Questões tipo exame

Pág. 116

1.1. Os algarismos 1 e 2 podem ocupar ${}^5A_2$ posições diferentes.

Os restantes lugares são ocupados por três algarismos escolhidos de entre oito, portanto, existem ${}^8A_3$ maneiras diferentes de o fazer.

Assim, o número total é igual a ${}^5A_2 \times {}^8A_3$.

No entanto, há que subtrair os números em que o algarismo das dezenas de milhar é 0. O número de posições diferentes de 1 e 2 é ${}^4A_2$ e o número de posições diferentes dos sete algarismos restantes é ${}^7A_2$. O número a subtrair é ${}^4A_2 \times {}^7A_2$.

Logo, o número pedido é ${}^5A_2 \times {}^8A_3 - {}^4A_2 \times {}^7A_2 = 6216$.

1.2. **1.º caso:** Os algarismos 1 e 2 ocupam a casa das dezenas de milhar e de milhar.

Há $2 \times {}^8A_3$ maneiras diferentes de fazer a escolha.

2.º caso: Os algarismos 1 e 2 não ocupam a casa das dezenas de milhar.

Esquematizando:

$\_\ \underline{1}\ \underline{2}\ \_\ \_ \rightarrow 2 \times {}^8A_3 - 2 \times {}^7A_2$

(ao número total subtraem-se os números em que o algarismo das dezenas de milhar é 0).

De modo análogo:

$\_\ \_\ \underline{2}\ \underline{1}\ \_ \rightarrow 2 \times {}^8A_3 - 2 \times {}^7A_2$

$\_\ \_\ \_\ \underline{1}\ \underline{2} \rightarrow 2 \times {}^8A_3 - 2 \times {}^7A_2$

Portanto, o número pedido é:

$$2 \times {}^8A_3 + 3 \times \left(2 \times {}^8A_3 - 2 \times {}^7A_2\right) = 2436$$

1.3. Pretendem-se números pares, ou seja, números cujo algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6 ou 8.

Assim:

- números de um algarismo: 4
- números de dois algarismos:
  sendo o 0 o algarismo das unidades, há nove números;
  sendo o 2, 4, 6 ou 8 o algarismo das unidades, há 4 × 8 números;
- números de três algarismos:
  sendo o 0 o algarismo das unidades, há ${}^9A_2$ números;
  sendo o 2, 4, 6 ou 8 o algarismo das unidades, há $4 \times \left({}^9A_2 - 8\right)$ números.
- números de quatro algarismos: como se pretende que o número seja inferior a 2000, o algarismo dos milhares apenas pode ser o 1, portanto, há $5 \times {}^8A_2$ números.

O número pedido é:

$$4 + 9 + 4 \times 8 + {}^9A_2 + 4 \times \left({}^9A_2 - 8\right) + 5 \times {}^8A_2 = 653$$

2.1. O produto dos números das bolas retiradas é igual a 9 em dois casos distintos: quando se retiram duas bolas com o número 3 ou quando se retira uma bola com o número 1 e uma bola com o número 9.

Portanto, o número pedido é ${}^4C_2 + {}^3C_2 \times 1 = 9$.

2.2.

$$\underbrace{{}^9C_3 \times {}^6C_4 \times {}^2C_1}_{\text{Todas as sequências}} - \underbrace{2 \times \left({}^8C_3 \times {}^5C_4\right)}_{\text{Sequências em que a primeira bola ou a última têm o número 0}} = 1960$$

Ou

$$\frac{9!}{3! \times 4!} - 2 \times \frac{8!}{3! \times 4!} = 1960$$

3. Para que a comissão seja mista temos duas hipóteses: uma rapariga e dois rapazes **ou** um rapaz e duas raparigas.

A resposta $3 \times 12 \times {}^{16}A_2 + 3 \times 16 \times {}^{12}A_2$ é correta pois:

1.ª hipótese – um rapaz e duas raparigas – $3 \times 12 \times {}^{16}A_2$ (3 é o número de maneiras de escolher o cargo que vai ser ocupado pelo rapaz; para cada uma destas maneiras, 12 é o número opções para a escolha do rapaz e ${}^{16}A_2$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente duas das 16 raparigas para preencherem os cargos não ocupados pelo rapaz);

2.ª hipótese – uma rapariga e dois rapazes – $3 \times 16\ {}^{12}A_2$ (3 é o número de maneiras de escolher o cargo que vai ser ocupado pela rapariga; para cada uma destas maneiras, 16 é o número de opções para a escolha da rapariga e ${}^{12}A_2$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente 2 dos 12 rapazes para preencherem os cargos não ocupados pela rapariga).

Portanto, o número pedido é $3 \times 12 \times {}^{16}A_2 + 3 \times 16 \times {}^{12}A_2$.

A resposta ${}^{28}A_3 - \left({}^{16}A_3 + {}^{12}A_3\right)$ é correta, pois:

A expressão ${}^{28}A_3$ designa o número de comissões diferentes que se podem formar – escolhem-se 3 dos 28 alunos para preencherem os 3 cargos ordenadamente.

A expressão ${}^{16}A_3$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente 3 das 16 raparigas para preencheram os três cargos.

A expressão ${}^{12}A_3$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente três dos 12 rapazes para preencherem os três cargos.

Portanto, a expressão ${}^{28}A_3 - \left({}^{16}A_3 + {}^{12}A_3\right)$, sendo a diferença entre o número total de comissões e o número total de comissões só com raparigas e só com rapazes, representa o número de comissões mistas distintas que se podem formar.

Pág. 117

4.1. Sabemos que a soma de todos os elementos da linha de ordem n é igual a 2^n.

Vamos, assim, procurar descobrir o valor de n tal que $2^n = 1\,048\,576$.

Uma vez que $2^{20} = 1\ 048\ 576$, temos $n = 20$.

$$\begin{array}{r|l} 1\,048\,576 & 2 \\ 524\,288 & 2 \\ 262\,144 & 2 \\ \ldots & \ldots \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 20$$

Se $n = 20$, então os elementos da linha seguinte são da forma ${}^{21}C_k$, com $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 21\}$.

Portanto, o terceiro elemento da linha seguinte é ${}^{21}C_2 = 210$.

4.2. Trata-se da linha de ordem 20 do Triângulo de Pascal. Esta linha tem 21 elementos, pelo que o número de casos possíveis é ${}^{21}C_2$.

O número de casos favoráveis é igual a 10, pois:

${}^{20}C_0 = {}^{20}C_{20}$, ${}^{20}C_1 = {}^{20}C_{19}$, …, ${}^{20}C_9 = {}^{20}C_{11}$

Portanto, a probabilidade pedida é $\dfrac{10}{{}^{21}C_2} = \dfrac{1}{21}$.

5. O termo geral do desenvolvimento é:

$$T_{p+1} = {}^{33}C_p \left(x\sqrt{x}\right)^{33-p} \left(\frac{1}{x^4}\right)^p = {}^{33}C_p \left(x \times x^{\frac{1}{2}}\right)^{33-p} \left(x^{-4}\right)^p =$$

$$= {}^{33}C_p \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{33-p} x^{-4p} = {}^{33}C_p x^{\frac{99-3p}{2}} x^{-4p} =$$

$$= {}^{33}C_p x^{\frac{99-11p}{2}}$$

Para definirmos o termo independente de x procuramos determinar p tal que: $\dfrac{99-11p}{2} = 0 \Leftrightarrow 99 - 11p \Leftrightarrow p = 9$

Assim, o termo independente de x é ${}^{33}C_9 = 38\,567\,100$.

6.1. Número de casos possíveis: ${}^{23}C_2$

Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_2$ (a escolha é feita entre avançados e médios)

$$P = \frac{{}^{12}C_2}{{}^{23}C_2} = \frac{66}{253} = \frac{6}{23}$$

6.2. Número de casos possíveis: $23!$

Número de casos favoráveis:

$${}^{11}A_3 \times {}^{12}A_5 \times 15!$$

Formas de ordenar os restantes

Escolha dos lugares para os avançados na fila da frente

Escolha dos lugares para os defesas na fila de trás

$$P = \frac{{}^{11}A_3 \times {}^{12}A_5 \times 15!}{23!} \approx 0{,}005$$

Pág. 118

7.1. O António tem 12 livros na estante do seu quarto, pelo que pretende selecionar 6. Por outro lado, tem quatro livros de José Saramago e como pretende levar para a sua casa em São Jacinto, pelo menos, três destes livros, pode levar três ou quatro.

Assim, o número de maneiras diferentes de o António fazer a sua escolha é ${}^4C_3 \times {}^8C_3 + {}^4C_4 \times {}^8C_2 = 252$.

7.2. O número de casos possíveis é $6!$.

A sequência dos dois livros de Valter Hugo Mãe pode ser estabelecida de 2! maneiras diferentes. A ordem de leitura dos restantes quatro livros juntamente com o bloco dos dois livros de Valter Hugo Mãe pode ser definida de 5! maneiras diferentes.

Há, portanto, $2! \times 5!$ maneiras de fixar a sequência de leitura dos seis livros de forma que os dois livros de Valter Hugo Mãe fiquem um a seguir ao outro.

A probabilidade pedida é $\dfrac{2! \times 5!}{6!} = \dfrac{1}{3}$.

8. $$P\left((A \cup B) \mid \overline{A}\right) = \frac{P\left[(A \cup B) \cap \overline{A}\right]}{P\left(\overline{A}\right)} =$$

$$= \frac{P\left[\left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right]}{P\left(\overline{A}\right)}$$

$$= \frac{P\left[\varnothing \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right]}{P\left(\overline{A}\right)} =$$

$$= \frac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = P\left(B \mid \overline{A}\right)$$

9.1. Existem duas hipóteses: dois vértices pertencem à reta r e um à reta t **ou** dois pertencem à reta t e um à reta r.

O número pedido é ${}^5C_2 \times 4 + {}^4C_2 \times 5 = 70$.

9.2. O número de casos possíveis é $9\times 9=9^2$ (cada um deles escolhe um dos nove pontos).

Existem duas hipóteses: os dois pontos escolhidos pertencem à reta r (existem $5\times 5=5^2$ casos) **ou** os dois pontos escolhidos pertencem à reta t (existem $4\times 4=4^2$ casos).

O número de casos favoráveis é 5^2+4^2.

Atendendo à regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{5^2+4^2}{9^2}=\frac{41}{81}$.

9.3. Por três pontos não colineares passa uma única circunferência e nenhuma circunferência passa por três pontos colineares.

Assim, e para garantir que não escolhemos três pontos colineares, selecionamos dois pontos da reta r e um ponto da reta t (${}^5C_2\times 4$ casos) ou selecionamos dois pontos da reta t e um ponto da reta s (${}^4C_2\times 5$ casos).

O número pedido é ${}^5C_2\times 4+{}^4C_2\times 5$.

Relativamente à outra resposta correta, podemos considerar todas as maneiras diferentes de escolher três pontos de entre os nove pontos representados $\left({}^9C_3\right)$ e, em seguida, subtrair o número de casos em que os três pontos não definem uma circunferência, que correspondem às situações em que os três pontos escolhidos estão sobre a reta r $\left({}^5C_3\right)$ ou os três pontos estão sobre a reta t $\left({}^4C_3\right)$.

O número pedido é ${}^9C_3-\left({}^5C_3+{}^4C_3\right)$.

Pág. 119

10.1. a) Número de casos possíveis: ${}^8C_2$

Número de casos favoráveis:

$$\underbrace{{}^8C_2-12}_{\text{Número de retas que contêm arestas}}$$

A probabilidade pedida é $\frac{{}^8C_2-12}{{}^8C_2}=\frac{4}{7}$.

b) $P\left(A\mid \overline{B}\right)$ significa a probabilidade de a reta *r* conter uma diagonal de uma das faces do prisma sabendo que essa reta não está contida em nenhum dos planos das bases do prisma.

O número de casos possíveis é:

${}^8C_2-2\times{}^4A_2=28-12=16$

sendo ${}^8C_2$ o número total de retas que é possível definir escolhendo dois dos oito vértices e $2\times{}^4A_2$ o número dessas retas que estão contidas num dos planos das duas bases do prisma.

Como se sabe que a reta *r* não está contida num dos planos das duas bases do prisma, o número de casos favoráveis é $2\times 4=8$, ou seja, é o número de diagonais das faces laterais do prisma.

Portanto, atendendo à regra de Laplace,

$P\left(B\mid \overline{A}\right)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

10.2. Há três maneiras de pintar as bases (as duas a azul (A), as duas a vermelho (V) ou uma de cada cor) e apenas uma maneira de pintar as faces laterais (note que o prisma com as faces V-A-V-A é igual ao prisma com as faces A-V-A-V).

Portanto, o prisma pode ser pintado de $3\times 1=3$ maneiras diferentes.

11. Designando por A o acontecimento "a carta é de paus" e por B o acontecimento "a carta é preta", a probabilidade pedida é $P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)$.

Do enunciado, sabemos que, deste grupo de cartas:

- a quarta parte é de paus, ou seja, $P(A)=\frac{1}{4}$.
- a terça parte são cartas pretas, ou seja, $P(B)=\frac{1}{3}$
- das cartas pretas, metade é de paus, ou seja, $P(A\mid B)=\frac{1}{2}$.

$$P(A\cap B)=P(A\mid B)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)&=P\left(\overline{B\cup A}\right)=1-P(B\cup A)=\\&=1-\left(P(A)+P(B)-P(B\cap A)\right)=\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

Pág. 120

12.1.
$$\begin{aligned}P(A\mid B)-P\left(\overline{B}\right)\times P(A\mid B)&=P(A\mid B)\left[1-P\left(\overline{B}\right)\right]=\\&=P(A\mid B)\times P(B)=\\&=P(A\cap B)=\\&=P(A)\times P(B\mid A)\end{aligned}$$

12.2. Sejam os acontecimentos:

A: "O funcionário escolhido é mulher."

B: "O funcionário escolhido é licenciado."

Como 60% dos funcionários são licenciados, $P(B)=0{,}6$.

Como 30% dos funcionários são mulheres, $P(A)=0{,}3$.

Finalmente, como metade dos funcionários licenciados são mulheres, tem-se $P(A\mid B)=0{,}5$.

Pretende-se determinar $P(B\mid A)$.

$P(A\cap B)=P(A\mid B)\times P(B)=0{,}5\times 0{,}6=0{,}3$

$P(B\mid A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0{,}3}{0{,}3}=1$, ou seja,

$P(B\mid A)=100\%$

13.1. No contexto da situação descrita, $P(B\mid A)$ é a probabilidade de, lançando o dado duas vezes, o produto dos números saídos nos dois lançamentos ser igual a 0, sabendo que a soma dos números saídos nos dois lançamentos é igual a 0.

A soma dos números saídos é igual a 0 em duas hipóteses: quando os dois números saídos são 0 **ou** quando um dos números saídos é um 1 e o outro é um –1.

Observando a tabela a seguir, verifica-se que há 10 casos possíveis:

- quatro da forma (0 , 0)
- três da forma (–1 , 1)
- três da forma (1 , –1)

+	–1	0	0	1	1	1
–1	–2	–1	–1	0	0	0
0	–1	0	0	1	1	1
0	–1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	2	2	2
1	0	1	1	2	2	2
1	0	1	1	2	2	2

De entre estes, os que correspondem a produtos iguais a 0 são (0 , 0). Assim, existem quatro casos favoráveis, pelo que: $P(B\mid A)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

13.2. A superfície esférica de centro na origem e raio $\sqrt{2}$ pode ser definida pela equação $x^2+y^2+z^2=2$.

Número de casos possíveis:

$\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$

6 6 6

$6\times 6\times 6=6^3=216$

Número de casos favoráveis

Sabemos que quatro faces têm um número cujo valor absoluto é 1 e duas faces têm inscrito o número 0.

Para que $x^2+y^2+z^2=2$ terão de ser duas coordenadas com módulo 1 e uma nula:

$\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$

4 4 2 $\left(x=\pm 1,\ y=\pm 1 \text{ e } z=0\right)$

$(4\times 4\times 2)\times 3=96$

a coordenada nula pode ser x, y ou z

Há 96 casos favoráveis

$P=\dfrac{96}{216}=\dfrac{4}{9}$

Pág. 121

14.1. O número de casos possíveis é ${}^{12}C_2$ (número de maneiras de escolher duas bolas de entre 12).

O número de casos favoráveis é ${}^{6}C_2+{}^{6}C_2$ (${}^{6}C_2$ é o número de maneiras de escolher duas bolas vermelhas de entre nove e ${}^{6}C_2$ é o número de maneiras de escolher duas bolas verdes de entre seis).

A probabilidade pedida é $P=\dfrac{{}^{6}C_2+{}^{6}C_2}{{}^{12}C_2}=\dfrac{5}{11}$.

14.2. No contexto da situação descrita, $P(A\mid B)$ é a probabilidade de, tirando em simultâneo duas bolas do saco, estas terem cor diferente, sabendo que a soma dos números das duas bolas é inferior a 9.

Existem 12 casos possíveis: 1 e 2 ; 1 e 3 ; 1 e 4 ; 1 e 5 ; 1 e 6 , 1 e 7; 2 e 3 ; 2 e 4 ; 2 e 5 , 2 e 6; 3 e 4 ; 3 e 5

De entre estes, apenas um corresponde a bolas de cor diferente (1 e 7). Assim, $P(A\mid B)=\dfrac{1}{12}$.

15.1. $P\left(\overline{B\cup C}\mid A\right)=\dfrac{P\left(A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)\right)}{P(A)}=$

$=\dfrac{P(A)-P\left(A\cap(B\cup C)\right)}{P(A)}=$

$=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P\left[(A\cap B)\cap(A\cap C)\right]}{P(A)}$

$=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)-P(A\cap C)+P\left[A\cap(B\cap C)\right]}{P(A)}=$

$=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)-P(A\cap C)+P(A\cap\varnothing)}{P(A)}=$

$=\dfrac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P(A)}-\dfrac{P(C\cap A)}{P(A)}+\dfrac{P(\varnothing)}{P(A)}$

$=P\left(\overline{B}\mid A\right)-P(C\mid A)-\dfrac{0}{P(A)}=P\left(\overline{B}\mid A\right)-P(C\mid A)$

15.2. Sejam A, B e C os acontecimentos:

A : “O cartão extraído tem um número par.”

B : “O cartão extraído tem um número múltiplo de 5.”

C : “O cartão extraído tem um número múltiplo de 7.”

Existem 60% dos cartões numerados com um número par, portanto, $P(A)=0{,}6$. Dos cartões que estão numerado com um número par, $\frac{2}{3}$ não estão numerados com um múltiplo de 5, ou seja, $P(\overline{B}\mid A)=\frac{2}{3}$.

Sabe-se, ainda, que 10% dos cartões estão numerados com um número par e múltiplo de 7, portanto, $P(A\cap C)=0{,}1$.

Por outro lado:

$$P(C\mid A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{0{,}1}{0{,}6}=\frac{1}{6}$$

A probabilidade de o cartão não estar numerado com um número múltiplo de 5 nem com um número múltiplo de 7, sabendo que está numerado com um número par, é dada por:

$$P\left[\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)\mid A\right]=P\left[\left(\overline{B\cup C}\right)\mid A\right]=$$

$$=P(\overline{B}\mid A)-P(C\mid A)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

16.1. $P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)\times P(\overline{B})=P(A\cap\overline{B})\times P(B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)\times\left[1-P(B)\right]=$$

$$=\left[P(A)-P(A\cap B)\right]\times P(B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)-P(A\cap B)\times P(B)=$$

$$=P(A)\times P(B)-P(A\cap B)\times P(B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

Portanto, $P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})$ se e só se os acontecimentos A e B são independentes.

16.2. Como A e B são independentes:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{3}\times P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{15}\times 3\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{5}$$

$$P(\overline{A}\mid B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{3}$$

Pág. 122

17.1. O número pedido é $(4!)^3\times 3!=82\,944$ (3! é o número de maneiras de dispor ordenadamente os três grupos de cartas – reais, valetes e damas – para cada uma destas ordenações, existem 4! maneiras de dispor os reis, 4! maneiras de dispor os valetes e 4! maneiras de dispor as damas).

17.2. Seja A o acontecimento: “Nas três cartas tiradas, há pelo menos um rei”

Tem-se que o acontecimento contrário de A é:

$\overline{A}$: “Nas três cartas retiradas não há qualquer rei”

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{{}^{8}C_3}{{}^{12}C_3}=\frac{41}{55}$$

17.3. Sejam os acontecimentos:

B : “A carta retirada é de paus”, logo $P(B)=0{,}6$.

C : “A carta retirada é um rei”, logo $P(C)=0{,}4$.

Por outro lado, a probabilidade de a carta retirada ser de paus ou ser um rei é 80%. Portanto, $P(A\cup B)=0{,}8$.

Sabemos que $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$.

$$0{,}8=0{,}6+0{,}4-P(B\cap C)\Leftrightarrow P(B\cap C)=0{,}2$$

Sendo positiva a probabilidade de “retirar carta de paus e ser um rei”, isto é, “retirar o rei de paus”, tal significa que é possível retirar essa carta, pelo que necessariamente ela está neste novo grupo de cartas.

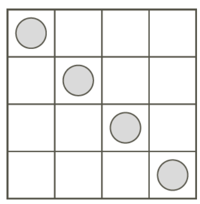
18.1. O número de casos possíveis é ${}^{16}C_4$ (número de maneiras diferentes de distribuir quatro peças iguais por 16 casas).

O número de casos favoráveis é 4! (existem quatro possibilidades para colocar a primeira peça na primeira linha, três possibilidades para colocar a segunda peça na segunda linha, duas possibilidades para colocar a terceira na terceira linha e apenas uma possibilidade para colocar a última peça na última linha).

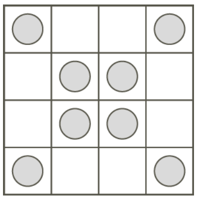
Assim, a probabilidade pedida é $\frac{4!}{{}^{16}C_4}=\frac{6}{455}$.

18.2. Como as 12 peças são todas iguais, o número de casos possíveis é o número de maneiras de escolher um conjunto de 12 casas de entre as 16, ou seja, ${}^{16}C_{12}$.

Comecemos por contar os quadros em que está preenchida a diagonal indicada na figura.



Restam oito peças para distribuir por 12 casas. Temos então ${}^{12}C_8$ quadros com esta diagonal preenchida e outros tantos quadros com a outra diagonal preenchida.
Todavia, há quadros que foram contados duas vezes: os que têm as duas diagonais preenchidas.



Para estes estarem preenchidos já só restam quatro peças para distribuir por oito casas e isso pode ser feito de ${}^{8}C_4$ maneiras diferentes.

Assim, há ${}^{12}C_8 \times 2 - {}^{8}C_4$ casos favoráveis.

A probabilidade pedida é $\frac{{}^{12}C_8 \times 2 - {}^{8}C_4}{{}^{16}C_{12}} \approx 0,505$.

19.1. O número de caminhos diferentes que ligam o ponto A ao ponto B , nas condições enumeradas, é ${}^{14}C_9$ (ou ${}^{14}C_5$), ou seja, 2002.

19.2. O número de caminhos diferentes que ligam o ponto A ao ponto C , nas condições referidas, é ${}^{7}C_4$ e o número de caminhos diferentes que ligam o ponto C ao ponto B , nas condições enunciadas, é ${}^{7}C_5$.

Portanto, ${}^{7}C_4 \times {}^{7}C_5$ é o número de casos favoráveis.

O número de casos possíveis é ${}^{14}C_9 = 2002$.

A probabilidade pedida é $\frac{{}^{7}C_4 \times {}^{7}C_5}{2002} = \frac{105}{286}$.

Pág. 123

20.1. Foram dados tantos apertos de mão quantos os conjuntos de dois professores que se podem formar. Admitindo que representamos o número de professores por n , podemos traduzir o problema pela equação ${}^{n}C_2 = 11\ 175$.

$${}^{n}C_2 = 11\ 175 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 11\ 175 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 22\ 350 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 22\ 350 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 22\ 350}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 299}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -149 \vee n = 150$$

Como apenas a solução 150 é um número natural, então 150 é o número de professores do encontro.

20.2. Neste encontro participaram 150 professores e destes 20% são do género feminino, portanto, no encontro participaram 30 mulheres e 120 homens.

Pretende-se determinar o número de comissões com, no máximo, duas mulheres, formadas por seis professores.
Estas têm duas mulheres, uma mulher ou nenhuma mulher.
Assim:

$${}^{120}C_6 + {}^{120}C_5 \times 30 + {}^{120}C_4 \times {}^{30}C_2 = 12\ 943\ 424\ 130$$

21.1. O número de casos possíveis é o número de arranjos completos (porque pode haver repetição) de nove elementos (bolas) para três posições (extrações), ou seja,

${}^{9}A'_3 = 9^3 = 729$ casos possíveis.

O número de casos favoráveis pode ser determinado observando que, entre os números presentes nas bolas, 1, 2, 3 e 6 são divisores de 6. Assim, para que o produto seja 6 , terão de sair bolas com os números:

- 1, 1 e 6, o que pode acontecer de três maneiras diferentes (o número 6 pode sair em primeiro lugar, em segundo ou em terceiro);
- 1, 2 e 3, o que pode acontecer de $P_3 = 3!$ maneiras diferentes.

Assim, o número de casos favoráveis é $3 + 3! = 3 + 6 = 9$.

A probabilidade pedida é $\frac{9}{729} = \frac{1}{81}$.

21.2. O número de casos prováveis é 9! (número de maneiras diferentes de nove bolas distintas poderem ocupar nove lugares).

O número de casos favoráveis é $5! \times 4! \times 6$ (5! é o número de maneiras de ordenar as cinco bolas ímpares, 4! é o número de maneiras de ordenar as quatro bolas pares e seis é o número de posições que o bloco das quatro bolas pares pode ocupar).

A probabilidade pedida é $\frac{5! \times 4! \times 6}{9!} = \frac{1}{21}$.

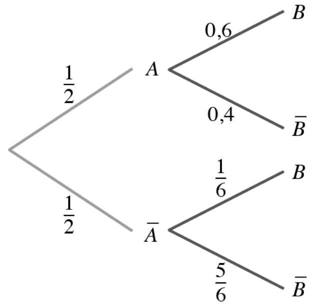
22. Sejam os acontecimentos:

A : "O dado lançado foi o viciado."

B : "A face que ficou voltada para cima tinha o número 3."

Pretende-se determinar a probabilidade de se ter lançado o dado viciado sabendo que a face que ficou voltada para cima tinha o número 3, ou seja, $P(A \mid B)$.

Construindo um diagrama em árvore, vem:



Assim:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A) = 0,6 \times \frac{1}{2} = 0,3$$

e

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,3 + P(B \mid \overline{A}) \times P(\overline{A}) =$$

$$= 0,3 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = 0,3 + \frac{1}{12} = \frac{23}{60}$$

A probabilidade pedida é:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{\frac{23}{60}} = \frac{18}{23}$$

Pág. 124

23.1. O número de casos possíveis é ${}^{20}C_{10}$.

O número de casos favoráveis é ${}^{10}C_6 \times {}^{10}C_4$ (${}^{10}C_6$ é o número de maneiras diferentes de escolher um conjunto de seis rapazes de entre 10; ${}^{10}C_4$ é o número de maneiras diferentes de escolher um conjunto de quatro raparigas de entre dez e duas é o número de equipas).

A probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{10}C_6 \times {}^{10}C_4}{{}^{20}C_{10}} \approx 24\%$.

23.2. O número de casos possíveis é $20!$ (distribuir 20 camisolas diferentes por 20 alunos).

O número de casos favoráveis é ${}^{10}A_3 \times 17!$ (${}^{10}A_3$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente três das 10 raparigas para ficarem com as camisolas 1, 2 e 3 e 17! é o número de maneiras de distribuir as restantes camisolas pelos outros 17 alunos).

A probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{10}A_3 \times 17!}{20!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 17!}{20 \times 19 \times 18 \times 17!} = \frac{8}{2 \times 19 \times 2} = \frac{2}{19}$$

23.3. O número de casos possíveis é o número de maneiras de os 20 alunos se sentarem nos 20 lugares disponíveis, ou seja, 20!.

O número de casos favoráveis é o número de maneiras de os 20 alunos se sentarem de tal forma que a Ana e a Sofia fiquem sentadas em frente uma da outra, mas nunca nas extremidades da mesa.

Existem oito pares de lugares possíveis para a Ana e a Sofia.

Para cada um desses pares de lugares, a Ana e a Sofia podem trocar de posição.

Para cada maneira de a Ana e a Sofia se sentarem existem 18! maneiras de os restantes 18 alunos se sentarem nos restantes 18 lugares.

Portanto, o número de casos favoráveis é $8 \times 2 \times 18!$.

Assim, a probabilidade pedida é $\dfrac{8 \times 2 \times 18!}{20!} = \dfrac{4}{95}$.

24.1. O desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, ordenado segundo as potências decrescentes de x , é constituído por termos do tipo:

$$T_{p+1} = {}^{15}C_p x^{15-p} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p = {}^{15}C_p x^{15-p} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^p =$$

$$= {}^{15}C_p x^{15-p} x^{-\frac{1}{2}p} = {}^{15}C_p x^{15-\frac{3}{2}p}$$

Para determinarmos o termo independente, procura-se determinar p tal que $15 - \dfrac{3}{2}p = 0 \Leftrightarrow p = 10$.

Assim, o termo independente é ${}^{15}C_{10} = 3003$.

24.2. O desenvolvimento de $A(x)$ tem 16 termos.

O número de casos possíveis é ${}^{16}C_3$ (número de maneiras de escolher um conjunto de três elementos de entre 16).

O número de casos favoráveis é ${}^{15}C_2$ (o termo independente está escrito num dos cartões e esse cartão é um dos escolhidos.

Portanto, pretende-se o número de maneiras de escolher conjuntos de dois elementos de entre 15).

A probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{15}C_2}{{}^{16}C_3} = \dfrac{3}{16} = 0,1875$.

25.1. O desenvolvimento de $A(x) = (x-2)^{36}$ tem 37 termos, de coeficientes alternadamente positivos e negativos.

O primeiro coeficiente é positivo e como há 37 termos, 19 têm coeficientes positivos e 18 têm coeficientes negativos.

A probabilidade pedida é $\dfrac{18}{37}$.

25.2. Os coeficientes binomiais dos 5.º, 6.º e 7.º termos são ${}^nC_4$, ${}^nC_5$ e ${}^nC_6$, respetivamente e como estes estão em progressão aritmética, temos que, para $n \geq 6$:

$^{n}C_5 - {}^{n}C_4 = {}^{n}C_6 - {}^{n}C_5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \times {}^{n}C_5 = {}^{n}C_4 + {}^{n}C_6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \times \frac{n!}{(n-5)! \times 5!} = \frac{n!}{(n-4)! \times 4!} + \frac{n!}{(n-6)! \times 6!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \frac{n!}{(n-5)(n-6)! \times 5 \times 4!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-4) \times (n-5) \times (n-6)! \times 4!} +$$

$$+ \frac{n!}{(n-6)! \times 6 \times 5 \times 4!} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 12(n-4) \times n! = 30n! + (n-4)(n-5) \times n! \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12n - 48 = 30 + n^2 - 9n + 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - 21n + 98 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \times 98}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{21 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n = 14 \vee n = 7$

Como se pretende o menor número natural que verifique as condições enunciadas, temos que $n = 7$.

Pág. 125

26.1. Designando por M o acontecimento:

"O cliente comprou um computador com monitor"

e por I o acontecimento:

"O cliente comprou um computador com impressora" ,

os dados do problema podem ser apresentados numa tabela como a que se segue.

	M	$\overline{M}$	
I	$\boxed{0,2}$	0,05	0,25
$\overline{I}$		$\boxed{0,15}$	
	$\boxed{0,8}$	0,2	1

$P(\overline{M}) = 1 - P(M) =$

$= 1 - 0,8 = 0,2$

$P(I \cap \overline{M}) = P(\overline{M}) - P(\overline{I} \cap \overline{M}) =$

$= 0,2 - 0,15 = 0,05$

$P(I) = P(I \cap M) + P(I \cap \overline{M}) =$

$= 0,2 + 0,05 = 0,25$

Pretende-se determinar $P(I \cap \overline{M})$, portanto, a probabilidade pedida é 0,05.

26.2. Por observação da tabela construída em **26.1.**.

$P(I \cap M) = 0,2$; $P(I) = 0,8$ e $P(I) = 0,25$

$P(M) \times P(I) = 0,8 \times 0,25 = 0,2$

Como $P(M \cap I) = P(M) \times P(I)$, podemos concluir que os acontecimentos M e I são independentes.

27.1. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "O avião está presente nesta área."

B : "O radar deteta a presença do avião."

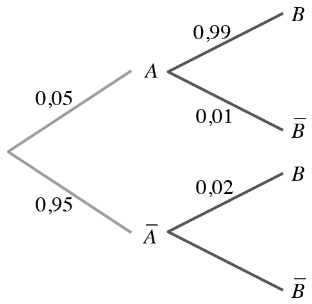
Se um avião está presente em determinada área, a probabilidade de um radar detetar a sua presença é 0,99, portanto, $P(B \mid A) = 0,99$;

Se o avião não está presente nesta área, a probabilidade de um radar detetar erradamente a sua presença é 0,02, portanto $P(B \mid \overline{A}) = 0,02$.

A probabilidade de um avião estar presente nesta área é de 0,05, ou seja, $P(A) = 0,05$.

Temos que:

$P(\overline{A}) = 1 - 0,05 = 0,95$



$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(\overline{A}) \times P(B \mid \overline{A})}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)} =$$

$$= \frac{0,95 \times 0,02}{0,95 \times 0,02 + 0,05 \times 0,99} =$$

$$= \frac{0,019}{0,0685} \approx 0,28$$

27.2. Pretende-se determinar a $P(A \cap \overline{B})$.

$P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 1 - 0,99 = 0,01$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B} \mid A) =$

$= 0,05 \times 0,01 = 0,0005 =$

$$= \frac{5}{10\,000} = \frac{1}{2000}$$

28. $P[(A \cup C) \mid B] - P(C \mid B) =$

$$= \frac{P[(A \cup C) \cap B]}{P(B)} - P(C \mid B) =$$

$$= \frac{P[(A \cap B) \cup (C \cap B)]}{P(B)} - P(C \mid B) =$$

$$= \frac{P(A\cap B)+P(C\cap B)-P\left[(A\cap B)\cap(C\cap B)\right]}{P(B)} -$$

$$-P(C\mid B) =$$

$$= \frac{P(A\cap B)+P(C\cap B)-P(A\cap B\cap C\cap B)}{P(B)} -$$

$$-P(C\mid B) =$$

$$= \frac{P(A\cap B)+P(C\cap B)-P(A\cap B\cap C)}{P(B)} - \frac{P(C\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A\cap B)+\cancel{P(C\cap B)}-P(A\cap B\cap C)-\cancel{P(B\cap C)}}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A\cap B)-P\left[(A\cap B)\cap C\right]}{P(B)} = \qquad P(X)-P(X\cap Y)= =P(X\cap\overline{Y})$$

$$= \frac{P\left[(A\cap B)\cap\overline{C}\right]}{P(B)} = \frac{P\left[(A\cap\overline{C})\cap B\right]}{P(B)} =$$

$$= P\left[(A\cap\overline{C})\mid B\right] = P\left[(A\setminus C)\mid B\right] =$$

Pág. 126

29.1. Existem quatro hipóteses para o primeiro algarismo (1 , 2 , 3 ou 4); para cada escolha do primeiro algarismo, existem dez hipóteses para o segundo algarismo (de 0 a 9); para cada escolha dos dois primeiros algarismos, existem dez hipóteses para o terceiro algarismo (de 0 a 9); e para cada escolha dos três primeiros algarismos, existem duas hipóteses para o quarto algarismo (0 ou 5).

$4\times10\times10\times2=800$

O número pedido, incluindo o 500, é, portanto,

$800+1=801$.

29.2. O número de casos possíveis é $9\times10\times10\times10=9000$.

Número de casos favoráveis:

1.º caso: O algarismo das unidades é 0.

1,2,3,4,5	___	___	0
5	8	7	1

2.º caso: O algarismo das unidades é 5.

1,2,3,4	___	___	5
4	8	7	1

Temos $5\times8\times7\times1+4\times8\times7\times1=504$ casos favoráveis.

A probabilidade pedida é $\frac{504}{9000}=\frac{7}{125}$.

Pág. 126

30.1. Número de casos possíveis: 10!

Número de casos favoráveis:

$4!\times6!$

→ Maneiras de ordenar cinco rapazes mais o bloco das raparigas

→ Maneira de ordenar o bloco das raparigas

$P=\frac{4!\times6!}{10!}=\frac{1}{42}$

ou $\frac{5}{^{10}C_4}=\frac{1}{42}$

30.2. Número de casos possíveis: 10!

Número de casos favoráveis:

• $\boxed{M}$ • $\boxed{M}$ • $\boxed{M}$ • $\boxed{M}$ • $\boxed{M}$ • $\boxed{M}$

$6!\times{^7A_5}$

→ Número de maneiras de colocar ordenadamente os 5 rapazes nos 7 lugares determinados pela fila das 6 raparigas.

→ Número de maneiras de ordenar as 6 raparigas

$P=\frac{6!\ {^7A_4}}{10!}=\frac{1}{6}$

ou $\frac{^7C_4}{^{10}C_6}$

31. Número de casos possíveis: $\frac{8!}{4!\,2!}=840$

$P=\frac{1}{840}$

32. Número de casos possíveis: $^{13}C_5=1287$

32.1. Número de casos favoráveis: $^6C_5=6$

$P=\frac{6}{1287}=\frac{2}{429}$

32.2. Número de casos favoráveis: $^{13}C_5-{^7C_5}=1266$

5 pretas ou azuis (4 + 3)

$P=\frac{1266}{1287}=\frac{422}{429}$

32.3. Número de casos favoráveis:

$\underbrace{^6C_5}_{\text{5 brancas}}+\underbrace{^6C_4\ {^7C_1}}_{\text{4 brancas}}+\underbrace{^4C_4\ {^9C_1}}_{\text{4 pretas}}=6+105+9=120$

$P=\frac{120}{1287}=\frac{40}{429}$

32.4. Número de casos favoráveis: $^4C_4\ {^9C_1}+{^3C_3}\ {^{10}C_2}=54$

$P=\frac{54}{1287}=\frac{6}{143}$

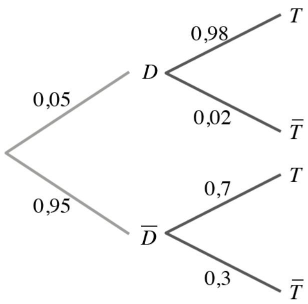
33. Sejam os acontecimentos:

D: "A pessoa tem a doenç.a"

T: "O teste deu positivo."

$P(D)=0{,}05$; $P(T\mid D)=0{,}98$; $P(\overline{T}\mid D)=0{,}02$

$P(T\mid \overline{D})=0{,}7$; $P(\overline{T}\mid \overline{D})=1-0{,}7=0{,}3$



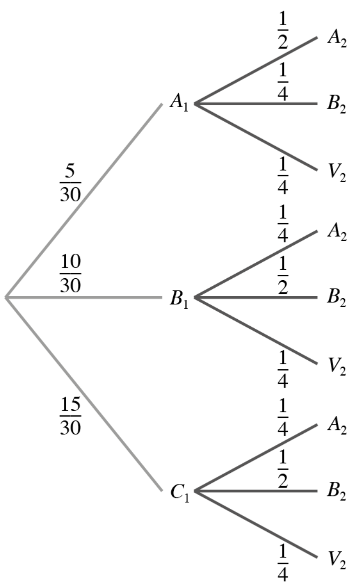
$$P(D\mid T)=\frac{P(D\cap T)}{P(T)}=$$

$$=\frac{0{,}05\times 0{,}98}{0{,}05\times 0{,}98+0{,}95\times 0{,}7}=$$

$$=\frac{7}{102}\approx 7\%$$

Pág. 127

34.



34.1. $P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(B_1\cap A_1)+P(V_1\cap A_2)=$

$$=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(B_1)P(A_2\mid B_1)+P(V_1)P(A_2\mid V_1)=$$

$$=\frac{5}{30}\times\frac{1}{2}+\frac{10}{30}\times\frac{1}{4}+\frac{15}{30}\times\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$$

34.2. $P(B_1\mid A_2)=\dfrac{P(B_1\cap A_2)}{P(A_2)}=$

$$=\frac{\frac{10}{30}\times\frac{1}{4}}{\frac{7}{24}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{24}}=$$

$$=\frac{24}{12\times 7}=\frac{2}{7}$$

34.3. $P(B_1\cup V_1\mid A_2)=P\dfrac{\left[(B_1\cup V_1)\cap A_2\right]}{P(A_2)}=$

$$=\frac{P\left[(B_1\cap A_2)+(V_1\cap A_2)\right]}{P(A_2)}=\frac{P(B_1\cap A_2)+P(V_1\cap A_2)}{P(A_2)}=$$

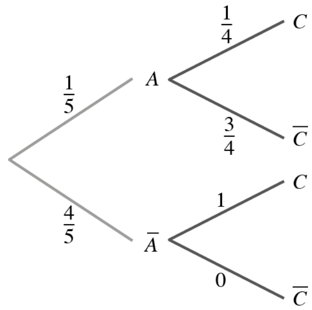
$$=\frac{\frac{10}{30}\times\frac{1}{4}+\frac{15}{30}\times\frac{1}{4}}{\frac{7}{24}}=\frac{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}{\frac{7}{24}}=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{7}{24}}=\frac{5}{7}$$

35. Sejam os acontecimentos:

A: "Respondeu ao acaso à questão."

$P(A)=20\%=\dfrac{1}{5}$

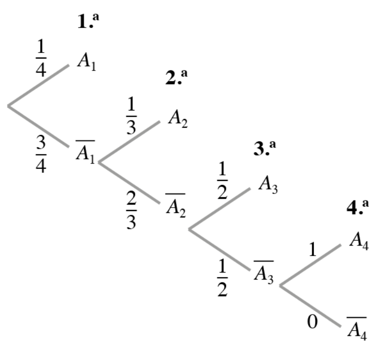
C: "A resposta está correta."



$$P(A\mid C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A)\times P(C\mid A)}{P(C)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times 1}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{16}{20}}=\frac{1}{17}$$

36.



36.1. $P(A_1)=\frac{1}{4}$

36.2. $P(A_4)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{4}$

37. $B\cap C$: “A 2.ª bola é azul com número par”

$P(B\cap C\mid A)$ significa “probabilidade de a 2.ª bola retirada ser azul com número par sabendo que a 1.ª bola retirada tem número par”.

Número de casos possíveis:

1.ª bola	2.ª bola
4	8

Há 4 bolas com número par.

Número de casos possíveis: $4\times 8=32$

Número de casos favoráveis:

1.ª bola	2.ª bola	
2	1	A 1.ª bola é azul e par e a 2.ª é azul e par.
2	2	A 1.ª bola é azul e par e a 2.ª é vermelha e par.

Número de casos favoráveis: $2\times 1+2\times 2=6$

Logo, $P(B\cap C\mid A)=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$.