x)=\lim_{x\to4^-}\left(2\sqrt{3}-2\tan\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$
$$=2\sqrt{3}-2\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-=2\sqrt{3}-2\times(+\infty)=-\infty$$

As retas de equações $x=0,\ x=2$ e $x=4$ são assíntotas ao gráfico de *f*.

Pontos de inflexão: os pontos de inflexão pertencem à reta de equação $y=d \Leftrightarrow y=2\sqrt{3}$.

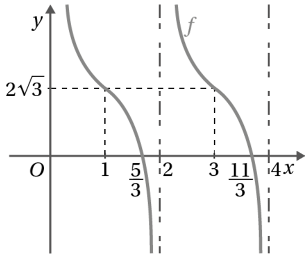
$f(x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} - 2\tan\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \pi x = \pi + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

Em $]0, 4[\setminus \{2\}$: $x = 1 \vee x = 3$

Esboço do gráfico:



Pág. 96

25. **Determinação de *a* e *d*:**

Como $D'_f = [1, 5]$, temos que $a = \frac{5-1}{2}$ e $d = \frac{5+1}{2} = 3$

Determinação de *b*:

O período da função é 2π.

$2\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Leftrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$

Seja $b = -1$.

Determinação de *c*:

$a = 2$, $b = -1$ e $d = 3$, pelo que:

$f(x) = 2\sin(-x + c) + 3$

Como $f(\pi) = 1$:

$2\sin(-\pi + c) + 3 = 1 \Leftrightarrow \sin(-\pi + c) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sin c = -1 \Leftrightarrow \sin c = 1$

Logo, $c = \frac{\pi}{2}$.

Temos $f(x) = 2\sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ ou

$f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$, por exemplo.

Pág. 98

26.1. **a)** A amplitude é 2 m.

b) A pulsação é $\frac{\pi}{4}$ rad/s.

c) A fase é $\frac{\pi}{2}$ rad.

d) O período é $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$ s.

e) A frequência é $\frac{1}{8}$.

26.2. **a)** $V(t) = x'(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = -2 \times \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

$V(0) = x'(0) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

No instante $t = 9$ s a velocidade foi de $-\frac{\pi}{2}$ m/s.

b) $V(6) = x'(6) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin(2\pi) = 0$

No instante $t = 6$ s a velocidade foi de 0 m/s.

26.3. **a)** $a(t) = v'(t) = x''(t) = \left(-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right)' =$

$= -\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

$a(2) = -\frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{8}\cos\pi = \frac{\pi^2}{8}$

No instante $t = 2$ s a aceleração foi de $-\frac{\pi^2}{8}$ m/s^2.

b) $a(6) = x''(6) = -\frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{8}\cos(2\pi)$

$= -\frac{\pi^2}{8}$

No instante $t = 6$ s a aceleração foi de $-\frac{\pi^2}{8}$ m/s^2.

26.4. Atendendo a que o período fundamental de *f* é igual a 8, vamos esboçar o gráfico de *f* no intervalo [0, 8].

Zeros:

$x(t) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$

Em [0, 8]: $t = 0 \vee t = 4 \vee t = 8$

Contradomínio:

Como $t \in [0, 8]$:

$\frac{\pi \times 0}{4} + \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi \times 8}{4} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2} \le 2\pi + \frac{\pi}{2}$

Assim:

$-1 \le \cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \le 2$

Logo, $D'_x = [-2, 2]$

Maximizantes e minimizantes:

$x(t) = -2 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{t}{4} = \frac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 2 + 8k,\ k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow t = 2$

$x(t) = 2 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow$

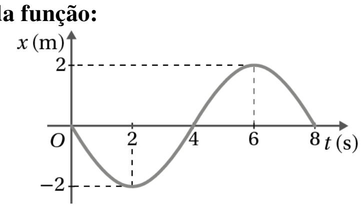
$\Leftrightarrow \frac{t}{4} = -\frac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=-2+8k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,8]\Leftrightarrow t=6$

Pontos de inflexão:

Os pontos de inflexão pertencem à reta de equação $y=0$, ou seja, coincidem com os pontos de abcissa 0 já determinados.

Gráfico da função:



Pág. 100

27.1. $D'_f=[-5,5]$

$A=\frac{5-(-5)}{2}=\frac{10}{2}=5$

A amplitude é 5 m.

$T=8\rightarrow$ O período é 8 s.

$T=\frac{2\pi}{w}\Leftrightarrow 8=\frac{2\pi}{w}\Leftrightarrow w=\frac{2\pi}{8}\Leftrightarrow w=\frac{\pi}{4}$

A pulsação é $\frac{\pi}{4}$.

Temos que $f(t)=5\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\varphi\right)$

$f(6)=5\Leftrightarrow 5\cos\left(\frac{6\pi}{4}+\varphi\right)=5\Leftrightarrow\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{3\pi}{2}+\varphi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\varphi=-\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Em $[0,2\pi]$: $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Logo, a fase é $\frac{\pi}{2}$.

27.2. $f(t)=A\cos(wt+\varphi)$

$A=5$; $w=\frac{\pi}{4}$; $\varphi=\frac{\pi}{25}$

Logo, $f(t)=5\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$.

27.3. $f(t)=2{,}5\Leftrightarrow 5\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=2{,}5\wedge t\in[0,8]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,$

$k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,8]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\pi t}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\vee\frac{\pi t}{4}=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$

$k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,8]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\pi t}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee\frac{\pi t}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,$

$k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,8]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}+8k\vee t=-\frac{10}{3}+8k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,8]$

$\Leftrightarrow t=\frac{22}{3}\vee t=\frac{14}{3}$

Pág. 101

28.1. $D(t)=2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+3,\ t\in[0,3]$

$0\le t\le 3\Leftrightarrow 2\pi\times 0\times\frac{\pi}{3}\le 2\pi t+\frac{\pi}{3}\le 2\pi\times 3+\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}\le 2\pi t+\frac{\pi}{3}\le 6\pi+\frac{\pi}{3}$

Assim, para $t\in[0,3]$:

$-1\le\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\times(-1)+3\le 2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+3\le 2\times 1+3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\le D(t)\le 5$

Logo, a distância mínima do corpo *C* ao solo é 1 m e a máxima é 5 m.

28.2. $A=2$. A amplitude do movimento do corpo *C* é 2 m.

28.3. $T=\frac{2\pi}{2\pi}=1$. O período do movimento de *C* é 1 s.

$f=\frac{1}{1}=1$. A frequência do movimento *C* é 1.

28.4. A fase é $\frac{\pi}{3}$.

28.5. $D(t)=4\Leftrightarrow 2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+3=4\wedge t\in[0,3]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\wedge t\in[0,3]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee 2\pi t+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,$

$k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,3]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\pi t=2k\pi\vee 2\pi t=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,$

$k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,3]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=k\vee t=-\frac{1}{3}+k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,3]$

Em $[0,3]$:

$t=0\vee t=1\vee t=2\vee t=3\vee t=\frac{2}{3}\vee t=\frac{5}{3}\vee t=\frac{8}{3}$

O corpo *C* está a 4 m do solo nos instantes $t=0$ s, $t=\frac{2}{3}$ s, $t=1$ s, $t=\frac{5}{3}$ s, $t=2$ s, $t=\frac{8}{3}$ s e $t=3$ s.

Pág. 103

29.1. $x(t)=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{2}t\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)$

Trata-se de um oscilador harmónico porque é definido por uma expressão do tipo $x(t)=A\cos(wt+\varphi)$, com $A>0,\ w>0$ e $\varphi\in[0,2\pi[$.

29.2. $v(t)=x'(t)=\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)\right)'=-\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)$

$=-\frac{3\pi}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)$

$v(t)=0 \Leftrightarrow x'(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)=0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}t+\pi=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}t=-\pi+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow\ t=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k,\ k\in\mathbb{Z}$

Em $\left[0,\frac{4}{3}\right]$, $v(t)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=\frac{2}{3} \vee t=\frac{4}{3}$.

Em $\left[0,\frac{4}{3}\right]$, a velocidade é nula nos instantes

$t=0$ s, $t=\frac{2}{3}$ s e $t=\frac{4}{3}$ s .

29.3. $x''(t)=\left(x'(t)\right)'=\left(-\frac{3\pi}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)\right)'=$

$=-\frac{3\pi}{4}\times\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)=-\frac{9\pi^2}{8}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)$

Por outro lado, $x''(t)=-k\times x(t)=-k\times\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)$.

Assim tem-se $x''(t)=-k\times x(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{9\pi^2}{8}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right)=-k\times\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\pi\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -k\times\frac{1}{2}=-\frac{9\pi^2}{8} \Leftrightarrow k=\frac{9\pi^2}{4}$

Logo, $k=\frac{9\pi^2}{4}$.

Atividades complementares

Pág. 106

30.1. $\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{12}=\frac{2\pi}{12}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}$

$\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

30.2. $\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{\pi}{15}-\cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{\pi}{15}=\sin\left(\frac{7\pi}{30}-\frac{\pi}{15}\right)=\sin\frac{5\pi}{30}=$

$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

31.1. $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=$

$=\cos\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

31.2. $\cos\frac{3\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}-\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{\pi}{16}==\cos\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{16}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

32. $x,\ y\in 2.^{\circ}$ Q, $\sin x=\frac{5}{13}$, $\cos y=-\frac{3}{5}$

- $\cos^2 x=1-\sin^2 x\ \cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{144}{169} \Leftrightarrow \cos x=-\frac{12}{13}$ $\quad (x\in 2.^{\circ}\text{Q} \Rightarrow \cos x<0)$

- $\sin^2 y=1-\cos^2 y \Leftrightarrow \sin^2 y=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \sin^2 y=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin y=\frac{4}{5}$ $\quad (y\in 2.^{\circ}\text{Q} \Rightarrow \sin y>0)$

32.1. $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x=$

$=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{15}{65}-\frac{48}{65}=-\frac{63}{65}$

32.2. $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=$

$=-\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=\frac{16}{65}$

32.3. $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x=$

$=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{33}{65}$

32.4. $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y=$

$=-\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{36}{65}+\frac{20}{65}=\frac{56}{65}$

32.5. $\sin(2y)=2\sin y\cos y=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

32.6. $\cos 2y=\cos^2 y-\sin^2 y=$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$

33. $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ e $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{16}{25}$

Como $\alpha\in 1.^{\circ}$Q , vem $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \frac{3}{4}=\frac{\sin\alpha}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{3}{5}$

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$

$\tan(2a)=\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}=\frac{24}{7}$

34.1. $\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x-\cos\frac{\pi}{4}\cos x\right)=$

$=-2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=$

$=2\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}+x\right)=$ $\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$=2\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$

34.2. $\cos x+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x$

$=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

$=\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

35.1. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x=1\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

35.2. $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{12}}{4}$

$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee x-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\vee x=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi\vee x=\frac{11\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

36.1. $\sin(2x)-\cos x=0\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\cos x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\cos x=0\vee\sin x=\frac{1}{2}$

Em $[0,2\pi]$:

$\cos x=0\vee\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{3\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{6}\vee x=\frac{5\pi}{6}$

$S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right\}$

36.2. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{4}-$

$-\sin\frac{\pi}{4}\cos x=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cos\frac{\pi}{4}=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos\frac{\pi}{4}=-1\Leftrightarrow 2\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\vee x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in[0,2\pi]$, temos:

$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi\vee x=\pi+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{4}\vee x=\frac{5\pi}{4}$

$S=\left\{\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$

36.3. $\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=2\sin x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{2}\sin x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{x}{2}=\sin x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=x+2k\pi\vee\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\pi-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee\frac{3x}{2}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{3}+4k\pi\vee x=\frac{8\pi}{9}+\frac{4k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Em $[0,4\pi]$, temos:

$x=\frac{10\pi}{3}\vee x=\frac{8\pi}{9}\vee x=\frac{20\pi}{9}\vee x=\frac{32\pi}{9}$

$S=\left\{\frac{8\pi}{9},\frac{20\pi}{9},\frac{10\pi}{3},\frac{32\pi}{9}\right\}$

37.1. $1-(\sin x+\cos x)^2=1-\left(\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x\right)=$

$=1-(1+\sin(2x))=-\sin(2x)$

37.2. $\frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}=\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2x-\sin^2x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2x+\cos^2x}=$

$=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2x}=\tan x$

38.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x}{\pi x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}=\frac{3}{\pi}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{3}{\pi}\times1=\frac{3}{\pi}$

38.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}\right)^2=$

$=\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\right)^2$

$=(1\times1)^2=1$

38.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-(1-\cos^2x)}{x\sin x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\sin x}=$

$=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-1$

38.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{\sin x}{x}\right)\ 2-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=$

$=2-0=2$

$-1\le\sin x\le1,\ \forall x\in\mathbb{R}^-$

$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x},\ \forall x\in\mathbb{R}^-$

Pelo teorema das funções enquadradas $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

38.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x+\tan x}{\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sin x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin x}=$

$=2\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x}=2\times\frac{1}{1}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin x\times\cos x}=$

$=2+\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=2+\frac{1}{1}=3$

38.6. $$\lim_{x\to 0}\frac{5x\sin x}{\cos x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{5x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{5x\sin x}{1-\cos^2 x}\times\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=$$

$$=-5\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x}\times(1+1)=5\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\times 2=$$

$$=-5\times 2\times\frac{1}{1}=-10$$

38.7. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x\times(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

38.8. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(\sin^2 x)}{3x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{3}\times\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=$$

$$=\frac{1+1}{3}\times 1^2=\frac{2}{3}$$

38.9. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)\cos x(2x)}{\sin(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}\times\lim_{x\to 0}\cos(2x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\times\frac{\sin(3x)}{3x}}{2x\times\frac{\sin(2x)}{2x}}\times 1=$$

$y=3x$
Se $x\to 0,\ y\to 0$

$z=2x$
Se $x\to 0,\ z\to 0$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$$

38.10. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{4x-\pi}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{4\cos x\times\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1}{4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{2}{2\times 2}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=$$

$y=x-\frac{\pi}{4}$
Se $x\to\frac{\pi}{4},\ y\to 0$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

38.11. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\lim_{x\to 0}(x-1)=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\times(-1)=\frac{1}{1}\times(-1)=-1$$

38.12. $$\lim_{x\to 1}\frac{\pi\sin(ax-a)}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin(a(x-1))}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\pi}{x+1}\times\lim_{x\to 1}\frac{a\sin[a(x-1)]}{a(x-1)}=$$

$y=a(x-1)$
Se $x\to 1,\ y\to 0$

$$=\frac{\pi}{2}\times a\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{\pi\times a}{2}\times 1=\frac{\pi\times a}{2}$$

38.13. $$\lim_{x\to+\infty}\left[(2n+1)\sin\frac{2}{n}\right]\overset{\infty\times 0}{=}\lim_{y\to 0}\left[\left(\frac{4}{y}+1\right)\sin y\right]=$$

$y=\frac{2}{n}\Leftrightarrow n=\frac{2}{y}$
Se $n\to+\infty,\ y\to 0$

$$=\lim_{y\to 0}\left(4\frac{\sin y}{y}+\sin y\right)=4\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}+\lim_{y\to 0}y=$$

$$=4\times 1+0=4$$

38.14. $$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan(\pi x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}}=2\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\cos(\pi x)\times\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{\pi\sin(\pi x)}=$$

$y=\pi x$
Se $x\to 0,\ y\to 0$

$$=2\times 1\times\frac{1}{\pi}\times\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=2\times 1\times\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=\frac{2}{\pi}$$

38.15. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{3x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos-\frac{1}{2}\sin x\right)}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\sin x\cos\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=-\frac{2}{3}\times 1=-\frac{2}{3}$$

$y=x-\frac{\pi}{3}$
Se $x\to\frac{\pi}{3},\ y\to 0$

38.16. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\cos x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=$$

$$=\sqrt{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}=\sqrt{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{|\sin x|}=$$

$$=\sqrt{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{\frac{|\sin x|}{x}}=\sqrt{2}\times 0=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{\frac{|\sin x|}{x}}=\frac{1-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-1}{1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{\frac{|\sin x|}{x}}=\frac{1-\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}}{-\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-1}{-1}=0$$

38.17. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin^2(2x)-\cos x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)-\sin^2(2x)}{x^2}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x^2}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2}{x^2}-\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}\right)^2=$

$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}-\left(2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2=$

$=\frac{1}{2}\times\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2-\left(2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\right)^2=$ | $y=2x$; Se $x\to 0,\ y\to 0$

$=\frac{1}{2}\times 1^2-(2\times 1)^2=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}$

Pág. 107

39.1. Se *f* é contínua em ℝ, então é contínua em 1. Logo, existe $\lim_{x\to 1}f(x)$, pelo que $\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$.

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sin(x-1)}{1-\sqrt{x}}+k\right)=$

$=k+\lim_{x\to 1^+}\frac{[\sin(x-1)](1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=$

$=k+\lim_{x\to 1^+}(1+\sqrt{x})\times\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(x-1)}{1-x}$ | $y=x-1$; Se $x\to 1^+,\ y\to 0^+$

$=k-2\times\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}=k-2\times 1=k-2$

$f(1)=0$

$k-2=0\Leftrightarrow k=2$

39.2. *f* é contínua em ℝ. Logo, o gráfico de *f* não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sin(x-1)}{1-\sqrt{x}}+2\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(x-1)}{1-\sqrt{x}}+2$

$=0+2=2$

Dado que:

$-1\le\sin(x-1)\le 1,\ \forall x\in\left]1,+\infty\right[$

$\frac{1}{1-\sqrt{x}}\le\frac{\sin(x-1)}{1-\sqrt{x}}\le\frac{-1}{1-\sqrt{x}},\ \forall x\in\left]1,+\infty\right[$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1-\sqrt{x}}=\frac{+1}{-\infty}=0$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{1-\sqrt{x}}=\frac{-1}{-\infty}=0$

Pelo teorema das funções enquadradas:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(x-1)}{1-\sqrt{x}}=0$$

$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{1+\cos(\pi x)}{x-1}=0$, dado que:

$-1\le\cos(\pi x)\le 1,\ \forall x\in\left]-\infty,1\right[$

$\frac{1+1}{x-1}\le\frac{1+\cos(\pi x)}{x-1}\le\frac{1-1}{x-1},\ \forall x\in\left]-\infty,1\right[$

$\lim_{x\to -\infty}\frac{1-1}{x-1}=\lim_{x\to -\infty}0=0$

$\lim_{x\to -\infty}\frac{1+1}{x-1}=\frac{2}{-\infty}=0$

Logo, pelo teorema das funções enquadradas:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1+\cos(\pi x)}{x-1}=0$$

As retas de equações $y=0$ e $y=2$ são assíntotas ao gráfico de *f* quando $x\to -\infty$ e quando $x\to +\infty$, respetivamente.

39.3. Trata-se de provar que a equação:

$f(x)=-x\Leftrightarrow f(x)+x=0$

tem pelo menos uma solução em $\left]0,1\right[$.

Seja *h* a função definida em ℝ por $h(x)=f(x)+x$, *h* é contínua em ℝ por ser a diferença de funções contínuas em ℝ. Logo, *h* é contínua em [0, 1].

$h(0)=f(0)+0=\frac{1+\cos 0}{-1}=\frac{1+1}{-1}=-2$

$h(1)=f(1)+1=0+1=1$

$h(0)\times h(1)<0$

Portanto, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, a função *h* tem pelo menos um zero em]0, 1[.
Logo, como a equação *f* (*x*) = – *x* é possível em]0, 1[podemos concluir que o gráfico de *f* interseta a reta de equação $y=-x$ num ponto de abcissa no intervalo]0, 1[.

40. $f(x)=\frac{\cos x}{1-\cos x},\ g(x)=\cos x$; $D_f=D_g=\left]0,2\pi\right[$

40.1. *f* é contínua em $\left]0,2\pi\right[$.

Assíntotas verticais:

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{1-\cos x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim_{x\to 2\pi^-}f(x)=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\cos x}{1-\cos x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

As retas de equações $x=0$ e $x=2\pi$ são assíntotas ao gráfico de *f*.
Como D_f é limitado, o seu gráfico não tem assíntotas não verticais.

40.2. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{\cos x}{1-\cos x}=\cos x\Leftrightarrow\frac{\cos x}{1-\cos x}-\cos x=0$

$\Leftrightarrow\frac{\cos x-\cos x+\cos^2 x}{1-\cos x}=0\Leftrightarrow\frac{\cos^2 x}{1-\cos x}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos x=0\wedge 1-\cos x\ne 0$

Como $x\in\left]0,2\pi\right[$, $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{3\pi}{2}$

40.3. $xy=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$

Trata-se de provar que $\exists x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[: f(x)=\frac{1}{x}$

Seja *h* a função definida em $\left]0,2\pi\right[$ por $h(x)=f(x)-\frac{1}{x}$.

h é contínua em $\left]0, 2\pi\right[$ por ser a diferença de funções contínuas neste intervalo. Logo, h é contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{\pi} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{4}{\pi} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} - \frac{4}{\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \frac{4}{\pi} = \frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} - \frac{4}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} - \frac{4}{\pi}$$

$$= \sqrt{2} + 1 - \frac{4}{\pi} > 0$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} = \frac{0}{1-0} - \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} < 0$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) \times h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Logo, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[: h(x) = 0$, ou seja, $\exists x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[: f(x) = \frac{1}{x}$ pelo que existe um ponto $P(x, y)$ do gráfico de f tal que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e $x \times y = 1$.

41.1. $f(x) = \sin x + 2\cos x$; $f'(x) = \cos x - 2\sin x$

41.2. $f(x) = \sin x \cos x$

$$f'(x) = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' =$$

$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$$

41.3. $f(x) = \sin\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)' \cos\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-(x-1)}{x^2} \cos\left(\frac{x-1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

41.4. $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

41.5. $f(x) = \cos^2(3x)$

$$f'(x) = 2\cos(3x) \times \left[\cos(3x)\right]' = 2\cos(3x)\left(-3\sin(3x)\right) =$$

$$= -6\sin(3x)\cos(3x) = -3\sin(6x)$$

41.6. $f(x) = \cos^3 x - \sin^3 x$

$$f'(x) = 3\cos^2 x(-\sin x) - 3\sin^3 x \times \cos x =$$

$$= -3\cos^2 x \sin x - 3\sin^2 x \cos x$$

41.7. $f(x) = \tan^3 x$

$$f'(x) = 3\tan^2 x \times (\tan x)' = 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

41.8. $f(x) = \frac{\tan(3x)}{2x}$

$$f'(x) = \frac{\left[\tan(3x)\right]' \times 2x - \tan(3x) \times 2}{(2x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{3 \times 2x}{\cos^2(3x)} - \frac{2\sin(3x)}{\cos(3x)}}{4x^2} = \frac{\frac{6x - 2\sin(3x)\cos(3x)}{\cos^2(3x)}}{4x^2} =$$

$$= \frac{6x - \sin 6x}{4x^2 \cos^2(3x)}$$

41.9. $f(x) = \tan x \cos x \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x \times \sin x = \sin^2 x$

$$f'(x) = 2 \times \sin x \cos x = \sin(2x)$$

41.10. $f(x) = \sqrt{\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$

$$f'(x) = \frac{\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'}{2\sqrt{\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}}{2\sqrt{\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}}$$

41.11. $f(x) = \frac{\tan x}{1 + 3\sin x}$

$$f'(x) = \frac{(\tan x)'(1+3\sin x) - \tan x(1+3\sin x)'}{(1+3\sin x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(1+3\sin x) - \frac{\sin x}{\cos x} \times 3\cos x}{(1+3\sin x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1+3\sin x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x \cos^2 x}{\cos^2 x}}{(1+3\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1 + 3\sin x - 3\sin x \cos^2 x}{\cos^2 x(1+3\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1 + 3\sin x\left(1 - \cos^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1 + 3\sin^2 x\right)} =$$

$$= \frac{1 + 3\sin x \times \sin^2 x}{\cos^2 x\left(1+3\sin^2 x\right)} = \frac{1 + 3\sin^3 x}{\cos^2 x\left(1 + 3\sin^2 x\right)}$$

41.12. $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + 1$

$$f'(x) = \frac{\left(\sin^3 x\right)' \cos x - \sin^3 x \times (\cos x)'}{\cos^2 x} + 0 =$$

$$= \frac{3\sin x \cos x \cos x + \sin^3 x \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x\left(3\cos^2 x + \sin x^2\right)}{\cos^2 x} =$$

$$= \tan^2 x\left(3\cos^2 x + 1 - \cos^2 x\right) =$$

$$= \tan^2 x\left(2\cos^2 x + 1\right)$$

41.13. $f(x) = x - \sin x \cos x = x - \frac{1}{2}\times 2\sin x \cos x =$

$= x - \frac{1}{2}\sin(2x)$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\times 2\cos(2x) = 1 - \cos(2x)$

41.14. $f(x) = \frac{x\sin x + \cos x}{\sin x - x\cos x} =$

$= \frac{(x\sin x + \cos x)'(\sin x - x\cos x) -}{(\sin x - x\cos x)^2}$

$\frac{-(x\sin x + \cos x)(\sin x - x\cos x)'}{(\sin x - x\cos x)^2} =$

$= \frac{(\sin x + x\cos x - \sin x)(\sin x - x\cos x) -}{(\sin x - x\cos x)^2}$

$\frac{-(x\sin x + \cos x)(\cos x - \cos x + x\sin x)}{(\sin x - x\cos x)^2} =$

$= \frac{x\cos x(\sin x - x\cos x) - (x\sin x + \cos x)x\sin x}{(\sin x - x\cos x)^2} =$

$= \frac{x\cos x\sin x - x^2\cos^2 x - x^2\sin^2 x - x\sin x\cos x}{(\sin x - x\cos x)^2} =$

$= \frac{-x^2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\sin x - x\cos x)^2} = \frac{-x^2}{(\sin x - \cos x)^2}$

41.15. $f(x) = 2\cos x - \cos(2x)$

$f'(x) = -2\sin x + 2\sin(2x) = 2\sin(2x) - 2\sin x$

42.1. $f'(\pi) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\pi + h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi + h}{2}\right) - 0}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\sin\frac{h}{2}}{h} = -\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$

$= -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}\times 1 = -\frac{1}{2}$ | $y = \frac{h}{2}$; Se $h \to 0$, $y \to 0$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{h}{2}\right) - \cos\frac{\pi}{6}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{h}{2} - \sin\frac{h}{2}\sin\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{h}{2} - \sin\frac{h}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{h}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \cos\frac{h}{2}\right)}{h} =$

$= -\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{h\to 0}\frac{1 - \cos^2\frac{h}{2}}{h\left(1 + \cos\frac{h}{2}\right)} =$

$= -\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}\left(1 + \cos\frac{h}{2}\right)} =$

$= -\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} - \frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 y}{y(1 + \cos y)} =$ | $y = \frac{h}{2}$; Se $h \to 0$, $y \to 0$

$= -\frac{1}{4}\times 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{h\to 0}\frac{\sin y}{y}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin y}{1 + \cos y} =$

$= -\frac{1}{4}\times 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\times 1\times 0 = -\frac{1}{4}$

42.2. $f(x) = x + \sin(2x)$

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x + \sin(2x)}{x} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} + 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} = 1 + 2\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} =$ | $y = 2x$; Se $x \to 0$, $y \to 0$

$= 1 + 2\times 1 = 3$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\pi}{6} + h + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2h\right) - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos(2h) + \sin(2h)\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{h} =$

$= 1 + \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2h) + \frac{1}{2}\sin(2h) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{h} =$

$= 1 + \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin(2h) - \frac{\sqrt{3}}{2}[1 - \cos(2h)]}{h} =$

$= 1 + \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{2h} - -\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{h\to 0}\frac{(1 - \cos(2h))(1 + \cos(2h))}{h(1 + \cos(2h))}$

$= 1 + \lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{2h} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(2h)}{2h(1 + \cos(2h))} =$

$= 1 + \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} - \sqrt{3}\lim_{h\to 0}\frac{\sin y}{y}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin y}{1 + \cos y} =$ | $y = 2h$; Se $h \to 0$, $y \to 0$

$= 1 + 1 - \sqrt{3}\times 1\times 0 = 2$

42.3. $f(x) = 2\tan(2x)$

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{2\tan(2x)}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{x} =$

$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x\cos(2x)} = 2\times 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)} =$

$= 4\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\times\frac{1}{1} = 4\times 1\times 1 = 4$ | $y = 2x$; Se $x \to 0$, $y \to 0$

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{8} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{8}\right)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right) - 2}{h} =$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)}-1}{h} =$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)}}{h} =$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)}{h\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)} =$$

Cálculos auxiliares

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+2h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2h)+\sin(2h)\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+2h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2h)-\sin(2h)\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+2h\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2h\right) = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2h) = \sqrt{2}\sin(2h)$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin(2h)}{h\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2h\right)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\times 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{2h}\times\frac{1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= 2\sqrt{2}\times 2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin y}{y} =$$

$y = 2h$
Se $h \to 0,\ y \to 0$

$$= 2\sqrt{2}\times 2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times 1 = 8$$

43. $f(x) = x+\sin(4x)$; $f'(x) = 1+4\cos(4x)$

$t: y = mx+b$; $P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}+\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1+4\cos\left(4\times\frac{\pi}{4}\right) = -3$

$y = -3x+b$

$\frac{\pi}{4} = -3\times\frac{\pi}{4}+b \Leftrightarrow b = \pi$, logo $t: y = -3x+\pi$

44. $f(x) = 4x+4\cos\frac{x}{2}$ $\quad f'(x) = 4-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$t: y = mx+b$ $\quad m = 2$

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow 4-2\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi+4k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Em $[0, 2\pi]$, $f'(x) = 2 \Leftrightarrow x = \pi$

$P(\pi, 4\pi)$; $f(\pi) = 4\pi+4\cos\frac{\pi}{2} = 4\pi$

$y = 2x+b$

$4\pi = 2\pi+b \Leftrightarrow b = 2\pi$, logo

$t: y = 2x+2\pi$

45.1. $f(x) = 2\cos x-\cos(2x)$; $f'(x) = -2\sin x+2\sin(2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin x+\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = x+2k\pi \vee 2x = \pi-x+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Em $[0, 2\pi]$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \pi x = \frac{5\pi}{3} \vee x = 2\pi$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f'	0	+	0	–	0	+	0	–	0
f	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	–3	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1
	Mín.		Máx.		Mín.		Máx.		Mín.

f é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

f tem um mínimo relativo igual a 1 para $x = 0$ e $x = 2\pi$, um mínimo relativo (e absoluto) igual a – 3 para $x = \pi$ e um máximo relativo (e absoluto) igual a $\frac{3}{2}$ para $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{5\pi}{3}$.

$D'_f = \left[-3, \frac{3}{2}\right]$

45.2. $f(x) = \cos(2x)-6\sin x$; $f'(x) = -2\sin(2x)-6\cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(2x)-6\cos(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+3\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x+3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos x = 0$

Em $[0, 2\pi]$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'	–	–	0	+	0	–	–
f	1	↘	–7	↗	5	↘	1
	Máx.		Mín.		Máx.		Mín.

f estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

f tem um máximo relativo igual a 1 para $x = 0$, um máximo relativo (e absoluto) igual a 5 para $x = \frac{3\pi}{2}$, um mínimo relativo (e absoluto) igual a – 7 para $x = \frac{\pi}{2}$ e um mínimo relativo igual a 1 para $x = 2\pi$.

$D'_f = [-7, 5]$

45.3. $f(x)=\sin(3x)-3\sin x$; $f'(x)=3\cos(3x)-3\cos x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos(3x)=\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=x+2k\pi \vee 3x=-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=2k\pi \vee 4x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=k\pi \vee x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Em $[0, 2\pi]$:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{\pi}{2} \vee x=\pi \vee x=\dfrac{3\pi}{2} \vee x=2\pi$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'	0	–	0	+	0	+	0	–	0
f	0	↘	–4	↗	0	↗	4	↘	0
	Máx.		Mín.				Máx.		Mín.

f é estritamente decrescente em $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e estritamente crescente em $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

f tem um máximo relativo igual a 0 para $x=0$, máximo absoluto igual a 4 para $x=\dfrac{3\pi}{2}$, mínimo absoluto igual a – 4 para $x=\dfrac{\pi}{2}$ e um mínimo relativo igual a 0 para $x=2\pi$.

$D'_f=[-4, 4]$

45.4. $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

$f'(x)=\dfrac{\cos x(2+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=$

$=\dfrac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x+1=0 \wedge x\in[0, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2} \wedge x\in[0, 2\pi] \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pi}{3} \vee x=\dfrac{4\pi}{3}$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f'	+	+	0	–	0	+	+
f	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	0
	Mín		Máx		Mín		Máx

f é estritamente crescente em $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left[\dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

f tem um mínimo relativo igual a 0 para $x=0$, um mínimo relativo (e absoluto) igual a $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ para $x=\dfrac{4\pi}{3}$, um máximo relativo (e absoluto) igual a $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ para $x=\dfrac{2\pi}{3}$ e um máximo relativo igual a 0 para $x=2\pi$.

$D'_f=\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Pág. 108

46.1. $f(x)=x^2+\cos(2x)$ $\quad f'(x)=2x-2\sin(2x)$

$f''(x)=2-4\cos(2x)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2-4\cos(2x)=0 \wedge x\in[0, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x)=\dfrac{1}{2} \wedge 2x\in[0, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{3} \vee 2x=\dfrac{5\pi}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6} \vee x=\dfrac{5\pi}{6}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f''	–	–	0	+	0	–	–
f		∩		∪		∩	
			P.I.		P.I.		

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$ e voltada para cima em $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$.

Os pontos de abcissas $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{5\pi}{6}$ são pontos de inflexão.

46.2. $f(x)=2\cos(2x)+\dfrac{1}{2}\cos(4x)$

$f'(x)=-4\sin(2x)-2\sin(4x)$

$f''(x)=-8\cos(2x)-8\cos(4x)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -8\cos(2x)-8\cos(4x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(4x)=-\cos(2x) \Leftrightarrow \cos(4x)=\cos(\pi-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x=\pi-2x+2k\pi \vee 4x=-\pi+2x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x=\pi+2k\pi \vee 2x=-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi+2k\pi}{6} \vee x=\dfrac{-\pi+2k\pi}{2}$

No intervalo $[0, \pi]$, temos:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6} \vee x=\dfrac{\pi}{2} \vee x=\dfrac{5\pi}{6}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f''	–	–	0	+	0	+	0	–	
f		∩		∪		∪		∩	
			P.I.				P.I.		

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$ e voltada para cima em $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$.

Os pontos de abcissas $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{5\pi}{6}$ são pontos de inflexão do gráfico de *f*.

47.1. $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos x},\ D_f=]-\pi, \pi[$

Zeros: $f(x)\neq 0, \forall x\in D_f$

Monotonia e extremos:

$f'(x)=\dfrac{-(1+\cos x)'}{(1+\cos)^2}=\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \wedge x\in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow x=0$

x	$-\pi$		0		π
f'		+	0	–	
f	0	↘	$\frac{1}{2}$	↗	
			Mín.		

f é estritamente decrescente em $]-\pi\,,0]$ e estritamente crescente em $[0\,,\pi[$

$f(0)=\frac{1}{2}$ é o mínimo absoluto de f.

Concavidades:

$$f''(x)=\frac{(\sin x)'(1+\cos x)^2-\sin x\left[(1+\cos x)^2\right]'}{(1+\cos x)^4}=$$

$$=\frac{\cos x(1+\cos x)^2-\sin x\times 2(1+\cos x)(-\sin x)}{(1-\cos x)^4}=$$

$$=\frac{(1+\cos x)\left(\cos x+\cos^2 x+2\sin^2 x\right)}{(1+\cos x)^4}=$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+2\left(1-\cos^2 x\right)}{(1+\cos x)^3}=\frac{\cos x-\cos^2 x+2}{(1+\cos x)^3}$$

Como $\forall x\in\,]-\pi\,,\pi[\,,-1<\cos x\le 1\,,\ 0\le-\cos^2 x\le 1$ vem que $\cos x-\cos^2 x+2\ge 0$.

Logo, $f''(x)\ge 0, \forall x\in\,]-\pi\ ,\pi[$.

A concavidade do gráfico de f é voltada para cima pelo que não tem pontos de inflexão.

Assíntotas não verticais:

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais porque D_f é limitado

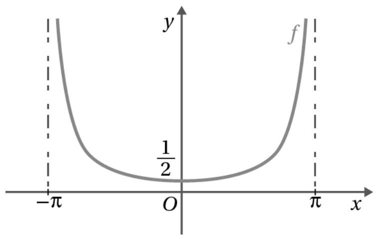
Assíntotas verticais: f é contínua em $]-\pi\,,\pi[$

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x)=\lim_{x\to-\pi^+}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\pi^-} f(x)=\lim_{x\to-\pi^-}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

As retas de equações $x=-\pi$ e $x=\pi$ são assíntotas do gráfico de f.

Gráfico:



47.2. $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x};\ D_f=\,]-\pi\,,\ \pi[\,\setminus\{0\}$

Zeros:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\cos^2 x=0\wedge\sin x\ne 0\wedge x\in D_f\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos x=0\wedge x\in D_f\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{2}$$

Monotonia extremos:

$$f'(x)=\frac{2\cos x(-\sin x)\times\sin x-\cos^2 x\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\left(-2\sin^2 x-\cos^2 x\right)}{\sin^2 x}=\frac{\cos x\left[-2\sin^2 x-1+\sin^2 x\right]}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\cos x\left(-\sin^2 x-1\right)}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x\left(1+\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=0\wedge\sin^2 x\ne 0\wedge x\in D_f\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{2}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'		+	0	−		−	0	+	
f		↗	0	↘		↘	0	↗	
			Máx				Mín		

f é estritamente crescente em $\left]-\pi\,,-\frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right[$ e estritamente decrescente em $\left[-\frac{\pi}{2}\,,0\right[$ e em $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

f tem um máximo relativo igual a 0 para $x=-\frac{\pi}{2}$ e um mínimo relativo igual a 0 para $x=\frac{\pi}{2}$.

Concavidades e inflexões:

$f''(x)=$

$$=-\frac{\left[\cos x\left(1+\sin^2 x\right)\right]'\sin^2 x-\cos x\left(1+\sin^2 x\right)\left(\sin^2 x\right)'}{\sin^4 x}=$$

$$=-\frac{\left[-\sin x\left(1+\sin^2 x\right)+\cos x\times 2\sin x\cos x\right]\sin^2 x-}{\sin^4 x}$$

$$\frac{-\cos x\left(1+\sin^2 x\right)2\sin x\cos x}{\sin^4 x}=$$

$$=-\frac{-\sin^2 x\left(1+\sin^2 x\right)+2\cos^2 x\sin^2 x-}{\sin^3 x}$$

$$\frac{-2\cos^2 x-2\cos^2 x\sin^2 x}{\sin^3 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x\left(1+\sin^2 x\right)+2\cos^2 x}{\sin^3 x}$$

O sinal de f'' depende do sinal de $\sin^3 x$ dado que $\sin^2 x\left(1+\sin^2 x\right)+2\cos^2 x>0, \forall x\in D_f$.

x	$-\pi$		0		π
f''		−		+	
f		∩		∪	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\pi\,,0[$ e voltada para cima em $]0\,,\pi[$. Não tem pontos de inflexão.

Assíntotas não verticais:

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais dado que D_f é um conjunto limitado.

Assíntotas verticais:

f é contínua.

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x)=\lim_{x\to-\pi^+}\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

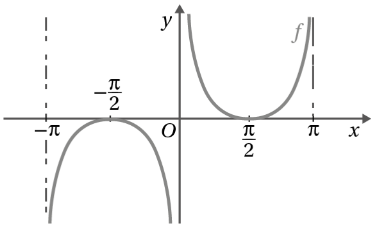
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

As retas de equações $x=-\pi, x=0$ e $x=\pi$ são assíntotas ao gráfico de f.

• **Gráfico:**



47.3. $f(x)=\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}$ em $]-\pi, \pi[$

Monotonia:

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}$$

$f'(x)\le 0, \forall x\in]-\pi, \pi[$. Logo, f é estritamente decrescente em $]-\pi, \pi[$ pelo que não tem extremos.

Concavidades:

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\times 2\tan\frac{x}{2}\times\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=$$

$$=-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\times\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=-\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^3\frac{x}{2}}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=0\wedge 2\cos^3\frac{x}{2}\neq 0\wedge x\in]-\pi, \pi[$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=0\wedge\frac{x}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\pi$		0		π
f''		+	0	–	
f		∪	0	∩	
			P.I.		

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\pi; 0[$ e voltada para baixo em $]0, \pi[$. O ponto de coordenadas (0, 0) é um ponto de inflexão.

Assíntotas não verticais:

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais porque D_f é limitado.

Assíntotas verticais:

f é contínua.

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x)=\lim_{x\to-\pi^+}\left(\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{-\pi}{4}-\lim_{x\to-\pi^+}\tan\frac{x}{2}=$$

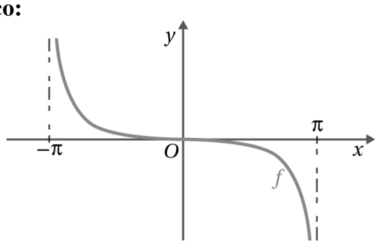
$$=\frac{-\pi}{4}-(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\lim_{x\to\pi^-}\tan\frac{x}{2}=$$

$$=\frac{\pi}{4}=-(+\infty)=-\infty$$

As retas de equações $x=-\pi$ e $x=\pi$ são assíntotas do gráfico de f.

Gráfico:



48.1. Seja T_{AC} o tempo gasto de A a C.

$$T_{AC}=\frac{\overline{AP}}{20}+\frac{\overline{PC}}{10}$$

$$\frac{12}{\overline{PB}}=\tan\theta\Leftrightarrow\overline{PB}=\frac{12}{\tan\theta}$$

$$\overline{AP}=20-\overline{PB}=20-\frac{12}{\tan\theta}$$

$$\frac{12}{\overline{PC}}=\sin\theta\Leftrightarrow\overline{PC}=\frac{12}{\sin\theta}$$

$$\frac{\overline{AP}}{20}=\frac{1}{20}\left(20-\frac{12}{\tan\theta}\right)=1-\frac{3}{5\tan\theta}$$

$$\frac{\overline{PC}}{10}=\frac{1}{10}\times\frac{12}{\sin\theta}=\frac{6}{5\sin\theta}$$

$$T(\theta)=1-\frac{3}{5\tan\theta}+\frac{6}{5\sin\theta}$$

$$T(\theta)=1-\frac{3}{5}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{6}{5\sin\theta}$$

$$T(\theta)=1-\frac{3\cos\theta-6}{5\sin\theta}$$

48.2. $T'(\theta)=-\frac{3}{5}\left(\frac{\cos\theta-2}{\sin\theta}\right)'=$

$$=-\frac{3}{5}\times\frac{-\sin\theta\times\sin\theta-(\cos\theta-2)\cos\theta}{\sin^2\theta}=$$

$$=-\frac{3}{5}\times\frac{-\sin^2\theta-\cos^2\theta+2\cos\theta}{\sin^2\theta}=$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1-2\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{3(1-2\cos\theta)}{5\sin^2\theta}$$

$$T'(\theta)=0\Leftrightarrow 1-2\cos\theta=0\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
T'		–	0	+	
T		↘		↗	

O tempo gasto é mínimo para $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Para $\theta=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AP}=20-\frac{12}{\tan\frac{\pi}{3}}=20-\frac{12}{\sqrt{3}}$

$\left(20-\frac{12}{\sqrt{3}}\right)$ km $\approx$ 13,1 km

49. $d(\alpha)=\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{9,8}$

$$d'(\alpha)=\frac{v_0^2}{9,8}\times 2\cos(2\alpha)\wedge\alpha\in\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$d'(\alpha)=0\Leftrightarrow\cos(2\alpha)=0\wedge 2\alpha\in]0, \pi[\Leftrightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
d'		+	0	–	
d		↗		↘	
			Máx.		

A distância d é máxima para $\alpha=\frac{\pi}{4}$ rad.

50.1. $f(x)=1+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right),\ x\in[0\,,\pi]$

Período fundamental: $P_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Contradomínio:

Para $0\le x\le\pi$

$$\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2\pi+\frac{\pi}{6}\ \Leftrightarrow\ -1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1\le 1+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\le 3$$

$D'_f=[-1\,,3]$

Zeros:

$$f(x)=0\Leftrightarrow 1+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0\ \Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee 2+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee 2x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[0\,,\pi]$, temos $x=\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{5\pi}{6}$.

Minimizantes de *f*:

$$f(x)=-1\Leftrightarrow 1+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[0\,,\pi]$, temos $x=\frac{2\pi}{3}$

Maximizantes de *f*:

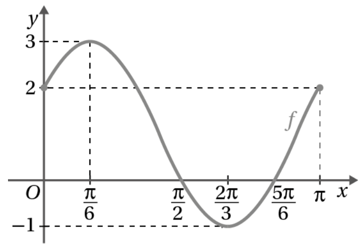
$$f(x)=3\Leftrightarrow 1+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=3\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[0\,,\pi]$, $f(x)=3\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$

Gráfico:



50.2. $f(x)=\cos(2x)+\sqrt{2}$ em $[-\pi\,,\pi]$

Período fundamental: $P_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Contradomínio:

Para $-\pi\le x\le\pi$

$$-2\pi\le 2x\le 2\pi\ \Leftrightarrow\ -1\le\cos(2x)\le 1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{2}-1\le\cos(2x)+\sqrt{2}\le\sqrt{2}+1$$

$D'_f=\left[\sqrt{2}-1\,,\sqrt{2}+1\right]$

Zeros:

f não tem zeros, pois $0\notin D'_f$

$f(0)=f(\pi)=2$

Minimizantes de *f*:

$$f(x)=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\cos(2x)+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos(2x)=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[\pi\,,\pi]$ $f(x)=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{2}$

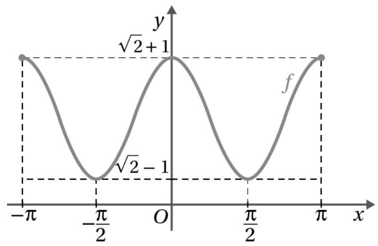
Maximizantes de *f*:

$$f(x)=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow\cos(2x)+\sqrt{2}=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos(2x)=1\Leftrightarrow 2x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[-\pi\,,\pi]$, $f(x)=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow x=-\pi\vee x=0\vee x=\pi$

Gráfico:



50.3. $f(x)=2-4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ em $[-\pi\,,\pi]$

Período fundamental: $P_0=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

Contradomínio:

$$-\pi\le x\le\pi\ \Leftrightarrow\ -\pi-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le\pi-\frac{\pi}{3}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 4-2\le 2-4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 4+2$$

$D'_f=[-2\,,6]$

$f(-\pi)=f(\pi)=4$

Zeros:

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2-4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0\ \Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\vee x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[-\pi\,,\pi]$, $f(x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{2\pi}{3}$

Minimizantes:

$$f(x)=-2 \Leftrightarrow 2-4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[-\pi\ ,\ \pi]$, $f(x)=-2 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

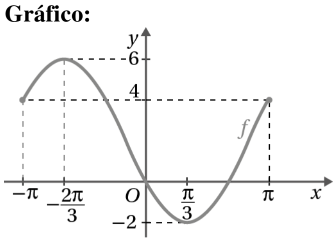
Maximizantes:

$$f(x)=6 \Leftrightarrow 2-4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=6 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[-\pi\ ,\ \pi]$, $f(x)=6 \Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{3}$

Gráfico:



50.4. $f(x)=1-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ em $[-2\pi\ ,\ 2\pi]$

Período fundamental: $P_0=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

Contradomínio:

$$-2\pi < x < 2\pi \Leftrightarrow -\pi \le \frac{x}{2} < \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\pi+\frac{\pi}{4} \le \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} < \pi+\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \le \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 1-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \le 2$$

$D'_f=[0\ ,\ 2]$

Zeros:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[-2\pi\ ,\ 2\pi]$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$

Minimizantes: $x=\frac{\pi}{2}$

Maximizantes:

$$f(x)=2 \Leftrightarrow 1-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow$$

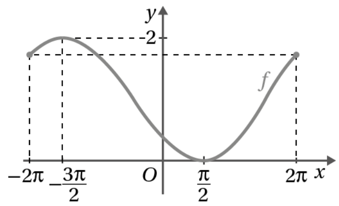
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{2}+4k\pi$$

Em $[-2\pi\ ,\ 2\pi]$, $f(x)=2 \Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{2}$

$$f(-2\pi)=f(2\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}+1\approx 1,7$$

Gráfico:



50.5. $f(x)=1+\tan(2x)$ em $\left]-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right[$

Período fundamental: $P_0=\frac{\pi}{2}$

Contradomínio: $\mathbb{R}$

Zeros:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\tan(2x)=0 \Leftrightarrow \tan(2x)=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

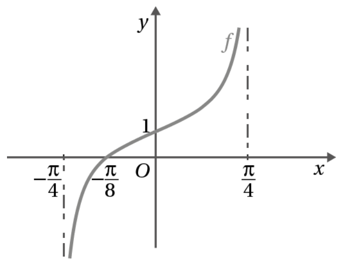
Em $\left]-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right[$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}$

Assíntotas:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}^+}\left[1+\tan(2x)\right]=1+(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\left[1+\tan(2x)\right]=1+(+\infty)=+\infty$$

Gráfico:



51. $x(t)=\sqrt{3}\sin(\pi t)-\cos(\pi t)$

51.1. $x(t)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi t)-\frac{1}{2}\cos(\pi t)\right)=$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin(\pi t)-\cos\frac{\pi}{3}\cos(\pi t)\right)=$$

$$=-2\left(\cos(\pi t)\cos\frac{\pi}{3}-\sin(\pi t)\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=-2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}+\pi\right)=2\cos\left(\pi t+\frac{4\pi}{3}\right)$$

51.2. $D'_x=[-2\ ,\ 2]$

A distância máxima a que o ponto está da origem é 2 m.

51.3. Velocidade: $v(t)=x'(t)=-2\pi\sin\left(\pi t+\frac{4\pi}{3}\right)$

$$a(t)=x''(t)=-2\pi^2\cos\left(\pi t+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$|v(t)|$ é máximo quando $\sin\left(\pi t+\frac{4\pi}{3}\right)=\pm 1$

$$\sin\left(\pi t+\frac{4\pi}{3}\right)=\pm 1 \Leftrightarrow \pi t+\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=-\frac{5}{6}+k,\ k\in\mathbb{Z}$$

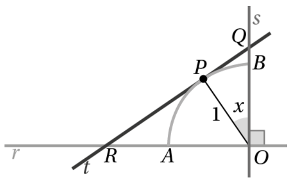
$$a\left(-\frac{5}{6}+k\right)=-2\pi^2\cos\left[\left(-\frac{5}{6}+k\right)\pi+\frac{4\pi}{3}\right]=$$

$$=-2\pi^2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

$$=-2\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}=-2\pi^2\times 0=0$$

A aceleração é de $0\ \text{m/s}^2$.

52.



$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PO}}=\tan x \overset{\overline{PO}=1}{\Leftrightarrow} \overline{PQ}=\tan(x)$$

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PO}}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow \overline{PR}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\overline{QR}=\tan x+\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\ 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$d(x)=\tan x+\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$d'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2(x)}=$$

$$=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=-\frac{\cos(2x)}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$d'(x)=0\Leftrightarrow \cos(2x)=0\wedge \sin^2 x\cos^2 x\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\text{, pois } 2x\in\left]0,\pi\right[$$

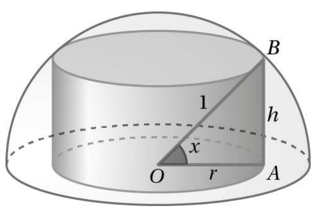
x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
d'		–	0	+	
d		↘	2	↗	
			Mín.		

A distância $\overline{QR}$ é mínima para $x=\frac{\pi}{4}$ rad.

53.1. $V_c=\pi r^2\times h$

$$\frac{r}{1}=\cos x\Leftrightarrow r=\cos x$$

$$\frac{h}{1}=\sin x\Leftrightarrow h=\sin x$$



$$V(x)=\pi\times\cos^2 x\times\sin x$$

$$V(x)=\pi\left(1-\sin^2 x\right)\sin x$$

$$V(x)=\pi\left(\sin x-\sin^3 x\right)$$

53.2. $V'(x)=\pi\left(\cos x-3\sin^2 x\cos x\right)=\pi\left[\cos x\left(1-3\sin^2 x\right)\right]$

$$V'(x)=0\Leftrightarrow\left(\cos x=0\vee 1-3\sin^2 x=0\right)\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{3}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\sqrt{\frac{1}{3}}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{6}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{6}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}=a$$

x	0		a		$\frac{\pi}{2}$
V'		+	0	–	
V		↗		↘	
			Máx.		

O volume é máximo para $x=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$h=\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r^2+h^2=1\Leftrightarrow r^2=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\Leftrightarrow r=\sqrt{1-\frac{1}{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r=\sqrt{\frac{2}{3}}\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

54.1. $f(x)=4x^2+\cos(2x)$; $f'(x)=8x-2\sin(2x)$

$$f'(0)=8\times 0-2\times\sin(0)=0$$

Logo, a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa nula tem declive nulo, ou seja, é paralela ao eixo *Ox*.

54.2. $f''(x)=8-4\cos(2x)$. Para $x\in\mathbb{R}$:

$$\cos(2x)\leq 1\Leftrightarrow -4\cos(2x)\geq -4\Leftrightarrow 8-4\cos(2x)\geq 4$$

Logo, $f''(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima em todo o domínio.

Como $f''(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, então *f* ' é estritamente crescente em ℝ.

54.3. Sabemos que *f* '(0) = 0 e *f* ' é estritamente crescente em ℝ.

Então, $f'(x)<0,\ \forall x\in\left]-\infty,0\right[$ e $f'(x)>0,\ \forall x\in\left]0,+\infty\right[$ pelo que *f* é estritamente decrescente em $\left]-\infty,0\right]$ e estritamente crescente em $\left[0,+\infty\right[$.

Logo, $f(0)=4\times 0^2+\cos 0=1$ é o único mínimo de *f*.

55. $f(x)=6x+6\sin(2x),\ x\in\left[0,\pi\right]$

55.1. As abcissas de *A* e *B* são zeros de *f* '.

$$f'(x)=6+12\cos(2x)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6+12\cos(2x)=0\Leftrightarrow\cos(2x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}\vee 2x=\frac{4\pi}{3}\Leftrightarrow\ (0\leq 2x\leq 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{2\pi}{3}$$

$\frac{\pi}{3}$ é a abcissa de *A*.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=6\times\frac{\pi}{3}+6\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\pi+6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\;=2\pi+3\sqrt{3}$$

$$A\left(\frac{\pi}{3},\,2\pi+3\sqrt{3}\right)$$

$\frac{2\pi}{3}$ é a abcissa de *B*.

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=6\times\frac{2\pi}{3}+6\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}\right)=4\pi+6\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=4\pi-3\sqrt{3}$$

$$B\left(\frac{2\pi}{3},\,4\pi-3\sqrt{3}\right)$$

55.2. $f''(x)=-12\times 2\sin(2x)=-24\sin(2x)$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \sin(2x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=0\vee 2x=\pi\vee 2x=2\pi\Leftrightarrow \qquad (0\le 2x\le 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{\pi}{2}\vee x=\pi$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f''	0	–	0	+	0
f		$\cap$	3π	$\cup$	
			P.I.		

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ e voltada para cima em $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$. O ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2},3\pi\right)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de *f*.

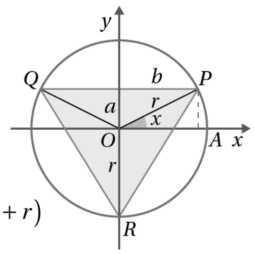
Seja $t: y=mx+b$ a reta tangente neste ponto.

$$m=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=6+12\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=6-12=-6$$

$$3\pi=-6\times\frac{\pi}{2}+b\Leftrightarrow b=3\pi+3\pi\Leftrightarrow b=6\pi$$

$$t: y=-6x+6\pi$$

56. $\frac{a}{r}=\sin x\Leftrightarrow a=r\sin x$



$\frac{b}{r}=\cos x\Leftrightarrow b=r\cos x$

$$A_{[PQR]}=\frac{2b\times(a+r)}{2}=r\cos x(r\sin x+r)$$

$$f(x)=r^2(\cos x\sin x+\cos x)$$

$$f'(x)=r^2(-\sin x\sin x+\cos x\cos x-\sin x)=$$

$$=r^2(\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x)=$$

$$=r^2(1-\sin^2 x-\sin^2 x-\sin x)=$$

$$=r^2(-2\sin^2 x-\sin x+1)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -2\sin^2 x-\sin x+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-4}\Leftrightarrow \sin x=\frac{1\pm 3}{-4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\vee \sin x=-1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

$$\left|\; x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right.$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		+	0	–	
f		↗		↘	

A área é máxima para $x=\frac{\pi}{6}$.

Para este valor de x, $Q\hat{O}R=R\hat{O}P=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$.

Logo, o triângulo $[PQR]$ é equilátero para $x=\frac{\pi}{6}$.

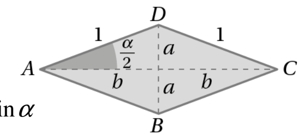
Avaliação

Pág. 110

1. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x}=\frac{\sin(2\pi)}{\pi}=\frac{0}{\pi}=0$

Resposta: (A)

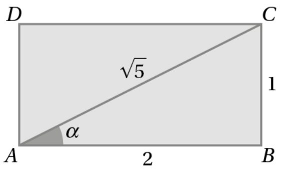
2. $a=\sin\frac{\alpha}{2}$; $b=\cos\frac{\alpha}{2}$



$$A=\frac{2a\times 2b}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$$

Resposta: (B)

3. $\overline{AB}=2$; $\overline{BC}=1$; $\overline{AC}=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$



$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\,;\,\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$
- $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$
- $\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha)=\cos^2\alpha$

Resposta: (B)

4. $P_0=5\pi-\pi=4\pi$

$\frac{2\pi}{b}=4\pi\Leftrightarrow\frac{2}{b}=4\Leftrightarrow 4b=2\Rightarrow b=\frac{1}{2}$ ((C) ou (D))

$d-a\le f(x)\le d+a$

O valor mínimo de *f*, $d-a$, é positivo.

Em (C), $d-a=3-4=-1<0$.

Em (D), $d-a=4-3=1>0$.

Resposta: (D)

5. $f''(x)=2+\cos x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Logo, *f* ' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$

Como $f'(0)=0$, $f'(x)<0$ para $x<0$ e $f'(x)>0$ para $x>0$.

x		0	
f'	–	0	+
f	↘		↗
		Mín.	

Resposta: (D)

6. $f'(x)=1+\cos x$

Se f é ímpar e $0\in D_f$, então $f(0)=0$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$1+\cos 0=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$

Resposta: (B)

Pág. 111

7. $f(x)=\cos(ax+b),\ a\in\mathbb{R}$ e $b\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Se a reta $y=-x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ é tangente ao gráfico de *f* no ponto $x=0$ temos:

$$\begin{cases} f'(0)=-1 \\ f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$f'(x)=-a\sin(ax+b)$

$$\begin{cases} f'(0)=-1 \\ f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -a\sin b=-1 \\ \cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -a\sin\frac{\pi}{6}=-1 \\ b=\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} -a\times\frac{1}{2}=-1 \\ b=\frac{\pi}{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$a=2$ e $b=\frac{\pi}{6}$

8. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{se } x\le 0\\ -x^2+ax+b & \text{se } x>0\end{cases}$

8.1. Se *f* é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, então é contínua e diferenciável em 0.

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\sin 0=f(0)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2++ax+b\right)=b$

Logo, $b=0$ e $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{se } x\le 0\\ -x^2+ax & \text{se } x>0\end{cases}$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+ax-0}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(-x+a)}{x}=a$$

Logo, $a=1$.

Portanto, $a=1$ e $b=0$.

8.2.

$f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{se } x\le 0\\ -x^2+x & \text{se } x>0\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}\cos x & \text{se } x<0\\ -2x+1 & \text{se } x>0\end{cases}$

$f''(x)=\begin{cases}-\sin x & \text{se } x<0\\ -2 & \text{se } x>0\end{cases}$

Se $x\in\left]-\pi,0\right[$, $-\sin x>0$.

Se $x\in\left]-\pi,0\right[$, $f''(x)>0$.

Se $x>0$, $f''(x)=-2<0$.

Como *f* é contínua em $x=0$ e a segunda derivada muda de sinal neste ponto, o ponto do gráfico com abcissa 0 é um ponto de inflexão.

9. $f(x)=\sin(2x)+\cos(2x)$

9.1. $$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2h)-\sin(2h)-1}{h}=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(2h)}{h}=$$

$$=-2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos(2h))(1+\cos(2h))}{h(1+\cos(2h))}=$$

$$=-2\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(2h)}{h(1+\cos(2h))}=$$

$$=-2\times 1-2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{2h}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(2h)}{h(1+\cos(2h))}=$$

$y=2h$
Se $h\to 0,\ y\to 0$

$$=-2-2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\times\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2 y}{y(1+\cos y)}=$$

$$=-2-2\times 1\times 0=-2$$

9.2. $f'(x)=2\cos(2x)-2\sin(2x)=$

$$=2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\right)=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{2}\left(\cos(2x)\cos\frac{\pi}{4}-\sin(2x)\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

9.3. $r: y=mx+b$; $m=f'(0)=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

$f(0)=\sin 0+\cos 0=1$

Como o ponto de tangência é (0, 1), temos $b=1$, logo $r: y=2x+1$.

9.4. $f'(x)=2\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\vee 2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=2k\pi\vee 2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi\vee x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=2\Leftrightarrow x=0\vee x=-\frac{\pi}{4}$

Logo, o ponto de abcissa $-\frac{\pi}{4}$ é o único em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta *r*.

10. $2\sin(2x)\cos x = 1 - 2\cos(2x)\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin(2x)\cos x + 2\cos x(2x)\sin x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left[\sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x\right] = 1 \Leftrightarrow$

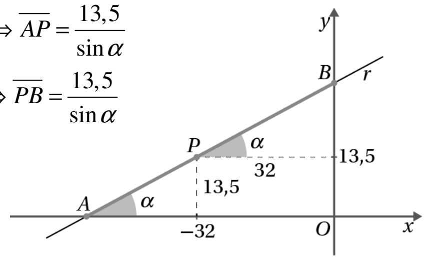
$\Leftrightarrow 2\sin(3x) = 1 \Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

11.1. $\frac{13,5}{\overline{AP}} = \sin\alpha \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{13,5}{\sin\alpha}$

$\frac{13,5}{\overline{PB}} = \sin\alpha \Leftrightarrow \overline{PB} = \frac{13,5}{\sin\alpha}$



$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} = \frac{13,5}{\sin\alpha} + \frac{32}{\cos\alpha}$

$d(\alpha) = \frac{13,5}{\sin\alpha} + \frac{32}{\cos\alpha}$

11.2. $d'(\alpha) = -\frac{13,5\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{32\sin\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= \frac{32\sin^3\alpha - 13,5\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha},\ \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$d'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 32\sin^3\alpha - 13,5\cos^3\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 32\sin^3\alpha = 13,5\cos^3\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{13,5}{32} \Leftrightarrow \quad |\cos\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow \tan^3\alpha = \frac{27}{64} \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = \arctan\frac{3}{4}$

d é uma função diferenciável.

Como $\lim_{\alpha\to 0^+} d(\alpha) = \lim_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^-} d(\alpha) = +\infty$, no único ponto onde

$d'(\alpha) = 0$, $d(\alpha)$ é mínima. Sendo $a = \arctan\frac{3}{4}$:

α	0		a		$\frac{\pi}{2}$
d'		–	0	+	
d	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Mín.

d é mínima para $\alpha = \arctan\frac{3}{4}$.

11.3. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$; $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \overset{\cos\alpha>0}{\Leftrightarrow} \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

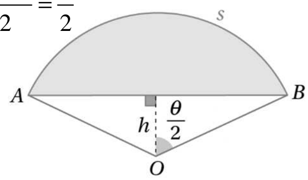
$\frac{3}{4} = \frac{\sin\alpha}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$

Para $\alpha = \arctan\frac{3}{4}$, $d(\alpha) = \frac{13,5}{\frac{3}{5}} + \frac{32}{\frac{4}{5}} = 22,5 + 40 = 62,5$

A distância mínima entre *A* e *B* é igual a 62,5 u.c..

12. *S* = Área do setor circular $- A_{[OBA]}$

Área do setor circular = $\frac{\theta \times r^2}{2} = \frac{\theta \times 1^2}{2} = \frac{\theta}{2}$



$a = \sin\frac{\theta}{2}$

$h = \cos\frac{\theta}{2}$

$A_{[OBA]} = \frac{20 \times h}{2} = \sin\frac{\theta}{2} \times \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2}$

$S(\theta) = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta}{2} = \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta)$

$S'(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \rightarrow S'(\theta) > 0, \forall \theta \in \left]0, \pi\right]$

Logo, *S* é estritamente crescente em $\left]0, \pi\right]$ pelo que *S* é máxima quando $\theta = \pi$.

Avaliação global

Pág. 112

1. $f(x) = \cos x$; $f'(x) = -\sin x$; $f'(x) \in [-1, 1], \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, qualquer reta tangente ao gráfico de *f* tem declive *m* tal que $-1 \le m \le 1$.

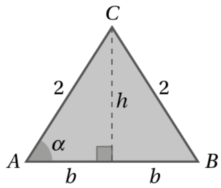
Resposta: (D)

2. $g(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x$; $g'(x) = x - \cos x$; $g''(x) = 1 + \sin x$

Como $g''(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o gráfico de *g* não tem pontos de inflexão.

Resposta: (A)

3. $\frac{b}{2} = \cos\alpha \Leftrightarrow b = 2\cos\alpha$



$\frac{h}{2} = \sin\alpha \Leftrightarrow h = 2\sin\alpha$

$A_{[ABC]} = \frac{2b \times h}{2} = b \times h = 2\cos\alpha \times 2\sin\alpha =$

$= 2(2\sin\alpha\cos\alpha) = 2\sin(2\alpha)$

Resposta: (A)

4. $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos(2x)$

$P_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Resposta: (A)

5. $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$

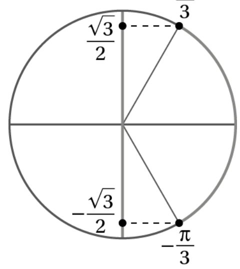
$-\frac{\pi}{3} \le 2x \le \frac{\pi}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin(2x) \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\sqrt{3} \le 2\sin(2x) \le \sqrt{3}$

$0 \le \sqrt{3} + 2\sin(2x) \le 2\sqrt{3}$

$D'_f = \left[0, 2\sqrt{3}\right]$



Resposta: (A)

Pág. 113

6. $f(x)=\begin{cases}(k+1)\cos x & \text{se } x\le 0\\ \dfrac{x+\tan\frac{x}{2}}{x} & \text{se } 0<x<\pi\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[(k+1)\cos x\right]=(k+1)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\tan\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{x}=$

$=1+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\cos\frac{x}{2}}=$

$=1+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\dfrac{1}{1}=$

$y=\dfrac{x}{2}$
Se $x\to 0^+$, $y\to 0^+$

$=1+\dfrac{1}{2}\times\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}\times 1=1+\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{3}{2}$

$k+1=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}$

Resposta: (B)

7. $f(x)=a\tan(bx+c)+d$

Período: $\dfrac{\pi}{b}=3\pi-\pi\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{b}=2\pi\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{2}$ ((C) ou (D))

As ordenadas dos pontos de inflexão são negativas. Logo, $d<0$.

Resposta: (D)

8. $f'(0)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

Seja $y=mx+b$ a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0.

$m=f'(0)=1$; $b=f(0)=0$

Logo, a reta de equação $y=x$, ou seja, a bissetriz dos quadrantes ímpares é tangente ao gráfico de *f*.

Resposta: (C)

Pág. 114

9. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sin x} & \text{se } -\pi<x<0\\ k & \text{se } x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$

9.1. Se *f* é contínua, então é contínua em $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{0}{2}=0$

$f(0)=k$

Se *f* é contínua, então $k=0$.

9.2. *f* é contínua em $D_f=\left]-\pi,+\infty\right[$.

$\lim\limits_{x\to -\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -\pi^+}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{1}{y}\sin y\right)$

$y=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{y}$
Se $x\to+\infty$, $y\to 0$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$

As retas de equações $x=-\pi$ e $y=1$ são as únicas assíntotas ao gráfico de *f*.

9.3. $f(x)=-1\wedge x\in\left]-\pi,0\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=-1\wedge x\in\left]-\pi,0\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\cos x=-\sin x\wedge x\in\left]-\pi,0\right[\Leftrightarrow$ $(\sin x\ne 0)$

$\Leftrightarrow\cos x-\sin x=1\wedge x\in\left]-\pi,0\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\wedge x\in\left]-\pi,0\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\wedge x\in\left]-\pi,0\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\wedge x\in\left]-\pi,0\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\vee x+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge x\in\left]-\pi,0\right[$

$\Leftrightarrow x=2k\pi\vee x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge x\in\left]-\pi,0\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}$

$S=\left\{-\dfrac{\pi}{2}\right\}$

9.4. Para $x<0$:

$f'(x)=\dfrac{(1-\cos x)'\sin x-(1-\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}=$

$=\dfrac{\sin x\sin x-(1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=$

$=\dfrac{\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

$t: y=mx+b$

$P\left(-\dfrac{\pi}{2},-1\right)$

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{1-0}{-1}=-1$

$m=f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{1}=1$

$y=x+b$

$-1=-\dfrac{\pi}{2}+b\Leftrightarrow b=\dfrac{\pi}{2}-1$

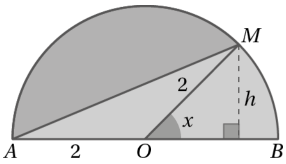
$t: y=x+\dfrac{\pi}{2}-1$

10.1. $f(x) = A_{[AOM]} +$ Área do setor BOM

$$A_{[AOM]} = \frac{\overline{AO} \times h}{2} = \frac{2 \times h}{2} = h$$

$$\frac{h}{2} = \sin x \Leftrightarrow h = 2\sin x$$

$$A_{[AOM]} = 2\sin x$$



Área do setor $BOM = \frac{x \times 2^2}{2} = 2x$

$$f(x) = 2x + 2\sin x$$

10.2. Área do semicírculo $= \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi$

Trata-se de provar que existe um e um só valor de x tal que $f(x) = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

- f é contínua em $[0, \pi]$ por ser a soma de funções contínuas neste intervalo.

  $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} < \pi$$

  porque $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$.

  $$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} > \pi$$

  porque $\sqrt{3} > \frac{\pi}{3}$.

  $$\begin{cases} f \text{ é contínua em } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) < \pi < f\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

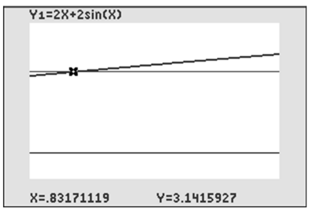
  Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy:

  $$\exists x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[: f(x) = \pi$$

- $f'(x) = 2 + 2\cos x > 0, \forall x \in [0, \pi[\Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[0, \pi]$.

  Logo, f é injetiva pelo que o valor de x tal que $f(x) = \pi$, cuja existência se provou, é único.

10.3. Utilizando a calculadora gráfica determinou-se, no intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$, a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções $y_1 = f(x)$ e $y_2 = \pi$.



$x \approx 0{,}83$

Pág. 115

11. $f(x) = 4\cos x - \cos(2x),\ D_f = [0, 2\pi]$

11.1. $f'(x) = -4\sin x + 2\sin(2x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4\sin x + 2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x - 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 4\sin x(1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 1$$

No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$$

x	0		π		2π
f'	0	−	0	+	0
f	3	↘	−5	↗	3
	Máx.		Mín.		Máx.

f é estritamente decrescente em $[0, \pi]$ e estritamente crescente em $[\pi, 2\pi]$.

f tem um máximo relativo (e absoluto) igual a 3 para $x = 0$ e $x = 2\pi$ e um mínimo relativo (e absoluto) igual a -5 para $x = \pi$.

11.2. $f''(x) = -4\cos x + 4\cos(2x)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(2x) = 4\cos x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \vee 2x = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}$$

Em $[0, 2\pi]$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = 2\pi$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f''	0	−	0	+	0	−	0
f		∩	$-\frac{3}{2}$	∪	$-\frac{3}{2}$	∩	
			P.I.		P.I.		

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$ e em $\left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ e voltada para cima em $\left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[$.

Os pontos de coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ e $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ são pontos de inflexão.

11.3.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f''	0	−	0	+	0	−	0
f'	0	↘	$-3\sqrt{3}$	↗	$3\sqrt{3}$	↘	0
			Mín.		Máx.		

O mínimo absoluto de f' é $-3\sqrt{3}$ para $x = \frac{2\pi}{3}$.

O máximo absoluto de f' é $3\sqrt{3}$ para $x = \frac{4\pi}{3}$.

Portanto:

Reta r: ponto de tangência: $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{3}{2}\right)$; declive: $3\sqrt{3}$

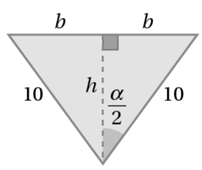
Reta s: ponto de tangência: $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{3}{2}\right)$; declive: $-3\sqrt{3}$

12. Pretende-se determinar α de modo a maximizar a quantidade de água que a caleira pode comportar.

Assim, determina-se o volume da caleira:

$$\frac{b}{10} = \sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow b = 10\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{h}{10} = \cos\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow h = 10\cos\frac{\alpha}{2}$$



Área da base $= \dfrac{2\times b\times h}{2} = b\times h = 10\sin\dfrac{\alpha}{2}\times 10\cos\dfrac{\alpha}{2} =$

$= 50\times 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 50\sin\alpha$

$V(\alpha) = 50\sin(\alpha)\times 60$, com $0<\alpha<\pi$

$V(\alpha) = 3000\sin(\alpha)$

$V'(\alpha) = 3000\cos\alpha$

$V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \wedge \alpha\in\,]0\,,\pi[\, \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

α	0		$\frac{\pi}{2}$		π
V'		+	0	–	
V		↗		↘	
			Máx.		

O volume é máximo para $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

13. $x(t) = 10\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) + 4$

13.1. Amplitude: 10 cm

13.2. $T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 2\pi\times\dfrac{5}{\pi} = 10$

$T = 10$ s

$f = \dfrac{1}{10}$

13.3. $x(t) = 9 \Leftrightarrow 10\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) + 4 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{3} + 2k \vee \dfrac{t}{5} + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{1}{3} + 2k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{5} = -\dfrac{1}{15} + 2k \vee \dfrac{t}{5} = -\dfrac{11}{15} + 2k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3} + 10k \vee t = -\dfrac{11}{3} + 10k,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $t\in[0\,,10]$, temos $t = \dfrac{19}{3}$ s $\vee\ t = \dfrac{29}{3}$ s .

13.4. $4 - 10 \le x(t) \le 4 + 10 \rightarrow D'_x = [6\,,14]$

$x(t) = 14 \Leftrightarrow 10\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) + 4 = 14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5} = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t + 2 = 10k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -2 + 10k,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $t\in[0\,,10]$, temos: $x(t) = 14 \Leftrightarrow t = 8$ s

13.5. $x(t) = 10\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) + 4$

$x'(t) = -10\dfrac{\pi}{5}\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) = -2\pi\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right)$

$x''(t) = -2\pi\times\dfrac{\pi}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) = -\dfrac{2\pi^2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right)$

a) $0 \le t \le 10 \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{5} \le \dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5} \le 2\pi + \dfrac{2\pi}{5}$

$-1 \le \sin\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\pi \le 2\pi\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) \le 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 0 \le \left|-2\pi\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right)\right| \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le |x'(t)| \le 2\pi \Leftrightarrow$

$|x'(t)| = 2\pi \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) = -1 \vee \sin\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\pi}{2}2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{5} + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{1}{2} + 2k \vee \dfrac{t}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2} + 2k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2t + 4 = -5 + 20k \vee 2t + 4 = 5 + 20k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{9}{2} + 10k \vee t = \dfrac{1}{2} + 10k,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $t\in[0\,,10]$, $t = 5{,}5 \vee t = 0{,}5$

b) $0 \le t \le 10 \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{5} \le \dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5} \le 2\pi + \dfrac{2\pi}{5}$

$\Leftrightarrow -1 \le \cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2\pi^2}{5} \le -\dfrac{2\pi^2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) \le \dfrac{2\pi^2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le \left|-\dfrac{2\pi^2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right)\right| \le \dfrac{2\pi^2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le |x''(t)| \le \dfrac{2\pi^2}{5} \Leftrightarrow$

$|x''(t)| = \dfrac{2\pi^2}{5} \Leftrightarrow \left|-\dfrac{2\pi^2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right)\right| = \dfrac{2\pi^2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2\pi^2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) = -\dfrac{2\pi^2}{5} \vee$

$\vee -\dfrac{2\pi^2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{2\pi^2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + 2\dfrac{\pi}{5}\right) = 1 \vee \cos\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5}\right) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5} = 2k\pi \vee \dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{2\pi}{5} = \pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{5} + \dfrac{2}{5} = 2k \vee \dfrac{t}{5} + \dfrac{2}{5} = 1 + 2k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t + 2 = 10k \vee t + 2 = 5 + 10k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t = -2 + 10k \vee t = 3 + 10k,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $t\in[0\,,10]$, $t = 8 \vee t = 3$