

1.1.  $a^2 = 5 \Leftrightarrow a = \sqrt{5}$   
 $b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1$   
 $c^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow c^2 = 5 - 1 \Leftrightarrow c^2 = 4 \Leftrightarrow c = 2$   
 Vértices:  $(-\sqrt{5}, 0)$ ;  $(\sqrt{5}, 0)$ ;  $(0, -1)$  e  $(0, 1)$   
 Focos:  $(-2, 0)$  e  $(2, 0)$

1.2.  $5x^2 + 6y^2 = 30 \Leftrightarrow \frac{5x^2}{30} + \frac{6y^2}{30} = \frac{30}{30} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$   
 $a^2 = 6 \Leftrightarrow a = \sqrt{6}$   
 $b^2 = 5 \Leftrightarrow b = \sqrt{5}$   
 $c^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow c^2 = 6 - 5 \Leftrightarrow c^2 = 1 \Leftrightarrow c = 1$   
 Vértices:  $(-\sqrt{6}, 0)$ ;  $(\sqrt{6}, 0)$ ;  $(0, -\sqrt{5})$ ;  $(0, \sqrt{5})$   
 Focos:  $(-1, 0)$ ;  $(1, 0)$

2.  $C_1(-2, 0)$ ;  $C_2(2, 0)$ ;  $A(2, 3)$ ;  $c = 2$   
 $\overline{AC}_1 + \overline{AC}_2 = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(2+2)^2 + (3-0)^2} + \sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} = 2a$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{16+9} + \sqrt{9} = 2a \Leftrightarrow 8 = 2a \Leftrightarrow a = 4$   
 $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 - 4 \Leftrightarrow b^2 = 12$   
 A equação reduzida da elipse pedida é  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ .

3.1. a)  $k + \overline{JE} = F$   
 b)  $B - \overline{DF} = B + \overline{FD} = I$   
 c)  $\overline{DK} + \overline{EH} = \overline{JE} + \overline{EH} = \overline{JH}$  (por exemplo)  
 d)  $\overline{AE} = \overline{KL}$  e  $\overline{KL} + \overline{LC} = \overline{KC}$   
 Assim,  $\overline{AE} - \overline{CL} = \overline{KC}$  (por exemplo).  
 e)  $\|\overline{IH}\| = \frac{1}{2}\|\overline{BE}\|$  e os vetores  $\overline{IH}$  e  $\overline{BE}$  têm sentidos contrários. Assim,  $\overline{IH} = -\frac{1}{2}\overline{BE}$ .  
 f)  $\|\overline{EC}\| = 2\|\overline{FG}\|$  e os vetores  $\overline{EC}$  e  $\overline{FG}$  têm o mesmo sentido. Assim,  $\overline{EC} = 2\overline{FG}$ .

3.2. a)  $\|\overline{IC}\| = \frac{2}{3}\|\overline{AB}\|$   
 b)  $\|\overline{AE}\| = \frac{3}{2}\|\overline{DJ}\|$   
 Logo,  $\|\overline{DJ}\| = \frac{2}{3}\|\overline{AE}\| = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\|\overline{AB}\| = \frac{2}{9}\|\overline{AB}\|$   
 c)  $\|\overline{AH}\|^2 = \|\overline{AF}\|^2 + \|\overline{FH}\|^2$   
 $\|\overline{AF}\| = \frac{2}{3}\|\overline{AB}\|$   
 $\|\overline{FH}\| = \frac{2}{3}\|\overline{AF}\| = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\|\overline{AB}\| = \frac{4}{9}\|\overline{AB}\|$   
 $\|\overline{AH}\|^2 = \left(\frac{2}{3}\|\overline{AB}\|\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\|\overline{AB}\|\right)^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \|\overline{AH}\|^2 = \frac{4}{9}\|\overline{AB}\|^2 + \frac{16}{81}\|\overline{AB}\|^2 \Leftrightarrow \|\overline{AH}\|^2 = \frac{52}{81}\|\overline{AB}\|^2$   
 Logo,  $\|\overline{AH}\| = \frac{\sqrt{52}}{9}\|\overline{AB}\| = \frac{2\sqrt{13}}{9}\|\overline{AB}\|$   
 d)  $\|\overline{BD}\|^2 = \|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{AD}\|^2$   
 $\|\overline{AD}\| = \|\overline{FH}\| = \frac{4}{9}\|\overline{AB}\|$

Assim, tem-se:

$$\|\overline{BD}\|^2 = \|\overline{AB}\|^2 + \left(\frac{4}{9}\|\overline{AB}\|\right)^2 \Leftrightarrow \|\overline{BD}\|^2 = \|\overline{AB}\|^2 + \frac{16}{81}\|\overline{AB}\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\overline{BD}\|^2 = \frac{97}{81}\|\overline{AB}\|^2$$

Logo,  $\|\overline{BD}\| = \frac{\sqrt{97}}{9}\|\overline{AB}\|$ .

4.1.  $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AE} + \frac{4}{5}\overline{AE} = \frac{9}{5}\overline{AE} = \frac{9}{5}\vec{b}$

4.2.  $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} = -\frac{4}{5}\overline{AE} + \overline{AD} = \vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$

5. Para provar que o quadrilátero  $[ABED]$  é um trapézio é necessário mostrar que os segmentos  $[AB]$  e  $[DE]$  são paralelos, ou seja, que os vetores  $\overline{AB}$  e  $\overline{DE}$  são colineares.

$$\|\overline{DA}\| = \frac{1}{3}\|\overline{CD}\|$$

Logo,  $\|\overline{DC}\| = \frac{3}{4}\|\overline{AC}\|$ .

$$\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE} = \frac{3}{4}\overline{AC} + \frac{3}{4}\overline{CB} = \frac{3}{4}(\overline{AC} + \overline{CB}) = \frac{3}{4}\overline{AB}$$

Como  $\overline{DE} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ , os vetores  $\overline{DE}$  e  $\overline{AB}$  são colineares, pelo que os segmentos  $[DE]$  e  $[AB]$  são paralelos e, portanto, o quadrilátero  $[ABED]$  é um trapézio.

6.1.  $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \times h$

A medida da aresta da base é 3:  $A_b = 3^2 = 9$

$$V_{\text{pirâmide}} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 9 \times h = 12 \Leftrightarrow h = \frac{12 \times 3}{9} \Leftrightarrow h = 4$$

A cota de  $V$  é 4.

A projeção de  $V$  no plano  $xOy$  é o centro do quadrado  $[OPQR]$ .

Logo,  $V$  tem abcissa e ordenada iguais a  $\frac{3}{2}$ .

Portanto, o ponto  $V$  tem coordenadas  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 4\right)$

6.2. O plano  $z = 2$  intersesta os triângulos das faces laterais nos segmentos de reta que contêm os pontos médios das respetivas arestas. Logo, a medida do comprimento de cada um destes segmentos de reta é igual a metade das medidas das arestas da base, ou seja, é igual a  $\frac{3}{2}$ . Portanto, a secção

produzida é um quadrado com  $\frac{3}{2}$  de lado.

$$A = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \text{ logo a área da secção é igual a } \frac{9}{4} \text{ u.a.}$$

7.1. a)  $A(3, -3, 0)$ ;  $B(3, 0, 0)$ ;  $C(-3, 0, 0)$ ;  $D(-3, -3, 0)$ ;  
 $E(3, -3, 4)$ ;  $F(3, 0, 4)$ ;  $G(-3, 0, 4)$ ;  $H(-3, -3, 4)$

b)  $D'(-3, 3, 0)$

c)  $D''(3, 3, 0)$

7.2. a)  $y = 3$

b)  $z = 4$

7.3. a)  $x = -3 \wedge y = -3$

b)  $x = 3 \wedge z = 0$

c)  $x = -3 \wedge z = 4 \wedge -3 \leq y \leq 0$

d)  $y = 0 \wedge z = 0 \wedge -3 \leq x \leq 3$

e)  $-3 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 4 \wedge y = 0$

f)  $x = -3 \wedge -3 \leq y \leq 0 \wedge 0 \leq z \leq 4$

- 8.1. Representa o plano perpendicular ao eixo  $Oy$  que contém, por exemplo, o ponto de coordenadas  $(0, -3, 0)$ .
- 8.2. Representa a reta paralela ao eixo  $Oz$  que contém, por exemplo, o ponto de coordenadas  $(-1, 2, 0)$ .
- 8.3. Representa o segmento de reta paralelo ao eixo  $Ox$  cujos extremos são os pontos de coordenadas  $(0, 0, 4)$  e  $(4, 0, 4)$ .

Pág. 130

9.1.  $\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$   
 $\overline{BC} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$   
 $\overline{AC} = \sqrt{(1-1)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

Como os lados do triângulo  $[ABC]$  têm diferentes comprimentos, o triângulo  $[ABC]$  é escaleno.

$$\overline{BC}^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 = 6 + 2 = 8$$

Como  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ , pelo recíproco do Teorema de Pitágoras o triângulo  $[ABC]$  é retângulo.

9.2.  $D(x_1, y_1, 0)$

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$$

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{CD} \\ \overline{BD} = \overline{CD} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x_1-1)^2 + (y_1-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(x_1-1)^2 + (y_1-1)^2 + (0-2)^2} \\ \sqrt{(x_1-3)^2 + (y_1-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(x_1-1)^2 + (y_1-1)^2 + (0-2)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 - 4y_1 + 4 + 1 = y_1^2 - 2y_1 + 1 + 4 \\ x_1^2 - 6x_1 + 9 = x_1^2 - 2x_1 + 1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y_1 = 0 \\ -4x_1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Logo,  $D(1, 0, 0)$ .

10.1.  $P(x, y, z)$  representa os pontos do plano medidor.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4x + 4y - 6z + 1 - 4 - 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4y - 6z - 16 = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 3z - 8 = 0$$

Logo, o plano medidor é definido pela condição  $3x + 2y - 3z - 8 = 0$ .

10.2. O ponto  $P$  pertence ao plano medidor de  $[AB]$ .

$$3(k+1) + 2 \times (-k) - 3(2k) - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k + 3 - 2k - 6k - 8 = 0 \Leftrightarrow -5k = 5 \Leftrightarrow k = -1$$

Logo,  $k = -1$ .

10.3. a)  $3x + 2y - 3z - 8 = 0 \wedge x = -1 \wedge y = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3 \times (-1) + 2 \times 1 - 3z - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2 - 3z - 8 = 0 \Leftrightarrow -3z = 9 \Leftrightarrow z = -3$$

O plano medidor e a reta interseam-se no ponto de coordenadas  $(-1, 1, -3)$ .

b) Eixo  $Ox$ :  $y = 0 \wedge z = 0$

$$3x + 2y - 3z - 8 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 \times 0 - 3 \times 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

O plano medidor e o eixo  $Ox$  interseam-se no ponto de coordenadas  $(\frac{8}{3}, 0, 0)$ .

c) eixo  $Oy$ :  $x = 0 \wedge z = 0$   
 $3x + 2y - 3z - 8 = 0 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 3 \times 0 + 2y - 3 \times 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2y = 8 \Leftrightarrow y = 4$

O plano medidor e o eixo  $Oy$  interseam-se no ponto de coordenadas  $(0, 4, 0)$ .

d) eixo  $Oz$ :  $x = 0 \wedge y = 0$   
 $3x + 2y - 3z - 8 = 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3 \times 0 + 2 \times 0 - 3z - 8 = 0 \Leftrightarrow -3z = 8 \Leftrightarrow z = -\frac{8}{3}$$

O plano medidor e o eixo  $Oz$  interseam-se no ponto de coordenadas  $(0, 0, -\frac{8}{3})$ .

11.1. Raio da esfera:

$$r = \overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

A condição que define a esfera é  $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq 9$ .

11.2.  $(1-2)^2 + (1+1)^2 + 2^2 = 9 \Leftrightarrow 1 + 4 + 4 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9$

Logo, o ponto  $P$  pertence à superfície esférica  $S$ .

11.3. a)  $C(4, -3, -1); B(0, 1, 1); P(x, y, z)$

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 =$$

$$= (x-4)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 =$$

$$= x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 2z + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 8y - 4z - 24 = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - z - 6 = 0$$

Uma equação do plano medidor é  $2x - 2y - z - 6 = 0$  (ou equivalente)

b) A secção produzida na esfera  $E$  pelo plano  $\alpha$  é um círculo de raio 3 de centro no ponto  $A$  e contido no plano  $\alpha$ .

Esta secção é definida pela condição:

$$2x - 2y - z - 6 = 0 \wedge (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 9$$

$$A = \pi r^2 = \pi \times 9 = 9\pi \text{ u.a.}$$

Pág. 131

12.1. a)  $[K, G]$  (por exemplo)

b)  $[B, G], [I, L]$  e  $[A, H]$

12.2. a)  $[A, K]$  e  $[I, L]$  não são segmentos da reta equipolentes, porque não têm a mesma direção.

b)  $[D, J]$  e  $[E, F]$  não são segmentos de reta equipolentes, porque não têm o mesmo comprimento.

c)  $[H, E]$  e  $[F, G]$  não são segmentos de reta equipolentes, porque não têm o mesmo sentido.

12.3. a)  $\overline{AI} + \overline{CG} = \overline{AK}$  (por exemplo)

b)  $\overline{EF} - \overline{HD} = \overline{EF} + \overline{DH} = \overline{AB} + \overline{BF} = \overline{AF}$  (por exemplo)

c)  $K + \overline{ED} = J$

d)  $B - \overline{HF} = B + \overline{FH} = D$

e)  $\frac{1}{2}\overline{DC} - \overline{KD} = \overline{DJ} + \overline{DK} = \overline{DF}$

12.4.  $\overline{GA} = \overline{GC} + \overline{CB} + \overline{BA} = -\vec{w} - \vec{v} - 2\vec{u}$ , logo  $\overline{GA} = -2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ .

13.1. Como  $\overline{OA} = \overline{OB}$ , a ordenada de  $B$  é 3. Logo,  $B(0, 3, 0)$ .

$$V = \frac{1}{3}A_b \times h; h = \overline{OC}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{3^2}{2} \times h = 12 \Leftrightarrow h = \frac{12 \times 2}{3} \Leftrightarrow h = 8, \text{ logo } C(0, 0, 8).$$

13.2.  $A(3, 0, 0); B(0, 3, 0)$

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{(0-3)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

13.3.  $B(0, 3, 0); C(0, 0, 8)$

$$\|\overline{BC}\| = \sqrt{(0-0)^2 + (0-3)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

14.1.  $B(2, 5, 3)$ ,  $C(0, 5, 3)$ ,  $D(0, 3, 3)$ ,  $E(2, 3, 5)$ ,  $F(2, 5, 5)$ ,  $G(0, 5, 5)$  e  $H(0, 3, 5)$

14.2. a)  $B(2, 5, 3)$ ,  $H(0, 3, 5)$

$$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{5+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = M(1, 4, 4)$$

b)  $\overline{AB} = B - A = (2, 5, 3) - (2, 3, 3) = (0, 2, 0)$

$$\overline{HA} = A - H = (2, 3, 3) - (0, 3, 5) = (2, 0, -2)$$

$$\overline{AB} + \overline{HA} = (0, 2, 0) + (2, 0, -2) = (2, 2, -2)$$

c)  $D(0, 3, 3)$

$$\overline{FG} = G - F = (0, 5, 5) - (2, 5, 5) = (-2, 0, 0)$$

$$\overline{AH} = (-2, 0, 2)$$

$$D - \left(\frac{1}{2}\overline{FG} + 2\overline{AH}\right) =$$

$$= (0, 3, 3) - \left(\frac{1}{2}(-2, 0, 0) + 2(-2, 0, 2)\right) =$$

$$= (0, 3, 3) - ((-1, 0, 0) + (-4, 0, 4)) = (5, 3, -1)$$

14.3. a)  $\overline{AG} = G - A = (0, 5, 5) - (2, 3, 3) = (-2, 2, 2)$

$$\|\overline{AG}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

b)  $\overline{EC} = C - E = (0, 5, 3) - (2, 3, 5) = (-2, 2, -2)$

$$\overline{BH} = H - B = (0, 3, 5) - (2, 5, 3) = (-2, -2, 2)$$

$$\overline{AB} = (0, 2, 0)$$

$$\overline{EC} - \overline{BH} + 2\overline{AB} =$$

$$= (-2, 2, -2) - (-2, -2, 2) + 2(0, 2, 0) =$$

$$= (-2, 2, -2) + (2, 2, -2) + (0, 4, 0) = (0, 8, -4)$$

$$\|\overline{EC} - \overline{BH} + 2\overline{AB}\| = \sqrt{0^2 + 8^2 + (-4)^2} =$$

$$= \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

15.1.  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 0, 1)$ ,  $C(-1, 0, 1)$

$$\overline{AB} = B - A = (3, 0, 1) - (1, 2, 3) = (2, -2, -2)$$

$$\overline{BC} = C - B = (-1, 0, 1) - (3, 0, 1) = (-4, 0, 0)$$

Por exemplo, a ordenada de  $\overline{AB}$  é não nula e a ordenada de  $\overline{BC}$  é nula. Logo, os vetores  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  não são colineares e, portanto, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não estão alinhados.

Logo, a afirmação é falsa.

15.2.  $D(2, 1, -1)$ ,  $E(-1, -2, 3)$

$$M_{[DE]}\left(\frac{2-1}{2}, \frac{1-2}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = M_{[DE]}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Logo, a afirmação é verdadeira.

15.3.  $A(1, 2, 3)$  e  $D(2, 1, -1)$

$$\overline{AD} = D - A = (2, 1, -1) - (1, 2, 3) = (1, -1, -4)$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

Como o vetor  $(2, 1, -1)$  e o vetor  $\overline{AD}$  não são colineares, a equação dada não define a reta  $AD$ . Logo, a afirmação é falsa.

16.1.  $A(2, 4, 1)$

Em  $D$ ,  $C$ ,  $G$  e  $H$  a abscissa é  $-2$  e em  $B$ ,  $C$ ,  $G$  e  $F$  a ordenada é  $-8$ . Logo, as faces do cubo estão contidas nos planos de equações  $x = -2$ ,  $x = 2$ ,  $y = 8$ ,  $y = 4$ ,  $z = 1$  e  $z = 5$ .

A medida da aresta do cubo é igual à ordenada de  $A$ , ou seja, é 4.

Logo,  $B(2, 8, 1)$ ,  $C(-2, 8, 1)$ ,  $D(-2, 4, 1)$ ,  $E(2, 4, 5)$ ,

$F(2, 8, 5)$ ,  $G(-2, 8, 5)$  e  $H(-2, 4, 5)$ .

16.2. a)  $B(2, 8, 1)$  e  $H(-2, 4, 5)$

$$\overline{BH} = H - B = (-2, 4, 5) - (2, 8, 1) = (-4, -4, 4)$$

$$(x, y, z) = (2, 8, 1) + k(-4, -4, 4), k \in \mathbb{R}$$

b) Plano  $xOy$ :  $z = 0$

$$(x, y, z) = (2, 8, 1) + k(-4, -4, 4) \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - 4k \wedge y = 8 - 4k \wedge 0 = 1 + 4k \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - 4k \wedge y = 8 - 4k \wedge z = 0 \wedge k = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 - 4\left(-\frac{1}{4}\right) \wedge y = 8 - 4\left(-\frac{1}{4}\right) \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \wedge y = 9 \wedge z = 0$$

A reta  $r$  e o plano  $xOy$  interseitam-se no ponto  $(3, 9, 0)$ .

16.3. O centro da superfície esférica é o ponto médio de  $[AG]$ .

$A(2, 4, 1)$  e  $G(-2, 8, 5)$

$$M_{[AG]}\left(\frac{2-2}{0}, \frac{4+8}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = M_{[AG]}(0, 6, 3)$$

O raio da superfície esférica é:

$$r = \frac{1}{2}\|\overline{AG}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16+16+16} = \frac{1}{2}\sqrt{48}$$

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{48}\right)^2 = \frac{1}{4} \times 48 = 12$$

A equação da superfície esférica é  $x^2 + (y - 6)^2 + (z - 3)^2 = 12$

17.  $y = mx + b$  ou  $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}; \text{ ponto: } (3, \sqrt{3})$$

$$y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 3) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

A equação pedida é  $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ .

18.1.  $r: 3x + 2y = 4 \Leftrightarrow 2y = -3x + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2$

$$m = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tan \theta = -\frac{3}{2}, \text{ logo } \theta = 180^\circ - \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 123,7^\circ$$

A inclinação da reta  $r$  é aproximadamente igual a  $123,7^\circ$ .

18.2.  $r: 3x + 2y = 4$ ; ponto:  $\left(a, \frac{1}{2}\right)$

$$3a + 2 \times \frac{1}{2} = 4 \Leftrightarrow 3a = 3 \Leftrightarrow a = 1$$

O ponto de interseção das duas retas é  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

$$s: x + my = 3 \rightarrow 1 + m \times \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m = 2 \Leftrightarrow m = 4$$

$$\text{A equação da reta } s \text{ é } x + 4y = 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$m_s = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{4}; \alpha = 180^\circ - \arctan\left(\frac{1}{4}\right) \approx 166,0^\circ$$

A inclinação da reta  $s$  é aproximadamente igual a  $166,0^\circ$ .

19.1.  $(k\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow k\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow k\|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k \times 2^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4k = -4 \Leftrightarrow k = -1$$

19.2.  $2\vec{v} \cdot (3\vec{u} - k\vec{v}) = -2 \Leftrightarrow 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 2k\vec{v} \cdot \vec{v} = -2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 2k\|\vec{v}\|^2 = -2 \Leftrightarrow 6 \times (-4) - 2k \times 3^2 = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24 - 18k = -2 \Leftrightarrow -18k = 22 \Leftrightarrow k = -\frac{11}{9}$$

$$20. \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad \left[ \overline{AB} \perp \overline{BC} \right]$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{AB} + 0 = \|\overline{AB}\|^2 = \overline{AB}^2$$

$$21. \quad \overline{FB} \cdot \overline{BH} = \overline{FB} \cdot (\overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DH}) = \overline{FB} \cdot \overline{BC} + \overline{FB} \cdot \overline{CD} + \overline{FB} \cdot \overline{DH} = 0 + 0 + \overline{FB} \cdot \overline{DH} = \overline{FB} \cdot (-\overline{FB}) = -\overline{FB} \cdot \overline{FB} = -\|\overline{FB}\|^2$$

22.1. As retas  $r$  e  $s$  são paralelas se tiverem o mesmo declive  $r: kx + (k-1)y = 2k + 4 \Leftrightarrow (k-1)y = -kx + 2k + 4 \Leftrightarrow$

$$y = -\frac{kx}{k-1} + \frac{2k+4}{k-1} \wedge k \neq 1 \rightarrow m_r = \frac{-k}{k-1}$$

$$s: 3kx - (3k+1)y = 5k + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(3k+1)y = -3kx + 5k + 4 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{3kx}{3k+1} - \frac{5k+4}{3k+1} \wedge k \neq -\frac{1}{3} \rightarrow m_s = \frac{3k}{3k+1}$$

$$\frac{-k}{k-1} = \frac{3k}{3k+1} \Leftrightarrow \frac{-k}{k-1} - \frac{3k}{3k+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3k^2 - k - 3k^2 + 3k = 0 \wedge k - 1 \neq 0 \wedge 3k + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6k^2 + 2k = 0 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k(-3k+1) = 0 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{1}{3}$$

As retas  $r$  e  $s$  são paralelas para  $k \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$

22.2. As retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares se o produto dos declives for  $-1$ .

$$\frac{-k}{k-1} \times \frac{3k}{3k+1} = -1 \Leftrightarrow \frac{-3k^2}{3k^2+k-3k-1} = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 3k^2 - 2k - 1 = 0 \\ k = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k^2}{3k^2-2k-1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 = 3k^2 - 2k - 1 \wedge k \neq -\frac{1}{3} \wedge k \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k = -1 \wedge k \neq -\frac{1}{3} \wedge k \neq 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

As retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares se  $k = -\frac{1}{2}$ .

**Pág. 134**

23.1. O vetor  $\overline{OE}$  é normal ao plano  $BDF$  se for perpendicular a dois vetores não colineares paralelos ao plano  $BDF$ .

$$B(1, 1, 0), D(1, 0, 1), F(0, 1, 1)$$

$$\overline{BD} = D - B = (1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (0, -1, 1)$$

$$\overline{DF} = F - D = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 0)$$

$$O(0, 0, 0), E(1, 1, 1)$$

$$\overline{OE} = E - O = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

$$\overline{OE} \cdot \overline{BD} = (1, 1, 1) \cdot (0, -1, 1) = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$\overline{OE} \cdot \overline{DF} = (1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 0) = -1 + 1 + 0 = 0$$

Logo, o vetor  $\overline{OE}$  é normal ao plano  $BDF$ .

23.2. Vetor normal:  $\overline{OE}(1, 1, 1)$ ; ponto:  $I\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

$$\text{Equação do plano: } ax + by + cz + d = 0$$

$$1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 + 1 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$$

Uma equação do plano  $\alpha$  é  $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$ .

23.3.  $G(0, 0, 1)$  e  $B(1, 1, 0)$

$$\overline{GB} = B - G = (1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (1, 1, -1)$$

Um sistema de equações paramétricas da reta  $GB$  é

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

23.4.  $\alpha: x + y + z - \frac{3}{2} = 0$

$$\text{Reta } GB: \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$k + k + 1 - k - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}, \text{ logo } T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

O plano  $\alpha$  e a reta  $GB$  interseccionam-se no ponto  $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

24.1. Centro da superfície esférica:  $M_{[PQ]}$

$$P(1, 1, -2) \text{ e } Q(1, 1, 4)$$

$$M_{[PQ]} = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$$

$$M_{[PQ]} = (1, 1, 1)$$

$$\text{Raio da superfície esférica: } \frac{1}{2} \overline{PQ}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

$$\frac{1}{2} \overline{PQ} = 3$$

O ponto  $F$  pertence à superfície esférica se  $\overline{FM} = 3$

$$F(0, 2, 2) \quad \overline{FM} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3} \neq 3$$

Logo, o ponto  $F$  não pertence à superfície esférica.

24.2.  $A(2, 0, 0), D(2, 0, 2), Q(1, 1, 4)$

$$\overline{AD} = D - A = (0, 0, 2); \quad \overline{DQ} = Q - D = (-1, 1, 2)$$

$\vec{n}(a, b, c)$  é um vetor normal ao plano  $ADQ$ .

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 0, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 1, 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = a \end{cases}$$

$$\vec{n}(a, a, 0), a \neq 0$$

Para  $a = 1, \vec{n}(1, 1, 0)$ .

Assim, a equação do plano  $ADQ$  é:

$$1(x-2) + 1 \times y + 0 \times z = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$$

$$E(2, 2, 2), G(0, 0, 2), \text{ logo } \overline{EG} = G - E = (-2, -2, 0).$$

Um vetor diretor da reta  $EG$  é  $\overline{EG}(-2, -2, 0)$ .

$$\vec{n}(1, 1, 0) \text{ e } \overline{EG}(-2, -2, 0)$$

Como  $\overline{EG} = -2\vec{n}$ , os vetores diretor da reta e normal ao plano são colineares.

Logo, a reta é perpendicular ao plano.

24.3.  $A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), P(1, 1, -2)$

$$\overline{AB} = B - A = (0, 2, 0)$$

$$\overline{BP} = P - B = (-1, -1, -2)$$

Uma equação vetorial do plano  $ABP$  é

$$(x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(0, 2, 0) + \mu(-1, -1, -2), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$