

1. Seja  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{AB} = c = 32$  e  $\overline{BC} = a = 12$

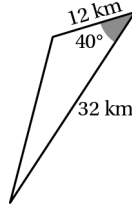
Para determinar  $\overline{AC} = b$ , vamos recorrer ao Teorema de Carnot (lei dos Cossenos):

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac \cos B$$

$$b^2 = 12^2 + 32^2 - 2 \times 12 \times 32 \cos 40^\circ$$

Logo,  $b = \sqrt{1168 - 768 \cos 40^\circ} \approx 24,08$

A distância entre as localidades A e C é aproximadamente igual a 24,08 km.



2. Para determinar  $\overline{BC} = a$ , vamos recorrer à lei dos senos:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$A = 43^\circ$ ;  $a$  = altura do poste

$$B = 180^\circ - (98^\circ - 43^\circ) = 180^\circ - 141^\circ = 39^\circ; b = 3$$

$$\frac{\sin 43^\circ}{a} = \frac{\sin 39^\circ}{3} \Leftrightarrow a = \frac{3 \sin 43^\circ}{\sin 39^\circ}$$

Logo,  $a \approx 3,3$

A altura do poste é aproximadamente igual a 3,3 m.

- 3.1. O ângulo de amplitude  $-780^\circ$  é representado por  $(-60^\circ, -2)$ .

$$\frac{780}{60} \left| \frac{360}{2} \right.$$

- 3.2. O ângulo de amplitude  $1088^\circ$  é representado por  $(8^\circ, 3)$

$$\frac{1088}{8} \left| \frac{360}{2} \right.$$

- 4.1.  $360^\circ : 8 = 45^\circ$

O lado extremidade do ângulo representado por  $(-45^\circ, -2)$  é  $\overline{OH}$ , pelo que o transformado do ponto A é o ponto H.

- 4.2.  $\frac{270}{45} = 6$

O lado extremidade do ângulo representado por  $(270^\circ, 3)$  é  $\overline{OG}$ , pelo que o transformado do ponto A é o ponto G.

5. Como  $\cos x < 0$ ,  $x$  pertence aos 2.º ou ao 3.º quadrantes.

$$\frac{\cos^2 x}{\sin x} < 0 \Leftrightarrow \sin x < 0$$

Como  $\sin x < 0$ ,  $x$  pertence ao 3.º ou 4.º quadrantes.

Logo,  $x$  é um ângulo do 3.º quadrante.

- 6.1.

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- 6.2.

$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	n.d.	0	n.d.	0

- 7.1.  $\sin \alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ;  $\cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan \alpha = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 7.2.  $\sin \alpha = \sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos \alpha = \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \alpha = \tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

- 7.3.  $-300^\circ = 360^\circ + 60^\circ$ ;  $-300^\circ \in 1.^\circ Q$

$$\sin \alpha = \sin(-300^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \alpha = \cos(-300^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\tan \alpha = \tan(-300^\circ) = \tan(60^\circ) = \sqrt{3}$$

- 7.4.  $-270^\circ = -360^\circ + 90^\circ$

$$\sin \alpha = \sin(-270^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

$$\cos \alpha = \cos(-270^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

A tangente do ângulo de amplitude  $-270^\circ$  (ou  $90^\circ$ ) não está definida.

- 7.5.  $-150^\circ = -360^\circ + 210^\circ$ ;  $150^\circ \in 3.^\circ Q$

$$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$$

$$\sin \alpha = \sin(-150^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \cos(-150^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \alpha = \tan(-150^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 8.1.  $20^\circ = \frac{20}{180} \pi \text{ rad} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$

- 8.2.  $\frac{\pi}{12} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$

9.  $f(\alpha) = 1 - 10 \cos^2 \alpha$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \wedge \tan \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10}$$

$$f(\alpha) = 1 - 10 \times \frac{9}{10} = 1 - 9 = -8$$

10.  $\sin x \tan x + \cos x = \sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x =$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

11.  $\sin(x - \pi) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - \tan(4\pi) =$

$$= -\sin(\pi - x) + \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) - \tan 0 =$$

$$= -\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 0 = -\sin x + \sin x = 0$$

- 12.1.  $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) + \tan(\alpha - 9\pi) =$

$$= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin \alpha + \tan(-10\pi + \pi + \alpha) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin \alpha + \tan(\pi + \alpha) =$$

$$= -\sin \alpha + \sin \alpha + \tan \alpha = \tan \alpha$$

12.2.  $\sin(\pi + \alpha) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\sin \alpha = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$

$\sin \alpha < 0 \wedge \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \Rightarrow \alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$

$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \wedge \sin \alpha = -\frac{3}{5} \wedge \alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} \wedge \alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{25}{9} - 1 \wedge \alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{9}{16} \wedge \alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{Se } \alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[, \tan \alpha > 0$

13.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{5}{9}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\frac{25}{81} + \cos^2 \alpha = 1 \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{81} \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{56}{81} \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{56}}{9} \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

$\frac{56}{28} = \frac{2}{2}$   
 $\frac{14}{14} = \frac{2}{2}$   
 $\frac{7}{7} = \frac{2}{2}$

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{2\sqrt{14}}{9}} = \frac{5}{2\sqrt{14}}$

$f(\alpha) = \frac{1 - \sin \alpha + \cos \alpha}{\tan \alpha} = \frac{1 - \frac{5}{9} + \frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{2\sqrt{14}}} = \frac{4 + 2\sqrt{14}}{\frac{5}{2\sqrt{14}}} =$

$= \frac{2\sqrt{14}(4 + 2\sqrt{14})}{45} = \frac{8\sqrt{14} + 56}{45}$

Logo,  $f(\alpha) = \frac{8\sqrt{14} + 56}{45}$ .

14.1.  $\cos(-x) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) =$

$= \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2} + 4\pi\right) =$

$= \cos x + \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2\cos x + \cos x = 3\cos x$

14.2.  $\sin(-x) - \cos(3\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$

$= -\sin x - \cos(\pi - x) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) =$

$= -\sin x + \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$= -\sin x + \cos x + \cos x = 2\cos x - \sin x$

15.1.  $f(x) = 1 - 2\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(2\pi - \frac{3\pi}{2} + x\right) =$

$= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1 - 2\cos^2 x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - 2(1 - \sin^2 x) = 1 - 2 + 2\sin^2 x = 2\sin^2 x - 1$

15.2. a)  $D_f = \mathbb{R}$

b) Como  $x$  toma qualquer valor real:

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2\sin^2 x \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 \leq 2\sin^2 x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$

Portanto,  $D_f' = [-1, 1]$ .

15.3.  $f(-x) = 2\sin^2(-x) - 1 = 2 \times (-\sin x)^2 - 1 =$

$= 2\sin^2 x - 1 = f(x)$

Como  $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$ , a função  $f$  é par.

15.4.  $f(x) = 0 \wedge x \in [\pi, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 = 0 \wedge x \in [\pi, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \wedge x \in [\pi, 2\pi] \Leftrightarrow$

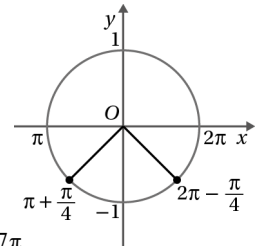
$\Leftrightarrow \left(\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge x \in [\pi, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \in [\pi, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}$

Os zeros de  $f$  em  $[\pi, 2\pi]$  são  $\frac{5\pi}{4}$  e  $\frac{7\pi}{4}$ .

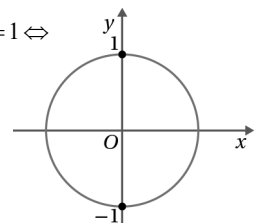


15.5. O máximo absoluto de  $f$  é 1.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



15.6.  $f(\alpha) = 2\sin^2 \alpha - 1; \tan \alpha = \frac{1}{2}$

$1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5}$

$f(\alpha) = 2\sin^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{5} - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$

Pág. 213

16.1.  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = x \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}$

Logo,  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ .

16.2.  $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

16.3.  $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$$16.4. \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3} \quad \left| -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right.$$

$$17.1. \arcsin(2x) = y \Leftrightarrow \sin y = 2x, \text{ com } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos(\arcsin(2x)) = \cos y$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

$$\cos^2 y + (2x)^2 = 1 \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos^2 y = 1 - 4x^2 \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos y = \sqrt{1 - 4x^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Em } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \cos y > 0 \end{array} \right.$$

Logo,  $\cos(\arcsin(2x)) = \sqrt{1 - 4x^2}$ .

$$17.2. \arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x, \text{ com } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos(\arcsin x) = \cos y$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

$$\cos^2 y + x^2 = 1 \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos^2 y = 1 - x^2 \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos y = \sqrt{1 - x^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Em } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \cos y > 0 \end{array} \right.$$

$$18. f(x) = \frac{2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}{2 + \cos x} = \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1}{2 + \cos x} = \frac{-2\cos x + 1}{2 + \cos x}$$

$$18.1. D_f = \mathbb{R}, \text{ pois } \forall x \in \mathbb{R}, 2 + \cos x \neq 0$$

$$18.2. f\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{-2\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + 1}{2 + \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)} = \frac{-2\cos\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + 1}{2 + \cos\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{-2\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 1}{2 + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\cos\frac{\pi}{3} + 1}{2 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$18.3. f(x) = 0 \wedge x \in ]-\pi, 2\pi[ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2 + \cos x} = 0 \wedge x \in ]-\pi, 2\pi[ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1}{2 + \cos x} = 0 \wedge x \in ]-\pi, 2\pi[ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{-2\cos x + 1}{2 + \cos x} = 0 \wedge x \in ]-\pi, 2\pi[ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \wedge x \in ]-\pi, 2\pi[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$$

Os zeros de  $f$  em  $]-\pi, 2\pi[$  são  $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$  e  $\frac{5\pi}{3}$ .

$$18.4. f(\alpha) = \frac{-2\cos\alpha + 1}{2 + \cos\alpha}; \sin\alpha = -\frac{3}{5}; \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \wedge \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \wedge \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \wedge \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \quad \left| \text{Em } \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[, \cos\alpha > 0 \right.$$

$$f(\alpha) = \frac{-2 \times \frac{4}{5} + 1}{2 + \frac{4}{5}} = \frac{-\frac{8}{5} + 1}{\frac{14}{5}} = -\frac{3}{14}$$

$$19.1. \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \left| \frac{\pi}{4} \in [0, \pi] \text{ e } \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right.$$

$$19.2. \arccos(-1) = \pi \quad \left| \pi \in [0, \pi] \text{ e } \cos\pi = -1 \right.$$

$$19.3. \sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left| \frac{\pi}{3} \in [0, \pi] \text{ e } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \right.$$

$$20.1. \arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x, y \in [0, \pi]$$

$$\sin(\arccos x) = \sin y, y \in [0, \pi]$$

$$x^2 + \sin^2 y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 y = 1 - x^2$$

Como em  $[0, \pi]$ ,  $\sin y > 0$ ,  $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$

Logo,  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

$$20.2. \arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x, y \in [0, \pi]$$

$$\tan(\arccos x) = \tan y, y \in [0, \pi]$$

$$1 + \tan^2 y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \tan^2 y = \frac{1}{x^2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 y = \frac{1 - x^2}{x^2} \Leftrightarrow \tan y = \pm \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}}$$

Logo,  $\tan(\arccos x) = \pm \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}}$

$$21. \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) = x \Leftrightarrow \sin x = -\frac{3}{5}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{9}{25} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$$

Como em  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , temos  $\cos x > 0$ , pelo que  $\cos x = \frac{4}{5}$ .

Logo,  $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{4}{5}$ .

22.1.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x \quad \left| \begin{array}{l} 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right.$$

22.2. a)  $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

$$D_h = \{x \in D_f \cap D_g : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left| \begin{array}{l} D_g = \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

b)  $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2(3x) = 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(3x) = 1 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos(3x) = -1 \vee \cos(3x) = 1) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Zeros de  $f : x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

22.3.  $\forall x \in D_h$

$$h(x + \pi) = \frac{g(x + \pi)}{f(x + \pi)} = \frac{1 - \cos^2(x + \pi)}{\cos^2(x + \pi)} = \frac{1 - (-\cos x)^2}{(-\cos x)^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{g(x)}{f(x)} = h(x)$$

22.4.  $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \cos^2\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

23.1.  $\tan(\arctan(-5)) = -5$

23.2.  $\sin(\arctan 1) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left| \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ e } \tan\frac{\pi}{4} = 1 \right.$

23.3.  $\cos(\arctan \sqrt{3}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \left| \frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ e } \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \right.$

24.1.  $\arccos\left(\frac{x}{3}\right) = y \Leftrightarrow \cos y = \frac{x}{3}, y \in [0, \pi]$

$$\tan\left(\arccos\frac{x}{3}\right) = \tan y, y \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \tan^2 y = \frac{1}{\frac{x^2}{9}} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 y = \frac{9}{x^2} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 y = \frac{9 - x^2}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan y = \pm \sqrt{\frac{9 - x^2}{x^2}}$$

Logo,  $\tan\left(\arccos\frac{x}{3}\right) = \pm \sqrt{\frac{9 - x^2}{x^2}}$

24.2.  $\arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\sin(\arctan x) = \sin y, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} \Leftrightarrow 1 + \tan^2 y = \frac{1}{1 - \sin^2 y}$$

$$1 + x^2 = \frac{1}{1 - \sin^2 y} \Leftrightarrow 1 - \sin^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 y = \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} \Leftrightarrow \sin^2 y = \frac{x^2}{1 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}}$$

Logo,  $\sin(\arctan x) = \pm \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}}$

25.  $\arccos\frac{2}{3} = x \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{3}, x \in [0, \pi]$

$$\tan\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = \tan x, x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\frac{4}{9}} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{9}{4} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Como  $x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$  e  $\cos x > 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , pelo que

$$\tan x = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad \text{Logo, } \tan\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

26.1.  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

26.2.  $\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

26.3.  $\sin^2 x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

27.1.  $\sin(2x) + \sin x = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = -\sin x \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(-x) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x = -x + 2k\pi \vee 2x = \pi - (-x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x = 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{2k\pi}{3} \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = 2\pi \vee x = \pi$$

$$S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$$

27.2.  $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \wedge x \in [0, 2\pi]$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \sin x = \frac{-1-3}{4} \vee \sin x = \frac{-1+3}{4} \right) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \right) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

27.3.  $1 - \sin^2 x = \frac{1}{4} \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left( \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Pág. 215

28.1.  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow x = -\pi + \frac{\pi}{6} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

28.2.  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em  $[0, \pi]$ :  $x = \frac{\pi}{3} \vee x = 0 \vee x = \pi$ , logo  $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \pi \right\}$ .

28.3.  $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x + \frac{\pi}{6} = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Em  $[0, 2\pi]$ :

$$x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{3\pi}{8} \vee x = \frac{7\pi}{8} \vee x = \frac{11\pi}{8} \vee x = \frac{15\pi}{8}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{13\pi}{12}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \right\}$$

28.4.  $\cos(2x) = -\sin x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0: x = \frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{6}$$

$$k = 1: x = \frac{5\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2: x = \frac{9\pi}{2} \vee x = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = -1: x = -\frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{5\pi}{6}$$

$$k = -2: x = -\frac{7\pi}{2} \vee x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$k = -3: x = -\frac{11\pi}{2} \vee x = -\frac{13\pi}{6}$$

Em  $[-2\pi, \pi]$ :  $S = \left\{ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\}$

28.5.  $\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{x}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{x}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \vee \frac{3x}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4k\pi \vee x = \frac{4k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Em  $[0, 2\pi]$ :  $x = 0 \vee x = \frac{4\pi}{3}$

$$S = \left\{ 0, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

28.6.  $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em  $[-\pi, 2\pi]$ :  $x = 0 \vee x = 2\pi$

$$S = \{0, 2\pi\}$$

28.7.  $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3-5}{4} \vee \cos x = \frac{-3+5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -2 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

Em  $[-\pi, \pi]$ :  $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{13\pi}{12} \vee x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3}$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$$

28.8.  $1 + 4\cos x = 4\sin^2 x \Leftrightarrow 1 + 4\cos x = 4(1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-4 - 8}{8} \vee \cos x = \frac{-4 + 8}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{3}{2} \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

Em  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3}$ , logo  $S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ .

29.1.  $\tan x = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$

$S = \{0, \pi, 2\pi\}$

29.2.  $\tan x = 1 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

29.3.  $\tan x = -1 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}$

$S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

29.4.  $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan x \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -x + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$k = 0: x = \frac{\pi}{8}$

$k = 1: x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$

$k = 2: x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$

$k = 3: x = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{8}$

$S = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$

29.5.  $\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \tan x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x = 1$

Em  $[0, 2\pi]: x = \frac{\pi}{4} \vee x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

30.1.  $f(x) = \sqrt{3} \wedge x \in [-\pi, 0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{3} \wedge \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Leftrightarrow x \in \emptyset$

$S = \emptyset$

30.1.  $f(x) = -1 \wedge x \in [-\pi, 0] \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \wedge \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ , logo  $S = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$ .

30.3.  $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge x \in [-\pi, 0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

$S = \left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$

31.  $1 + \cos x \leq -\sin^2 x \Leftrightarrow 1 + \cos x \leq -1 + \cos^2 x \Leftrightarrow$

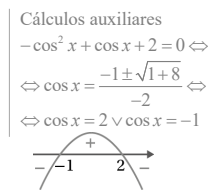
$\Leftrightarrow -\cos^2 x + \cos x + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \cos x \leq -1 \vee \cos x \geq 2$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$ .

$[0, 2\pi]: x = \pi$

$S = \{\pi\}$



32. A equação tem pelo menos uma solução se o respetivo binómio discriminante,  $\Delta$ , for maior ou igual a 0.

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-2\sin \alpha)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 \alpha - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \sin \alpha \leq -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq 1$

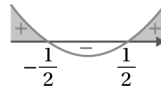
$S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$

Cálculos auxiliares

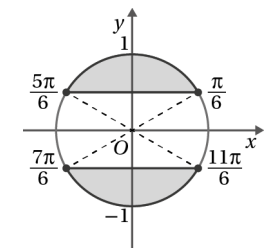
$4\sin^2 \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{2} \vee \sin \alpha = \frac{1}{2}$

Como  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ , tem-se:



$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}; \quad \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}; \quad 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$



33.1.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

33.2.  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \neq 0\}$   
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

33.3.  $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0\} =$   
 $= \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x > 1\} =$   
 $= ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$

$$x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

33.4.  $D_k = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0 \wedge x + 2 \neq 0\} =$   
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \neq -2\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} =$   
 $= [-1, +\infty[$

33.5.  $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 + 4x + 4) \geq 0\} = \{-2\} \cup [0, +\infty[$

$x(x^2 + 4x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x(x + 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \vee x = -2$

- 34.1.  $g(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$   
 $g(0) = 0^2 - 1 = -1$   
 $g(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$   
 $G_{g \circ f} = \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0)\}$
- 34.2.  $g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$   
 $G_{g \circ f} = \left\{\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$
- 35.1.  $f(x) = x + 1$ ;  $D_f = \mathbb{R}$   
 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$   
 Logo,  $f$  é uma função injetiva.  
 $x + 1 = y \Leftrightarrow x = y - 1$   
 Para qualquer  $y \in \mathbb{R}$  existe um número real  $x$  ( $x = y - 1$ )

tal que  $y = f(x)$ . Logo,  $f$  é uma função sobrejetiva.

Dado que  $f$  é injetiva e sobrejetiva, então é bijetiva.

- 35.2.  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $D_f = \mathbb{R}_0^+$   
 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$   
 Logo,  $f$  é uma função injetiva.  
 $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \sqrt{x} \geq 0$   
 Portanto,  $D_f' = \mathbb{R}_0^+ \neq \mathbb{R}$   
 Logo,  $f$  é uma função não sobrejetiva pelo que é não bijetiva.
- 35.3.  $f(x) = x^2 - 5x + 1$ ;  $D_f = \mathbb{R}$   
 $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$

Por exemplo,  $f(0) = f(5) = 1$ ,  $f$  é uma função não injetiva. Dado que  $f$  é uma função não injetiva, então é não bijetiva.

- 35.4.  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$   $D_f = \mathbb{R}$

Por exemplo:  $f(1) = 1 + 1 = 2$  e  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

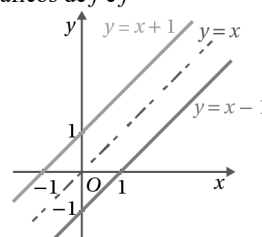
Como  $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ , a função  $f$  é não injetiva.

Dado que  $f$  é não injetiva, então é não bijetiva.

- 36.1.  $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(2^2) = f(4) = 4 + 2 = 6$   
 $(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g(-2 + 2) = g(0) = 0^2 = 0$
- 36.2.  $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(\sqrt{2+1}) = f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 + 1 = 3 + 1 = 4$   
 $(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g((-2)^2 + 1) = g(4 + 1) = g(5) = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}$

37.  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow f(ax + b) = g(x - 2) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow ax + b - 2 = a(x - 2) + b \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow ax + b - 2 = ax - 2a + b \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$   
 Logo,  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$  se  $a = 1$  e  $b \in \mathbb{R}$ , pelo que  $g(x) = x + b$ .  
 Portanto,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(x) = x + b$ .
38.  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$   
 Como  $f$  e  $g$  são funções injetivas:  
 $g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$   
 Logo, a função  $g \circ f$  é injetiva.  
 Como  $g$  é uma função sobrejetiva, para todo  $y$  pertencente a  $C$  existe um  $y' \in B$  tal que  $g(y') = y$ . Por outro lado, como  $f$  também é sobrejetiva existe um  $x \in A$  tal que  $y' = f(x)$ , donde  $y = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$ .  
 Portanto,  $g \circ f$  é sobrejetiva.  
 Como a função  $g \circ f$  é injetiva e sobrejetiva, então é bijetiva.

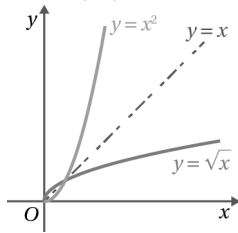
- 39.1.  $3x - 1 = y \Leftrightarrow 3x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{3}$   
 Assim,  $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$  ou  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$   
 Logo,  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$
- 39.2.  $\frac{1}{x-2} = y \Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y}$   
 Assim,  $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x}$   
 Logo,  $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$  com  $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x}$
- 39.3.  $x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$   
 Assim,  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$   
 Logo,  $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  com  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- 39.4.  $x^2 - 4 = y \Leftrightarrow x^2 = y + 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+4}$   
 Assim,  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$   
 Logo,  $f^{-1}: [-4, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  com  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$
- 40.1. O gráfico de  $f$  é a reta que passa nos pontos de coordenadas  $(0, -1)$  e  $(1, 0)$ .  
 O gráfico de  $f^{-1}$  obtém-se do gráfico de  $f$  pela reflexão axial de eixo  $y = x$ . Trata-se da reta que passa nos pontos de coordenadas  $(-1, 0)$  e  $(0, 1)$ .  
 Gráficos de  $f$  e  $f^{-1}$



x	f(x)
0	0
1	1
4	2
9	3

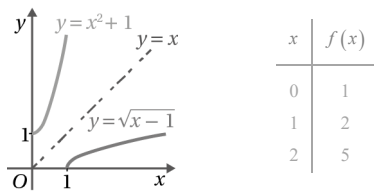
40.2. O gráfico de  $f^{-1}$  obtém-se do gráfico de  $f$  pela reflexão axial cujo eixo é a reta de equação  $y = x$ .

Gráficos de  $f$  e  $f^{-1}$



40.3. O gráfico de  $f$  é parte da parábola de vértice no ponto de coordenadas  $(0, 1)$  e concavidade voltada para cima. O gráfico de  $f^{-1}$  obtém-se do gráfico de  $f$  pela reflexão axial cujo eixo é a reta de equação  $y = x$ .

Gráficos de  $f$  e  $f^{-1}$



41.1.  $\frac{x}{2} - 2 = y \Leftrightarrow \frac{x}{2} = y + 2 \Leftrightarrow x = 2y + 4$

$f^{-1}(x) = 2x + 4$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Logo,  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f^{-1}(x) = 2x + 4$

41.2.  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}\left(\frac{x}{2} - 2\right) = 2\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 4$   
 $= x - 4 + 4 = x$

$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f(2x + 4) = \frac{2x + 4}{2} - 2 =$   
 $= x + 2 - 2 = x$

Logo,  $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$

42.1.  $D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^2 - 3x) = -f(x)$

$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$

Logo,  $f$  é uma função ímpar.

42.2.  $D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x)$

$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$

Logo,  $f$  é uma função par.

42.3.  $D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = -x - (-x)^2 = -x - x^2 = -(x + x^2)$

Como  $\exists x \in \mathbb{R} : f(-x) \neq f(x)$  e  $f(-x) \neq -f(x)$ ,  $f$  não é par nem é ímpar.

42.4.  $D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = |-x| - 1 = |x| - 1 = f(x)$

$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$

Logo,  $f$  é uma função par.

42.5.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$

Logo,  $f$  é uma função ímpar.

43.1. O gráfico de  $g$  obtém-se do gráfico de  $f$  pela translação de vetor  $\vec{v}(5, 0)$ .

$x - 5 \in D_f \Leftrightarrow -2 \leq x - 5 \leq 4 \Leftrightarrow -2 + 5 \leq x \leq 4 + 5 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 9$

Logo,  $D_g = [3, 9]$ .

Como o gráfico de  $g$  se obtém do gráfico de  $f$  por uma translação horizontal,  $D'_g = D'_f = [0, 5]$ .

43.2. O gráfico de  $h$  obtém-se do gráfico de  $f$  pela translação de vetor  $\vec{v}(0, -5)$ . Portanto,  $D_h = D_f = [-2, 4]$

$0 \leq f(x) \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq f(x) - 5 \leq 5 - 5 \Leftrightarrow -5 \leq h(x) \leq 0$

Logo,  $D'_h = [-5, 0]$ .

44.1. O gráfico obtém-se do gráfico de  $f$  pela dilatação vertical de coeficiente 5. Portanto,  $D_g = D_f = [-2, 4]$ .

$0 < f(x) \leq 5 \Leftrightarrow 5 \times 0 \leq 5f(x) \leq 5 \times 5 \Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq 25$

Logo,  $D'_g = [0, 25]$ .

44.2. O gráfico de  $h$  obtém-se do gráfico de  $f$  pela contração vertical de coeficiente  $\frac{1}{3}$ . Portanto,  $D_h = D_f = [-2, 4]$ .

$0 \leq f(x) \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 0 \leq \frac{1}{3}f(x) \leq \frac{1}{3} \times 5 \Leftrightarrow 0 \leq h(x) \leq \frac{5}{3}$

Logo,  $D'_h = \left[0, \frac{5}{3}\right]$ .

44.3.  $g(-1) = 5f(-1) = 5 \times (-3) = -15$

$h(-1) = \frac{1}{3}f(-1) = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$

45.1. O gráfico de  $g$  obtém-se do gráfico de  $f$  pela contração horizontal de coeficiente  $\frac{1}{4}$ . Portanto,  $D'_g = D'_f = [0, 3]$ .

$4x \in D_f \Leftrightarrow -2 \leq 4x \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{2}{4} \leq x \leq \frac{4}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

Logo,  $D_g = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ .

45.2. O gráfico de  $h$  obtém-se pela dilatação horizontal de coeficiente 3. Portanto,  $D'_h = D'_f = [0, 3]$ .

$\frac{1}{3}x \in D_f \Leftrightarrow -2 \leq \frac{1}{3}x \leq 4 \Leftrightarrow 3 \times (-2) \leq x \leq 3 \times 4 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 12$

Logo,  $D_h = [-6, 12]$ .

45.3.  $g\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(4 \times \frac{1}{4}\right) = f(1) = 2$  ;  $h(3) = f\left(\frac{1}{3} \times 3\right) = f(1) = 2$

46.1. O gráfico de  $g$  é a imagem do gráfico de  $f$  pela reflexão de eixo  $Ox$ . Portanto,  $D_g = D_f = [-2, 4]$ .

$0 \leq f(x) \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq -f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq g(x) \leq 0$

Logo,  $D'_g = [-5, 0]$ .

46.2. O gráfico de  $h$  é a imagem do gráfico de  $f$  pela reflexão de eixo  $Oy$ .

$-x \in D_f \Leftrightarrow -2 \leq -x \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$

Portanto,  $D_h = [-4, 2]$  e  $D'_h = D'_f = [0, 5]$

46.3.  $g(0) = -f(0) = -1 \times (-1) = 1$   
 $h(0) = f(-0) = f(0) = -1$

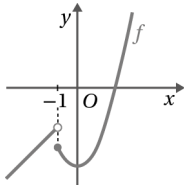
Pág. 219

47.1. O gráfico de  $y = x^2 - 4$ , com  $x \geq -1$  é parte de uma parábola

- Zeros:  $x^2 - 4 = 0 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x = 2$
- Vértice:  $(0, -4)$

$x$	$y = x - 1$	$x$	$y = x^2 - 4$
-2	-3	-1	-3
-1	-2	0	-4
		2	0

Esboço do gráfico de  $f$

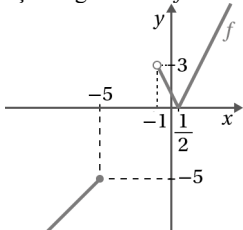


47.2.  $|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} |2x - 1| & \text{se } x > -1 \\ x & \text{se } x \leq -5 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x \leq -5 \\ -2x + 1 & \text{se } -1 < x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{se } \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x$	$y = x$	$x$	$y = -2x + 1$	$x$	$y = 2x - 1$
-6	-6	-1	3	$\frac{1}{2}$	0
-5	-5	$\frac{1}{2}$	0	1	1

Esboço do gráfico de  $f$

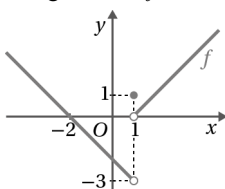


47.3. Se  $x > 1$ ,  $|x - 1| = x - 1$

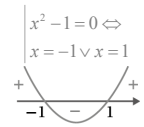
$$f(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ -2 - x & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} -2 - x & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$x$	$y = -2 - x$	$x$	$y = x - 1$
-2	0	1	0
1	-3	2	1

Esboço do gráfico de  $f$ :



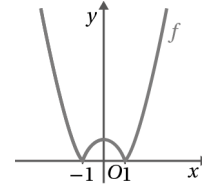
47.4.  $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$



O gráfico de  $y = x^2 - 1$ , para  $x \leq -1 \vee x \geq 1$ , é parte de uma parábola com a concavidade voltada para cima e vértice  $(0, -1)$ .

O gráfico de  $y = -x^2 + 1$ , para  $-1 < x < 1$ , é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo e vértice  $(0, 1)$ .

Esboço do gráfico de  $f$ :



48.1.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Zeros de  $f = \{0, 3\}$

48.2.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 3x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 3x + 4) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} \Leftrightarrow x = 0$

48.3.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 2x - 4 = 0$

Os zeros inteiros da função  $f$ , caso existam, são divisores de  $-4$ :  $\{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$

$f(1) = 1^4 + 1^2 + 2 \times 1 - 4 = 0$

$f(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 + 2 \times (-1) - 4 = -6$

$f(2) = 2^4 + 2^2 + 2 \times 2 - 4 = 24$

$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^2 + 2 \times (-2) - 4 = 0$

$1$  e  $-2$  são zeros e  $f$ .

Pela regra de Ruffini:

	1	1	0	2	-4
1		1	2	2	4
	1	2	2	4	0
-2		-2	0	-4	
	1	0	2	0	

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0 \vee x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

Zeros de  $f$ :  $\{-2, 1\}$

48.4.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - (x^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

A função  $f$  não tem zeros

49.1.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, +\infty]$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1, +\infty[ \cap \mathbb{R} \setminus \{2\} = [-1, +\infty[ \setminus \{2\}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x-2}$$

Logo,  $f + g: [-1, +\infty[\setminus\{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$  com

$$(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x-2}$$

49.2.  $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [-1, +\infty[\setminus\{2\}$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \sqrt{x+1} \times \frac{1}{x-2} = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$$

Logo,  $f \times g: [-1, +\infty[\setminus\{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $(f \times g)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$

49.3.  $D_{5f} = D_f = [-1, +\infty[$

$$5f(x) = 5\sqrt{x+1}$$

Logo,  $5f: [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  com  $5f(x) = 5\sqrt{x+1}$

49.4.  $D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap \{x \in D_f : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \cap ]-1, +\infty[ =$

$$]= -1, +\infty[\setminus\{2\} \quad \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+1}}$$

Logo,  $\frac{g}{f}: ]-1, +\infty[\setminus\{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  com

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+1}}$$

49.5.  $D_{f^2} = D_f = [-1, +\infty[$

$$f^2(x) = (f(x))^2 = (\sqrt{x+1})^2 = x+1$$

Logo,  $f^2: [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f^2(x) = x+1$

50.  $\left(\frac{f}{h}\right)(0) - \frac{1}{3}h^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{f(0)}{h(0)} - \frac{1}{3}\left(h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 =$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 0 - 1}{-1} - \frac{1}{3} \times 0^2 = \frac{-1}{-1} - 0 = 1 \quad \left| 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \right.$$

Pág. 220

51.1. a)  $D_f = [-8, 8]$       b)  $D'_f = [-6, 4]$

c) Zeros de  $f = \{-3, 3, 8\}$

d)  $f$  é crescente em  $[-8, 0]$  e em  $[6, 8]$ .

$f$  é decrescente em  $[0, 6]$

e) Os mínimos relativos de  $f$  são  $-6$  e  $5$ .

Os máximos relativos de  $f$  são  $0$  e  $4$ .

f) O mínimo absoluto de  $f$  é  $-6$  e o máximo absoluto de  $f$  é  $4$ .

51.2.

$x$	-8		0		6		8
$f$	-6	↗	4	↘	-5	↗	0
			Máx.		Mín.		

52.1. a)  $D_f = [0, 24]$       b)  $D'_f = [-2, 8]$

c) Zeros de  $f = \{0, 9, 22\}$

d)  $f$  é estritamente decrescente em  $[0, 2]$ , em  $[16, 18]$  e em  $[20, 24]$ .

$f$  é estritamente crescente em  $[6, 16]$ .

$f$  é constante em  $[2, 6]$  e em  $[18, 20]$ .

e) O mínimo absoluto de  $f$  é  $-2$  e o máximo absoluto de  $f$  é  $8$ .

f) Os mínimos relativos de  $f$  são  $-2, -1$  e  $6$ .  
Os máximos relativos de  $f$  são  $-2, 0, 6$  e  $8$ .

52.2.

$x$	0		2		6		16		18		20		24
$f$	0	↘	-2	→	-2	↗	8	↘	6	→	6	↘	-1

52.3. a)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 9 \vee x = 22$ .  $S = \{0, 9, 22\}$

b) Seja  $g(x) = f(-x)$ .

O gráfico de  $g$  é a imagem do gráfico de  $f$  pela reflexão de eixo  $Oy$ . Portanto, os zeros de  $f(-x)$  são os simétricos dos zeros de  $f$ .

$$f(-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -9 \vee x = -22$$

$$S = \{-22, -9, 0\}$$

52.4. a)  $f(x) \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 13 \vee 18 \leq x \leq 24$

$$S = [0, 13] \cup [18, 24]$$

$$\begin{cases} f(10) = 3: (10, 3) \\ f(14) = 7: (14, 7) \\ m = \frac{7-3}{14-10} = \frac{4}{4} = 1 \\ y-3 = x-10 \Leftrightarrow y = x-7 \\ x-7 = 6 \Leftrightarrow x = 13 \end{cases}$$

b)  $-f(2x) > 0 \Leftrightarrow f(2x) < 0$

Seja  $g(x) = f(2x)$

O gráfico de  $g$  é a imagem do gráfico de  $f$  pela contração horizontal de coeficiente  $\frac{1}{2}$ .

$$f(2x) < 0 \Leftrightarrow 0 < 2x < 9 \vee 22 < 2x < 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{9}{2} \vee 11 < x < 12$$

$$S = ]0, \frac{9}{2}[ \cup ]11, 12[$$

Pág. 221

53.1.  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0$

53.2.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$

53.3.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$

53.4.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

53.5.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$

53.6.  $\lim_{x \rightarrow -2,5} f(x) = 0,5$

54.  $f$  é contínua em  $]-3, 0[ \cup ]0, 2[ \cup \{3\}$

55. A função  $f$  é contínua em  $x = 2$  se existir  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , ou seja,

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{k-x}{3} = \frac{k-2}{3} = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - kx + 2k - 4}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2) - k(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2-k)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2-k}{x+2}$$

$$= \frac{2+2-k}{2+2} = \frac{4-k}{4}$$

Portanto:

$$\frac{k-2}{3} = \frac{4-k}{4} \Leftrightarrow 4k-8=12-3k \Leftrightarrow 7k=20 \Leftrightarrow k = \frac{20}{7}$$

Logo, a função  $f$  é contínua em  $x=2$  se  $k = \frac{20}{7}$ .

56.1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3 - 2x + 1) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3) = 5 \times (+\infty)^3 = +\infty$

56.2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-4x+4} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

56.3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2}{x^2-1} \times (x^2+4) \right] \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+8}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$

56.4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{+\infty + \infty} = 0$

56.5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{1-0} = 1$

Pág. 222

57.1. Assíntotas verticais:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

A função  $f$  é contínua e 1 é um ponto aderente a  $D_f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação  $x=1$  é assíntota ao gráfico de  $f$ .

Assíntotas não verticais  $y = mx + b$ :

Quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-x} =$$
  
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

A reta de equação  $y=1$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$ .

57.2. Assíntotas verticais:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A função  $f$  é contínua e 0 é ponto aderente a  $D_f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação  $x=0$  é assíntota ao gráfico de  $f$ .

Assíntotas não verticais  $y = mx + b$ :

Quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2-1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x} =$$
  
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$

Quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

A reta de equação  $y=x$  é assíntota ao gráfico de  $f$ .

57.3. Assíntotas verticais:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\begin{cases} 1-x^3=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$$

A função  $f$  é contínua e 1 é ponto aderente a  $D_f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1-x^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{1-x^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x=1$  é assíntota ao gráfico de  $f$ .

Assíntotas não verticais:  $y = mx + b$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(1-x^3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-x^4} =$$
  
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \frac{1}{-x} = 0$$

A reta de equação  $y=0$  é assíntota ao gráfico de  $f$ .

57.4. Assíntotas verticais:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A função  $f$  é contínua e 0 é o ponto aderente a  $D_f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x+x}{x^2} = \left| \text{Se } x < 0, |x| = -x \right.$$
  
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+x}{x^2} = \left| \text{Se } x > 0, |x| = x \right.$$
  
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$

$x=0$  é assíntota ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow 0^+$ .

Assíntotas não verticais:  $y = mx + b$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|+x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+x}{x^3} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + x}{x^2} = 0$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$  :

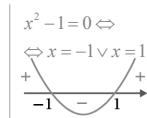
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é assintota ao gráfico de  $f$ .

**57.5. Assíntotas verticais:**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$



A função  $f$  é contínua e não tem pontos aderentes a  $D_f$  que não pertencem a  $D_f$ .

Logo, não existem assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ .

Assíntotas não verticais  $y = mx + b$  :

Quando  $x \rightarrow -\infty$  :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\sqrt{x^2 - 1} - x}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} - x}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-4x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{4x} - \frac{x}{4x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{4} \right) = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$   
Se  $x < 0$ ,  
 $|x| = -x$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{4} + \frac{5}{4}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + x)(\sqrt{x^2 - 1} - x)}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$  :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{4x} - \frac{x}{4x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$   
Se  $x > 0$ ,  $|x| = x$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{4} - \frac{3x}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação  $y = -\frac{5}{4}x$  é assintota ao gráfico de  $f$

quando  $x \rightarrow -\infty$  e a reta de equação  $y = \frac{3}{4}x$  é assintota ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

**57.6. Assíntotas verticais:**

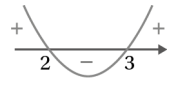
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

A função  $f$  é contínua e 2 e 3 são pontos aderentes a  $D_f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-1} = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = 3$  é assintota ao gráfico de  $f$ .

Assíntotas não verticais  $y = mx + b$  :

Quando  $x \rightarrow -\infty$  :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x(x^2-5x+6)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$  :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é assintota ao gráfico de  $f$ .

**58.1.**  $P(t) = 0 \Leftrightarrow 8 + 2t - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-2 - 6}{-2} \vee t = \frac{-2 + 6}{-2} \Leftrightarrow t = 4 \vee t = -2$$

Como  $t \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $t = 4$ . Logo, a partícula passou na origem no instante  $t = 4$  segundos.

**58.2.** t.m.v.<sub>(P, 0, 1)</sub> =  $\frac{P(1) - P(0)}{1 - 0} = \frac{9 - 8}{1} = 1$

Entre os instantes  $t = 0$  e  $t = 1$ , a partícula deslocou-se com uma velocidade média de 1 cm/s.

**58.3.**  $P'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 2(t+h) - (t+h)^2 - (8 + 2t - t^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 2t + 2h - t^2 - 2th - h^2 - 8 - 2t + t^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 2th - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2 - 2t - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 - 2t - h) = 2 - 2t$

Logo,  $P'(t) = 2 - 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .

**58.4. a)**  $P'(0) = 2 - 2 \times 0 = 2$

No instante  $t = 0$  a partícula deslocava-se com uma velocidade de 2 cm/s.

**b)**  $P'(1) = 2 - 2 \times 1 = 0$

A velocidade da partícula, no instante  $t = 1$ , era de 0 cm/s.

**58.5.**  $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $-2t \leq 0 \Leftrightarrow 2 - 2t \leq 2 \Leftrightarrow P'(t) \leq 2$

Logo, a velocidade máxima atingida pela partícula foi de 2 cm/s. Como  $P'(t) = 2 \Leftrightarrow t = 0$ , a partícula atingiu a velocidade máxima no instante  $t = 0$  s.

Pág. 223

59.1.  $f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 3x - 1\right)' = \frac{2x}{2} + 3 = x + 3$

59.2.  $f'(x) = \left(x(x-1)^4\right)' = x'(x-1)^4 + x \times 4(x-1)'(x-1)^3 =$   
 $= (x-1)^4 + 4x(x-1)^3 = (x-1)^3(x-1+4x) =$   
 $= (x-1)^3(5x-1)$

59.3.  $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} =$   
 $= \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

59.4.  $f'(x) = \left[\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^3\right]' = 3\left(\frac{x-3}{x-2}\right)' \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2 =$   
 $= 3 \times \frac{(x-3)'(x-2) - (x-3)(x-2)'}{(x-2)^2} \times \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2 =$   
 $= 3 \times \frac{x-2-x+3}{(x-2)^2} \times \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2 = \frac{3(x-3)^2}{(x-2)^4}$

59.5.  $f'(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}\right)' = \frac{(\sqrt[3]{x})'(x-1) - \sqrt[3]{x}(x-1)'}{(x-1)^2} =$   
 $= \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1) - \sqrt[3]{x}}{(x-1)^2} = \frac{x-1-3x}{3\sqrt[3]{x^2}(x-1)^2} = \frac{-2x-1}{3\sqrt[3]{x^2}(x-1)^2}$

59.6.  $f'(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x-3}}{x^2}\right)' = \frac{(\sqrt[3]{x-3})'x^2 - \sqrt[3]{x-3} \times 2x}{x^4} =$   
 $= \frac{\frac{(x-3)'}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}x^2 - \sqrt[3]{x-3} \times 2x}{x^4} = \frac{x - 6(x-3)}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}x^3} = \frac{x-6x+18}{3x^3\sqrt[3]{(x-3)^2}} = \frac{-5x+18}{3x^3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

60.1.  $f(x) = x^3 + x + 1$ ;  $f'(x) = 3x^2 + 1$

A função  $f$  é contínua e diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Logo,  $f$  é contínua em  $[0, 1]$  e diferenciável em  $]0, 1[$ , pelo que satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange em  $[0, 1]$ .

Então, existe pelo menos um  $c \in ]0, 1[$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 1 = \frac{3 - 1}{1} \Leftrightarrow 3c^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3c^2 = 1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee c = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como  $c \in ]0, 1[$ , o número pedido é  $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

60.2.  $f'(x) = \frac{(x-1)'x - (x-1)x'}{x^2} = \frac{x - x + 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

A função  $f$  é contínua e diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Logo,  $f$  é contínua em  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$  e diferenciável em  $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$ , pelo que satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange em  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ .

Então, existe pelo menos um  $c \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \left| f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = -2 \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{0 - (-2)}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{2}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} = 3 \Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee c = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como  $c \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$ , o número pedido é  $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

60.3.  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;  $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}_0^+$  e é diferenciável em  $\mathbb{R}^+$ . Logo  $f$  é contínua em  $[1, 4]$  e diferenciável em  $]1, 4[$ , pelo que satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange em  $[1, 4]$ .

Então existe pelo menos um  $c \in ]1, 4[$ , tal que:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{2 - 1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{c} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow c = \frac{9}{4}$$

Como  $c \in ]1, 4[$ , o número pedido é  $c = \frac{9}{4}$ .

61.1.  $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'$	+	0	-	+
$f$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\nearrow$
		Máx.	Mín.	

$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$ ;  $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

$f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$  e estritamente decrescente em  $[-1, 1]$ .  $f$  tem um máximo relativo igual a 4 para  $x = -1$  e um mínimo relativo igual a 0 para  $x = 1$ .

61.2.  $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ;  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1-x^2-1)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$
$f$	$\nearrow$	$\nearrow$	$-1$	$\searrow$	$\searrow$

Máx.

$f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -1[$  e em  $]-1, 0[$  e estritamente decrescente em  $[0, 1[$  e em  $]1, +\infty[$ .

$f$  tem um máximo relativo igual a  $-1$  para  $x = 0$ .

61.3.  $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{se } x < 2 \\ 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$\forall x > 2, f'(x) = 2 > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \wedge x < 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \text{ e } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 > 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$f'$	$-$	$0$	$+$	$+$
$f$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$\nearrow$

Máx.

$f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 1[$  e estritamente crescente  $[1, +\infty[$ .  $f$  tem um mínimo relativo igual a  $-1$  para  $x = 1$ .

61.4.  $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ -x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \left| |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \right.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 3x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$f$  é contínua em  $x = 0$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + 1) = 2 > -1$$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f$	$\nearrow$	$0$	$\searrow$	$\nearrow$

Máx.

Min.

$f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0[$  e em  $]1, +\infty[$  e estritamente decrescente em  $[0, 1]$ .

$f$  tem um máximo relativo igual a  $0$  para  $x = 0$  e um mínimo relativo igual a  $-1$  para  $x = 1$ .

61.5.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < 0 \\ -x+3 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ x-3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \quad \left| |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se } x < 3 \end{cases} \right.$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } 0 < x < 3 \\ 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \text{ e } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 > 2$$

$f$  é contínua em  $x = 3$

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$
$f'$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f$	$\nearrow$	$3$	$\searrow$	$\nearrow$

Máx.

Min.

$f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0[$  e em  $[3, +\infty[$  e estritamente decrescente em  $[0, 3]$ .  $f$  tem um máximo relativo igual a  $3$  para  $x = 0$  e um mínimo relativo igual a  $0$  para  $x = 3$ .

$$61.6. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x = 1\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \left( \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \right)' = \frac{(2\sqrt{x})'(x-1) - 2\sqrt{x}(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} = \frac{x-1-2x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = \frac{-x-1}{\sqrt{x}(x-1)^2}$$

$$\forall x \in D_f, f'(x) < 0$$

$f$  é estritamente decrescente em  $[0, 1[$  e em  $]1, +\infty[$ .

$f$  não tem extremos.