

1.1. A função f é contínua no intervalo $]2, +\infty[$ por ser definida pela composta de duas funções contínuas (função polinomial e função exponencial) e no intervalo $]-\infty, 2[$ por ser definida pela soma de duas funções contínuas (função logarítmica e funções polinomiais).

No ponto $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + \ln(3-x)) = 2 + \ln(3-2) = 2 + \ln 1 = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{2-x} = e^{2-2} = e^0 = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ pelo

que podemos concluir que a função f não é contínua no ponto $x = 2$.

Portanto, a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$1.2. f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + \ln(3-x) - e^{2-2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + \ln(3-x) - 1}{x - 2} = \frac{2 + \ln 1 - 1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$f'(2^+) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2-x} - e^{2-2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} \begin{matrix} y = 2 - x \\ \text{Se } x \rightarrow 2^+, y \rightarrow 0^- \end{matrix} = -\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} = -\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = -1$$

Assim, $f'(2^-) = -\infty$ e $f'(2^+) = -1$

1.3. A restrição de função f ao intervalo $[2, 3]$ é contínua

$$\text{Para } x > 2, f'(x) = (e^{2-x})' = (2-x)' e^{2-x} = -e^{2-x}$$

Logo, f é diferenciável no intervalo $]2, 3[$.

Portanto, o Teorema de Lagrange é aplicável a f no intervalo $[2, 3]$.

$$\text{Assim, } \exists c \in]2, 3[: \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f'(c)$$

$$\frac{e^{2-3} - e^{2-2}}{3 - 2} = -e^{2-c} \Leftrightarrow \frac{e^{-1} - 1}{1} = -e^{2-c} \Leftrightarrow e^{-1} - 1 = -e^{2-c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2-c} = 1 - e^{-1} \Leftrightarrow 2 - c = \ln(1 - e^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 2 - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow c = \ln e^2 - \ln\left(\frac{e-1}{e}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \ln\left(\frac{e^2}{e-1}\right) \Leftrightarrow c = \ln\left(\frac{e^3}{e-1}\right)$$

2.1. Assíntotas verticais

A função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (soma de duas funções contínuas).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x + \cos x) = -2 \times 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - \ln x) = -2 \times 0 - \ln(0^+) = +\infty$$

A reta da equação $x = 0$ é assíntota ao gráfico de g .

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$):

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x - 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -(+\infty) = -\infty$$

O gráfico de g não tem assíntota em $+\infty$.

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = -2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = -2 + 0 = -2$$

dado que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ podemos

concluir que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ por ser o produto de uma

função limitada por uma função de limite nulo.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + \cos x + 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x, \text{ que não existe.}$$

Portanto, o gráfico de g não tem assíntota em $-\infty$.

Conclusão: A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota ao gráfico de g .

2.2. Pretende-se mostrar que $\exists x \in \left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right[: g(x) = e^x + 2$,

ou seja, que $\exists x \in \left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right[: g(x) - e^x - 2 = 0$.

Seja $h(x) = g(x) - e^x - 2$, isto é:

$$h(x) = -2x + \cos x - e^x - 2$$

A função h é contínua em \mathbb{R} pois é definida pela soma de funções contínuas (função cosseno, função exponencial e funções polinomiais).

Logo, h é contínua no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right]$. Por outro lado:

$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - e^{-\frac{\pi}{2}} - 2 = \pi - e^{-\frac{\pi}{2}} - 2 \approx 0,9$$

$$h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - e^{-\frac{\pi}{4}} - 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{-\frac{\pi}{4}} - 2 \approx -0,2$$

Como h é contínua no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right]$ e

$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times h\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0, \text{ pelo corolário do Teorema de}$$

Bolzano-Cauchy, podemos concluir que:

$$\exists x \in \left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right[: h(x) = 0$$

Ou seja, a equação $g(x) = e^x + 2$ tem, pelo menos, uma

sucessão em $\left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right[$.

2.3. Para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se que:

$$g'(x) = (2x - \ln x)' = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'		-	0	+
g		\searrow		\nearrow

Min.

A função g é estritamente decrescente em $]0, \frac{1}{2}]$ e é estritamente crescente em $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

3.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 3 - \frac{1}{x} > 0\right\}$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	-	-	-	0	+
x	-	0	+	+	+
$\frac{3x-1}{x}$	+		-	0	+

Cálculos auxiliares
 $3 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x} > 0$
 $3x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

3.2. Em $x \rightarrow +\infty$:

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(3 - \frac{1}{x}\right) = \ln(3-0) = \ln 3$

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(3 - \frac{1}{x}\right) - (\ln 3)x \right] =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\ln\left(3 - \frac{1}{x}\right) - \ln 3 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{3 - \frac{1}{x}}{3}\right) \right] =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 - \frac{1}{3x}\right) \right] \stackrel{(\infty \times 0)}{=} =$

$= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-3x \ln\left(1 - \frac{1}{3x}\right) \right] =$

$= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^y - 1} \times y \right) =$

$= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^y - 1}{y}} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{3}$

$y = \ln\left(1 - \frac{1}{3x}\right)$
 $\Leftrightarrow e^y = 1 - \frac{1}{3x}$
 $\Leftrightarrow e^y - 1 = -\frac{1}{3x}$
 $-3x = \frac{1}{e^y - 1}$
 Se $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$

Portanto, a reta de equação $y = (\ln 3)x - \frac{1}{3}$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$. Em $x \rightarrow -\infty$:

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \ln\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(3 - \frac{1}{x}\right) = \ln(3-0) = \ln 3$

De modo análogo ao cálculo quando $x \rightarrow +\infty$:

$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\ln 3)x] =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \ln\left(1 - \frac{1}{3x}\right) \right] \stackrel{(\infty \times 0)}{=} =$

$= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-3x \ln\left(1 - \frac{1}{3x}\right) \right] =$

$= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^y - 1}{y}} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{3}$

$y = \ln\left(1 - \frac{1}{3x}\right)$
 $-3x = \frac{1}{e^y - 1}$
 Se $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$

Logo, a reta de equação $y = (\ln 3)x - \frac{1}{3}$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

O gráfico de f tem apenas uma assíntota oblíqua cuja reta de equação é $y = (\ln 3)x - \frac{1}{3}$.

4.1. $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(2x) - (0 + \sin 0)}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \left. \begin{array}{l} y = 2x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right\} =$
 $= 1 + 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 + 2 \times 1 = 3$

4.2. $D_g = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

$g'(x) = (x + \sin(2x))' = x' + (\sin(2x))' =$

$= 1 + (2x)' \cos(2x) = 1 + 2 \cos(2x)$

$g''(x) = (1 + 2 \cos(2x))' = 1' + (2 \cos(2x))' =$

$= 0 + 2(\cos(2x))' = 2(-2x)' \sin(2x) =$

$= -4 \sin(2x)$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, tem-se que:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \vee x = -\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} \vee x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$

Recorrendo a uma tabela:

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
g''	0	+	0	-	0	+	0	-	0
g		\cup		\cap		\cup		\cap	

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em

$\left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi \right[$ e em $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$ e voltada para baixo em

$\left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[$ e em $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. Tem três pontos de inflexão,

cujas abcissas são: $-\pi, -\frac{\pi}{2}$ e 0 .

4.3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^p} \right)' = \frac{(e^x)' x^p - e^x (x^p)'}{(x^p)^2} = \frac{e^x x^p - e^x p x^{p-1}}{x^{2p}} =$

$= \frac{e^x (x^p - p x^{p-1})}{x^{2p}} = \frac{e^x}{x^p} \times \frac{x^p - p x^{p-1}}{x^p} =$

$= \frac{e^x}{x^p} \times \left(\frac{x^p}{x^p} - \frac{p x^{p-1}}{x^p} \right) = \frac{e^x}{x^p} \times \left(1 - \frac{p}{x} \right)$

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^p} \times \left(1 - \frac{p}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^p} = 0 \vee 1 - \frac{p}{x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee \frac{x-p}{x} = 0 \Leftrightarrow x-p=0 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = p$ (como $p \in \mathbb{N}, p \neq 0$ pelo que $p \in D_f$)

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f, f''(x) &= (f'(x))' = \left[\frac{e^x}{x^p} \times \left(1 - \frac{p}{x}\right) \right]' = \\ &= \left(\frac{e^x}{x^p} \right)' \left(1 - \frac{p}{x}\right) + \frac{e^x}{x^p} \left(1 - \frac{p}{x}\right)' = \left| \left(\frac{e^x}{x^p} \right)' = f'(x) = \right. \\ &= \frac{e^x}{x^p} \left(1 - \frac{p}{x}\right) \left(1 - \frac{p}{x}\right) + \frac{e^x}{x^p} \left(\frac{p}{x^2}\right) = \left. = \frac{e^x}{x^p} \times \left(1 - \frac{p}{x}\right) \right. \\ &= \frac{e^x}{x^p} \left(1 - \frac{p}{x}\right)^2 + \frac{e^x}{x^p} \left(\frac{p}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Investiguemos qual o sinal de $f''(p)$.

$$f''(p) = \frac{e^p}{p^p} \left(1 - \frac{p}{p}\right)^2 + \frac{e^p}{p^p} \left(\frac{p}{p^2}\right) = 0 + \frac{e^p}{p^p} \times \frac{1}{p} = \frac{e^p}{p^{p+1}}$$

Como $p \in \mathbb{N}$, $e^p > 0$ e $p^{p+1} > 0$. Assim, $f''(p) > 0$, para todo o $p \in \mathbb{N}$. Portanto, como $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, a função f tem um mínimo relativo para $x = p$.

Pág. 197

5.1. $D_h = \mathbb{R}^-$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[\ln(-3e^{2x} + 2e^x + 1) \right]' = \frac{(-3e^{2x} + 2e^x + 1)'}{-3e^{2x} + 2e^x + 1} = \\ &= \frac{-3(2x)'e^{2x} + 2e^x + 0}{-3e^{2x} + 2e^x + 1} = \frac{-6e^{2x} + 2e^x}{-3e^{2x} + 2e^x + 1} \\ h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-6e^{2x} + 2e^x}{-3e^{2x} + 2e^x + 1} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6e^{2x} + 2e^x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^x(-6e^x + 2) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (e^x = 0 \vee -6e^x + 2 = 0) \wedge x \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3} \wedge x \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Recorrendo a uma tabela:

x	$-\infty$	$\ln\frac{1}{3}$		0
h'	$+$	0	$-$	
h	\nearrow		\searrow	

Máx.

$$\begin{aligned} h\left(\ln\frac{1}{3}\right) &= \ln\left(-3e^{2\ln\frac{1}{3}} + 2e^{\ln\frac{1}{3}} + 1\right) = \ln\left(-3e^{-\frac{2}{3}} + 2 \times \frac{1}{3} + 1\right) \\ &= \ln\left(-3 \times \frac{1}{9} + \frac{5}{3}\right) = \ln\frac{4}{3} \end{aligned}$$

A função h é estritamente crescente em $]-\infty, \ln\frac{1}{3}[$ e é

estritamente decrescente em $\left[\ln\frac{1}{3}, 0\right]$. Tem um máximo

relativo igual a $\ln\frac{4}{3}$ para $x = \ln\frac{1}{3}$.

5.2. No ponto $x = -\ln 3$ a reta tangente ao gráfico de h tem declive nulo dado que $h'(-\ln 3) = h'\left(\ln\frac{1}{3}\right) = 0$.

Como $h(-\ln 3) = h\left(\ln\frac{1}{3}\right) = \ln\frac{4}{3}$, uma equação da reta

tangente é $y = \ln\frac{4}{3}$.

6.1. Para $x < 0$, tem-se que:

$$f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^x(1+x))' = (e^x)'(1+x) + e^x(1+x)' \\ &= e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow e^x(2+x) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x = 0 \vee 2+x = 0) \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in \emptyset \vee x = -2) \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Para $x > 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1 - \ln x)'x^2 - (1 - \ln x)(x^2)'}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} =$$

$$= \frac{x(-3 + 2 \ln x)}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2 \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3}$$

x	$-\infty$	-2		0		$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
f	\cap		\cup		\cap		\cup

P.I.

P.I.

O gráfico f tem a concavidade voltada para baixo em

$]-\infty, -2[$ e em $\left]0, \sqrt{e^3}\right[$ e voltada para cima em $]-2, 0[$

e em $\left]\sqrt{e^3}, +\infty\right[$.

Como:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^x = 0 = f(0)$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

a função f é descontínua no ponto $x = 0$. Embora no ponto de abscissa 0 mude o sentido da concavidade do gráfico da função, esse ponto não é ponto de inflexão.

Portanto, o gráfico de f tem dois pontos de inflexão cujas abscissas são: -2 e $\sqrt{e^3}$.

6.2. A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^x = 0 \times e^0 = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

Em $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Assim, a reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Em $-\infty$ ($y = mx + b$):

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é, também, assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

7.1. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : \sin(3x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 3x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.2. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{2x}}{2x} \times \frac{3x}{\sin(3x)} \times \frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)} = -\frac{2}{3} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \times \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v}{\sin v} = -\frac{2}{3} \times 1 \times \frac{1}{1} = -\frac{2}{3}$

7.3. O declive, m , é igual a $g'(\frac{\pi}{6})$.

$g'(x) = \left(\frac{1 - e^{2x}}{\sin(3x)} \right)' = \frac{(1 - e^{2x})' \sin(3x) - (1 - e^{2x})(\sin(3x))'}{\sin^2(3x)} = \frac{-2e^{2x} \sin(3x) - (1 - e^{2x})(3 \cos(3x))}{\sin^2(3x)}$

$m = g'(\frac{\pi}{6}) = \frac{-2e^{\frac{\pi}{3}} \sin(\frac{\pi}{2}) - (1 - e^{\frac{\pi}{3}}) 3 \cos(\frac{\pi}{2})}{\sin^2(\frac{\pi}{2})} = \frac{-2e^{\frac{\pi}{3}} \times 1 - (1 - e^{\frac{\pi}{3}}) \times 0}{1^2} = -2e^{\frac{\pi}{3}}$

8. $\log_{\frac{1}{3}}(3x) < 3 - \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3-x}{x}\right) \wedge x \in D$, sendo:

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 3x > 0 \wedge \frac{3-x}{x} > 0 \right\} =]0, 3[$

$\log_{\frac{1}{3}}(3x) < 3 - \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3-x}{x}\right) \wedge x \in D \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(3x) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3-x}{x}\right) < 3 \wedge x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(3-x) > \frac{1}{27} \wedge x \in D \Leftrightarrow 3-x > \frac{1}{81} \wedge x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x > \frac{1}{81} - 3 \wedge x \in D \Leftrightarrow x < \frac{242}{81} \wedge x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < \frac{242}{81} \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{242}{81}$

$A =]0, \frac{242}{81}[$

$(-1)^{n+1} \times \frac{3}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -\frac{3}{2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$, pelo que $B = \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$.

Logo, $A \cap B =]0, \frac{242}{81}[\cap \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ e

$A \cup B =]0, \frac{242}{81}[\cup \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\} = \left\{ -\frac{3}{2} \right\} \cup]0, \frac{242}{81}[$

A proposição p é verdadeira, já que uma das proposições elementares que a compõem é verdadeira e a disjunção de duas proposições é verdadeira se e somente pelo menos uma das proposições for verdadeira.

9.1. A função f é contínua em $x = 1$ se e somente se existir

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, ou seja, se $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 8 \cos\left(\frac{2\pi \times 1}{3}\right) = 8 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 8 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 8 \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 8 \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 2x - 1}{\sin(1-x)} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(3x+1)}{\sin(1-x)}$

$= -\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x+1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{\sin(1-x)} = \begin{vmatrix} y=1-x \\ \text{Se } x \rightarrow 1^+, y \rightarrow 0^+ \end{vmatrix}$

$= -4 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sin y} = -4 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y}} = -4 \times \frac{1}{1} = -4$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -4$, o

que significa que existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ pelo que f é contínua em $x = 1$.

9.2. Pretende-se mostrar que $\exists c \in]\pi, 1 + \pi[: f(c) = c$

Seja g a função definida em \mathbb{R} por $g(x) = 8 \cos \frac{2\pi x}{3} - x$

A função g é contínua em \mathbb{R} , pois é definida pela composta, produto e diferença de funções contínuas em \mathbb{R} (funções polinomiais e função cosseno)

Em particular, g é contínua no intervalo $[\pi, 1 + \pi] \subset \mathbb{R}$.

$g(\pi) = 8 \cos\left(\frac{2\pi^2}{3}\right) - \pi \approx 4,5$

$$g(1+\pi) = 8\cos\left(\frac{2\pi(1+\pi)}{3}\right) - \pi - 1 \approx -10,0$$

Como g é contínua no intervalo $[\pi, 1+\pi]$ e

$g(\pi) \times g(1+\pi) < 0$, pelo corolário do Teorema de

Bolzano-Cauchy podemos garantir que:

$$\exists c \in]\pi, 1+\pi[: g(c) = 0$$

No intervalo $]\pi, 1+\pi[$:

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$$

Portanto, fica provado que $\exists c \in]\pi, 1+\pi[: f(c) = c$.

$$\begin{aligned} 10. \quad x(t) &= \sin t - \sqrt{3} \cos t = 2\left(\frac{1}{2} \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t\right) = \\ &= 2\left(\sin \frac{\pi}{6} \sin t - \cos \frac{\pi}{6} \cos t\right) = \\ &= 2\left[-\left(\cos \frac{\pi}{6} \cos t - \sin \frac{\pi}{6} \sin t\right)\right] = \\ &= 2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{6} + t\right)\right] = 2\cos\left[\pi + \left(\frac{\pi}{6} + t\right)\right] = \\ &= 2\cos\left(\frac{7\pi}{6} + t\right) \end{aligned}$$

Como $x(t) = 2\cos\left(t + \frac{7\pi}{6}\right)$ é uma expressão da forma

$c(t) = A\cos(\omega t + \gamma)$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\gamma \in [0, 2\pi[$, podemos concluir que se trata de um oscilador harmônico, como queríamos provar. Por outro lado, tem-se que:

- $A = 2$ é a amplitude;
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$, isto é, $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ é o período;
- $f = \frac{1}{T}$, ou seja, $f = \frac{1}{2\pi}$ é a frequência do movimento;
- $\gamma = \frac{7\pi}{6}$ é o ângulo de fase.

$$11.1. \quad f(x) = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x = 0 \wedge x \in]-\pi, 0[) \vee$$

$$\vee (\cos(2x) - \sin x = 0 \wedge x \in [0, \pi[)$$

$$\bullet \quad \sin x + \cos x = 0 \wedge x \in]-\pi, 0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\cos x \wedge x \in]-\pi, 0[\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\bullet \quad \cos(2x) - \sin x = 0 \wedge x \in [0, \pi[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \sin x \wedge x \in [0, \pi[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \wedge x \in [0, \pi[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [0, \pi[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [0, \pi[$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Logo, } f(x) = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

11.2. Para $x \in [0, \pi[$, tem-se que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos(2x) - \sin x)' = (\cos(2x))' - (\sin x)' = \\ &= -2\sin(2x) - \cos x = -2(2\sin x \cos x) - \cos x = \\ &= -4\sin x \cos x - \cos x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4\sin x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(-4\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \vee \sin x = -\frac{1}{4}$$

Como $x \in [0, \pi[$, $\sin x = -\frac{1}{4}$ é impossível, pois

$\forall x \in [0, \pi[$, $\sin x \geq 0$, portanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Recorrendo a uma tabela, tem-se que:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'	-		0		+
f	1		-2		1
	Máx.		Mín.		

Assim, a função f é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é

estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$f(0) = 1$ é um máximo relativo e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ é um mínimo relativo.

$$11.3. \quad f(x) = -1 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}_0^- \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$$

$$12.1. \quad u_n = \sum_{k=0}^n (1+2k) = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)+(1+2n)}{n^2+7n+6}$$

1, 3, 5, ..., 2n-1, 1+2n são $n+1$ primeiros termos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 1 e o último 1+2n.

$$\begin{aligned} 1+3+5+\dots+(2n+1)+(1+2n) &= \frac{1+(1+2n)}{2} \times (n+1) = \\ &= \frac{2+2n}{2} \times (n+1) = (1+n)(n+1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Assim, $u_n = \frac{(n+1)^2}{n^2 + 7n + 6} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+6)} = \frac{n+1}{n+6}$

12.2. $\lim (u_n)^{-3n} = \lim \left(\frac{n+1}{n+6} \right)^{-3n} = \lim \left[\frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{6}{n} \right)} \right]^{-3n} =$
 $= \left[\frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{6}{n} \right)^n} \right]^{-3} = \left(\frac{e^1}{e^6} \right)^{-3} = (e^{-5})^{-3} = e^{15}$

13.1. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \cos^2 n \leq 1$, portanto:

$\forall n \in \mathbb{N}, 2n \leq 2n + \cos^2 n \leq 1 + 2n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n}{1+3n} \leq \frac{2n + \cos^2 n}{1+3n} \leq \frac{1+2n}{1+3n}$

$\lim \frac{2n}{1+3n} = \lim \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$ e $\lim \frac{1+2n}{1+3n} = \lim \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$

Assim, pelo teorema das sucessões enquadradas podemos

concluir que $\lim \frac{2n + \cos^2 n}{1+3n} = \frac{2}{3}$.

Portanto, $\lim u_n = \frac{2}{3}$.

13.2. $\lim v_n = \lim \left[\left(1 - \frac{5}{4n^2} \right)^n \times \left(\frac{2n+5}{2n-3} \right)^{kn} \right] =$
 $= \lim \left(1 - \frac{5}{4n^2} \right)^n \times \lim \left(\frac{2n+5}{2n-3} \right)^{kn} =$
 $= \lim \left[\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2n} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2n} \right) \right]^n \times \lim \left[\frac{2n \left(1 + \frac{5}{2n} \right)}{2n \left(1 + \frac{-3}{2n} \right)} \right]^{kn} =$
 $= \lim \left[\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2n} \right)^n \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2n} \right)^n \times \frac{\lim \left(1 + \frac{5}{2n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{-3}{2n} \right)^n} \right]^{kn} =$
 $= e^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \times e^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \times \left(\frac{e^{\frac{5}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}} \right)^k = e^0 \times \left(e^{\frac{5+3}{2}} \right)^k = e^0 \times (e^4)^k = e^{4k}$

Sabe-se que $\lim v_n = e^{\sqrt[3]{4}}$, portanto:

$e^{4k} = e^{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow 4k = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt[3]{4}}{4} \Leftrightarrow k = \frac{4^{\frac{1}{3}}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 4^{\frac{1}{3}-1} \Leftrightarrow k = 4^{-\frac{2}{3}}$

Pág. 199

14.1. A função g é contínua no intervalo $]-\pi, 0[$, pois é definida pela diferença e quociente de funções contínuas (função exponencial, função cosseno e função seno). A função g é contínua no intervalo $]0, \pi[$ pois é definida pela composta de duas funções contínuas (função cosseno e uma função polinomial).

Em $x = 0$:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(2x) = 1$ e $g(0) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - \cos x}{\sin x} \stackrel{(0)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1 + 1 - \cos x}{\sin x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{\sin x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{\sin x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} =$
 $= 1 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} =$
 $= 1 \times \frac{1}{1} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{\sin(1 + \cos x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 + \cos x} =$
 $= 1 + 0 = 1$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$, existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ pelo que a função g é contínua em $x = 0$.

A função g é, portanto, contínua em $]-\pi, \pi[$.

14.2. A função g é contínua em $]-\pi, \pi[$ (por 14.1.)

Como $[-2, -1] \subset]-\pi, \pi[$, podemos garantir que g é contínua no intervalo $[-2, -1]$.

Por outro lado, $g(-2) = \frac{e^{-2} - \cos(-2)}{\sin(-2)} \approx -0,6$ e

$g(-1) = \frac{e^{-1} - \cos(-1)}{\sin(-1)} \approx 0,2$.

Assim, a função g é contínua no intervalo $[-2, -1]$ e $g(-2) \times g(-1) < 0$, portanto, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-2, -1[$.

14.3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Por outro lado, sabe-se que $\alpha \in [0, \pi[$ e como $\cos \alpha < 0$,

então $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

$g(\alpha) = \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{9}$

Portanto, $g(\alpha) = \frac{5}{9} - \frac{4}{9}$, ou seja, $g(\alpha) = \frac{1}{9}$.

15.1. $f' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(\frac{\pi}{3} + h \right) - f \left(\frac{\pi}{3} \right)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\pi}{3} + h \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + h \right) - \frac{\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)}{h} =$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) + h \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2}}{h} + \frac{h \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right)}{h} \right] = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \frac{1}{2} \right)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \\
 &= \frac{\pi}{3} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{3} \cos h - \sin \frac{\pi}{3} \sin h - \frac{1}{2}}{h} + \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{\pi}{3} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cos h - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin h - \frac{1}{2}}{h} + \frac{1}{2} = \\
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cos h + \sqrt{3} \sin h + 1}{h} + \frac{1}{2} = \\
 &= -\frac{\pi}{6} \times \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} + \sqrt{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) + \frac{1}{2} = \\
 &= -\frac{\pi}{6} \times \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h)(1 + \cos h)}{h(1 + \cos h)} + \sqrt{3} \times 1 \right] + \frac{1}{2} = \\
 &= -\frac{\pi}{6} \times \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 h}{h(1 + \cos h)} + \sqrt{3} \times 1 \right] + \frac{1}{2} = \\
 &= -\frac{\pi}{6} \times \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(1 + \cos h)} + \sqrt{3} \times 1 \right] + \frac{1}{2} = \\
 &= -\frac{\pi}{6} \times \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{1 + \cos h} + \sqrt{3} \right) + \frac{1}{2} = \\
 &= -\frac{\pi}{6} \times (1 \times 0 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{1}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}\pi}{6}
 \end{aligned}$$

15.2. $g(x) = x \ln \frac{1}{x}$; $D_g = \mathbb{R}^+$

Assíntotas verticais:

A função g é contínua em \mathbb{R}^+

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y} \ln y \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln y}{y} = 0 \\
 &\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow 0^+, y \rightarrow +\infty \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

O gráfico de g não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$):

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{x} = \ln 0^+ = -\infty$$

O gráfico de g não tem assíntotas não verticais.

15.3. $g'(x) = \left(x \ln \frac{1}{x} \right)' = x' \ln \frac{1}{x} + x \left(\ln \frac{1}{x} \right)'$

$$= \ln \frac{1}{x} + x \times \frac{-1}{x^2} = \ln \frac{1}{x} - x \times \frac{x}{x^2} = \ln \frac{1}{x} - 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = e \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
g'		+	0	-
g		\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow

Máx.

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln e = \frac{1}{e}$$

g é estritamente crescente em $\left] -\infty, \frac{1}{e} \right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{1}{e}, +\infty \right[$.

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \text{ é o máximo absoluto de } g.$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = +\infty \times \ln 0^+ = -\infty$ e g é contínua podemos concluir que $D'_g = \left] -\infty, \frac{1}{e} \right[$

15.4. $f(x) = x \sin(2x) \Leftrightarrow x \cos x = x \sin(2x) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow x \cos x - x \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow x(\cos x - \sin(2x)) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x(\cos x - 2 \sin x \cos x) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee \cos x(1 - 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee \cos x = 0 \vee 1 - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

16.1. $D_g =]-\infty, 1[$

$$\begin{aligned}
 y = g(x) &\Leftrightarrow y = -2 + \ln(1-x) \Leftrightarrow y + 2 = \ln(1-x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow e^{y+2} = 1-x \Leftrightarrow x = 1 - e^{y+2}
 \end{aligned}$$

Logo, $g^{-1}(x) = 1 - e^{x+2}$.

$$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 1[$$

$x \mapsto 1 - e^{x+2}$

16.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{2-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2-x} = 1 \Leftrightarrow e^{2-x} = e^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Portanto, $A(2, 0)$.

$$\begin{aligned}
 g(x) = 0 &\Leftrightarrow -2 + \ln(1-x) = 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \ln(1-x) = 2 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow 1-x = e^2 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 1 - e^2
 \end{aligned}$$

Portanto, $C(1 - e^2, 0)$.

$$f(0) = 1 - e^{2-0} = 1 - e^2, \text{ logo } B(0, 1 - e^2).$$

$$g(0) = -2 + \ln(1-0) = -2 + \ln 1 = -2 + 0 = -2, \text{ logo }$$

$$D(0, -2).$$

Assim:

$$\overline{AD} = D - A = (0, -2) - (2, 0) = (-2, -2)$$

$$\overline{BC} = C - B = (1 - e^2, 0) - (0, 1 - e^2) = (1 - e^2, -1 + e^2)$$

As retas AD e BC são perpendiculares se e somente se os vetores \overline{AD} e \overline{BC} forem perpendiculares.

$$\overline{AD} \perp \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$$

$$\begin{aligned} \overline{AD} \cdot \overline{BC} &= (-2, -2) \cdot (1 - e^2, -1 + e^2) = \\ &= -2(1 - e^2) - 2(-1 + e^2) = \\ &= -2 + 2e^2 + 2 - 2e^2 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, as retas AD e BC são perpendiculares.

16.3. a) $f(x) < 1 - 2e^x \Leftrightarrow 1 - e^{2-x} < 1 - 2e^x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -e^{2-x} < -2e^x \Leftrightarrow e^{2-x} > 2e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2-x}}{e^x} > 2 \Leftrightarrow e^{2-2x} > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x > \ln 2 \Leftrightarrow 2x < 2 - \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow x < 1 - \ln 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < 1 - \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1 - \ln \sqrt{2}[$$

b) $g(x) \leq \ln(2x^2 + 10x + 16) - 2$

$$\begin{aligned} D &=]-\infty, 1[\cap \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 10x + 16 > 0\} = \\ &=]-\infty, 1[\cap \mathbb{R} =]-\infty, -1[\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 100 - 4 \times 2 \times 16 = -28 < 0 \\ 2x^2 + 10x + 16 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$g(x) \leq \ln(2x^2 + 10x + 16) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + \ln(1-x) \leq \ln(2x^2 + 10x + 16) - 2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) \leq \ln(2x^2 + 10x + 16) \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

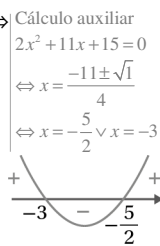
$$\Leftrightarrow 1-x \leq 2x^2 + 10x + 16 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 11x + 15 \geq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \leq -3 \vee x \geq -\frac{5}{2} \right) \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup \left[-\frac{5}{2}, 1[$$

$$S =]-\infty, -3[\cup \left[-\frac{5}{2}, 1[$$



17.1. Tem-se que $N = 10 \log \frac{I}{I_0}$ e $I_0 = 10^{-12}$, portanto:

$$N = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \Leftrightarrow N = 10 [\log_{10} I - \log(10^{-12})] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N = 10 [\log I - (-12)] \Leftrightarrow N = 10 (\log I + 12) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N = 120 + 10 \log I$$

17.2. $N = 120 + 10 \log I$ e $N = 115$, logo:

$$115 = 120 + 10 \log I \Leftrightarrow -5 = 10 \log I \Leftrightarrow \log_{10} I = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I = 10^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow I \approx 0,3$$

A intensidade desse som é, aproximadamente, 0,3 watt por metro quadrado.

Pág. 200

18.1. Considerando $[OQ]$ como base do triângulo $[OPQ]$, a altura correspondente é o valor absoluto da ordenada do ponto P , ou seja, a altura é $|-e^{-2x}|$.

Como $\overline{OQ} = x$ e a altura é $|-e^{-2x}| = e^{-2x}$, a área do triângulo $[OPQ]$ é $\frac{x e^{-2x}}{2}$, ou seja:

$$A(x) = \frac{x e^{-2x}}{2} (x \in \mathbb{R}^+)$$

18.2. $A'(x) = \left(\frac{x e^{-2x}}{2} \right)' = \left(\frac{1}{2} x e^{-2x} \right)' = \left(\frac{1}{2} x \right)' e^{-2x} + \frac{1}{2} x (e^{-2x})' =$
 $= \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} x (-2x)' e^{-2x} = \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} x (-2) e^{-2x} =$
 $= \frac{1}{2} e^{-2x} - x e^{-2x} = e^{-2x} \left(\frac{1}{2} - x \right)$

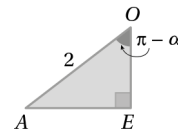
$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-2x} \left(\frac{1}{2} - x \right) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = 0 \vee \frac{1}{2} - x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
A'		+	0	-
A		\nearrow		\searrow

Máx.

A área do triângulo $[OPQ]$ é máxima quando a abscissa do ponto P é igual a $\frac{1}{2}$.

19.1. Seja E o ponto do eixo Oy que pertence ao segmento de reta $[AB]$.



$$\bullet \cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OE}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{\overline{OE}}{2} \Leftrightarrow \overline{OE} = -2 \cos \alpha$$

$$\bullet \sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{AE}}{2} \Leftrightarrow \overline{AE} = 2 \sin \alpha$$

Portanto:

$$\overline{AB} = 2 \times \overline{AE} + \overline{OC} = 2(2 \sin \alpha) + 2 = 4 \sin \alpha + 2$$

$$\text{Área do trapézio } [ABCO] = \frac{\overline{AB} + \overline{OC}}{2} \times \overline{OE} =$$

$$= \frac{(4 \sin \alpha + 2) + 2}{2} \times (-2 \cos \alpha) =$$

$$= \frac{4 \sin \alpha + 4}{2} \times (-2 \cos \alpha) = (2 \sin \alpha + 2) \times (-2 \cos \alpha) =$$

$$= -2 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \cos \alpha = -2 \sin(2\alpha) - 4 \cos \alpha$$

$$\text{Portanto, } A(\alpha) = -4 \cos \alpha - 2 \sin(2\alpha), \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[.$$

19.2. Para $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$:

$$A'(\alpha) = (-4 \cos \alpha - 2 \sin(2\alpha))' =$$

$$= -4(-\sin \alpha) - 2(2 \cos(2\alpha)) = 4 \sin \alpha - 4 \cos(2\alpha)$$

$$A'(\alpha) = 4 \sin \alpha - 4 \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\sin \alpha - \cos(2\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha - \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sin \alpha - (1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \frac{-1 + 3}{4} \vee \sin \alpha = \frac{-1 - 3}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \frac{1}{2} \vee \sin \alpha = -1 \end{aligned}$$

Como $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, então $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
A'		+	0	-	
A		\nearrow		\searrow	

Máx.

$$\begin{aligned} A\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= -4 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 2 \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{6}\right) = \\ &= -4 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \\ &= -4\left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) - 2 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{2} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

A área máxima do trapézio $[ABCO]$ é igual a $3\sqrt{3}$ u.a. e

ocorre quando $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{19.3.} \quad \tan\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) &= 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\tan \theta} &= 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \tan \theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Por outro lado, $A(\theta) = -4 \cos \theta - 2 \sin(2\theta)$, isto é,

$$A(\theta) = -4 \cos \theta - 2(2 \sin \theta \cos \theta), \text{ ou seja,}$$

$$A(\theta) = -4 \cos \theta - 4 \sin \theta \cos \theta.$$

$$1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{8} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{8}{9}$$

Como $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, tem-se que $\cos \theta < 0$, portanto,

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\frac{8}{9} + \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{9}$$

Como $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, tem-se que $\sin \theta > 0$. Logo,

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}. \text{ Portanto:}$$

$$\begin{aligned} A(\theta) &= -4\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - 4\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{9} = \\ &= \frac{24\sqrt{2}}{9} + \frac{8\sqrt{2}}{9} = \frac{32\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

$$\mathbf{20.1.} \quad f'(0) = 3e^0 + 0^3 - 3 = 0$$

$$f''(x) = 3e^x + 3x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, f' é estritamente crescente.

$\mathbf{20.2.}$ Se f' é estritamente crescente em \mathbb{R} e $f'(0) = 0$, então

$$f'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[\text{ e } f'(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[.$$

Logo, temos a seguinte variação de f :

x		0	
f'	-	0	+
f	\searrow		\nearrow

Mín.

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente crescente em $]0, +\infty[$. $f(0)$ é o mínimo absoluto de f .

Pág. 201

$\mathbf{21.1.}$ Ao fim de 1 ano:

$$4000 + 0,038 \times 4000 = 4000(1 + 0,038) = 4000 \times 1,038$$

Ao fim de 2 anos, tem-se:

$$\begin{aligned} 4000 \times 1,038 + 0,038 \times 4000 \times 1,038 = \\ = 4000 \times 1,038(1 + 0,038) = 4000 \times 1,038^2 \end{aligned}$$

Ao fim de 3 anos, tem-se:

$$\begin{aligned} 4000 \times 1,038^2 + 0,038 \times 4000 \times 1,038^2 = \\ = 4000 \times 1,038^2(1 + 0,038) = 4000 \times 1,038^3 \end{aligned}$$

Assim, percebe-se, imediatamente, que o capital acumulado ao fim de x anos é dado por:

$$f(x) = 4000 \times 1,038^x, \text{ com } x \in \mathbb{R}_0^+$$

$\mathbf{21.2.}$ Dado que $\frac{146}{365} = 0,4$, tem-se que 4 anos e 146 dias é igual

a 4,4 anos.

Portanto, ao fim deste tempo, o capital acumulado, em euros, é de $f(4,4) = 4000 \times 1,038^{4,4} \approx 4713,34$

$$\begin{aligned} \mathbf{21.3.} \quad \frac{f(x+2)}{f(x)} &= \frac{4000 \times 1,038^{x+2}}{4000 \times 1,038^x} = \frac{1,038^{x+2}}{1,038^x} = 1,038^{x+2-x} = \\ &= 1,038^2 = 1,077444 \end{aligned}$$

O capital acumulado cresce, aproximadamente, 7,7% em cada 2 anos.

$$\begin{aligned} \mathbf{21.4.} \quad 4000 \times 1,038^x &= 400 \times \left[e^{\ln(1,038)} \right]^x = 4000 \times e^{\ln(1,038)x} \approx \\ &\approx 4000 \times e^{0,037x} \end{aligned}$$

Portanto, $f(x) = 4000 \times e^{0,037x}$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$

Por outro lado, para que o capital acumulado seja superior a 6700 €, tem-se que $f(x) > 6700$. Assim:

$$4000 \times e^{0,037x} > 6700 \Leftrightarrow e^{0,037x} > \frac{67}{40} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,037x > \ln\left(\frac{67}{40}\right) \Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{67}{40}\right)}{0,037} \approx 13,941$$

Tal situação acontece ao fim de 13,941 anos, ou seja, ao fim de, aproximadamente 13 anos e 343 dias.

$\mathbf{22.1.}$ 8 h $\rightarrow t = 0$ 13 h $\rightarrow t = 5$ 13 h 30 min $\rightarrow t = 5,5$

Pretende-se mostrar que $\exists t \in]5; 5,5[: C(t) = 4$

A função C é contínua em \mathbb{R}_0^+ pois é definida pela composta, diferença e produto de duas funções contínuas (função exponencial e funções polinomiais).

Como $[5; 5,5] \subset \mathbb{R}_0^+$, em particular, a função C é contínua no intervalo $[5; 5,5]$.

Por outro lado, $C(5) = 30(e^{-0,4 \times 5} - e^{-2 \times 5}) \approx 4,059$ e

$$C(5,5) = 30(e^{-0,4 \times 5,5} - e^{-2 \times 5,5}) \approx 3,324.$$

Como C é contínua em $[5; 5,5]$ e $C(5,5) < 4 < C(5)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que $\exists t \in]5; 5,5[: C(t) = 4$, ou seja, que houve um instante entre as 13 h e as 13 h 30 min, desse dia, em que a concentração do medicamento foi de 4 mg/ml.

22.2. Para, $t \in \mathbb{R}_0^+$, tem-se:

$$\begin{aligned} C'(t) &= [30(e^{-0,4t} - e^{-2t})]' = 30(e^{-0,4t} - e^{-2t})' = \\ &= 30[(-0,4t)' e^{-0,4t} - (-2t)' e^{-2t}] = \\ &= 30[-0,4e^{-0,4t} + 2e^{-2t}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'(t) = 0 &\Leftrightarrow 30(-0,4e^{-0,4t} + 2e^{-2t}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,4e^{-0,4t} + 2e^{-2t} = 0 \Leftrightarrow 0,4e^{-0,4t} = 2e^{-2t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{-0,4t}}{e^{-2t}} = \frac{2}{0,4} \Leftrightarrow e^{-0,4t - (-2t)} = 5 \Leftrightarrow e^{1,6t} = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{1,6t} = e^{\ln 5} \Leftrightarrow 1,6t = \ln 5 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 5}{1,6} \end{aligned}$$

t	0		$\frac{\ln 5}{1,6}$	$+\infty$
C'		+	0	-
C		\nearrow		\searrow
	Mín		Máx	

Portanto, $\frac{\ln 5}{1,6}$ é o valor de t para o qual C toma o seu valor máximo.

$$\frac{\ln 5}{1,6} \text{ h} \approx 1 \text{ h}$$

Como o medicamento foi administrado às 8 horas da manhã, a sua concentração no organismo atinge o valor máximo cerca de uma hora depois, isto é, cerca das 9 horas da manhã desse dia.

22.3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [30(e^{-0,4t} - e^{-2t})] = 30 \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-0,4t} - e^{-2t}) =$
 $= 30(e^{-\infty} - e^{-\infty}) = 30(0 - 0) = 0$

Significa que com o decorrer do tempo a concentração desse medicamento no organismo tende a estabilizar em zero, isto é, tende a desaparecer.

Pág. 202

23.1. Para $x \in]-\pi, \frac{\pi}{2}[$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - 2 \sin x)' = 1 - (2 \sin x)' = 1 - 2(\sin x)' = \\ &= 1 - 2 \cos x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $D_f = D_{f'} =]-\pi, \frac{\pi}{2}[$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3}$$

Então, a abscissa do ponto A é $-\frac{\pi}{3}$ e a abscissa de B é $\frac{\pi}{3}$.

Assim:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\pi}{3} - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} - 2\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= -\frac{\pi}{3} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Assim, as coordenadas pedidas são $A\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$ e

$$B\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right).$$

23.2. a) As coordenadas de B são simétricas das coordenadas de A . Logo, B é a imagem de A pela reflexão central de centro O pelo que podemos concluir que a reta AB passa em O (O é o ponto médio de $[AB]$).

b) Como f é contínua em $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ e diferenciável em $\left] -\frac{\pi}{3}, 0 \right[$, o Teorema de Lagrange garante que

$$\exists c \in \left] -\frac{\pi}{3}, 0 \right[: f'(c) = \frac{f(0) - f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{0 - \left(-\frac{\pi}{3}\right)}, \text{ ou seja,}$$

existe um ponto $c \in \left] -\frac{\pi}{3}, 0 \right[$ em que a reta tangente

no ponto de abscissa c é paralela à reta AO . Logo, essa reta tangente é paralela a AB pois, como AB passa em O , AB e AO são a mesma reta.

c) De igual modo e dado que f é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e diferenciável em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, o Teorema de Lagrange também garante que:

$$\exists d \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[: f'(d) = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{3} - 0}, \text{ ou seja, existe}$$

um ponto $d \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ em que a reta tangente no

ponto de abscissa d é paralela à reta OB . Logo, a reta tangente também é paralela a AB dado que AB e OB são a mesma reta.

d) O declive, m , da reta AB é dado por:

$$m = \frac{\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} - \left(-\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)}{\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\pi - 2\sqrt{3}}{2\pi} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

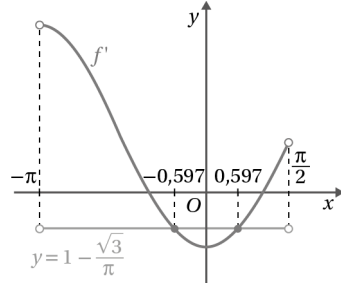
Dado que as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abscissas c e d , respetivamente, são paralelas à reta

AB, uma equação que traduz o problema é

$$f'(x) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}, \text{ isto é, } 1 - 2\cos x = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Com recurso à calculadora gráfica, obtivemos as abscissas dos pontos de interseção reta de equação

$$y = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \text{ com o gráfico da função } f':$$



Os valores de c e d , arredondadas às milésimas, são, $-0,597$ e $0,597$, respetivamente.

- 24.1.** Se g é contínua, então é contínua no ponto 0. Logo, existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ pelo que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$
 $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (k + x^2 e^{x+2}) = k + 0^2 \times e^{0+2} = k$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{3x} = \\ &= \frac{3}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} y = \sin(3x) \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Portanto, $k = \frac{3}{2}$.

- 24.2.** Para $x < 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{3}{2} + x^2 e^{x+2} \right)' = \left(\frac{3}{2} \right)' + (x^2 e^{x+2})' = \\ &= 0 + (x^2)' e^{x+2} + x^2 (e^{x+2})' = \\ &= 2xe^{x+2} + x^2 (x+2)' e^{x+2} = 2xe^{x+2} + x^2 e^{x+2} = \\ &= e^{x+2} (2x + x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{x+2} (2x + x^2) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = 0 \vee 2x + x^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x(2+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		0
g'	$+$	0	$-$	
g	\nearrow		\searrow	

Máx.

$$g(-2) = \frac{3}{2} + (-2)^2 e^{-2+2} = \frac{3}{2} + 4 \times e^0 = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$$

g é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e estritamente decrescente em $[-2, +\infty[$.

Portanto, g admite um único máximo no intervalo

$$]-\infty, 0[\text{ que é } g(-2) = \frac{11}{2}.$$

- 24.3.** Como g é contínua em \mathbb{R} , o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$):

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{2} + x^2 e^{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{x+2}}{x} =$$

$$\begin{aligned} &= 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{x+2}) \stackrel{(-\infty \times 0)}{=} \left| \begin{array}{l} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right. \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{-y+2}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{-y} \times e^2) = \\ &= -e^2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = -e^2 \times \frac{1}{+\infty} = -e^2 \times \frac{1}{+\infty} = -e^2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} + x^2 e^{x+2} \right) = \\ &= \frac{3}{2} + \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{x+2} \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \\ &= \frac{3}{2} + \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y)^2 e^{-y+2} = \left| \begin{array}{l} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right. \\ &= \frac{3}{2} + e^2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^y} = \\ &= \frac{3}{2} + e^2 \times \frac{1}{+\infty} = \frac{3}{2} + e^2 \times \frac{1}{+\infty} = \frac{3}{2} + e^2 \times 0 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

A reta de equação $y = \frac{3}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico

de g em $-\infty$. Em $+\infty$, como $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(3x) \leq 1$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(3x)}{2x} = 0$ por ser o

produto de uma função limitada por uma função de limite nulo.

A reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de g em $+\infty$.

- 25.** Se (u_n) é uma progressão geométrica de razão a , então

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = a.$$

Por outro lado, (v_n) é uma progressão aritmética se e

somente se $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = r$, sendo $r \in \mathbb{R}$ (razão).

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \log_a(u_{n+1}) - \log_a(u_n) = \log_a \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \\ &= \log_a a = 1 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \end{array} \right.$$

Portanto, (v_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

- 26.1.** $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(4 - \frac{5}{\ln(2-x)} \right) = 4 - \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{\ln(2-x)} =$

$$= 4 - \frac{5}{\ln 0^+} = 4 - \frac{5}{-\infty} = 4 - 0 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(5 - \frac{\log_5(23+x)}{2} \right) =$$

$$5 - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\log_5(23+x)}{2} =$$

$$= 5 - \frac{\log_5(23+2)}{2} = 5 - \frac{\log_5 5^2}{2} = 5 - \frac{2}{2} = 5 - 1 = 4$$

$$f(2) = 4$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, podemos concluir

que existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ pelo que a função a função f é

contínua no ponto $x = 2$.

$$\begin{aligned}
 26.2. \lim f(u_n) &= \lim f\left(26 + \frac{1}{n^4}\right) = \lim_{x \rightarrow 26^+} f(x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 26^+} \left[5 - \frac{\log_5(23+x)}{2}\right] = 5 - \frac{\log_5(23+26)}{2} = \\
 &= 5 - \frac{\log_5 49}{2} = 5 - \frac{1}{2} \log_5 49 = 5 - \log_5 (49)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= 5 - \log_5 \sqrt{49} = 5 - \log_5 7 = \log_5 5^5 - \log_5 7 = \\
 &= \log_5 \left(\frac{5^5}{7}\right) = \log_5 \left(\frac{3125}{7}\right)
 \end{aligned}$$

Pág. 203

27.1. Para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= (e^{\frac{x}{2}} \cos x)' = (e^{\frac{x}{2}})' \cos x + e^{\frac{x}{2}} (\cos x)' = \\
 &= \left(\frac{x}{2}\right)' e^{\frac{x}{2}} \cos x + e^{\frac{x}{2}} (-\sin x) = \\
 &= \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \cos x - e^{\frac{x}{2}} \sin x = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos x - \sin x\right)
 \end{aligned}$$

Seja g a função de domínio \mathbb{R} definida por:

$$g(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos x - \sin x\right)$$

g é contínua em \mathbb{R} por ser definida pela diferença, produto e composta de funções contínuas em \mathbb{R} (função seno, função cosseno, função exponencial e funções polinomiais).

Logo, g é contínua no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$g(0) = e^0 \left(\frac{1}{2} \cos 0 - \sin 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}\right) = -e^{\frac{\pi}{4}}$$

Como g é contínua em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $g(0) \times g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, o corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy garante que g tem pelo menos um zero no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Como em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $h'(x) = g(x)$, podemos concluir que

h' tem pelo menos um zero em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, passando nesse

zero de positiva para negativa.

Logo, a função h admite pelo menos um extremo (neste caso um máximo) em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

27.2. O gráfico de h não tem assíntotas não verticais pois o domínio é um conjunto limitado.

A função h é contínua dado que em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ é definida pela

composta e produto de funções contínuas e em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ é

definida pelo produto, quociente e composta de funções contínuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\frac{x}{2}} \cos x) = e^0 \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (e^{\frac{x}{2}} \cos x) = e^{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} e^{\frac{1}{4 \cos x}} = e^{\frac{1}{4 \cos\left(\frac{\pi}{2}^+\right)}} = e^{0^-} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} e^{\frac{1}{4 \cos x}} = e^{\frac{1}{4 \cos\left(\frac{3\pi}{2}^-\right)}} = e^{0^-} = e^{-\infty} = 0$$

Logo, o gráfico de h não tem assíntotas.

$$27.3. h(x) > \frac{1}{\sqrt{e}} \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{4 \cos x}} > \frac{1}{\sqrt{e}} \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{4 \cos x}} > e^{-\frac{1}{2}} \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4 \cos x} > -\frac{1}{2} \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4 \cos x} + \frac{1}{2} > 0 \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2 \cos x}{4 \cos x} > 0 \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

$$\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, 4 \cos x < 0$$

Logo:

$$\frac{1+2 \cos x}{4 \cos x} > 0 \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2 \cos x < 0 \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{2} \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[$$

$$a+b = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

28.1. Para $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^3 \ln x)' = (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' = \\
 &= 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2 (3 \ln x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= [x^2 (3 \ln x + 1)]' = (x^2)' (3 \ln x + 1) + x^2 (3 \ln x + 1)' \\
 &= 2x (3 \ln x + 1) + x^2 \left(3 \frac{1}{x} + 0\right) = 6x \ln x + 2x + 3x = \\
 &= 6x \ln x + 5x = x (6 \ln x + 5)
 \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x (6 \ln x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 6 \ln x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-\frac{5}{6}}$$

Como $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se que $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{5}{6}}$.

x	0		$e^{-\frac{5}{6}}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f		\cap		\cup

P.I.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em

$\left]0, e^{-\frac{5}{6}}\right[$ e a concavidade voltada para cima em

$\left] e^{-\frac{5}{6}}, +\infty \right[$. Tem um único ponto de inflexão, de abcissa $x = e^{-\frac{5}{6}}$.

28.2. Assíntotas verticais

A função f é contínua em \mathbb{R}^+ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 \ln x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{y} \right)^3 \times \ln \frac{1}{y} \right] = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y^3} \times \ln y^{-1} \right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y^2} \times \frac{-\ln y}{y} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^2} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$$

O gráfico de f não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$):

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x =$$

$$= (+\infty)^2 \ln(+\infty) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$ e $D_f = \mathbb{R}^+$, podemos concluir que o gráfico

de f não tem assíntotas não verticais.

O gráfico de f não tem assíntotas.

29. $N(9) = 30 \Leftrightarrow \frac{40}{1+2e^{-9k}} = 30 \Leftrightarrow \frac{4}{3} = 1+2e^{-9k} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = 2e^{-9k}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = e^{-9k} \Leftrightarrow -9k = \ln \frac{1}{6} \Leftrightarrow k = -\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{-9}$$

Portanto, $k \approx 0,2$.

30. $g(x) = e^x - e^{-x} - x - 2$, pelo que, para todo o $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = e^x - (-1)e^{-x} - 1 = e^x + e^{-x} - 1$$

$$g''(x) = e^x + (-1)e^{-x} = e^x - e^{-x}$$

Portanto:

$$g(x) + g'(x) + g''(x) = -x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - e^{-x} - x - 2) + (e^x + e^{-x} - 1) + (e^x - e^{-x}) = -x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3e^x - e^{-x} - x - 3 = -x + 1 \Leftrightarrow 3e^x - e^{-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3e^x - \frac{1}{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0, \forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow e^x = \frac{2 \pm 4}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \vee e^x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 0 \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x = 0$$

31. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$h'(x) = (2 - \cos(6x))' = 0 - (\cos(6x))' =$$

$$= -(-6\sin(6x)) = 6\sin(6x)$$

Logo:

$$h'(x) + 6h(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\sin(6x) + 6(2 - \cos(6x)) - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\sin(6x) + 12 - 6\cos(6x) - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\sin(6x) - 6\cos(6x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(6x) = \cos(6x) \Leftrightarrow \sin(6x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)$$

$$\Leftrightarrow 6x = \frac{\pi}{2} - 6x + 2k\pi \vee 6x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 12x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 0x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

32.1. $D_f = \mathbb{R}$

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$):

Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1) - x \ln x - 2x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln x - 2] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln x] - \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] - 2 =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) - 2 = \ln(1+0^+) - 2 = \ln(1) - 2 =$$

$$= 0 - 2 = -2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x+1) - x \ln(x) - 2x + 2x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x+1) - x \ln(x)] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln(x+1) - \ln(x))] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^y - 1} \times y \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y - 1} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow e^y - 1 = \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^y - 1} \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

A reta de equação $y = -2x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 + x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{(-y)^2 - y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2 - y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{1 - \frac{1}{y}} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, não existe assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

Assim, $y = -2x + 1$ é a equação da única assíntota não vertical f .

32.2. Se $x < 0$

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x-1} \right)' = \frac{(e^{-x})'(x-1) - (e^{-x})(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(-x)e^{-x}(x-1) - (e^{-x})}{(x-1)^2} = \frac{-e^{-x}(x-1) - e^{-x}}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{-e^{-x}[(x-1)+1]}{(x-1)^2} = \frac{-e^{-x}x}{(x-1)^2}$$

$$m = f'(-1) = \frac{-e^{-(-1)}(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{-e^1(-1)}{(-2)^2} = \frac{e}{4}$$

Ponto de tangência: $\left(-1, -\frac{e}{2}\right)$ $f(-1) = \frac{e^{-(-1)}}{-1-1} = -\frac{e}{2}$

Equação da reta tangente:

$$y - \left(-\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{4}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4} - \frac{e}{2} \Leftrightarrow y = \frac{e}{4}x - \frac{e}{4}$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $x = -1$ é: $y = \frac{e}{4}x - \frac{e}{4}$.

32.3. Para $x < 0$, $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{(x-1)^2}$.

Determinemos os zeros de f' :

$$f'(x) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow \frac{-e^{-x}}{(x-1)^2} = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e^{-x} = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow (-e^{-x} = 0 \vee x = 0) \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0
f'	$+$	
f	\nearrow	-1

Máx.

$$f'(x) > 0, \forall x \in]-\infty, 0[\text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x}}{x-1} = \frac{e^0}{0-1} = -1 = f(0)$$

Logo, a função f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$.

$$f(0) = \frac{e^0}{0-1} = -1 \text{ é máximo relativo (e absoluto) da}$$

função f em $]-\infty, 0]$.

33.1. $t.v.m._{(g, e, 2e)} = \frac{g(2e) - g(e)}{2e - e} = \frac{(\ln(2e) - 2e) - (\ln e - e)}{e} =$
 $= \frac{\ln 2 + \ln e - 2e - \ln e + e}{e} = \frac{\ln 2 - e}{e} = \frac{1}{e} \ln 2 - 1$

33.2. $g'(x) = (\ln x - x)' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1	$+\infty$
g'		$+$	0	$-$
g		\nearrow		\searrow

Máx.

A função g tem, portanto, um único máximo que é

$$g(1) = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1.$$

33.3. Pretende-se provar que $\exists x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[: g(x) = -e^x$, isto é,

$$\text{que } \exists x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[: g(x) + e^x = 0$$

$$\text{Seja } h(x) = g(x) + e^x \Leftrightarrow h(x) = \ln x - x + e^x$$

A função h é contínua em \mathbb{R}^+ pois é definida pela soma de funções contínuas (função logarítmica, função exponencial e função polinomial).

Como $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[\subset \mathbb{R}^+$, em particular, a função h é contínua

no intervalo $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$.

Por outro lado, tem-se:

$$h\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) + e^{\frac{1}{3}} = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} + e^{\frac{1}{3}} \approx -0,036$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) + e^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} \approx 0,456$$

Como h é contínua no intervalo $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$ e

$$h\left(\frac{1}{3}\right) \times h\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \text{ podemos então concluir pelo corolário}$$

do Teorema de Bolzano-Cauchy que:

$$\exists x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[: h(x) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\exists x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[: g(x) = -e^x.$$

34.1. $\forall t \in [0, 6[$, $\pi \leq \pi t + \pi \leq 7\pi$, pelo que

$$-1 \leq \cos(\pi t + \pi) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\cos(\pi t + \pi) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2 \leq 4 + 2\cos(\pi t + \pi) \leq 4 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 4 + 2\cos(\pi t + \pi) \leq 6$$

Logo, a distância máxima do corpo C ao solo foi de 6 m.

Os instantes em que tal ocorreu são os valores de t que verificaram a condição $D(t) = 6 \wedge t \in [0, 6[$.

Assim:

$$4 + 2\cos(\pi t + \pi) = 6 \wedge t \in [0, 6[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi t + \pi) = 1 \wedge t \in [0, 6[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 6[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 6[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 6[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 3 \vee t = 5$$

A distância máxima do corpo C ao solo foi de 6 metros e tal aconteceu nos instantes $t = 1$ segundo, $t = 3$ segundos e $t = 5$ segundos.

34.2. $D(t) = 3 \wedge t \in [0, 6[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4 + 2\cos(\pi t + \pi) = 3 \wedge t \in [0, 6[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi t + \pi) = -\frac{1}{2} \wedge t \in [0, 6[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi t + \pi) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \wedge t \in [0, 6[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\pi t + \pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi t + \pi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge t \in [0, 6[$$

$$\Leftrightarrow \left(\pi t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi t = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge t \in [0, 6[$$

$$\Leftrightarrow \left(t = -\frac{1}{3} + 2k \vee t = -\frac{5}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge t \in [0, 6[$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \vee t = \frac{5}{3} \vee t = \frac{7}{3} \vee t = \frac{11}{3} \vee t = \frac{13}{3} \vee t = \frac{17}{3}$$

Portanto, o corpo C está à distância de 3 m do solo nos seguintes instantes, em segundos, $t = \frac{1}{3}$, $t = \frac{5}{3}$, $t = \frac{7}{3}$,

$$t = \frac{11}{3}, t = \frac{13}{3} \text{ ou } t = \frac{17}{3} \text{ segundos.}$$

34.3. Pretende-se mostra que $\exists t \in]2, 3[: D(t) = 2,4$.

A função D é contínua em $[0, 6[$ pois é definida pela composta, produto e soma de funções contínuas (função cosseno, e funções polinomiais)

Como $]2, 3[\subset [0, 6[$, em particular, a função D é contínua no intervalo $]2, 3[$.

$$D(2) = 4 + 2\cos(2\pi + \pi) = 4 + 2\cos(3\pi) = 4 + 2 \times (-1) = 2$$

$$D(3) = 4 + 2\cos(3\pi + \pi) = 4 + 2\cos(4\pi) = 4 + 2 \times 1 = 6$$

Como D é contínua no intervalo $[2, 3]$ e

$D(2) < 2, 4 < D(6)$, podemos concluir, pelo Teorema de

Bolzano-Cauchy, que $\exists t \in]2, 3[: D(t) = 2, 4$, ou seja,

que houve, pelo menos, um instante, entre os dois segundos e os três segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do corpo C ao solo foi igual a 2,4 m.

$$35. \quad f(a) \times f(b) - \frac{1}{2} \left[g\left(\frac{a}{b}\right) - g(ab) \right] = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \times f(a) \times f(b) = g\left(\frac{a}{b}\right) - g(ab)$$

$$2 \times f(a) \times f(b) = 2 \sin(\log a) \times \sin(\log b)$$

$$g\left(\frac{a}{b}\right) - g(ab) = \cos\left(\log \frac{a}{b}\right) - \cos[\log(ab)] =$$

$$= \cos(\log a - \log b) - \cos(\log a + \log b) =$$

$$= \cos(x - y) - \cos(x + y) = \quad \left| \begin{array}{l} x = \log a \wedge y = \log b \end{array} \right.$$

$$= \cos x \cos y + \sin x \sin y - (\cos x \cos y - \sin x \sin y) =$$

$$= \sin x \sin y + \sin x \sin y = 2 \sin x \sin y = \quad \left| \begin{array}{l} x = \log a \wedge y = \log b \end{array} \right.$$

$$= 2 \sin(\log a) \times \sin(\log b) = 2 \times f(a) \times f(b)$$

$$\text{Logo, } f(a) \times f(b) - \frac{1}{2} \left[g\left(\frac{a}{b}\right) - g(ab) \right] = 0.$$

Pág. 205

$$36.1. \text{ Como } f'(1) = \frac{1}{4} \times 1^2 - \ln(1) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}, \text{ vem que a reta } r$$

tem uma equação da forma $y = \frac{1}{4}x + b$.

Como $f(1) = 2$, vem que o ponto de tangência tem coordenadas $(1, 2)$.

$$2 = \frac{1}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4} = b \Leftrightarrow b = \frac{7}{4}.$$

A equação reduzida da reta r é $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$.

$$36.2. \quad f''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \ln x \right)' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2}{2x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{2x} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

x	0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f		\cap		\cup

P.I.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em

$]0, \sqrt{2}[$ e tem a concavidade voltada para cima em

$]\sqrt{2}, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de abscissa $\sqrt{2}$.

37.1. O reservatório está inicialmente vazio, pelo que $h(0) = 0$

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow a - \log_3(243 - 9 \times 0) = 0 \Leftrightarrow a - \log_3 243 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \log_3 3^5 \Leftrightarrow a = 5$$

Por outro lado, o reservatório fica cheio ao fim de 24 h, portanto, $h(24)$ é igual à altura do reservatório. Como

$$a = 5 :$$

$$h(24) = 5 - \log_3(243 - 9 \times 24) = 5 - \log_3(243 - 216) =$$

$$= 5 - \log_3 27 = 5 - \log_3 3^3 = 5 - 3 = 2$$

A altura do reservatório é, portanto, igual a 2 m.

$$37.2. \quad t.v.m_{(h,9,21)} = \frac{h(21) - h(9)}{21 - 9} = \\ = \frac{5 - \log_3(243 - 9 \times 21) - [5 - \log_3(243 - 9 \times 9)]}{12} = \\ = \frac{-\log_3(54) + \log_3(162)}{12} = \frac{\log_3(162) - \log_3(54)}{12} = \\ = \frac{\log_3\left(\frac{162}{54}\right)}{12} = \frac{\log_3 3}{12} = \frac{1}{12}$$

A altura da água no reservatório aumenta, em média, $\frac{1}{12}$

metro por hora, entre os instantes correspondentes a 9 e a 21 horas após a abertura da torneira.

38.1. Se a função f é contínua em \mathbb{R} , então é contínua no ponto $x = 4$. Logo, existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = 4e^{4-4} = 4e^0 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{\sin(4-x)}{x^2 - x - 12} + k \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{\sin(4-x)}{(x-4)(x+3)} + k \right) = \quad \begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x+3} \times \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sin(4-x)}{4-x} + k = \quad \left| \begin{array}{l} y = 4-x \\ \text{Se } x \rightarrow 4^+, y \rightarrow 0^- \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{7} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin y}{y} + k = -\frac{1}{7} \times 1 + k = -\frac{1}{7} + k$$

$$-\frac{1}{7} + k = 4 \Leftrightarrow k = 4 + \frac{1}{7} \Leftrightarrow k = \frac{29}{7}$$

38.2. Para $x < 4$, tem-se:

$$f'(x) = (xe^{x-4})' = (x)'e^{x-4} + x(e^{x-4})' =$$

$$= e^{x-4} + x(x-4)'e^{x-4} = e^{x-4} + e^{x-4} = e^{x-4}(1+x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-4}(1+x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-4} = 0 \vee 1+x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1		4
f'		0	$+$	
f		\searrow	\nearrow	

Mín.

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e é

estritamente crescente em $[-1, 4[$. Tem um mínimo

relativo igual a $f(-1) = -e^{-5}$.

Pág. 206

39.1. Assíntota não verticais:

A função h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(xe^{\frac{1}{x+3}} \right) = -3e^{0^+} = -3 \times e^{+\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(xe^{\frac{1}{x+3}} \right) = -3 \times e^{0^-} = -3 \times e^{-\infty} = -3 \times 0 = 0$$

A reta de equação $x = -3$ é uma assíntota ao gráfico de h .

Assíntota não vertical ($y = mx + b$):

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x+3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x+3}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x+3}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1 \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \times \frac{1}{x+3} \times (x+3) \times \left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1 \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+3} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+3) \times \left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1 \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \times \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{y} \times (e^y - 1) \right] =$$

$$= 1 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \times 1 = 1$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x+3} \\ \Leftrightarrow x+3 = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0 \end{cases}$$

Em $-\infty$: de modo análogo se verifica que

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = 1 \text{ e } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - mx] = 1. \text{ Portanto, a}$$

reta de equação $y = x + 1$ é assíntota ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

39.2. Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(xe^{\frac{1}{x+3}} \right)' = x' e^{\frac{1}{x+3}} + x \left(e^{\frac{1}{x+3}} \right)' = e^{\frac{1}{x+3}} + x \left(\frac{1}{x+3} \right)' e^{\frac{1}{x+3}} \\ &= e^{\frac{1}{x+3}} + x \left(-\frac{1}{(x+3)^2} \right) e^{\frac{1}{x+3}} = e^{\frac{1}{x+3}} \left(1 - \frac{x}{(x+3)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left[e^{\frac{1}{x+3}} \left(1 - \frac{x}{(x+3)^2} \right) \right]' = \\ &= \left(e^{\frac{1}{x+3}} \right)' \left(1 - \frac{x}{(x+3)^2} \right) + e^{\frac{1}{x+3}} \left(1 - \frac{x}{(x+3)^2} \right)' \end{aligned}$$

$$\bullet \left(e^{\frac{1}{x+3}} \right)' = -\frac{1}{(x+3)^2} e^{\frac{1}{x+3}} = -\frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \left(1 - \frac{x}{(x+3)^2} \right)' &= -\frac{(x+3)^2 - x \times 2(x+3) \times 1}{(x+3)^4} = \\ &= -\frac{(x+3)(x+3-2x)}{(x+3)^4} = \frac{x-3}{(x+3)^3} \end{aligned}$$

$$h''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2} \left(1 - \frac{x}{(x+3)^2} \right) + e^{\frac{1}{x+3}} \frac{x-3}{(x+3)^3} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2} \left(-1 + \frac{x}{(x+3)^2} + \frac{x-3}{x+3} \right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2} \times \frac{-(x+3)^2 + x + (x+3)(x-3)}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2} \times \frac{-x^2 - 6x - 9 + x + x^2 - 9}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{(-5x-18) \times e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^4}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(-5x-18) \times e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{x+3}} = 0 \vee -5x-18=0 \right) \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{18}{5} \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow x = -\frac{18}{5}$$

x	$-\infty$	$-\frac{18}{5}$	-3	$+\infty$
h''	+	0	-	-
h	∪		∩	∩

P.I.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em

$]-\infty, -\frac{18}{5}[$ e tem a concavidade voltada para baixo em

$]-\frac{18}{5}, -3[$ e em $]-3, +\infty[$.

Tem um ponto de inflexão de abscissa $-\frac{18}{5}$.

- 40.1. • A base menor do trapézio é $\overline{OP} = 1$.
 • Como R é uma ponto do terceiro quadrante, então temos que $\cos \alpha < 0$, pelo que a base maior do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{RQ} = 1 + (-\cos \alpha) = 1 - \cos \alpha$.
 • Como R é um ponto do terceiro quadrante, então temos que $\sin \alpha < 0$, pelo que a altura do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{PQ} = -\sin \alpha$

Desta forma, a área do trapézio é:

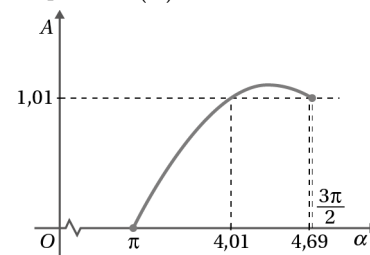
$$\text{Área } [OPQR] = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{PQ} =$$

$$= \frac{1 - \cos \alpha + 1}{2} \times (-\sin \alpha) = \frac{2 - \cos \alpha}{2} \times (-\sin \alpha) =$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha}{2} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} - \frac{2 \sin \alpha}{2} =$$

$$= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \times 2} - \sin \alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{4} - \sin \alpha, \alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$$

40.2. Trata-se de encontrar graficamente as soluções da inequação $A(\alpha) > 1,01$.



Na figura, estão representados:

- o gráfico da função A , no seu domínio $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$;
- parte da reta de equação $y = 1,01$;
- as abscissas dos pontos de interseção dos dois gráficos (arredondadas às centésimas)

$$A(\alpha) > 1,01 \Leftrightarrow \alpha \in]a, b[\text{ com } a \approx 4,01 \text{ e } b \approx 4,69.$$

41. Seja $p(n)$ a condição $\sin(2n\pi) = 0$.

- $p(1)$ é uma proposição verdadeira pois $\sin(2\pi) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (verdade)
- A propriedade é hereditária.

Admitamos, por hipótese, que, para um dado número natural n , se tem $\sin(2n\pi) = 0$. Provemos que:

$$\sin[2(n+1)\pi] = 0$$

$$\sin[2(n+1)\pi] = \sin(2n\pi + 2\pi) = \sin(2n\pi) = 0$$

Por hipótese

Por indução matemática, $\sin(2n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pág. 207

42.1. Para $x \in]0, 2\pi[$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - (1 + \cos x)^2}{2} \right)' = \left[\frac{1}{2} (x^2 - (1 + \cos x)^2) \right]' =$$

$$= \frac{1}{2} [2x - 2(1 + \cos x)(1 + \cos x)'] =$$

$$= \frac{1}{2} [2x - 2(1 + \cos x)(-\sin x)] =$$

$$= x + (1 + \cos x)\sin x = x + \sin x + \sin x \cos x$$

$$f''(x) = (x + \sin x + \sin x \cos x)' =$$

$$= 1 + \cos x + (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' =$$

$$= 1 + \cos x + \cos x \cos x + \sin x (-\sin x) =$$

$$= 1 + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$= 1 + \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) =$$

$$= 1 + \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x + \cos x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

Como $x \in]0, 2\pi[$ então:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f''	+	0	-	0	+	0
f	\cup	\cap	\cup	\cap	\cup	\cap
		P.I.	P.I.	P.I.	P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]0, \frac{\pi}{2}[$, em $]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$ e em $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ e voltada para baixo em $]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}[$ e em $]\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}[$. Tem quatro pontos de inflexão cujas abscissas são $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

42.2. $m = f'(\pi) = \pi + \sin \pi + \sin \pi \cos \pi = \pi$

Ponto de tangência: $\left(\pi, \frac{\pi^2}{2} \right)$ Pois $f(\pi) = \frac{\pi^2 - (1 + \cos \pi)^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

$$\frac{\pi^2}{2} = \pi \times \pi + b \Leftrightarrow b = \frac{\pi^2}{2} - \pi^2 \Leftrightarrow b = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$t: y = \pi x - \frac{\pi^2}{2}$$

$$\pi x - \frac{\pi^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

43. Assíntotas verticais: A função g é contínua em $]-\infty, 0[$, em $]0, 1[$ e em $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^x + 2) = 0 \times e^0 + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0^+}{\ln 0^+} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico de g .

Assíntotas não verticais: Em $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + 2) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) + 2 = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) + 2 \quad \left| \begin{array}{l} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} + 2 = -\frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} + 2 = -\frac{1}{+\infty} + 2 = 2$$

$y = 2$ é assíntota ao gráfico de g em $-\infty$.

Em $+\infty$ ($y = mx + b$):

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, o gráfico de g não tem assíntotas não verticais em $+\infty$. As retas de equações $x = 1$ e $y = 2$ são as assíntotas do gráfico de g .

44.1. $A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{PQ}}{2}$; $\overline{OP} = x$; $\overline{PQ} = |f(x)| = -f(x)$

$$g(x) = \frac{x \times (-f(x))}{2} = -\frac{x}{2} \times \frac{\sin(2x) - 2}{x} = \frac{2 - \sin(2x)}{2}$$

44.2. Se $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $2x \in]0, \pi[$.

$$0 \leq \sin(2x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin(2x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 - \sin(2x) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2 - \sin(2x)}{2} \leq 1$$

Logo, a área mínima é $\frac{1}{2}$ u.a. e a área máxima é 1 u.a.

44.3. $g(\alpha) = \frac{2 - \sin(2\alpha)}{2}$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$

$$\tan(2\alpha) = \sqrt{3} \wedge 2\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3} \wedge 2\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 - \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{2 - \sin \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{4}$$

45. $\log_2 x \geq 4 - \log_4 x \Leftrightarrow \log_2 x \geq 4 - \frac{\log_2 x}{\log_2 4}$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \geq 4 - \frac{\log_2 x}{2} \Leftrightarrow 2\log_2 x \geq 8 - \log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\log_2 x \geq 8 \Leftrightarrow \log_2 x \geq \frac{8}{3} \Leftrightarrow x \geq 2^{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{2^8} \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{256} \Leftrightarrow x \in [\sqrt[3]{256}, +\infty[$$