

$$1.1. \sum_{i=1}^4 3^{i-2} = 3^{1-2} + 3^{2-2} + 3^{3-2} + 3^{4-2} = 3^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + 3 + 9 =$$

$$= \frac{1}{3} + 13 = \frac{40}{3}$$

$$1.2. \sum_{i=3}^5 (2i-1) = (2 \times 3 - 1) + (2 \times 4 - 1) + (2 \times 5 - 1) +$$

$$+ (2 \times 6 - 1) + (2 \times 7 - 1) + (2 \times 8 - 1) =$$

$$= 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 60$$

$$2.1. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{i=1}^5 (2i-1)$$

$$2.2. 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = \sum_{i=1}^5 3i$$

$$2.3. 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100} = \sum_{i=2}^{100} 2^i$$

$$3. \sum_{i=1}^n x_i = A$$

$$\sum_{i=1}^n (2x_i - 2) = \sum_{i=1}^n 2x_i - \sum_{i=1}^n 2 =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n 2 = 2A - 2n$$

$$4. \sum_{i=1}^5 8 = x^2 - 18x \Leftrightarrow 5 \times 8 = x^2 - 18x \Leftrightarrow x^2 - 18x - 40 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 + 160}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{18 \pm 22}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{18+22}{2} \vee x = \frac{18-22}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 20 \vee x = -2$$

$$S = \{-2, 20\}$$

$$5. \underline{x} = (175, 180, 162, 174, 174)$$

$$6.1. \underline{x} = (-1, 0, 0, 2, 2, 3, 3)$$

$$6.2. x_{(3)} = 0 \text{ e } x_3 = 2$$

$$7. \underline{y} = (1, 2, 2, 3, 3, 3)$$

$$8.1. \bar{x} = \frac{2+3+5+8}{4} = 4,5$$

$$8.2. \bar{y} = \frac{2+0+(-1)+1+3}{5} = 1$$

$$8.3. \bar{z} = \frac{4 \times 2 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 6}{10} = 3,6$$

$$9. \bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2,5$$

$$\bar{y} = \frac{5+6+7+8}{4} = 6,5$$

$$\bar{z} = \frac{6+8+10+12}{4} = 9$$

$$9 = 2,5 + 6,5 \Leftrightarrow 9 = 9$$

$$10. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{3+6+9+12}{4} = 7,5$$

$$\underline{z} = 4\underline{x} + \underline{y}; \bar{z} = 4\bar{x} + \bar{y}$$

$$\bar{z} = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 7,5 = 5,5$$

$$11. \sum_{i=1}^5 d_i = 0$$

$$0 + (-1) + 4 + d_4 + 6 = 0 \Leftrightarrow d_4 = -9$$

$$12.1. \sum_{i=1}^5 d_i = 0$$

$$1 + 5 + (-1) + 0 + d_5 = 0 \Leftrightarrow d_5 = -5$$

12.2. Cálculo da média:

$$d_2 = x_2 - \bar{x}$$

$$5 = 3 - \bar{x}$$

$$\bar{x} = -2$$

Cálculo de x_1 :

$$d_1 = x_1 - \bar{x}$$

$$1 = x_1 + 2 \Leftrightarrow x_1 = -1$$

Cálculo de x_3 :

$$d_3 = x_3 - \bar{x}$$

$$-1 = x_3 + 2 \Leftrightarrow x_3 = -3$$

Cálculo de x_4 :

$$d_4 = x_4 - \bar{x}$$

$$0 = x_4 + 2 \Leftrightarrow x_4 = -2$$

Cálculo de x_5 :

$$d_5 = x_5 - \bar{x}$$

$$-5 = x_5 + 2 \Leftrightarrow x_5 = -7$$

Logo, $\underline{x} = (-1, 3, -3, -2, -7)$

$$12.3. SS_x = 1^2 + 5^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-5)^2 =$$

$$= 1 + 25 + 1 + 25 = 52$$

$$13. SS_x = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2$$

$$20 = 28 - n \times 1^2$$

$$-8 = -n \Leftrightarrow n = 8$$

A dimensão da amostra é 8.

14.1. $\underline{x} = (2, 3, 4, 5)$

$$\underline{y} = (10, 15, 20, 25)$$

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+5}{4} = \frac{14}{4} = 3,5$$

$$\bar{y} = \frac{10+15+20+25}{4} = \frac{70}{4} = 17,5$$

$$17,5 = 5 \times 3,5$$

14.2. $SS_x = (2-3,5)^2 + (3-3,5)^2 + (4-3,5)^2 + (5-3,5)^2 = 5$

$$SS_y = (10-17,5)^2 + (15-17,5)^2 + (20-17,5)^2 + (25-17,5)^2 = 125$$

$$SS_y = 25 \times SS_x$$

15.1. $\underline{x} = (1, 2, 0, 3)$

$$\underline{y} = (5, 8, 2, 11)$$

$$\underline{z} = (3 \times 1 + 2, 3 \times 2 + 2, 3 \times 0 + 2, 3 \times 3 + 2)$$

Logo, $\bar{y} = 3\bar{x} + 2$.

15.2. $\bar{x} = \frac{1+2+0+3}{4} = 1,5$

$$\bar{y} = \frac{5+8+2+11}{4} = 6,5$$

$$SS_x = (1-1,5)^2 + (2-1,5)^2 + (0-1,5)^2 + (3-1,5)^2 = 5$$

$$SS_y = (5-6,5)^2 + (8-6,5)^2 + (2-6,5)^2 + (11-6,5)^2 = 45$$

$$45 = 9 \times 5$$

$$SS_y = 9 \times SS_x$$

Pág. 133

16.1. $\underline{x} = (1, 2, 0, 3)$

$$\bar{x} = \frac{1+2+0+3}{4} = 1,5$$

16.2. $SS_x = (1-1,5)^2 + (2-1,5)^2 + (0-1,5)^2 + (3-1,5)^2 = 5$

16.3. $s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{5}{3}$

16.4. $s_x = \sqrt{\frac{5}{3}}$

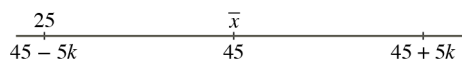
17.1. $\bar{y} = 2\bar{x} + 3$

Cmo $\bar{x} = 6$, então $\bar{y} = 2 \times 6 + 3 = 15$

17.2. $s_y^2 = a^2 \times s_x^2 \Leftrightarrow s_y^2 = 2^2 \times 1,5^2 \Leftrightarrow s_y^2 = 9$

17.3. $s_y = |a|s_x \Leftrightarrow s_y = 2 \times 1,5 = 3$

18. Esquema:



$$45 - 5k = 25 \Leftrightarrow k = 4$$

Sabemos que a percentagem anual em que os valores têm desvio em relação à média superior a k desvio-padrão é inferior a $\frac{1}{k^2}$.

Seja r a percentagem:

$$r < \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \approx 6,25\%$$

$$2016 - 1997 + 1 = 20$$

No máximo, em 6,25% dos 20 anos, a produção de vinho foi inferior a 25 pipas.

Pág. 134

19.1. a) $P_{25} = ?$

$$\frac{25 \times 20}{100} = \frac{500}{100} = 5 \text{ (inteiro)} \Rightarrow P_{25} = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{25} = \frac{56 + 57}{2} = 56,5$$

b) $P_{56} = ?$

$$\frac{56 \times 20}{100} = \frac{1120}{100} = 11,2 \text{ (não é inteiro)}$$

Logo, $P_{56} = x_{(12)}$ (parte inteira de 11,2 + 1)

$$x_{(12)} = 68$$

$$P_{56} = 68$$

19.2. Pretende-se determina P_{70} ($100 - 30 = 70$).

$$P_{70} = \frac{70 \times 20}{100} = 14 \text{ (inteiro)}$$

$$P_{70} = \frac{x_{(14)} + x_{(15)}}{2} \Leftrightarrow P_{70} = \frac{69 + 69}{2} = 69$$

O peso menor é 69 kg.

19.3. $x_{(10)} = 66$

Será que existe k tal que $P_k = 66$?

É necessário que $\frac{20k}{100}$ seja não inteiro e que

$$\left[\frac{20k}{100} \right] + 1 = 10$$

$$9 < \frac{20k}{100} < 10 \Leftrightarrow 900 < 20k < 1000 \Leftrightarrow 45 < k < 50$$

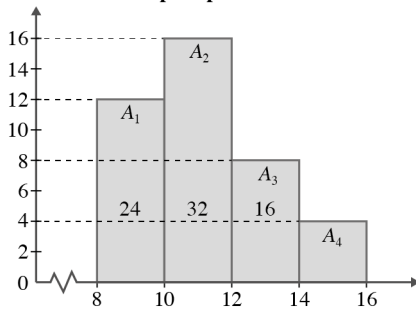
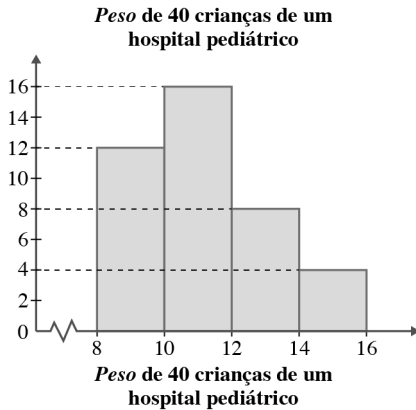
Logo, o *peso* com 66 kg corresponde aos percentis

$$P_{46}, P_{47}, P_{48} \text{ e } P_{49} .$$

20.1.

Classe	n_i
[8, 10[12
[10, 12[16
[12, 14[8
[14, 16[4
Total	40

20.2.



- $n = 40$
- $A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 24 + 32 + 16 + 8 = 80$

$$nh = 40 \times 2 = 80$$

$$P_{20} = ?$$

Pretende-se encontrar o ponto x tal que a altura do histograma desde o limite inferior ao primeiro intervalo de classe até ao ponto x seja $\frac{knh}{100}$, com $nh = A_i$ do histograma e P_k seja o ponto para o qual a área acumulada é $k\%$.

$$P_{20} = ?$$

$$x = \frac{20 \times 80}{100} = 16, \text{ pelo que a área acumulada até ao}$$

percentil 10 é 16.

Essa área é atingida no 1.º retângulo. $P_{20} \in [8, 10[$

$$(P_{20} - 8) \times 12 = 16 \Leftrightarrow$$

$$P_{20} = \frac{16}{12} + 8 \Leftrightarrow P_{20} \approx 9,3$$

$$P_{45} = ?$$

$$\frac{45 \times 80}{100} = 36$$

$$P_{45} \in [10, 12[$$

$$(P_{45} - 10) \times 16 + 24 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{45} = \frac{12}{16} + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{45} = 10,75$$

$$P_{75} = ?$$

$$\frac{75 \times 80}{100} = 60$$

$$P_{75} \in [12, 14[$$

$$(P_{75} - 12) \times 8 + 32 + 24 = 60$$

$$P_{75} = \frac{4}{8} + 12$$

$$P_{75} = 12,5$$

20.3. $11,3 \in P_k, P_k = ?$

$$11,3 \in [10, 12[$$

$$(11,3 - 10) \times 16 = 20,8$$

$$A_1 + 20,8 = 24 + 20,8 = 44,8$$

$$\frac{knh}{100} = 44,8 \Leftrightarrow k = \frac{44,8 \times 100}{80} \Leftrightarrow k = 56$$

$$P_k = P_{56}$$

O *peso* do João pertence ao percentil 56.

20.4. $P_{80} = ?$

$$x = \frac{80 \times 80}{100} = 64$$

$$64 \in [12, 14[$$

$$(P_{80} - 12) \times 8 + 32 + 24 = 64 \Leftrightarrow P_{80} = \frac{8}{8} + 12 \Leftrightarrow P_{80} = 13$$

$$P_{80} = 13 \in [12, 14[\text{ (Área 3)}$$

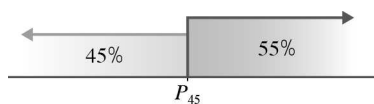
Quantas crianças têm *peso* entre [12, 13[?

Verifica-se na tabela que são três.

Nas duas primeiras classes estão 12 + 16.

Logo, há 12 + 16 + 3 = 31 crianças com *peso* inferior ao percentil 80.

20.5.



$$P_{45} = 10,75 \text{ (já calculado em 20.3.)}$$

Qual é o valor de $[10, 12[$ que é o maior valor inferior a 10,75?

Analisando os dados, tal valor é 10,7 kg.

Pág. 135

21. $(x, y) = ((1, 2), (0, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 1))$

22. Situação A :

Variável explicativa: meses do ano

Variável resposta: número de chinelos de praia vendidos

Situação B :

Variável explicativa: percentagem de empregabilidade

Variável resposta: número de estudantes que se inscrevem no curso

23. $(x, y) = ((1, 8), (1,5 ; 14), (2, 10), (2, 12), (2,5 ; 14), (3, 16), (3, 18), (3,5 ; 16), (4, 14), (4, 18))$

24. $\bar{x} = 3, \bar{y} = 1$ e $\sum_{i=1}^n e_i = 0$

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0 \Leftrightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} \Leftrightarrow b = 1 - 3a$$

25.1. a) $\bar{x} = \frac{0+2+1}{3} = 1$

b) $\bar{y} = \frac{1+3+5}{3} = 3$

c) $SS_x = (0-1)^2 + (2-1)^2 + (1-1)^2 = 2$

d) $a = \frac{0 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 5 - 3 \times 1 \times 3}{2} = 1$

e) $b = \bar{y} - a\bar{x}$

$$b = 3 - 1 \times 1 = 2$$

25.2. $y = ax + b$

$$y = 1 \times x + 2$$

$$y = x + 2$$

26.1. $\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2,5$

26.2. $\bar{y} = \frac{1+2,5+3+3,5}{4} = 2,5$

26.3. $SS_x = (1-2,5)^2 + (2-2,5)^2 + (3-2,5)^2 + (4-2,5)^2 = 5$

26.4. $SS_y = (1-2,5)^2 + (2,5-2,5)^2 + (3-2,5)^2 + (3,5-2,5)^2 = 3,5$

26.5. $a = \frac{1 \times 1 + 2 \times 2,5 + 3 \times 3 + 4 \times 3,5 - 4 \times 2,5 \times 2,5}{5} = \frac{4}{5}$

26.6. $r = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{5}{3,5}} \approx 0,96$

$$r \approx 0,96$$

27. Situação A : $r = -0,93$

Situação B : $r = 0,58$

Situação C : $r = 0,96$