

## Ficha para praticar 7

Pág. 34

$$1.1. u_1 = \frac{(-1)^1 - 1}{3+1} = -\frac{1}{2}; u_2 = \frac{(-1)^2 - 2}{3+2} = -\frac{1}{5};$$

$$u_3 = \frac{(-1)^3 - 3}{3+3} = -\frac{2}{3}$$

$u_2 > u_1$  e  $u_3 > u_2$ . Logo, a sucessão  $(u_n)$  é não monótona.

$$1.2. u_n = \frac{(-1)^n - n}{3+n} \Leftrightarrow u_n = \begin{cases} \frac{-1-n}{3+n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1-n}{3+n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

▪ Se  $n$  é ímpar:

$$u_n = \frac{-1-n}{3+n} = -1 + \frac{2}{n+3}$$

$$0 < \frac{2}{n+3} \leq \frac{2}{1+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < -1 + \frac{2}{n+3} \leq -1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < -1 + \frac{2}{n+3} \leq -\frac{1}{2}$$

▪ Se  $n$  é par:

$$u_n = \frac{1-n}{3+n} = -1 + \frac{4}{n+3}$$

$$0 < \frac{4}{n+3} \leq \frac{4}{2+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < -1 + \frac{4}{n+3} \leq -1 + \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < -1 + \frac{4}{n+3} \leq -\frac{1}{5}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n \leq -\frac{1}{5}$ , pelo que a sucessão  $(u_n)$  é limitada.

Por exemplo,  $-1$  é um minorante e  $-\frac{1}{5}$  é um majorante.

$$1.3. \lim u_n = \lim \frac{(-1)^n - n}{3+n} = \lim \frac{\frac{(-1)^n}{n} - 1}{\frac{3}{n} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$$\frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \times \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ por ser o produto de uma sucessão}$$

limitada por uma sucessão que tende para 0.

2.1. Para  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$\sin n \leq 1 \Leftrightarrow -\sin n \geq -1 \Leftrightarrow 4n - \sin n \geq 4n - 1$$

Como,  $\forall n \in \mathbb{N}, n - 2\sin n \geq 4n - 1$  e  $\lim(4n - 1) = +\infty$ ,

então,  $\lim(4n - \sin n) = +\infty$ .

2.2. Para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\cos n \leq 1 \Leftrightarrow 2\cos n \leq 2 \Leftrightarrow -2\cos n \geq -2 \Leftrightarrow n - 2\cos n \geq n - 2$$

Como,  $\forall n \in \mathbb{N}, n - 2\cos n \geq n - 2$  e  $\lim(n - 2) = +\infty$ , e

então,  $\lim(n - 2\cos n) = +\infty$ .

2.3. Para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\cos^2 n \geq 0 \Leftrightarrow n^2 + \cos^2 n \geq n^2$$

Como,  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + \cos^2 n \geq n^2$  e  $\lim n^2 = +\infty$ , então,

$$\lim(n^2 + \cos^2 n) = +\infty$$

2.4.  $\forall n \in \mathbb{N}, \sin(n\pi) = 0$ , portanto,  $n - \sin(n\pi) = n$ , para todo

$n \in \mathbb{N}$ .

Assim,  $\lim[n - \sin(n\pi)] = \lim n = +\infty$

2.5. Para  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$\cos n \leq 1 \Leftrightarrow 3\cos n \leq 3 \Leftrightarrow 3\cos n - n^2 \leq 3 - n^2$$

Como,  $\forall n \in \mathbb{N}, 3\cos n - n^2 \leq 3 - n^2$  e  $\lim(3 - n^2) = -\infty$ ,

então,  $\lim(3\cos n - n^2) = -\infty$

2.6. Para  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$\sin n \geq -1 \Leftrightarrow n^3 + \sin n \geq n^3 - 1 \Leftrightarrow \frac{n^3 + \sin n}{1-2n} \leq \frac{n^3 - 1}{1-2n} \text{ dado}$$

que  $1 - 2n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim \frac{n^3 - 1}{1-2n} = \lim \frac{n^3}{-2n} = \lim \frac{n^2}{-2} = -\infty$$

Como  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^3 + \sin n}{1-2n} \leq \frac{n^3 - 1}{1-2n}$  e  $\lim \frac{n^3 - 1}{1-2n} = -\infty$ , então

$$\lim \frac{n^3 + \sin n}{1-2n} = -\infty.$$

3.1. Tem-se que  $\lim u_n = +\infty$ .

$$\lim(3 - u_n) = 3 - (+\infty) = 3 - \infty = -\infty$$

Como  $v_n \leq 3 - u_n$ , para  $n \geq 50$  e  $\lim(3 - u_n) = -\infty$ , então,

$\lim v_n = -\infty$ .

3.2. Tem-se que  $\lim u_n = +\infty$ .

$$\lim \frac{n^2 + n^4 u_n}{n^4} = \lim \left( \frac{n^2}{n^4} + \frac{n^4 u_n}{n^4} \right) = \lim \left( \frac{1}{n^2} + u_n \right) =$$

$$= 0 + (+\infty) = +\infty$$

Como  $v_n \geq \frac{n^2 + n^4 u_n}{n^4}$ , para  $n \geq 1000$  e

$$\lim \left( \frac{n^2 + n^4 u_n}{n^4} \right) = +\infty, \text{ então, } \lim v_n = +\infty$$

3.3. Tem-se que  $\lim u_n = -\infty$ .

$$\lim \frac{2 - n^3 u_n}{3n^3} = \lim \left( \frac{2}{3n^3} - \frac{n^3 u_n}{3n^3} \right) = \lim \left( \frac{2}{3n^3} - \frac{u_n}{3} \right) =$$

$$= 0 - \left( \frac{-\infty}{3} \right) = 0 + \infty = +\infty$$

Como  $v_n \geq \frac{2 - n^3 u_n}{3n^3}$ , para  $n \geq 200$  e  $\lim \left( \frac{2 - n^3 u_n}{3n^3} \right) = +\infty$ ,

então,  $\lim v_n = +\infty$ .

4.1. Para  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$\frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} + 3 > 3 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{n} + 3 \right)^n > 3^n$$

Como  $\lim 3^n = +\infty$  e  $\left( \frac{1}{n} + 3 \right)^n > 3^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então,

$$\lim \left( \frac{1}{n} + 3 \right)^n = +\infty.$$

$$4.2. \frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} + 4 > 4 \Leftrightarrow \frac{1+4n}{n} > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1+4n}{n}\right)^n > 4^n$$

Como  $\lim 4^n = +\infty$  e  $\left(\frac{4n+1}{n}\right)^n > 4^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\lim\left(\frac{4n+1}{n}\right) = +\infty.$$

5.1.  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(2n) \leq 1$ , portanto, para  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(2n)}{n} \leq \frac{1}{n}. \text{ Por outro lado, } \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ e}$$

$$\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0. \text{ Assim, pelo teorema das sucessões}$$

enquadradas, tem-se que:  $\lim \frac{\sin(2n)}{n} = 0$

Pág. 35

5.1.  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n^2) \leq 1$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n^2)}{n} \leq \frac{1}{n}. \text{ Por outro lado, } \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ e}$$

$\lim \frac{1}{n} = 0$ . Assim, pelo teorema das sucessões enquadradas:

$$\lim \frac{\cos(n^2)}{n} = 0$$

5.3.  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sin^2(n\alpha) \leq 1$

$$0 \leq \frac{\sin^2(n\alpha)}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}. \text{ Por outro lado, } \lim 0 = 0 \text{ e}$$

$\lim \frac{1}{2n+1} = 0$ . Assim, pelo teorema das sucessões

enquadradas:  $\lim \frac{\sin^2(n\alpha)}{2n+1} = 0$

5.4.  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(-2n) \leq 1$

$$-\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{\cos(-2n)}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}. \text{ Por outro lado,}$$

$$\lim\left(-\frac{1}{n^2+1}\right) = 0 \text{ e } \lim\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0. \text{ Assim, pelo teorema}$$

das sucessões enquadradas:  $\lim \frac{\cos(-2n)}{n^2+1} = 0$

5.5.  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq (\cos n)^2 \leq 1$

$$2 \leq 2 + (\cos n)^2 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2}{n} \leq \frac{2 + \cos(n)^2}{n} \leq \frac{3}{n}$$

Por outro lado,  $\lim \frac{2}{n} = 0$  e  $\lim \frac{3}{n} = 0$ . Assim, pelo teorema

das sucessões enquadradas,  $\lim \frac{2 + (\cos n)^2}{n} = 0$ .

5.6.  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sin^2 n \leq 1$

$$0 \leq \sin^2 n \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \sin^2 n \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4^n} \leq \frac{1 + \sin^2 n}{4^n} \leq \frac{2}{4^n}.$$

Por outro lado,  $\lim \frac{1}{4^n} = 0$  e  $\lim \frac{2}{4^n} = 0$ . Assim, pelo teorema

das sucessões enquadradas, tem-se que  $\lim \frac{1 + \sin^2 n}{4^n} = 0$

$$5.7. \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{2n+3} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4n+6}$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 < \frac{3}{4n+6} \leq \frac{3}{4+6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{10} \leq -\frac{3}{4n+6} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{10} \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{4n+6} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{n}{2n+3} < \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq \left(\frac{n}{2n+3}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\lim\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$  e  $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ . Assim, pelo teorema das

sucessões enquadradas,  $\lim\left(\frac{n}{2n+3}\right)^n = 0$ .

5.8. Número de parcelas:  $2n - (n+1) + 1 = n$

A maior parcela é  $\frac{1}{(n+1)^2}$  e a menor parcela é  $\frac{1}{(2n)^2}$ , logo

$$\frac{1}{(2n)^2} \times n \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)^2} \times n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{(2n)^2} \leq u_n \leq \frac{n}{(n+1)^2}$$

Como  $\lim \frac{n}{(2n)^2} = \lim \frac{n}{4n^2} = \lim \frac{1}{4n} = 0$  e

$\lim \frac{n}{(n+1)^2} = \lim \frac{n}{n^2} = \lim \frac{1}{x} = 0$ , pelo teorema das sucessões

enquadradas,  $\lim u_n = 0$ .

6.  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) \leq 1$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) \leq 1 \Leftrightarrow n-1 \leq n + \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) \leq n+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n + \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n + \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{n+1} \leq 1$$

Como,  $\lim \frac{n-1}{n+1} = 1$  e  $\lim 1 = 1$ , pelo teorema das sucessões

enquadradas, tem-se  $\lim \frac{n + \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{n+1} = 1$ .

Por outro lado,  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow n-1 \leq n + \cos n \leq n+1 \Leftrightarrow \frac{n-1}{2n} \leq \frac{n + \cos n}{2n} \leq \frac{n+1}{2n}$$

Como  $\lim \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$  e  $\lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ , pelo teorema das

sucessões enquadradas, tem-se:  $\lim \frac{n + \cos n}{2n} = \frac{1}{2}$ . Assim,

$\lim u_n = 2 \lim v_n$ .

$$7.1. \frac{n}{4n+1} = \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4}}{4n+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16n+4} \quad \left| \begin{array}{l} n \quad |4n+1 \\ -n - \frac{1}{4} \quad | \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{16n+4} \leq \frac{1}{16+4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{20} \leq -\frac{1}{16n+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{20} \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{16n+4} < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{16n+4} < \frac{1}{4}, \text{ portanto,}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{5} \leq \frac{n}{4n+1} < \frac{1}{4}, \text{ donde,}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{5}\right)^n \leq \left(\frac{n}{4n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Como  $\lim\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$  e  $\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ , pelo teorema das

sucessões enquadradas,  $\lim\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n = 0$ .

$$7.2. \frac{2n}{3n+2} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{4}{3}}{3n+2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9n+6} \quad \left| \begin{array}{l} 2n \quad |3n+2 \\ -2n - \frac{4}{3} \quad | \frac{2}{3} \\ \hline -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{4}{9n+6} \leq \frac{4}{9+6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{15} > -\frac{4}{9n+6} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{4}{15} < \frac{2}{3} - \frac{4}{9n+6} < \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{2}{3} - \frac{4}{9n+6} < \frac{2}{3}, \text{ portanto,}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{5} \leq \frac{2n}{3n+2} < \frac{2}{3}, \text{ donde,}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Como  $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$  e  $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ , pelo teorema das

sucessões enquadradas,  $\lim\left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n = 0$ .

$$7.3. \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow 3n-1 \leq 3n+\sin n \leq 3n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3n-1}{4n+3} \leq \frac{n+\sin n}{4n+3} \leq \frac{3n+1}{4n+3}$$

$$\lim \frac{3n-1}{4n+3} = \lim \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4} \text{ e } \lim \frac{3n+1}{4n+3} = \lim \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}.$$

Assim, por aplicação do teorema das sucessões enquadradas,

$$\lim \frac{3n+\sin n}{4n+3} = \frac{3}{4}.$$

$$7.4. \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n^2) \leq 1$$

$$-1 \leq \cos(n^2) \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 5 + \cos(n^2) \leq 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{4} \leq \sqrt[4]{5 + \cos(n^2)} \leq \sqrt[4]{6}$$

$\lim \sqrt[4]{4} = 1$  e  $\lim \sqrt[4]{6} = 1$ , pelo teorema das sucessões

enquadradas, tem-se que  $\lim \sqrt[4]{5 + \cos(n^2)} = 1$ .

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}}$$

$$8.1. \text{Número de parcelas: } 2n-4+1=2n-3.$$

A maior parcela é  $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+4}}$  e a menor parcela é  $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}}$ .

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}} \times (2n-3) \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+4}} \times (2n-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-3}{\sqrt[3]{n^3+2n}} \leq u_n \leq \frac{2n-3}{\sqrt[3]{n^3+4}}$$

Por outro lado:

$$\lim \frac{2n-3}{\sqrt[3]{n^3+2n}} = \lim \frac{2n-3}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}} = \lim \frac{2n-3}{n\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}} =$$

$$= \lim \frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}} = \lim \frac{2-\frac{3}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}} = \frac{2-0}{\sqrt[3]{1+0}} = 2$$

$$\text{e } \lim \frac{2n-3}{\sqrt[3]{n^3+4}} = \lim \frac{2n-3}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}} = \lim \frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}} =$$

$$= \lim \frac{2-\frac{3}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}} = \frac{2-0}{\sqrt[3]{1+0}} = 2$$

Assim, pelo teorema das sucessões enquadradas:

$$\lim \left( \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}} \right) = 2$$

$$8.2. \text{Seja } u_n = \sum_{k=3}^{4n} \frac{2n+1}{3n^2+k} = \frac{2n+1}{3n^2+3} + \frac{2n+1}{3n^2+4} + \dots + \frac{2n+1}{3n^2+4n}$$

$$\text{Número de parcelas: } 4n-3+1=4n-2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n+1}{3n^2+4n} \times (4n-2) \leq u_n \leq \frac{2n+1}{3n^2+3} \times (4n-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{(2n+1)(4n-2)}{3n^2+4n} \leq u_n \leq \frac{(2n+1)(4n-2)}{3n^2+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{8n^2-2}{3n^2+4n} \leq u_n \leq \frac{8n^2-2}{3n^2+3}$$

$$\text{Como } \lim \frac{8n^2-2}{3n^2+4n} = \frac{8}{3} \text{ e } \lim \frac{8n^2-2}{3n^2+3} = \frac{8}{3}, \text{ pelo teorema das}$$

sucessões enquadradas,  $\lim \sum_{k=3}^{4n} \frac{2n+1}{3n^2+k} = \frac{8}{3}$

$$9. u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)n!} - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n!} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^n \times (n+1)}{(n+1)!} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n \left[\frac{4}{3} - (n+1)\right]}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - n\right)}{(n+1)!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0, (n+1)! > 0 \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{3}-n\right) < 0.$$

Portanto,  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}-n\right)}{(n+1)!} < 0$ , logo  $(v_n)$  é monótona decrescente.

9.2. Seja  $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{6n}{5n^2+i} = \frac{6n}{5n^2+1} + \frac{6n}{5n^2+2} + \dots + \frac{6n}{5n^2+n}$ , logo,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{6n}{5n^2+n} \times n \leq v_n \leq \frac{6n}{5n^2+1} \times n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{6n^2}{5n^2+n} \leq \frac{6n^2}{5n^2+1}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{5n^2+n} = \frac{6}{5}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{5n^2+1} = \frac{6}{5}$ , pelo teorema das

sucessões enquadradas,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{6}{5}$ .

$$10.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sin^2 \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} \left( 1 + \sin^2 \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \sin^2 \left( \frac{1}{x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 1 + \sin^2 \left( \frac{1}{x} \right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \frac{1}{x^2} \left[ 1 + \sin^2 \left( \frac{1}{x} \right) \right] \geq \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Então pelo teorema de comparação de funções, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[ 1 + \sin^2 \left( \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty.$$

$$10.2. \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^+, -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^+, -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$

então, pelo teorema das funções enquadradas, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

$$10.3. -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\sin x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \quad (x^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x^2+1} \right) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ , pelo teorema das

funções enquadradas, tem-se que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} = 0$ .

10.4. Para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tem-se:

$$\cos^2 \left( \frac{1}{x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + \cos^2 \left( \frac{1}{x} \right) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \left( 2 + \cos^2 \left( \frac{1}{x} \right) \right) \geq \frac{2}{x^2} \times 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + \cos^2 \left( \frac{1}{x} \right)}{x^2} \geq \frac{2}{x^2}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$  e  $\frac{2 + \cos^2 \left( \frac{1}{x} \right)}{x^2} \geq \frac{2}{x^2}$ , para

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , pelo teorema da comparação de funções:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \cos^2 \left( \frac{1}{x} \right)}{x^2} = +\infty$$

10.5. Para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tem-se:

$$-1 \leq \sin \left( \frac{\pi}{x^2} \right) \leq 1, \text{ assim, vem que:}$$

• Se  $x > 0$  então  $x^3 > 0$ . Então

$$-1 \leq \sin \frac{\pi}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^3 < x^3 \sin \frac{\pi}{x^2} \leq x^3, \forall x \in ]0, +\infty[$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0$ , então, pelo teorema das

funções enquadradas,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x^3 \sin \frac{\pi}{x^2} \right) = 0$ .

• Se  $x < 0$ , então  $x^3 < 0$ .

$$-1 \leq \sin \frac{\pi}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 \leq x^3 \sin \frac{\pi}{x^2} \leq -x^3, \forall x \in ]-\infty, 0[$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3) = 0$ , pelo teorema das funções

enquadradas,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x^3 \sin \frac{\pi}{x^2} \right) = 0$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 \sin \frac{\pi}{x^2} \right) = 0$ .

10.6. Para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tem-se:

$$-1 \leq \cos \left( \frac{\pi}{x} \right), \text{ assim, vem que } -1 + \frac{1}{x^2} \leq \cos \left( \frac{\pi}{x} \right) + \frac{1}{x^2}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( -1 + \frac{1}{x^2} \right) = -1 + \frac{1}{0^+} = -1 + \infty = +\infty$  e para

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\cos \left( \frac{\pi}{x} \right) + \frac{1}{x^2} \geq -1 + \frac{1}{x^2}$ , então, pelo teorema da

comparação de funções,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} + \cos \left( \frac{\pi}{x} \right) \right] = +\infty$ .

10.7. Para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tem-se:

$$\cos(x) \leq 1, \text{ assim, vem que } \cos(x) - \pi \leq 1 - \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 (\cos x - \pi) \leq x^2 (1 - \pi), \text{ dado que}$$

$$x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 (1 - \pi)] = -\infty$  e para  $x \in \mathbb{R}$ ,

$x^2 (1 - \pi) \geq x^2 (\cos x - \pi)$ , então, pelo teorema de comparação

de funções,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 (\cos x - \pi)] = -\infty$ .

$$10.8. \sin \frac{x}{2} \leq 1$$

$$-\sin \frac{x}{2} \geq -1 \Leftrightarrow -2x - \sin \frac{x}{2} \geq -2x - 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 1) = +\infty$  e para  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$-2x - \sin \frac{x}{2} \geq -2x - 1, \text{ então, pelo teorema de comparação das}$$

$$\text{funções, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2x - \sin \frac{x}{2} \right) = +\infty.$$

$$\begin{aligned} 11.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

11.2.  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) > h(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , então, pelo teorema de comparação de funções,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ .

$$12.1. \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^4}{x-a} = \frac{a^4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^4}{x-a} = \frac{a^4}{0^-} = -\infty$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = -\infty$ .

**Pág. 37**

12.2. Se para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ ,  $g(x) \leq h(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ , então, pelo teorema de comparação de funções, tem-se:  $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = +\infty$ .

12.3. Se para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ ,  $g(x) \geq f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = -\infty$ , então, pelo teorema de comparação de funções, tem-se:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ .

$$\begin{aligned} 13.1. u_2 - u_3 &= 2^4(\cos(2\pi) - 10) - 3^4(\cos(3\pi) - 10) = \\ &= 16(1 - 10) - 81(-1 - 10) \\ &= 16(-9) - 81(-11) \\ &= 747 \end{aligned}$$

$$13.2. \cos(n\pi) \leq 1$$

$$\cos(n\pi) - 10 \leq 1 - 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(n\pi) - 10 \leq -9 \Leftrightarrow n^4(\cos(n\pi) - 10) \leq -9n^4.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-9n^4) = -\infty$  e para

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n^4(\cos(n\pi) - 10) \leq -9n^4$ , então, pelo teorema de comparação de sucessões,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ .

14. Teorema das sucessões encastradas

Se  $(u_n)$  e  $(w_n)$  são sucessões convergentes com o mesmo

limite  $a$  e se a partir de certa ordem, a sucessão  $(v_n)$  é tal que

$$u_n \leq v_n \leq w_n, \text{ então, } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a.$$

A maior parcela é  $\frac{1}{n!}$  e a menor parcela é  $\frac{1}{(2n)!}$ , logo:

$$(n+1) \times \frac{1}{(2n)!} \leq v_n \leq (n+1) \times \frac{1}{(n)!}, \forall x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{(2n)!} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n!}, \forall x \in \mathbb{N}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{(2n)!} + \frac{1}{(2n)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n(2n-1)!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(2n-1)!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)!} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} = 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Pelo teorema das sucessões encastradas,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ .

15.1. Por exemplo,  $g(x) = -\frac{1}{x^4+2}$  e  $h(x) = \frac{1}{x^4+2}$ , pois:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(2x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^4+2} \leq \frac{\sin(2x)}{x^4+2} \leq \frac{1}{x^4+2} \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^4+2} = \frac{-1}{(+\infty)^4+2} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4+2} = \frac{1}{(+\infty)^4+2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

15.2. Pelo teorema das funções encastradas:

Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$  e se

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq f(x) \leq h(x), \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

16. Para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin x \leq 1$ .

$$-2 \sin x \geq -2 \Leftrightarrow x^2 - 2 \sin x \geq x^2 - 2.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2) = +\infty$  e  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 \sin x \geq x^2 - 2$ ,

então pelo teorema de comparação de funções

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2 \sin x) = +\infty.$$

Por outro lado:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 9 + \frac{2}{x^2} \right)}}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{2}{x^2}}}{3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{9 + \frac{2}{x^2}}}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}}}{3} =$$

$$= \frac{-\sqrt{9+0}}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)g(x)] = +\infty \times (-1) = -\infty$ .

**Ficha para praticar 8**

1. A proposição  $p$  é verdadeira. Por aplicação do corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy e atendendo a que

$f(-1) \times f(6) < 0$  e  $f$  é contínua em  $[-1, 6]$ , então

$\exists c \in ]-1, 6[ : f(c) = 0$ .

Quanto à proposição  $q$  nada podemos garantir acerca do seu valor lógico, pois tanto pode ser verdadeira, como pode ser falsa. Por exemplo, considere-se as duas representações gráficas seguintes, ambas compatíveis com as condições do enunciado.

Gráfico 1

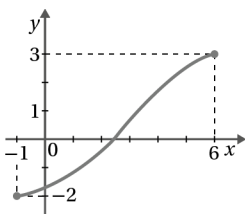
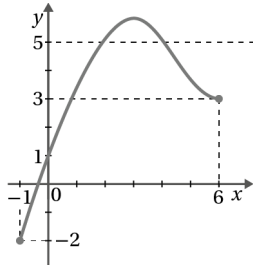


Gráfico 2



No gráfico 1, a função representada, faz com que a proposição  $q$  seja falsa, já no gráfico 2, a função representada, faz com que a proposição  $q$  seja verdadeira. Finalmente, a proposição  $r$  é verdadeira, pois por aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy, temos que  $f$  é contínua em

$[-1, 6]$  e  $f(-1) \leq 2 \leq f(6)$ , então

$\exists c \in ]-1, 6[ : f(c) = 2$ . Portanto,  $p$  e  $r$ .

2. A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  por se tratar de uma função polinomial. Logo  $f$  é contínua em  $[\frac{1}{2}, 2]$ .

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{25}{16} \text{ e } f(2) = 2^4 - 2 + 2 = 16$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < 5 < f(2).$$

Assim, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que a equação  $f(x) = 5$  tem, pelo menos, uma solução no

intervalo  $]\frac{1}{2}, 2[$ .

3. A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , por se tratar de uma função polinomial, e como  $[1, 2] \subset \mathbb{R}$ , a função  $g$  é, em particular, contínua em  $[1, 2]$ .

Por outro lado,  $g(1) = 1^5 - 3 \times 1 - 6 = -8$  e

$$g(2) = 2^5 - 3 \times 2 - 6 = 20 \text{ e, portanto, } g(1) \times g(2) < 0.$$

Assim, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que a função  $g$  tem, pelo menos, um zero no intervalo  $]1, 2[$ .

4.1.  $f(1) = \sqrt{1} - 3 = 1 - 3 = -2$  e  $f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}$

$$f(1) \times f\left(\frac{9}{2}\right) = -2 \times \frac{9}{2} = -9, \text{ pelo que } f(1) \times f\left(\frac{9}{2}\right) < 0.$$

4.2.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3 = 0 \wedge 0 \leq x \leq 4) \vee (x = 0 \wedge 4 < x \leq 5) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x} = 3 \wedge 0 \leq x \leq 4) \vee (x \in \emptyset) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x = 9 \wedge 0 \leq x \leq 4) \vee (x \in \emptyset) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x \in \emptyset) \vee (x \in \emptyset) \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Portanto,  $f$  não tem zeros.

4.3.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (\sqrt{x} - 3) = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$  e

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} x = 4$ , como não existe  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ , a função

$f$  não é contínua em  $x = 4$ , pelo que a função  $f$  não é

contínua em  $\left[1, \frac{9}{2}\right]$ . Logo, não se pode aplicar o Teorema

de Bolzano à função  $f$  no intervalo  $\left]1, \frac{9}{2}\right[$ .

Pág. 39

5. A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  por se tratar da composta de funções contínuas em  $\mathbb{R}$ . Logo, a função  $f$  é contínua no intervalo  $[10, 15]$ .

$$f(10) = \sin\left(\frac{\pi \times 10}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(15) = \sin\left(\frac{\pi \times 15}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Como  $f(10) \times f(15) < 0$ , podemos garantir pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que a função  $f$  tem, pelo menos, um zero no intervalo  $]10, 15[$ .

6. Pretende-se provar que:  $\exists c \in ]a, b[ : f(c) = c$ , ou seja, que  $\exists c \in ]a, b[ : g(c) = 0$ .

A função  $g$  é contínua no intervalo  $[a, b]$  por ser definida pela diferença entre duas funções contínuas em  $[a, b]$  (a função  $f$ , uma função polinomial). Logo  $g$  é contínua em  $[a, b]$ .

$$g(a) = f(a) - a < 0, \text{ dado que } f(a) < a$$

$$g(b) = f(b) - b > 0, \text{ dado que } f(b) > b$$

Como  $g$  é contínua em  $[a, b]$  e  $g(a) \times g(b) < 0$ , pelo

Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que existe pelo menos um número real  $c$  no intervalo  $]a, b[$  tal que  $g(c) = 0$ , ou seja, tal que  $f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$ .

7. A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$  por se tratar de potências e soma de funções contínuas em  $\mathbb{R}$  (função seno de e função cosseno). Portanto a função  $g$  é contínua em  $[\pi, 2\pi]$ .

Por outro lado, tem-se que:

$$g(\pi) = \sin^5(\pi) + \cos^5(\pi) = 0 + (-1)^5 = -1$$

$$g(2\pi) = \sin^5(2\pi) + \cos^5(2\pi) = 0 + 1^5 = 1$$

Como  $g$  é contínua em  $[\pi, 2\pi]$  e  $g(\pi) \times g(2\pi) < 0$ , pelo

Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que a função  $g$  tem, pelo menos, um zero no intervalo  $]\pi, 2\pi[$ .

8. A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$  por se tratar da soma de duas funções contínuas em  $\mathbb{R}$  (a função  $h$  e uma função polinomial). Logo função  $g$  é contínua no intervalo  $[a, b]$ . Assim, os valores de  $k$  para os quais o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de um zero para a

função  $g$  no intervalo  $]a, b[$  são aquelas que satisfazem a condição  $g(a) \times g(b) < 0$ .

$$g(a) \times g(b) < 0 \Leftrightarrow \left( h(a) + \frac{k}{2} \right) \left( h(b) + \frac{k}{2} \right) < 0$$

Como  $h(a) = 3$  e  $h(b) = -1$ :

$$\left( 3 + \frac{k}{2} \right) \left( -1 + \frac{k}{2} \right) < 0$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} \left( 3 + \frac{k}{2} \right) \left( -1 + \frac{k}{2} \right) &= 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{k}{2} = 0 \vee -1 + \frac{k}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow k = -6 \vee k = 2 \end{aligned}$$

Portanto,  $\left( 3 + \frac{k}{2} \right) \left( -1 + \frac{k}{2} \right) < 0 \Leftrightarrow k \in ]-6, 2[$ .

9. Pretende-se provar que

$$\exists c \in ]3, 4[ : f(c) = g(c) \Leftrightarrow \exists c \in ]3, 4[ : f(c) - g(c) = 0$$

Seja  $h$  a função definida por  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

A função  $h$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$  pois é definida pela

diferença entre duas funções contínuas, (uma função polinomial e uma função racional).

Logo, a função  $h$  é contínua em  $[3, 4]$ .

$$h(3) = f(3) - g(3) = (3^2 - 3 \times 3) - \frac{3-2}{3+3} = 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$h(4) = f(4) - g(4) = (4^2 - 3 \times 4) - \frac{4-2}{4+3} = 4 - \frac{2}{7} = \frac{26}{7}$$

Como  $h$  é contínua em  $[3, 4]$  e  $h(3) \times h(4) < 0$ , pelo

Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que  $\exists c \in ]3, 4[ : h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in ]3, 4[ : f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists c \in ]3, 4[ : f(c) = g(c), \text{ ou seja, que os gráficos de}$$

$f$  e  $g$  se interseçam num ponto de abcissa pertencente ao intervalo  $]3, 4[$

10. Seja  $h$  a função definida por  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

A função  $h$  é contínua em  $[a, b]$ , por se tratar da diferença entre duas funções contínuas em  $[a, b]$ .

$$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(b), \text{ já que } f(b) = g(a)$$

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a), \text{ já que } f(a) = g(b).$$

Se  $f(a) \neq g(a)$  então  $f(a) \neq f(b)$  pelo que

$$f(a) - f(b) \neq 0.$$

Como  $f(a) - f(b)$  e  $f(b) - f(a)$  são simétricos não nulos,

vem que  $[f(a) - f(b)] \times [f(b) - f(a)] < 0$ , ou seja,

$$h(a) \times h(b) < 0.$$

Como  $h$  é contínua em  $[a, b]$  e  $h(a) \times h(b) < 0$ , pelo

corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que  $\exists c \in ]a, b[ : h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in ]a, b[ : f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists c \in ]a, b[ : f(c) = g(c), \text{ isto é, que os gráficos das}$$

funções  $f$  e  $g$  se interseçam num ponto cuja abcissa pertence ao intervalo  $]a, b[$ .

11. O intervalo  $[-6, 6]$  é limitado, fechado e não vazio, mas a

função  $f$  não é contínua nesse intervalo, por não existir

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ já que } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Logo, não estão verificadas as condições para a aplicação do teorema de Weierstrass à função  $f$ .

Pág. 40

12. A função  $f$  é contínua em  $x = -1$  se e somente se existe

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  existe quando e apenas quando

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1).$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = k^2(-1)^2 = k^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} \stackrel{(0)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\sqrt{2x+3}-1)(\sqrt{2x+3}+1)}{(x+1)(\sqrt{2x+3}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\sqrt{2x+3})^2 - 1}{(x+1)(\sqrt{2x+3}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+3-1}{(x+1)(\sqrt{2x+3}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+2}{(x+1)(\sqrt{2x+3}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2(x+1)}{(x+1)(\sqrt{2x+3}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = 1$$

Portanto,  $k^2 = 1$ , ou seja,  $k = -1 \vee k = 1$ .

13. A função  $g$  tem domínio  $\mathbb{R}$  e é contínua em  $\mathbb{R}$ , já que é definida pela soma, diferença e quociente de funções contínuas em  $\mathbb{R}$  (função seno, função cosseno e função polinomial).

Logo,  $g$  é contínua em  $[0, 100]$ .

Pelo Teorema de Weierstrass, a função  $g$  admite um máximo e um mínimo absolutos em  $[0, 100]$ .

14.1. A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , por se tratar de uma função polinomial.

Portanto  $f$  é contínua no intervalo  $[-2, 6]$ .

Logo, por aplicação do Teorema de Weierstrass pode-se garantir que a função  $f$  admite, neste intervalo, um máximo e um mínimo absolutos.

14.2. Recorrendo à primeira derivada de  $f$ :

$$f'(x) = (-x^3 + 3x^2)' = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 0 \vee -x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$x$	-1		0		2		6
$f'$	-		0	+	0	-	-
$f$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-108

Máx. Mín. Máx. Máx.

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 = 4; \quad f(0) = -0^3 + 3(0)^2 = 0$$

$$f(2) = -2^3 + 3(2)^2 = 4 ; f(6) = -6^3 + 3(6)^2 = -108$$

O máximo absoluto de  $f$  é 4 e o mínimo absoluto de  $f$  é -108.

- 15.1.** A função  $g$  é contínua em  $]-\infty, 1[$  pois é definida, neste intervalo, por uma função polinomial, contínua em  $e$ . Por outro lado, a função é contínua em  $]1, +\infty[$  por ser definida, neste intervalo, por uma função racional.

No ponto  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = -1 = g(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - 3x}{x + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1 \text{ pelo que } f \text{ é contínua no ponto } x = 1.$$

A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

- 15.2.** A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  pelo que  $f$  é contínua em qualquer intervalo  $[a, b]$  contido em  $\mathbb{R}$ . Assim tendo em conta o Teorema de Weierstrass, admite, neste intervalo, um máximo absoluto e um mínimo absoluto, pelo que a afirmação é verdadeira.
- 16.** A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$  por ser definida pelo produto e diferença de funções contínuas em  $\mathbb{R}$  (função cosseno e funções polinomiais).

Portanto,  $g$  é contínua em  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , pelo que, tendo em conta

o Teorema de Weierstrass,  $g$  admite um máximo e um mínimo absolutos. Por outro lado, temos que:

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2 \cos(x) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2 \cos(x) - 1 \leq 1$$

O máximo absoluto de  $g$  é 1 e o mínimo absoluto de  $g$  é -1.

Pág. 41

$$\begin{aligned} \mathbf{17.1.} \quad f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) &= 2 - 4 \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 2 - 4 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 4 \times (-1) = 6 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 - 4 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2 - 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 4 \times 1 = -2$$

Portanto,  $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 6$  e  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$ .

- 17.2.** A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  por ser definida pela composta, produto e diferença de funções contínuas (função seno e funções polinomiais), pelo que a função  $f$  é, contínua em  $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ . Como  $f$  é contínua em  $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$  e  $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \times f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -12 < 0$ , pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que existe, pelo menos, um zero de  $f$  no intervalo  $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ , logo a afirmação é verdadeira.

- 18.** Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = x^3 + 5x + 8$ .

A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  por se tratar de uma função polinomial.

Como  $[-2, -1] \subset \mathbb{R}$ , a função  $f$  é, em particular contínua em  $[-2, -1]$ . Por outro lado, tem-se:

$$f(-2) = (-2)^3 + 5(-2) + 8 = -10$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 5(-1) + 8 = 2$$

Como  $f$  é contínua em  $[-2, -1]$  e  $f(-2) \times f(-1) < 0$ , pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que a função  $f$  tem pelo menos um zero no intervalo  $]-2, -1[$ , ou seja, a

equação  $x^3 + 5x + 8 = 0$  tem uma solução no intervalo

$]-2, -1[$ . Vamos determinar a solução, a menos de 0,1:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{3}{2}\right) + 8 = -\frac{23}{8} < 0, \text{ logo a solução}$$

pertence a  $]-\frac{3}{2}, -1[$

$$f(-1,3) = (-1,3)^2 + 5(-1,3) + 8 = -\frac{697}{1000} < 0, \text{ logo a solução}$$

pertence a  $]-1,3; -1[$

$$f(-1,2) = (-1,2)^3 + 5(-1,2) + 8 = \frac{34}{125} > 0, \text{ logo a solução}$$

pertence a  $]-1,3; -1,2[$

Assim, um valor aproximado da solução, a menos de 0,1, é -1,3 (por defeito) e -1,2 (por excesso).

- 19.** A função  $g$  é uma função composta de  $f$  com a função afim  $h$  definida por  $h(x) = x + c$ .

Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ ,  $g$  é contínua em:

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge h(x) \in [a, b]\} &= \{x \in \mathbb{R} : x + c \in [a, b]\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x + c \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} : a - c \leq x \leq b - c\} \\ &= [a - c, b - c] \end{aligned}$$

$$g(a - c) = f(a - c + c) = f(a) = -2$$

$$g(b - c) = f(b - c + c) = f(b) = 4$$

Como  $g$  é contínua em  $[a - c, b - c]$  e

$g(a - c) \times g(b - c) < 0$ , pelo corolário do Teorema de

Bolzano-Cauchy, podemos garantir que a função  $g$ , tem, pelo menos, um zero em  $]a - c, b - c[$ .

- 20.1.**  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x + \cos(2x) \leq -x + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - x + \cos(2x) \leq -x + 2$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2) = -(+\infty) + 2 = -\infty$  e  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$1 - x + \cos(2x) \leq -x + 2$ , então pelo teorema de comparação de funções, tem-se que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - x + \cos(2x)] = -\infty$ .

- 20.2.** A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  por se tratar da composta e da soma de funções contínuas em  $\mathbb{R}$  (funções polinomiais e

função cosseno). Logo,  $f$  é contínua em  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \cos\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \cos(1) \approx 1,040 \text{ e}$$

$$f(1) = 1 - 1 + \cos(2 \times 1) = \cos(2) \approx -0,416$$

Como  $f$  é contínua em  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  e  $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$ , pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que a função  $f$  tem pelo menos um zero no intervalo  $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ .

21. A função  $f$  é contínua no intervalo  $[-2, 2]$ .

$a \in \mathbb{R}^-$ , logo  $\frac{a}{2} \in \mathbb{R}^-$  e  $a < \frac{a}{2}$ , portanto,  $f(-2) > a$ .

$2a \in \mathbb{R}^-$ , logo  $2a < a$ , pelo que  $f(2) < a$ .

Assim, como  $f(2) < a < f(-2)$  e  $f$  é contínua no intervalo  $[-2, 2]$ , pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que  $\exists c \in ]-2, 2[ : f(c) = a$ , isto é, que o gráfico da função  $f$  intersesta a reta de equação  $y = a$ .

**Ficha de teste 4**

Pág. 42

1. Atendendo definição de limite, não interessa o que se passa com os 499 primeiros termos da sucessão  $(w_n)$ .

$$\lim w_n = \lim (av_n) = a \lim v_n = a \times (+\infty).$$

Como  $a \in \mathbb{R}^-$ :  $\lim w_n = -\infty$ .

Resposta: (B)

2.  $\lim v_n = \lim \frac{4 - 2n^2 u_n}{n^2} = \lim \left( \frac{4}{n^2} - \frac{2n^2 u_n}{n^2} \right) = \lim \left( \frac{4}{n^2} - 2u_n \right) = 0 - 2 \lim u_n = 0 - 2(-\infty) = +\infty$ .

Resposta: (D)

3. Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b^2$  e se para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , então, pelo teorema das funções

enquadradas, tem-se que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b^2$ . Assim,

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt{b^2} = |b|, \text{ pois } b \in \mathbb{R}^- \text{ e } \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{b^2} = b^{-2}.$$

Resposta: (D)

4. A proposição  $p$  é falsa, pois a função  $g$  pode, ou não, ter zeros em  $]a, b[$ . A proposição  $q$  é verdadeira, pois se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $f(a) \times f(b) < 0$ , então  $f$  tem pelo menos um zero em  $]a, b[$  que não pode pertencer ao domínio da função  $g$ .

Resposta: (D)

Pág. 43

5.1.  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sin^2\left(n\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{\sin^2\left(n\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{3+n} \leq \frac{1}{3+n}$$

Como  $\lim 0 = 0$  e  $\lim \frac{1}{3+n} = 0$ , pelo teorema das sucessões

enquadradas tem-se que  $\lim \frac{\sin^2\left(n\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{3+n} = 0$ .

5.2. Seja  $a_n = \frac{3n}{5+4n} = \frac{3}{4} - \frac{15}{4n+5}$

$$0 < \frac{15}{16n+20} \leq \frac{15}{16+20}$$

$$-\frac{15}{36} \leq -\frac{15}{16n+20} < 0$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{12} \leq \frac{3}{4} - \frac{15}{16n+20} < \frac{3}{4}$$

Assim:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{3} \leq \frac{3n}{5+4n} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \left(\frac{3n}{5+4n}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Como  $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  e  $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ , pelo teorema das

sucessões enquadradas, tem-se que  $\lim \left(\frac{3n}{5+4n}\right)^n = 0$ .

6.1.  $v_1 = \sum_{i=1}^1 \frac{1}{i!} = \frac{1}{1!} = \frac{1}{1} = 1$

$$v_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

Portanto,  $v_1 = 1$  e  $v_3 = \frac{5}{3}$ .

6.2. Seja  $p(n)$  a condição  $v_n < 10 - \frac{1}{n!} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} < 10 - \frac{1}{n!}$ .

- $p(n)$  verifica-se para  $n = 1$ :

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1}{i!} < 10 - \frac{1}{1!} \Leftrightarrow 1 < 9 \text{ (verdade)}$$

- $p(n)$  é hereditária, isto é:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} < 10 - \frac{1}{k!} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i!} < 10 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} < 10 - \frac{1}{k!} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} + \frac{1}{(k+1)!} < 10 - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i!} < 10 - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i!} < 10 - \frac{1}{(k+1)!}, \text{ pois:}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, 10 - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 10 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$10 - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)k!} \leq 10 - \frac{1}{(k+1)k!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k - 1 + 1 \leq -1 \Leftrightarrow k \geq 1, \text{ condição universal em } \mathbb{N}.$$

Logo, como  $p(1)$  é verdadeira e  $p(n)$  é hereditária podemos concluir, pelo princípio de indução matemática, que  $p(n)$  é universal em  $\mathbb{N}$ .

$$6.3. \quad v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \text{ e } v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}.$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Portanto,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n > 0$  pelo que  $(v_n)$  é monótona crescente.

$$7.1. \quad \text{Para } n \in \mathbb{N}, \sin(n^2) \leq 1 \Leftrightarrow \sin(n^2) - n^3 \leq 1 - n^3.$$

Como  $\sin(n^2) - n^3 \leq 1 - n^3$  e  $\lim(1 - n^3) = -\infty$ , então, pelo teorema de comparação de sucessões,  $\lim(\sin(n^2) - n^3) = -\infty$ .

$$7.2. \quad \text{Para } n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(\sqrt{n}) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(\sqrt{n})}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

$$\text{Por outro lado, } \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ e } \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

$$\text{Como } \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ e } -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(\sqrt{n})}{n} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

pelo teorema das sucessões enquadradas,  $\lim \frac{\cos(\sqrt{n})}{n} = 0$ .

$$8.1. \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1 + \frac{\cos x}{x}} = \\ &= \frac{-\infty}{1+0} = -\infty \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, -1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^-, \frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq -\frac{1}{x}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ , pelo teorema das funções

enquadradas,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ .

8.2. A função  $f$  é contínua no intervalo  $]-\infty, 0[$  pois é definida pela soma e quociente de duas funções contínuas (funções polinomiais e função cosseno).

A função  $f$  é contínua no intervalo  $]0, +\infty[$  pois é definida pelo quociente de funções contínuas (função seno e função polinomial).

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2}{x + \cos x} = \frac{2 \times 0^2}{0 + \cos(0)} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x-1} = \frac{\sin(0)}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , então, existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

e como tal a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ .

Portanto, a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

9. A função  $f$  é contínua uma vez que é definida pela composta, produto e diferença de funções contínuas em  $\mathbb{R}$

(função cosseno e funções polinomiais).

Logo,  $f$  é contínua em  $[3, 4]$ .

$$f(3) = 9 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 3\right) = 9 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 9 - 2 \times 0 = 9$$

$$f(4) = 9 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 4\right) = 9 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 9 - 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 9 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9 + 2 \left(\frac{1}{2}\right) = 10$$

Como  $f(3) < 9,5 < f(4)$  e  $f$  é contínua em  $[3, 4]$ , então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que  $\exists t \in ]3, 4[ : f(t) = 9,5$ , ou seja, que houve um instante entre as 3 horas e as 4 horas após a maré baixa em que a profundidade da água do mar à entrada desse porto foi igual a 9,5 metros, como queríamos mostrar.

### Ficha para praticar 9

Pág. 44

$$1.1. \quad f'(x) = (-x^3 + 4x + 1)' = -3x^2 + 4$$

$$f''(x) = (-3x^2 + 4)' = -6x$$

$$1.2. \quad g'(x) = \left(\frac{1}{x} - 3x^2\right)' = -\frac{1}{x^2} - 6x$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(-\frac{1}{x^2} - 6x\right)' = \frac{(-1)' \times x^2 - (-1)(x^2)'}{x^4} - 6 = \\ &= \frac{0 + 2x}{x^4} - 6 = \frac{2x}{x^4} - 6 = \frac{2}{x^3} - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.3. \quad h'(x) &= [(2x-1)^3]' = 3(2x-1)^2(2x-1)' = \\ &= 3(2x-1)^2 \times 2 = 6(2x-1)^2 = \\ &= 6(4x^2 - 4x + 1) = 24x^2 - 24x + 6 \end{aligned}$$

$$h''(x) = (24x^2 - 24x + 6)' = 48x - 24$$

$$\begin{aligned} 1.4. \quad j'(x) &= \left(\frac{x}{5-x}\right)' = \frac{x'(5-x) - x(5-x)'}{(5-x)^2} = \\ &= \frac{5-x-x(-1)}{(5-x)^2} = \frac{5-x+x}{(5-x)^2} = \frac{5}{(5-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j''(x) &= \left(\frac{5}{(5-x)^2}\right)' = \frac{(5)'(5-x)^2 - 5((5-x)^2)'}{(5-x)^4} = \\ &= \frac{0 - 5(2(5-x)(5-x)')}{(5-x)^4} = \\ &= \frac{10(5-x)}{(5-x)^4} = \frac{10}{(5-x)^3} \end{aligned}$$

$$1.5. \quad p'(x) = (\sqrt{x+1})' = \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})}$$

$$p''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{(1)' \times 2\sqrt{x+1} - 1 \times (2\sqrt{x+1})'}{(2\sqrt{x+1})^2} =$$

$$= \frac{0 - 1 \times 2(\sqrt{x+1})'}{4(x+1)} = \frac{-2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)'}{4(x+1)} =$$

$$= -\frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$1.6. \quad r'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$r''(x) = \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{(-1)'(1+x)^2 - (-1)[(1+x)^2]'}{(1+x)^4} =$$

$$= \frac{0 + (2(1+x)(1+x)')}{(1+x)^4} = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$1.7. \quad s'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^3)'(x^2-1) - x^3(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$s''(x) = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(x^4 - 3x^2)'(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)[(x^2-1)^2]'}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)(2(x^2-1)(x^2-1)')}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)(2(x^2-1)(2x))}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-1)[(4x^3 - 6x)(x^2-1) - (x^4 - 3x^2)(4x)]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{[(4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x) - (4x^5 - 12x^3)]}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{4x^5 - 10x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

$$1.8. \quad t'(x) = \left[\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^3\right]' = 3\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)' =$$

$$= 3\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 \left(\frac{(2x+3)'(x-1) - (2x+3)(x-1)'}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 \left(\frac{2(x-1) - (2x+3)}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 \left(\frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 \left(\frac{-5}{(x-1)^2}\right) = \frac{-15(2x+3)^2}{(x-1)^4}$$

$$t'' = \left(\frac{-15(2x+3)^2}{(x-1)^4}\right)' =$$

$$= \frac{[-15(2x+3)^2]'(x-1)^4 - (-15(2x+3)^2)[(x-1)^4]'}{(x-1)^8} =$$

$$= \frac{-15(2(2x+3)(2x+3)')(x-1)^4 - (-15(2x+3)^2)(4(x-1)^3)'}{(x-1)^8} =$$

$$= \frac{-15(2(2x+3)(2))(x-1)^4 - (-15(2x+3)^2)(4(x-1)^3)'}{(x-1)^8} =$$

$$= \frac{(x-1)^3[-15(2(2x+3)(2))(x-1) - (-15(2x+3)^2)(4)]}{(x-1)^8} =$$

$$= \frac{-60(2x+3)(x-1) + 60(2x+3)^2}{(x-1)^5} =$$

$$= \frac{60(2x+3)[-(x-1) + (2x+3)]}{(x-1)^5} =$$

$$= \frac{60(2x+3)(x+4)}{(x-1)^5}$$

$$1.9. \quad v'(x) = (x\sqrt{x+4})' = x'\sqrt{x+4} + x(\sqrt{x+4})' =$$

$$= \sqrt{x+4} + \frac{x}{2\sqrt{x+4}}$$

$$v''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{x' \times 2\sqrt{x+4} - x \times (2\sqrt{x+4})'}{(2\sqrt{x+4})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{2\sqrt{x+4} - \frac{2x}{2\sqrt{x+4}}}{4(x+4)} =$$

$$= \frac{2(x+4) + 2(x+4) - x}{4\sqrt{x+4}(x+4)} =$$

$$= \frac{2x+8+2x+8-x}{4(x+4)\sqrt{x+4}} = \frac{3x+16}{4(x+4)\sqrt{x+4}}$$

$$1.10. \quad w'(x) = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x}\right)' = 3 \times \frac{(\sqrt{x})'x - \sqrt{x} \times x'}{x^2} =$$

$$= 3 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x - \sqrt{x}}{x^2} = 3x \frac{x-2x}{x^2} =$$

$$= 3 \times \frac{-x}{2x^2\sqrt{x}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$$

$$w''(x) = -\frac{3(2x\sqrt{x})'}{(2x\sqrt{x})^2} = \frac{3\left(2\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}}\right)}{4x^2 \times x} =$$

$$= \frac{3\frac{2x+x}{\sqrt{x}}}{4x^3} = \frac{9x}{4\sqrt{x}x^3} =$$

$$= \frac{9}{4x^2\sqrt{x}}$$

2.1.  $f(x) = 4x^2 - x^3$  ;  $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (4x^2 - x^3)' = 8x - 3x^2$$

$$f''(x) = (8x - 3x^2)' = 8 - 6x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 8 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f''$	+	0	-
$f$	∪		∩

O gráfico da função  $f$  tem a concavidade voltada para baixo

em  $\left] \frac{4}{3}, +\infty \right[$  e a concavidade voltada para cima em  $\left] -\infty, \frac{4}{3} \right[$ .

2.2.  $g(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^2$  ;  $D_g = \mathbb{R}$

$$g'(x) = \left( \frac{x^4}{2} - 2x^2 \right)' = 2x^3 - 4x$$

$$g''(x) = (2x^3 - 4x)' = 6x^2 - 4$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$+\infty$
$g''$	+	0	-	0	+
$g$	∪		∩		∪

O gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para baixo em

$\left] \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right[$  e voltada para cima em  $\left] -\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right[$  e em  $\left] \frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty \right[$ .

2.3.  $h(x) = 2x - (2x + 3)^2 = 2x - (4x^2 + 12x + 9) = -4x^2 - 10x + 9$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$h'(x) = (-4x^2 - 10x + 9)' = -8x - 10$$

$$h''(x) = (-8x - 10)' = -8$$

Como  $\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) < 0$ , podemos concluir que o gráfico de

$h$  tem a concavidade voltada para baixo (em  $\mathbb{R}$ ).

2.4.  $j(x) = \frac{4x}{1+x^2}$  ;  $D_j = \mathbb{R}$

$$j'(x) = \left( \frac{4x}{1+x^2} \right)' = \frac{(4x)'(1+x^2) - 4x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{4(1+x^2) - 4x(2x)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{4 + 4x^2 - 8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$g''(x) = \left( \frac{4 - 4x^2}{(1+x^2)^2} \right)' = \frac{(4 - 4x^2)'(1+x^2)^2 - (4 - 4x^2)[(1+x^2)^2]'}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-8x(1+x^2)^2 - (4 - 4x^2)(2(1+x^2)(1+x^2)')}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-8x(1+x^2)^2 - (4 - 4x^2)(2(1+x^2)2x)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{(1+x^2)[-8x(1+x^2) - (4 - 4x^2)(4x)]}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-8x - 8x^3 - 16x + 16x^3}{1+x^2} = \frac{8x^3 - 24x}{1+x^2}$$

$$j''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x^3 - 24x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 24x = 0 \wedge 1+x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 8x(x^2 - 3) = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 8x(x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x = 0 \vee x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$j''$	-	0	+	0	-	0	+
$j$	∩		∪		∩		∪

O gráfico de  $j$  tem a concavidade voltada para baixo em

$\left] -\infty, -\sqrt{3} \right[$  e em  $\left] 0, \sqrt{3} \right[$  e voltada para cima em  $\left] -\sqrt{3}, 0 \right[$  e em  $\left] \sqrt{3}, +\infty \right[$ .

2.5.  $p(x) = \sqrt{1-x^2}$  ;  $D_p = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$

$$p'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D_{p'} = ]-1, 1[$$

$$p''(x) = \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right)' = \frac{(-x)'\sqrt{1-x^2} - (-x)(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{1-x^2} + x \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x^2}{1-x^2} =$$

$$= \frac{-(1-x^2) - x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{-1+x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}$$

$$D_{p''} = ]-1, 1[$$

$\forall x \in ]-1, 1[, p''(x) < 0$ , pelo que o gráfico de  $p$  tem a concavidade voltada para baixo (em  $]-1, 1[$ ).

2.6.  $r(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

$$D_r = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} = ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 r'(x) &= \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} \right)' = \frac{(x^2)' \sqrt{x^2-4} - x^2 (\sqrt{x^2-4})'}{(\sqrt{x^2-4})^2} = \\
 &= \frac{2x\sqrt{x^2-4} - x^2 \frac{(x^2-4)'}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{2x\sqrt{x^2-4} - x^2 \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \\
 &= \frac{2x\sqrt{x^2-4} - \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{2x(\sqrt{x^2-4})^2 - x^3}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = \\
 &= \frac{2x(x^2-4) - x^3}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = \frac{2x^3 - 8x - x^3}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = \\
 &= \frac{x^3 - 8x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = \frac{x^3 - 8x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r''(x) &= \left( \frac{x^3 - 8x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}} \right)' = \\
 &= \frac{(x^3 - 8x)' (x^2-4)^{\frac{3}{2}} - (x^3 - 8x) \left[ (x^2-4)^{\frac{3}{2}} \right]'}{\left( (x^2-4)^{\frac{3}{2}} \right)^2} = \\
 &= \frac{(3x^2 - 8)(x^2-4)^{\frac{3}{2}} - (x^3 - 84) \left( \frac{3}{2} (x^2-4)^{\frac{1}{2}} (x^2-4)' \right)}{(x^2-4)^3} = \\
 &= \frac{(3x^2 - 8)(x^2-4)^{\frac{3}{2}} - (x^3 - 84) \frac{3}{2} (x^2-4)^{\frac{1}{2}} (2x)}{(x^2-4)^3} = \\
 &= \frac{(3x^2 - 8)(x^2-4)^{\frac{3}{2}} - (x^3 - 84) 3x (x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-4)^3} = \\
 &= \frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}} \left[ (3x^2 - 8)(x^2-4) - 3x(x^3 - 84) \right]}{(x^2-4)^3} = \\
 &= \frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}} \left[ 3x^4 - 12x^2 - 8x^2 + 32 - 3x^4 + 24x^2 \right]}{(x^2-4)^3} = \\
 &= \frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}} (4x^2 + 32)}{(x^2-4)^3} = \frac{4x^2 + 32}{(x^2-4)^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned}$$

$\forall x \in D_r, r''(x) > 0$ , pelo que a concavidade do gráfico de  $r$  é voltada para cima em  $]-\infty, -2[$  e em  $]2, +\infty[$ .

3.  $f'(x) = (x-2)^2(x+1)$ ;  $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left[ (x-2)^2(x+1) \right]' = \\
 &= \left[ (x-2)^2 \right]' (x+1) + (x-2)^2 (x+1)' = \\
 &= 2(x-2)(x-2)'(x+1) + (x-2)^2 \times 1 = \\
 &= 2(x-2) \times 1 \times (x+1) + (x-2)^2 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(x-2)(x+1) + (x-2)^2 = \\
 &= (x-2)[2(x+1) + (x-2)] = \\
 &= (x-2)(2x+2+x-2) = \\
 &= 3x(x-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \vee x-2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2
 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''$	+	0	-	0
$f$	$\cup$		$\cap$	$\cup$

P.I.

P.I.

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]0, 2[$  e voltada para cima em  $]-\infty, 0[$  e em  $]2, +\infty[$ .

As abscissas dos pontos de inflexão são  $x = 0$  e  $x = 2$ .

### Ficha para praticar 7

Pág. 45

4.1.  $f(x) = \frac{x^4 + 6x^2 - 1}{3}$ ;  $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left( \frac{x^4 + 6x^2 - 1}{3} \right)' = \frac{4x^3}{3} + 4x$$

$$f''(x) = \left( \frac{4x^3}{3} + 4x \right)' = 4x^2 + 4$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$ , pelo que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima (em  $\mathbb{R}$ ) e não tem pontos de inflexão.

4.2.  $g(x) = (3x+1)^5$ ;  $D_g = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \left( (3x+1)^5 \right)' = 5(3x+1)^4(3x+1)' = \\
 &= 5(3x+1)^4 \times 3 = 15(3x+1)^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= \left( 15(3x+1)^4 \right)' = 15 \left( 4(3x+1)^3(3x+1)' \right) = \\
 &= 15 \left( 4(3x+1)^2 \times 3 \right) = 180(3x+1)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g''(x) = 0 &\Leftrightarrow 180(3x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow (3x+1)^3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g''$	-	0	+
$g$	$\cap$		$\cup$

P.I.

O gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]-\infty, -\frac{1}{3}[$  e voltada para cima em  $]-\frac{1}{3}, +\infty[$ . Tem um ponto de inflexão de abscissa  $-\frac{1}{3}$ .

4.3.  $h(x) = \frac{x}{x^2+3}$ ;  $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$$h'(x) = \left( \frac{x}{x^2+3} \right)'$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x)'(x^2+3) - x(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3 - x(2x)}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2} \\
 h''(x) &= \left( \frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2} \right)' \\
 &= \frac{(-x^2+3)'(x^2+3)^2 - (-x^2+3)((x^2+3)')^2}{[(x^2+3)^2]^2} \\
 &= \frac{-2x(x^2+3)^2 - (-x^2+3)(2(x^2+3)(x^2+3)')}{(x^2+3)^4} \\
 &= \frac{-2x(x^2+3)^2 - (-x^2+3)(2(x^2+3)(2x))}{(x^2+3)^4} \\
 &= \frac{(x^2+3)[-2x(x^2+3) - (-x^2+3)4x]}{(x^2+3)^4} \\
 &= \frac{-2x^3 - 6x + 4x^3 - 12x}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^3 - 18x}{(x^2+3)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 18x}{(x^2+3)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 18x = 0 \wedge (x^2+3)^3 \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x(x^2 - 9) = 0 \wedge (x \neq -\sqrt{3} \wedge x \neq \sqrt{3}) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (2x = 0 \vee x^2 - 9 = 0) \wedge (x \neq -\sqrt{3} \wedge x \neq \sqrt{3}) \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 3
 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-3$		$0$		$1$	$+\infty$
$h''$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$h$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$
		P.I.		P.I.		P.I.	

O gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]-\infty, -3[$  e em  $]0, 3[$  e voltada para cima em  $]-3, 0[$  e em  $]3, +\infty[$ . Tem três pontos de inflexão, de abscissas  $-3, 0$  e  $3$ .

4.4.  $j(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \geq 0\} = ]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 j'(x) &= \left( \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right)' = \frac{(x^2 - 2x - 3)'}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \\
 &= \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j''(x) &= \left( \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \right)' \\
 &= \frac{(x - 1)'(\sqrt{x^2 - 2x - 3}) - (x - 1)(\sqrt{x^2 - 2x - 3})'}{(\sqrt{x^2 - 2x - 3})^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} - (x - 1)\left(\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}\right)}{x^2 - 2x - 3} = \\
 &= \frac{(\sqrt{x^2 - 2x - 3})^2 - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \\
 &= \frac{x^2 - 2x - 3 - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{x^2 - 2x - 3 - x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}(x^2 - 2x - 3)} = \\
 &= \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}(x^2 - 2x - 3)}
 \end{aligned}$$

Como,  $\forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[$ ,  $j''(x) < 0$ , o gráfico de  $j$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]-\infty, -1[$  e em  $]3, +\infty[$ . Não tem pontos de inflexão.

5.1. Seja  $x \in ]-\infty, 2[$ .

$$f''(x) = (x^4 - 2x^3 + 4)' = 4x^3 - 6x^2 \text{ e}$$

$$f''(x) = (4x^3 - 6x^2)' = 12x^2 - 12x \cdot$$

$$f''(x) = 0 \wedge x < 2 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x = 0 \wedge x < 2$$

$$\Leftrightarrow 12x(x - 1) = 0 \wedge x < 2$$

$$\Leftrightarrow (12x = 0 \vee x - 1 = 0) \wedge x < 2$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1) \wedge x < 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$x$	$-\infty$	$0$		$1$		$2$
$f''$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f$	$\cup$		$\cap$		$\cup$	
		P.I.		P.I.		

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]0, 1[$  e voltada para cima em  $]-\infty, 0[$  e em  $]1, 2[$ .

Tem dois pontos de inflexão de abscissas  $0$  e  $1$ .

5.2. Para  $x \in ]5, 6[$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( \frac{x+5}{x-2} \right)' = \frac{(x+5)'(x-2) - (x+5)(x-2)'}{(x-2)^2} = \\
 &= \frac{x-2 - (x+5)}{(x-2)^2} = \frac{-7}{(x-2)^2}
 \end{aligned}$$

Como  $f'$  é contínua no seu domínio (por se tratar de uma função racional), também é contínua em  $]5, 6[$ .

Por outro lado, tem-se:

$$f'(5) = \frac{-7}{(5-2)^2} = -\frac{7}{9} \approx -0,78$$

$$f'(6) = \frac{-7}{(6-2)^2} = -\frac{7}{16} \approx -0,44$$

Como  $f'$  é contínua em  $]5, 6[$  e  $f'(5) < -\frac{1}{2} < f'(6)$ , pelo

Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que a equação

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \text{ tem, pelo menos, uma solução em } ]5, 6[.$$

$$6.1. f''(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)' = 2 - \frac{1}{x^2}$$

$$D_{f''} = D_{f'} = D_f = \mathbb{R}^+$$

$$f''(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x^2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 1}{x^2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 = \frac{1}{2} \wedge x \neq 0\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x$	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''$		-	0	+
$f$		$\cap$		$\cup$

P.I.

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo em

$$\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[ \text{ e voltada para cima em } \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[.$$

Tem um ponto de inflexão de abscissa  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

6.2. Vamos recorrer a uma tabela para estudar o sinal de  $f''$  e variação de  $f'$ .

$x$	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''$		-	0	+
$f'$		$\searrow$		$\nearrow$

Mín.

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

A função  $f'$  é estritamente decrescente em  $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$  e é

estritamente crescente em  $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ . Tem um mínimo

relativo igual a  $2\sqrt{2}$  para  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Ficha para praticar 7

Pág. 46

$$7.1. f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + \frac{1}{2}; D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + \frac{1}{2}\right)' = x^2 - 4x - 5$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 5)' = 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(-5)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

Por outro lado, temos que:

$$f''(5) = 2 \times 5 - 4 = 6 \text{ e } f''(-1) = 2 \times (-1) - 4 = -6.$$

Como  $f''(5) > 0$ ,  $f$  tem um mínimo local em 5 e como

$f''(-1) < 0$ ,  $f$  tem um máximo local em -1.

$$7.2. g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5x + \pi^2; D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = (2x^3 + 6x^2 + 5x + \pi^2)' = 6x^2 + 12x + 5$$

$$g''(x) = (6x^2 + 12x + 5) = 12x + 12$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 6 \times 5}}{2 \times 6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{24}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm 2\sqrt{6}}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6}}{6}$$

Por outro lado:

$$g''\left(\frac{-6 + \sqrt{6}}{6}\right) = 12\left(\frac{-6 + \sqrt{6}}{6}\right) + 12 = 2(-6 + \sqrt{6}) + 12 = -12 + 2\sqrt{6} + 12 = 2\sqrt{6}$$

$$g''\left(\frac{-6 - \sqrt{6}}{6}\right) = 12\left(\frac{-6 - \sqrt{6}}{6}\right) + 12 = 2(-6 - \sqrt{6}) + 12 = -12 - 2\sqrt{6} + 12 = -2\sqrt{6}$$

$g''\left(\frac{-6 + \sqrt{6}}{6}\right) > 0$ , a função  $g$  tem um mínimo local em

$\frac{-6 + \sqrt{6}}{6}$  e como  $g''\left(\frac{-6 - \sqrt{6}}{6}\right) < 0$ , a função  $g$  tem um máximo local em  $\frac{-6 - \sqrt{6}}{6}$ .

$$7.3. h(x) = \frac{x^2 + 4}{x}; D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x^2 + 4}{x}\right)' = \frac{(x^2 + 4)'x - (x^2 + 4)x'}{x^2} = \frac{(2x)x - (x^2 + 4)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$h''(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right)' = \frac{(x^2 - 4)'x^2 - (x^2 - 4)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x(x^2) - (x^2 - 4)(2x)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 8x}{x^4} = \frac{8}{x^3}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 2) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Por outro lado:

$$h''(-2) = \frac{8}{(-2)^3} = \frac{8}{-8} = -1 \text{ e } h''(2) = \frac{8}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$$

Como  $h''(-2) < 0$ , a função  $h$  tem um máximo local em -2

e como  $h''(2) > 0$ , a função  $h$  tem um mínimo local em 2.

$$7.4. f(x) = \sqrt{2x-4} + 6 - x;$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 \geq 0\} = [2, +\infty[$$

$$j'(x) = (\sqrt{2x-4} + 6 - x)' = \frac{(2x-4)'}{2\sqrt{2x-4}} - 1 =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2x-4}} - 1$$

$$D_{j'} = ]2, +\infty[$$

$$j''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2x-4}} - 1\right)' = \frac{1' \times \sqrt{2x-4} - 1 \times (\sqrt{2x-4})'}{(\sqrt{2x-4})^2} - 0$$

$$= \frac{0 - \frac{1}{\sqrt{2x-4}}}{2x-4} = -\frac{1}{\sqrt{2x-4}(2x-4)}$$

$$D_{j''} = ]2, +\infty[$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x-4}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x-4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2x-4} = 0 \wedge \sqrt{2x-4} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = 1 \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 = 1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$j''\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{5}{2}\right)-4} \left(2\left(\frac{5}{2}\right)-4\right)} = -\frac{1}{1 \times 1} = -1$$

Dado que  $D_j = [2, +\infty[$  e  $j(x) > 0$  para  $x \in ]2, \frac{5}{2}[$  temos

que  $j$  é crescente em  $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ . Assim,  $j$  tem um mínimo relativo para  $x = 2$ .

Como  $j''\left(\frac{5}{2}\right) < 0$ ,  $j$  tem um máximo um local  $\frac{5}{2}$ .

$$8.1. f'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{1'(1+x) - 1(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{0-1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{-1'(1+x)^2 - (-1)((1+x)^2)'}{((1+x)^2)^2} =$$

$$= \frac{0 + 2(1+x)(1+x)'}{(1+x)^4} =$$

$$= \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'(x) + f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} = -\frac{(1+x)}{(1+x)^3} + \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{-(1+x) + 2}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

8.2. Seja  $p(n)$  a condição:  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ , para todo o

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

• Provemos que  $p(1)$  é uma proposição verdadeira:

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{(-1)^1 \times 1!}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

• Provemos que  $p(n)$  traduz uma propriedade hereditária:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f^{(n)}(x)]' = \left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right]' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \times \frac{-(n+1)(1+x)^n}{[(1+x)^{n+1}]^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \times \frac{-(n+1)n!(1+x)^n}{(1+x)^{2n+2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \times (-1) \times \frac{(n+1)!}{(1+x)^{n+2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}, p(n) \Rightarrow p(n+1)$

Portanto, podemos concluir que:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pois:  $p(1) \wedge [p(k) \Rightarrow p(k+1)] \Rightarrow p(n), \forall n \in \mathbb{N}$

9. A função  $g$  é uma função polinomial de grau 3, portanto, contínua em  $\mathbb{R}$ .

$g(-1) = 3$  é extremo relativo de  $g$ , pelo que  $g'(-1) = 0$  e, por outro lado, o gráfico de  $g$  tem um ponto de inflexão de abscissa  $x = 2$ , pelo que  $g''(2) = 0$ .

$$g'(x) = (ax^3 + x^2 + bx + c)' = 3ax^2 + 2x + b$$

$$g''(x) = (3ax^2 + 2x + b)' = 6ax + 2$$

$$\begin{cases} g(-1) = 3 & \Leftrightarrow a(-1)^3 + (-1)^2 + b(-1) + c = 3 \\ g'(-1) = 0 & \Leftrightarrow 3a(-1)^2 + 2(-1) + b = 0 \\ g''(2) = 0 & \Leftrightarrow 6a(2) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 1 - b + c = 3 \\ 3a - 2 + b = 0 \\ 12a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(-\frac{1}{6}\right) + 1 - b + c = 3 \\ 3\left(-\frac{1}{6}\right) - 2 + b = 0 \\ a = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} + 1 - b + c = 3 \\ b = \frac{5}{2} \\ a = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} + 1 - \frac{5}{2} + c = 3 \\ b = \frac{5}{2} \\ a = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{13}{3} \\ b = \frac{5}{2} \\ a = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Portanto,  $a = -\frac{1}{6}, b = \frac{5}{2}$  e  $c = \frac{13}{3}$ .

10.1.  $h(x) = 2x + \frac{4}{x}$ ;  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$h'(x) = \left(2x + \frac{4}{x}\right)' = 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$0$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'$	$+$	$0$	$-$		$-$	$0$	$+$
$h$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Máx.

Mín.

A função  $h$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -\sqrt{2}[$  e em

$[\sqrt{2}, +\infty[$  e é estritamente decrescente em  $[-\sqrt{2}, 0[$  e em  $]0, \sqrt{2}[$ .

$h(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$  é um máximo relativo e  $h(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$  é um mínimo relativos de  $h$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$   $h$  não tem extremos absolutos.

10.2. Uma equação da reta tangente ao gráfico de  $h$  no ponto de abscissa  $x = -1$  é:

$$y - h(-1) = h'(-1)(x - (-1))$$

$$h(-1) = 2(-1) + \frac{4}{-1} = -2 - 4 = -6 \text{ e}$$

$$h'(-1) = 2 - \frac{4}{(-1)^2} = 2 - 4 = -2$$

$$y - (-6) = -2(x + 1) \Leftrightarrow y + 6 = -2x - 2 \Leftrightarrow y = -2x - 8$$

$y = -2x - 8$  é a equação pedida.

10.3.  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$h''(x) = \left(\frac{2x^2 - 4}{x^2}\right)' = \frac{8}{x^3}$$

$$h''(x) > 0, \forall x \in ]0, +\infty[ \text{ e } h''(x) < 0, \forall x \in ]-\infty, 0[$$

O gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para baixo em

$]-\infty, 0[$  e voltada para cima em  $]0, +\infty[$ .

O gráfico de  $h$  não tem pontos de inflexão.

Pág. 47

11.1. Tem-se que o declive da reta  $r$  é  $f'(2)$ .

Como  $f'(2) = \frac{4}{2^2 + 1} = \frac{4}{5}$ , vem que a reta  $r$  tem uma equação

da forma  $y = \frac{4}{5}x + b$ . Como  $f(2) = 5$ , o ponto de tangência

é o ponto de coordenadas  $(2, 5)$ .

$$5 = \frac{4}{5} \times 2 + b \Leftrightarrow 5 = \frac{8}{5} + b \Leftrightarrow 5 - \frac{8}{5} = b \Leftrightarrow b = \frac{17}{5}$$

Uma equação da reta  $r$  é, assim,  $y = \frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$ .

Como o ponto  $P$  pertence à reta  $r$  e tem ordenada nula, a sua

abscissa é a solução da equação  $0 = \frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$ .

$$0 = \frac{4}{5}x + \frac{17}{5} \Leftrightarrow 0 = 4x + 17 \Leftrightarrow x = -\frac{17}{4}$$

A abscissa de  $P$  é  $-\frac{17}{4}$  e as suas coordenadas são  $\left(-\frac{17}{4}, 0\right)$ .

O raio da circunferência é igual a  $d(O, P)$ , sendo  $O$  a

origem do referencial, logo,  $r = d(O, P) = \left|-\frac{17}{4}\right| = \frac{17}{4}$  e,

consequentemente,  $r^2 = \frac{289}{16}$ .

Assim, uma equação da circunferência de centro  $P$  e que passa

pela origem do referencial é:  $\left(x + \frac{17}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{289}{16}$

11.2.  $f'(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ ;  $D_{f'} = \mathbb{R}$

$$f''(x) = \left(\frac{4}{x^2 + 1}\right)' = \frac{4'(x^2 + 1) - 4(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{0 - 4(2x)}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{-8x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-8x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -8x = 0 \wedge (x^2 + 1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0, f'' \text{ tem um único zero, é}$$

$$x = 0.$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\cup$		$\cap$

P.I.

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em

$]-\infty, 0[$  e voltada para baixo em  $]0, +\infty[$ . Tem um ponto de

inflexão de abscissa  $x = 0$ .

11.1. O domínio de  $g$  é  $\mathbb{R}$ , pelo que pode existir assíntota não vertical do gráfico de  $g$  quando  $x \rightarrow -\infty$  ou  $x \rightarrow +\infty$ .

• Quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = -\sqrt{1 + 0} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 4} + x \right]^{(\infty - \infty)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)(\sqrt{x^2 + 4} - x)}{\sqrt{x^2 + 4} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} =$$

$$= \frac{4}{+\infty - (-\infty)} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação  $y = -x$  é uma assíntota do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ .

• Quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+4)x^2 \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+4)x = +\infty$$

Como  $m \notin \mathbb{R}$ , podemos concluir que o gráfico de  $g$  não tem assíntota não vertical, quando  $x \rightarrow +\infty$ .

A única assíntota não vertical do gráfico de  $g$  é a reta de equação  $y = -x$ .

**12.2.**  $D_g = \mathbb{R}$

Para  $x \leq 0$ :

$$g'(x) = (\sqrt{x^2+4})' = \frac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2+4} \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0$$

Recorrendo a uma tabela para estudar o e sinal de  $g'$  e a variação de  $g$ :

$x$	$-\infty$	$0$
$g'$	$-$	$0$
$g$	$\searrow$	$\nearrow$

Mín.

A função  $g$  é estritamente decrescente em  $\mathbb{R}_0^-$ .

**12.3.** Para  $x > 0$ :

$$g(x) = (2x-4)x^2 \Leftrightarrow g(x) = 2x^3 - 4x^2$$

$$g'(x) = (2x^3 - 4x^2)' = 6x^2 - 8x$$

$$g''(x) = (6x^2 - 8x)' = 12x - 8$$

$$\text{Zeros de } g'' : 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Recorrendo a uma tabela para estudar o sinal de  $g''$  e o sentido de concavidade do gráfico de  $g$ :

$x$	$0$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$g''$	$-$	$0$	$+$
$g$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

P.I.

O gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para baixo em

$$\left] 0, \frac{2}{3} \right[ \text{ e voltada para cima em } \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[ . \text{ Tem um ponto de}$$

inflexão de abscissa  $x = \frac{2}{3}$ .

**13.**  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ ;  $g(x) = x^2 + 2x + 2$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

**13.1.**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x + 2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3x^2 - 9x + 2) = 2 = h(0)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$ , existe  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  pelo que

$h$  é contínua no ponto  $x = 0$ .

Dado que  $h$  é contínua em  $\mathbb{R}^-$  e em  $\mathbb{R}^+$  por ser aí definida por funções polinomiais, podemos concluir que  $h$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

**13.2.** Para  $x \neq 0$ :

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x - 9 & \text{se } x > 0 \\ 2x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 6x - 9 = 0 \wedge x > 0) \vee (2x + 2 = 0 \wedge x < 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6} \wedge x > 0 \right) \vee x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$3$	$+\infty$
$h'$	$-$	$0$	$+$	$-$	$0$
$h$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Mín. Máx. Mín.

A função  $h$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[0, 3]$  e estritamente crescente em  $[-1, 0]$  e em  $[3, +\infty[$  (atendeu-se ao facto de  $h$  ser contínua em  $x = 0$ ).

A função  $h$  admite mínimos relativos para  $x = -1$  e  $x = 3$  e um máximo relativo para  $x = 0$ .

**13.3.**  $-g(-4) = -(16 - 8 + 2) = -10$

$$h(1) = 1 - 3 - 9 + 2 = -9 ; h(2) = 8 - 12 - 18 + 2 = -20$$

$$-20 < -10 < -9$$

Como  $h$  é contínua em  $[1, 2]$  e  $h(2) < -g(-4) < h(1)$ , podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que  $\exists x \in ]1, 2[ : h(x) = -g(-4)$

**13.4.** Para  $x \neq 0$ :

$$h''(x) = \begin{cases} 6x - 2 & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{1}{3}$	$1$	$+\infty$
$h''$	$+$	$-$	$0$	$+$	$+$
$h$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cup$	$\cup$

P.I.

P.I.

O gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para cima em  $]-\infty, 0[$  e em  $]1, +\infty[$  e voltada para baixo em  $]0, 1[$ .

Os pontos de abscissas 0 e 1 são pontos de inflexão.

**Ficha para praticar 10**

**1.1.**  $p(2) = 5(2)^2 + 40(2) \Leftrightarrow p(2) = 100$  e

$$p(6) = 5(6)^2 + 40(6) \Leftrightarrow p(6) = 420$$

Velocidade média em

$$\left[ 2, 6 \right] = \frac{p(6) - p(2)}{6 - 2} = \frac{420 - 100}{4} = \frac{320}{4} = 80$$

Portanto, a velocidade média da partícula entre os instantes  $t = 2$  s e  $t = 6$  s foi igual a 80 m/s.

**1.2.** A velocidade da partícula no instante  $t = 6$  s é igual a  $p'(6)$ .

$$p'(t) = (5t^2 + 40t)' = 10t + 40$$

$$p'(6) = 10 \times 6 + 40 = 100$$

A velocidade da partícula no instante  $t = 6$  s foi igual a 100 m/s.

- 1.3. A velocidade da partícula no instante  $t$  é dada por

$$p'(t) = 10t + 40.$$

Como  $p'(t)$  é estritamente crescente, o seu valor máximo no intervalo  $[0, 12]$  é igual a  $p'(12)$ , isto é,

$$p'(12) = 10 \times 12 + 40 = 160.$$

Logo, a velocidade máxima que atingiu foi de 160 m/s.

- 2.1. Tem-se que  $d(0) = 3 \times 0^2 + 18 \times 0 - 8 \Leftrightarrow d(0) = -8$

e  $d(4) = 3 \times 4^2 + 18 \times 4 - 8 \Leftrightarrow d(4) = 112$ . Assim, vem:

Velocidade média em  $[0, 4] =$

$$= \frac{d(4) - d(0)}{4 - 0} = \frac{112 - (-8)}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

Portanto, a velocidade média do ponto  $P$  nos quatro primeiros segundos foi de 30 cm/s.

- 2.2. A velocidade do ponto  $P$  no instante  $t = 3$  s é igual a

$$d'(3).$$

$$d'(t) = (3t^2 + 18t - 8)' = 6t + 18$$

$$d'(3) = 6 \times 3 + 18 = 36$$

A velocidade do ponto  $P$  no instante  $t = 3$  s foi de 36 cm/s.

- 2.3. A velocidade do ponto  $P$  no instante  $t$  é dada por

$$d'(t) = 6t + 18.$$

Como  $d'(t)$  é estritamente crescente, o seu valor máximo no intervalo  $[0, 10]$  é  $d'(10) = 6 \times 10 + 18 = 78$ .

Portanto, a velocidade máxima do ponto  $P$  foi 78 cm/s e foi atingida no instante  $t = 10$  s.

A aceleração da partícula no instante  $t$  é igual a  $d''(t)$ .

$d''(t) = (6t + 18)' = 6$ , significa que a aceleração é constante e igual a 6 cm/s<sup>2</sup>. Este é o valor da aceleração no instante  $t = 10$  s.

- 3.1. A velocidade da partícula no instante  $t$  é dada por  $p'(t)$ .

$$p'(t) = (0,6t^3 + t^2)' = 1,8t^2 + 2t$$

A aceleração média da partícula entre os instantes  $t = 2$  s e  $t = 4$  s é dada por:

$$\frac{p'(4) - p'(2)}{4 - 2} = \frac{(1,8 \times 4^2 + 2 \times 4) - (1,8 \times 2^2 + 2 \times 2)}{2} = 12,8$$

Portanto, a aceleração pedida é igual a 12,8 m/s<sup>2</sup>.

- 3.2. A aceleração da partícula no instante  $t$  é dada por

$$p''(t) = (1,8t^2 + 2t)' = 3,6t + 2.$$

Por outro lado, a aceleração da partícula no instante  $t = 1$  s é igual a  $p''(1)$ , isto é,

$$5,6 \text{ m/s}^2.$$

$$a'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 39,2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{39,2}{9,8} \Leftrightarrow t = 4$$

$$a''(t) = (-9,8t + 39,2)' = -9,8$$

A função  $a$  é duas vezes diferenciável e como  $a'(4) = 0$  e

$a''(4) < 0$ , a função  $a$  é máxima para  $t = 4$  s.

$$a(4) = -4,9 \times 4^2 + 39,2 \times 4 + 800 = 878,4$$

O projétil atingiu a altura máxima de 878,4 metros aos  $t = 4$  s.

- 4.2.  $a(0) = -4,9 \times 0^2 + 39,2 \times 0 + 800 = 800$  e

$$a(4) = -4,9 \times 4^2 + 39,2 \times 4 + 800 = 878,4.$$

Velocidade média em  $[0, 4] =$

$$= \frac{a(4) - a(0)}{4 - 0} = \frac{878,4 - 800}{4} = \frac{78,4}{4} = 19,6$$

Portanto, a velocidade média do projétil nos primeiros quatro segundos foi de 19,6 m/s.

- 4.3. O instante em que o projétil atingiu o solo é a solução positiva da equação

$$a(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t + 800 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-39,2 \pm \sqrt{39,2^2 - 4(-4,9) \times 800}}{2(-4,9)}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-39,2 \pm \sqrt{17216,64}}{-9,8}$$

$$\Leftrightarrow t \approx -9,389 \vee t \approx 17,389$$

A velocidade no instante  $t$  é dada por:

$$a'(t) = (-4,9t^2 + 39,2t + 800)' = -9,8t + 39,2$$

A velocidade pedida é:

$$a'(17,389) \approx -9,8 \times 17,389 + 39,2 \approx -131,212$$

A velocidade no instante em que o projétil atingiu o solo foi de -131 cm/s.

5. •  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  A função  $f$  é contínua no seu domínio pois é definida por uma função racional.

A função  $f$  não é par nem é ímpar, pois

$$1 \in D_f \wedge -1 \notin D_f.$$

- Como  $f$  é contínua, apenas a reta de equação  $x = 1$  pode ser assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 1$  é assíntota vertical, ao

gráfico de  $f$ . Assíntotas não verticais ( $y = mx + b$ ):

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{x-1} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

- 4.1.  $a'(t) = (-4,9t^2 + 39,2t + 800)' = -9,8t + 39,2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 1$  A reta de equação  $y = x + 1$  é assíntota do gráfico de  $f$ , em  $x \rightarrow -\infty$  e em  $x \rightarrow +\infty$ .

•  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \wedge x-1 \neq 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0$

A função  $f$  em um só zero, que é  $x = 0$ .

•  $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} =$   
 $= \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

Zeros de  $f'$ :  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=2) \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$x$	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'$	+	0	-		-	0	+
$f$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	4	$\nearrow$

Máx.

Mín.

A função  $f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0]$  e em  $[2, +\infty[$  e é estritamente decrescente em  $[0, 1[$  e em  $]1, 2]$ . Tem um máximo relativo igual a 0 para  $x = 0$  e um mínimo relativo igual a 4 para  $x = 2$ .

•  $f''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' =$   
 $= \frac{(x^2 - 2x)'(x-1)^2 - (x^2 - 2x)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} =$   
 $= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x)(2(x-1)(x-1)')}{(x-1)^4} =$   
 $= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x)(2(x-1)(x-1)')}{(x-1)^4} =$   
 $= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x)(2(x-1)(x-1)')}{(x-1)^4} =$   
 $= \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x)2]}{(x-1)^4} =$   
 $= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} =$   
 $= \frac{2}{(x-1)^3}$

$f''(x) \neq 0, \forall x \in D_f$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''$	-		+
$f$	$\cap$		$\cup$

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]-\infty, 1[$  e voltada para cima em  $]1, +\infty[$ . Não tem pontos de inflexão.

•  $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

6. •  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 \geq 0\} =$   
 $= ]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

• A função  $g$  é contínua no seu domínio por ser definida pela raiz quadrada de uma função polinomial.

• Zeros  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$   
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

Pontos de interseção com o eixo  $Ox$ :  
 $(-1, 0)$  e  $(2, 0)$ .

O gráfico de  $g$  não intersesta o eixo  $Oy$  porque  $0 \in D_g$ .

• A função  $g$  é contínua.

O gráfico de  $g$  não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais do gráfico ( $y = mx + b$ ):

Quando  $x \rightarrow +\infty$

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \sqrt{1 - 0 - 0} = 1$

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x - 2} - x\right) =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-1 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1\right)} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{-1 - 0}{\sqrt{1 - 0 - 0} + 1} = -\frac{1}{2}$

Portanto a reta de equação  $y = x - \frac{1}{2}$  é assíntota ao gráfico de  $g$  em  $+\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = -1$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 - x - 2} + x \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( -1 - \frac{2}{x} \right)}{x \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1 \right)} = \\
 &= \frac{-1 + 0}{-\sqrt{1 - 0 - 0} - 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação  $y = -x + \frac{1}{2}$  é assíntota ao gráfico de  $g$  em  $-\infty$ .

$$D_g = ]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$$

$$g'(x) = (\sqrt{x^2 - x - 2})' = \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset, \text{ logo } g' \text{ não tem zeros.}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$g'$	-			+
$g$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$

Mín. Mín.

A função  $g$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -1]$  e é estritamente crescente em  $[2, +\infty[$ . Tem um mínimo relativo igual a 0 para  $x = -1$  e  $x = 2$ .

$$D_{g''} = ]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= \left( \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \right)' = \\
 &= \frac{(2x - 1)'(2\sqrt{x^2 - x - 2}) - (2x - 1)(2\sqrt{x^2 - x - 2})'}{(2\sqrt{x^2 - x - 2})^2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2(2\sqrt{x^2 - x - 2}) - (2x - 1) \left( 2 \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \right)}{4(x^2 - x - 2)} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{x^2 - x - 2})^2 - (2x - 1)^2}{4\sqrt{x^2 - x - 2}(x^2 - x - 2)} =$$

$$= \frac{4(x^2 - x - 2) - (4x^2 - 4x + 1)}{4\sqrt{x^2 - x - 2}(x^2 - x - 2)} =$$

$$= \frac{-9}{4\sqrt{x^2 - x - 2}(x^2 - x - 2)}$$

peço que  $\forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[$ ,  $g''(x) < 0$ .

Assim, o gráfico  $g$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]-\infty, -1[$  e em  $]2, +\infty[$ . Não tem pontos de inflexão.

Pág. 50

### 7.1. • Zeros:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2)^2 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -3 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

### • Intervalos de monotonia e extremos:

$$f'(x) = (x^4 + x^2 - 6)' = 4x^3 + 2x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'$	-	0	+
$f$	$\searrow$	-6	$\nearrow$

Mín.

A função  $f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 0]$  e é estritamente crescente em  $[0, +\infty[$ .

Tem um mínimo absoluto que é  $f(0) = -6$ .

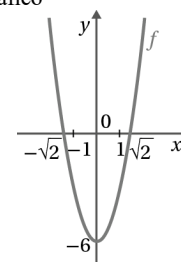
### • Sentido da concavidade do gráfico e pontos de inflexão

$$f''(x) = (4x^3 + 2x)' = 12x^2 + 2$$

A função  $f''$  não tem zeros pois  $\forall x \in \mathbb{R}, 12x^2 + 2 > 0$

Portanto, o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $\mathbb{R}$  e não tem pontos de inflexão.

### • Esboço do gráfico



$$D'_f = [-6, +\infty[$$

### 7.2. • $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 + x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}$ e a função é contínua.

•  $f$  não tem zeros

• Assíntotas verticais

O gráfico de  $f$  não tem assíntotas verticais pois  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

• Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2 + x^2} = \frac{2}{+\infty} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação  $y = 0$  é assíntota ao gráfico de  $f$ , em  $x \rightarrow +\infty$  e em  $x \rightarrow -\infty$ .

- Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = \left( \frac{2}{2+x^2} \right)' = \frac{2'(2+x^2) - 2(2+x^2)'}{(2+x^2)^2} = \frac{0 - 2(2x)}{(2+x^2)^2} = \frac{-4x}{(2+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(2+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \wedge (2+x^2)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$

Máx.

A função  $f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0]$  e é estritamente decrescente em  $[0, +\infty[$ . Tem máximo absoluto igual a 0 para  $x = 1$ .

- Sentido da concavidade do gráfico de  $f$  e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left( \frac{-4x}{(2+x^2)^2} \right)' =$$

$$= \frac{(-4x)'(2+x^2)^2 - (-4x)((2+x^2)')^2}{((2+x^2)^2)^2} =$$

$$= \frac{-4(2+x^2)^2 + 4x(2(2+x^2)(2x))}{(2+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-4(2+x^2)^2 + 16x^2(2+x^2)}{(2+x^2)^4} =$$

$$= \frac{(2+x^2)(-4(2+x^2) + 16x^2)}{(2+x^2)^4} =$$

$$= \frac{(2+x^2)(-8-4x^2+16x^2)}{(2+x^2)^4} = \frac{12x^2-8}{(2+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12x^2-8}{(2+x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow 12x^2-8=0 \wedge (2+x^2)^3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$	
$f''$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

P.I.

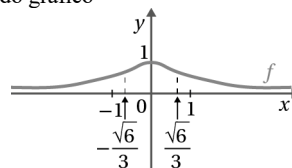
P.I.

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em

$$\left] -\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right[ \text{ e em } \left] \frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty \right[ \text{ e voltada para baixo em } \left] -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right[$$

$$\left] -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right[. \text{ Tem dois pontos de inflexão de abscissas } -\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ e } \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

- Esboço do gráfico



- $D_f = ]0, 1]$

7.3.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2+x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  e  $f$  é contínua.

- Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2+x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

- Assíntotas verticais

Como a função é contínua no seu domínio, apenas a reta de equação  $x = -2$  poderá ser assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2-x}{2+x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2-x}{2+x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -2$  é a única assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

- Assíntotas não verticais ( $y = mx + b$ )

Quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2-x}{2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{x(2+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0 \text{ e}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Logo, a reta de equação  $y = -1$  é assíntota ao gráfico de  $f$  em  $+\infty$  e em  $-\infty$ .

- Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = \left( \frac{2-x}{2+x} \right)' = \frac{(2-x)'(2+x) - (2-x)(2+x)'}{(2+x)^2} =$$

$$= \frac{-(2+x) - (2-x)}{(2+x)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2} = \frac{-4}{(2+x)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f'(x) < 0$ , pelo que a função  $f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -2[$  e em  $]-2, +\infty[$ .

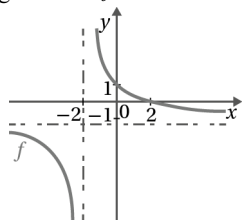
Não tem extremos.

- Sentido das concavidades do gráfico de  $f$  e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left( \frac{-4}{(2+x)^2} \right)' = \frac{-4'(2+x)^2 - (-4)((2+x)^2)'}{((2+x)^2)^2} = \frac{0 + 4(2(2+x)(2+x)')}{(2+x)^4} = \frac{8(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{8}{(2+x)^3}$$

Tem-se que:  $f''(x) < 0$  em  $]-\infty, -2[$  e  $f''(x) > 0$  em  $]-2, +\infty[$ , portanto, o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]-\infty, -2[$  e voltada para cima em  $]-2, +\infty[$ . Não tem pontos de inflexão.

- Esboço do gráfico de  $f$



- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

7.4. •  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1+x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}$

$f$  é contínua

- A função  $f$  é ímpar, pois:

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2} = -f(x),$$

$$\forall x \in D_f$$

- Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 0$$

- Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{1+x^2} = \frac{4}{-\infty} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  quer em  $+\infty$  quer em  $-\infty$ .

- Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = \left( \frac{4x}{1+x^2} \right)' = \frac{(4x)'(1+x^2) - 4x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1+x^2) - 4x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{4 + 4x^2 - 8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{4(1+x^2) - 4x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{4 + 4x^2 - 8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 4-4x^2 = 0 \wedge (1+x^2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$
		Mín.		Máx.	

$$f(-1) = \frac{4(-1)}{1+(-1)^2} = \frac{-4}{2} = -2; f(1) = \frac{4 \times 1}{1+1^2} = \frac{4}{2} = 2$$

A função  $f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$  e é estritamente crescente em  $]-1, 1]$ . Tem um mínimo absoluto que é  $f(-1) = -2$  e um máximo absoluto que é  $f(1) = 2$ .

- Sentido da concavidade do gráfico de  $f$  e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left( \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} \right)' = \frac{(4-4x^2)'(1+x^2)^2 - (4-4x^2)((1+x^2)^2)'}{(1+x^2)^4} = \frac{-8x(1+x^2)^2 - (4-4x^2)(2(1+x^2)(1+x^2)')}{(1+x^2)^4} = \frac{-8x(1+x^2)^2 - (4-x^2)(2(1+x^2)(2x))}{(1+x^2)^4} = \frac{-8x(1+x^2)^2 - (4-x^2)4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{(1+x^2)(-8x(1+x^2) - (4-4x^2)4x)}{(1+x^2)^4} = \frac{-8x - 8x^3 - 16x + 16x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{8x^3 - 24x}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x^3 - 24x}{(1+x^2)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 24x = 0 \wedge (1+x^2)^3 \neq 0$$

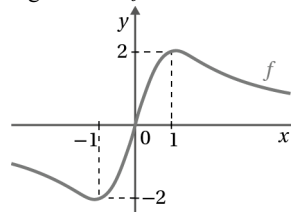
$$\Leftrightarrow 8x(x^2 - 3) = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 8x = 0 \vee x^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$f$	$\cap$		$\cup$		$\cup$
		P.I		P.I	

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $]-\sqrt{3}, 0[$  e em  $]\sqrt{3}, +\infty[$  e voltada pra baixo em  $]-\infty, \sqrt{3}[$  e em  $]0, \sqrt{3}[$ . Tem três pontos de inflexão de abscissas  $x = -\sqrt{3}$ ,  $x = 0$  e  $x = \sqrt{3}$ .

- Esboço do gráfico de  $f$ :



- $D_f = [-2, 2]$

7.5. •  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  e  $f$  é contínua.

• Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

• Assíntotas verticais

Como a função  $f$  é contínua no seu domínio, só as retas de equações  $x = -1$  e  $x = 1$  poderão ser assíntotas verticais.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = +\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = -\infty$$

As retas de equações  $x = -1$  e  $x = 1$  são assíntotas ao gráfico de  $f$ .

• Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$ , quer em  $x \rightarrow +\infty$ , quer em  $x \rightarrow -\infty$ .

• Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{x'(x^2 - 1) - x(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1 - x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  $f'(x) < 0$ , portanto a função  $f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -1[$ , em  $]-1, 1[$  e em  $]1, +\infty[$ . Não tem extremos.

• Sentido de concavidade do gráfico de  $f$  e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left( \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \right)' =$$

$$= \frac{(-x^2 - 1)'(x^2 - 1)^2 - (-x^2 - 1)((x^2 - 1)^2)'}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - (-x^2 - 1)(2(x^2 - 1)(x^2 - 1)')}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - (-x^2 - 1)(2(x^2 - 1)(2x))}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - (-x^2 - 1)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 1)(-2x(x^2 - 1) - (-x^2 - 1)4x)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{(-2x^3 + 2x + 4x^3 + 4x)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

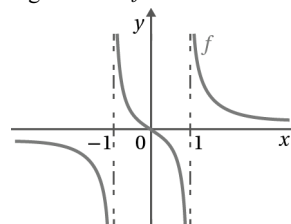
$$\Leftrightarrow x = 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$		$0$		$1$	$+\infty$
$f''$	$-$		$+$	$0$	$-$		$+$
$f$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

P.I.

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]-\infty, -1[$  e em  $]0, 1[$  e a concavidade voltada para cima em  $]-1, 0[$  e em  $]1, +\infty[$ . Tem um único ponto de inflexão de abscissa  $x = 0$ .

• Esboço do gráfico de  $f$



•  $D'_f = \mathbb{R}$

7.6. •  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  e  $f$  é contínua.

• Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

• Assíntotas verticais

Como a função  $f$  é contínua no seu domínio, apenas a reta de equação  $x = 1$  pode ser assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2x^3}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação  $x = 1$  é a única assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

• Assíntotas não verticais ( $y = mx + a$ ):

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$\begin{aligned}
 b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3}{(x-1)^2} - 2x \right) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 4x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4
 \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x)$ , portanto, a reta de equação  $y = 2x + 4$  é assíntota ao gráfico de  $f$ , em  $+\infty$  e em  $-\infty$ .

- Intervalos de monotonia e extremos

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( \frac{2x^3}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x^3)'(x-1)^2 - 2x^3((x-1)^2)'}{((x-1)^2)^2} = \\
 &= \frac{6x^2(x-1)^2 - 2x^3(2(x-1)(x-1)')}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{6x^2(x-1)^2 - 2x^3(2(x-1))}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{(x-1)(6x^2(x-1) - 4x^3)}{(x-1)^4} = \frac{6x^3 - 6x^2 - 4x^3}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{-6x^2 + 2x^3}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-6x^2 + 2x^3}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -6x^2 + 2x^3 = 0 \wedge (x-1)^3 \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x^2(-3 + x) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (2x^2 = 0 \vee -3 + x = 0) \wedge x \neq 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3
 \end{aligned}$$

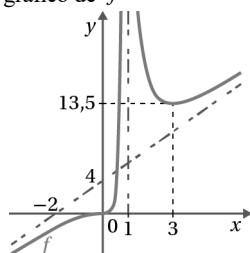
$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$3$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$+$	$-$	$+$
$f$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Máx.

A função  $f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -1[$  e em  $[3, +\infty[$  e é estritamente decrescente em  $]1, 3]$ . Tem um mínimo relativo igual

$$a \ f(3) = 13,5$$

- Esboço do gráfico de  $f$



### 7.7. $D'_f = \mathbb{R}$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 > 0\} = ]-3, 3[$  e  $f$  é contínua.

- Zeros

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x^2 = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

- Assíntotas verticais

Como a função é contínua no seu domínio, apenas, as retas de equação  $x = -3$  e  $x = 3$  poderão ser assíntotas verticais do seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

As retas de equações  $x = 3$  e  $x = -3$  são assíntotas ao gráfico de  $f$ .

- Assíntotas não verticais

O gráfico de  $f$  não tem assíntotas não verticais pois o domínio é um conjunto limitado

- Intervalos de monotonia e extremos

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}} \right)' = \frac{(2x^2)'\sqrt{9-x^2} - 2x^2(\sqrt{9-x^2})'}{(\sqrt{9-x^2})^2} = \\
 &= \frac{4x\sqrt{9-x^2} - 2x^2 \frac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \\
 &= \frac{4x\sqrt{9-x^2} - \frac{2x^2(2x)}{2\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \\
 &= \frac{4x\sqrt{9-x^2} + \frac{2x^3}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{4x(\sqrt{9-x^2})^2 + 2x^3}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = \\
 &= \frac{4x(9-x^2) + 2x^3}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = \frac{36x - 4x^3 + 2x^3}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = \\
 &= \frac{-2x^3 + 36x}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^3 + 36x}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^3 + 36x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(-x^2 + 18) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x = 0 \vee -x^2 + 18 = 0) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = \pm\sqrt{18}) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = \pm 3\sqrt{2}) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 0$$

	$-3$	$0$	$3$
$f'$		$-$	$+$
$f$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$

Mín.

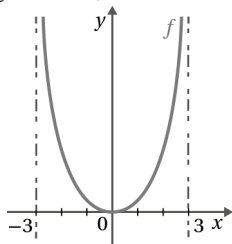
A função  $f$  é estritamente decrescente em  $]-3, 0]$  e é estritamente crescente em  $[0, 3[$ . Tem mínimo absoluto que é  $f(0) = 0$ .

- Sentido da concavidade do gráfico de  $f$  e pontos de inflexão

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left( \frac{-2x^3 + 36x}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} \right)' = \left( \frac{-2x^3 + 36x}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right)' \\
 &= \frac{(-2x^3 + 36x)'(9-x^2)^{\frac{3}{2}} - (-2x^3 + 36x)\left((9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)'}{\left((9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)^2} \\
 &= \frac{(-6x^2 + 36)(9-x^2)^{\frac{3}{2}} - (-2x^3 + 36x)\left(\frac{3}{2}(9-x^2)^{\frac{1}{2}}(9-x^2)'\right)}{(9-x^2)^3} \\
 &= \frac{(-6x^2 + 36)(9-x^2)^{\frac{3}{2}} - (-2x^3 + 36x)\left(\frac{3}{2}(9-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)\right)}{(9-x^2)^3} \\
 &= \frac{(-6x^2 + 36)(9-x^2)^{\frac{3}{2}} + (-2x^3 + 36x)\left(3x(9-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{(9-x^2)^3} \\
 &= \frac{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}\left((-6x^2 + 36)(9-x^2) + 3x(-2x^3 + 36x)\right)}{(9-x^2)^3} \\
 &= \frac{-54x^2 + 6x^4 + 324 - 36x^2 - 6x^4 + 108x^2}{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
 &= \frac{18x^2 + 324}{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned}$$

$\forall x \in D_f, f''(x) > 0$ , o que permite concluir que o gráfico de  $f$  tem a concavidade volta para cima em  $]-3, 3[$

- Esboço do gráfico de  $f$



- $D'_f = [0, +\infty[$

7.8.  $f(x) = \frac{|x+2|}{2x-1}$  e  $f$  é contínua.

- Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x+2| = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = -2$$

- Assíntotas verticais

Como a função é contínua no seu domínio, apenas a reta de equação  $x = \frac{1}{2}$  pode ser assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{|x+2|}{2x-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{|x+2|}{2x-1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = \frac{1}{2}$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

- Assíntotas não verticais ( $y = mx + b$ ):

Quando  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x+2|}{2x^2-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x^2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x+2|}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = \frac{1}{2}$  é assíntota ao gráfico de  $f$ ,

em  $+\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x+2|}{2x^2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-2}{2x^2-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x^2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x+2|}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-2}{2x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -\frac{1}{2}$  é assíntota ao gráfico de  $f$ ,

em  $-\infty$ .

- Intervalos de monotonia e extremos

$$f(x) = \frac{|x+2|}{2x-1} = \begin{cases} \frac{x+2}{2x-1} & \text{se } x \geq -2 \wedge x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{-x-2}{2x-1} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Para  $x < -2$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( \frac{-x-2}{2x-1} \right)' = \frac{-(2x-1) - (-x-2) \times 2}{(2x-1)^2} \\
 &= \frac{-2x+1+2x+4}{(2x-1)^2} = \frac{5}{(2x-1)^2}
 \end{aligned}$$

Para  $x > -2$

$$f'(x) = \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)' = \frac{(x+2)'(2x-1) - (x+2)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{-5}{(2x-1)^2}$$

Portanto, para  $x \neq -2 \wedge x \neq \frac{1}{2}$ .

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-5}{(2x-1)^2} & \text{se } x > -2 \wedge x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{5}{(2x-1)^2} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$\forall x \in ]-\infty, -2[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in ]-2, +\infty[ \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}, f'(x) < 0$$

Portanto, a função  $f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -2[$  e é estritamente decrescente em  $]-2, \frac{1}{2}[$  e em  $]\frac{1}{2}, +\infty[$ . Tem um máximo relativo igual a 0 em  $x = -2$ .

- Sentido da concavidade e pontos de inflexão.

Para  $x < -2$ :

$$f''(x) = \left[ \frac{5}{(2x-1)^2} \right]' = \frac{-5 \times 2(2x-1) \times 2}{(2x-1)^4} = \frac{-20}{(2x-1)^3}$$

Para  $x > -2$ :

$$f''(x) = \left[ -\frac{5}{(2x-1)^2} \right]' = \frac{20}{(2x-1)^3}$$

Logo, para  $x \neq -2 \wedge x \neq \frac{1}{2}$ .

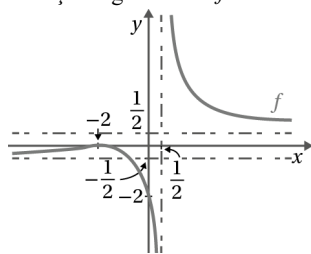
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{20}{(2x-1)^3} & \text{se } x > -2 \wedge x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{-20}{(2x-1)^3} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''$	$+$		$-$		$+$
$f$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

P.I.

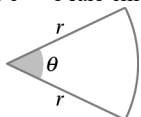
O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $]-\infty, -2[$  e em  $]\frac{1}{2}, +\infty[$  e voltada para baixo em  $]-2, \frac{1}{2}[$ . Tem um ponto de inflexão de abscissa  $x = -2$ .

- Esboço do gráfico de  $f$



- $D_f = ]-\infty, 0] \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[$

8. Vamos fazer uma esquema do canteiro onde  $\theta$  é o ângulo do setor circular e  $r$  o raio em metros.



O comprimento do arco é dado por  $r \times \theta$ , portanto, o perímetro do canteiro é dado por  $r \times \theta + 2r$ , daí que,  $2r + r\theta = 40$ , ou seja,  $\theta = \frac{40-2r}{r}$ . A área,  $A$ , do setor circular é dada em função de  $r$  e  $\theta$  por  $A = \frac{\theta}{2} \times r^2$ ,

substituindo  $\theta$  por  $\frac{40-2r}{r}$ :

$$A(r) = \frac{40-2r}{2} \times r^2 \Leftrightarrow A(r) = \frac{40-2r}{2r} \times r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(r) = 20r - r^2, 0 < r < 20, \text{ pois } r = \frac{40}{2+\theta} \text{ e } \theta > 0$$

$$A'(r) = (20r - r^2)' = 20 - 2r$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2r \Leftrightarrow r = 10$$

$r$	0		10		20
$A'$		$+$	0	$-$	
$A$		$\nearrow$	$A(10)$	$\searrow$	

Máx.

O canteiro tem área máxima quando  $r = 10$  m.

9. Área  $\Delta[OAP] = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{2}$

Por outro lado, o ponto  $P$  pertence à elipse, sendo  $x$  a sua abscissa, tem-se que a ordenada é:

$$x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow 4y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{4}x^2.$$

Como  $P$  tem ordenada positiva,  $y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}$ , portanto,

$$P\left(x, \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}\right).$$

$$\overline{OA} = \text{abscissa de } P = x$$

$$\overline{AP} = \text{ordenada de } P = \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}$$

Logo, a área  $A$  do triângulo  $[OAP]$  em função da abscissa  $x$  do ponto  $P$  é dada por:

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}}{2} = \frac{x}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4-x^2}{4}} = \frac{x}{4} \sqrt{4-x^2}$$

Determinemos uma expressão de  $A'(x)$ :

$$\begin{aligned} A'(x) &= \left( \frac{x}{4} \right)' \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{4} (\sqrt{4-x^2})' = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{4} \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{4-x^2-x^2}{4\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{4\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{2-x^2}{2\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

A equação da elipse é  $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

$a^2 = 4$  e  $a > 0$ , tem-se que  $a = 2$ , portanto  $D_A = ]0, 2[$ .

Assim, o zero de  $A'$  é  $\sqrt{2}$ .

Recorrendo a uma tabela:

$x$	0		$\sqrt{2}$		2
$A'$		+	0	-	
$A$		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

A área do triângulo  $[OAP]$  é máxima para  $x = \sqrt{2}$ .

Se  $x = \sqrt{2}$  então  $y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}(\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto,  $P\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

### Pág. 51

**10.1.** A função  $g$  é contínua no ponto  $x = -1$  se e somente se existir  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = g(-1)$$

$$g(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2(-1) - (-1)^2 = -3 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-4 + \frac{2}{x+3}\right) = -3$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1)$  existe  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  pelo que, podemos concluir que a função  $g$  é contínua no ponto  $-1$ .

**10.2.** Pretende-se mostrar que  $\exists x \in ]-3, -2[ : g(x) = 4x - 2$ , ou

Seja, que  $\exists x \in ]-3, -2[ : g(x) - 4x + 2 = 0$

Seja  $h(x) = g(x) - 4x + 2$ .

A função  $h$  é contínua no intervalo  $]-\infty, -1]$  pois é definida pela soma de duas funções contínuas (funções polinomiais).

Como  $[-3, -2] \subset ]-\infty, -1]$  podemos concluir que a função

$h$  é contínua no intervalo  $[-3, -2]$ .

Por outro lado, tem-se:

$$h(-3) = g(-3) - 4(-3) + 2 =$$

$$= (2x(-3) - (-3)^2) + 14 =$$

$$= -6 - 9 + 14 = -1$$

$$h(-2) = g(-2) - 4(-2) + 2 =$$

$$= (2x(-2)^2) + 10 =$$

$$= -8 + 10 = 2$$

Como  $h$  é contínua em  $[-3, -2]$  e  $h(-3) \times h(-2) < 0$ , pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que  $\exists x \in ]-3, -2[ : h(x) = 0$ , ou seja, que

$$\exists x \in ]-3, -2[ : g(x) = 4x - 2.$$

**10.3.** O declive da reta  $r$  é igual a  $g'(2)$ .

Para  $x > -1$ :

$$g'(x) = \left(-4 + \frac{2}{x+3}\right)' = -\frac{2}{(x+3)^2}$$

$$\text{Logo, } g'(2) = -\frac{2}{(2+3)^2} = -\frac{2}{25}.$$

Como o declive da reta  $r$  é igual a  $-\frac{2}{25}$ , tem-se que,

$\vec{r}(25, -2)$  é um vetor diretor da reta  $r$ , por exemplo. Por outro lado, o ponto  $(2, g(2))$  pertence à reta  $r$ .

$$g(2) = -4 + \frac{2}{2+3} = -4 + \frac{2}{5} = -\frac{18}{5}$$

$\left(2, -\frac{18}{5}\right)$  é um ponto de reta  $r$ .

$(x, y) = \left(2, -\frac{18}{5}\right) + \lambda(25, -2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  é uma equação vetorial da reta  $r$ .

**11.** A bissetriz dos quadrantes pares pode ser definida pela equação  $y = -x$  cujo declive é  $-1$ .

O declive da reta tangente ao gráfico de  $h$  no ponto de abscissa  $x = -1$  é igual a  $h'(-1)$ . Assim,  $h'(-1) = -1$ .

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{k+2}{4x+1}\right)' = \frac{(kx+2)'(4x+1) - (kx+2)(4x+1)'}{(4x+1)^2} = \\ &= \frac{k(4x+1) - (kx+2) \times 4}{(4x+1)^2} = \frac{4kx+k-4kx-8}{(4x+1)^2} = \\ &= \frac{k-8}{(4x+1)^2} \end{aligned}$$

$$h'(-1) = -1 \Leftrightarrow \frac{k-8}{(4(-1)+1)^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{k-8}{(-3)^2} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k-8}{9} = -1 \Leftrightarrow k-8 = -9 \Leftrightarrow k = -1$$

**12.1.** O ponto  $Q$  tem abscissa  $x$  e pertence ao gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = 8x - x^2$ , pelo que, as suas coordenadas são da forma  $(x, 8x - x^2)$ . Seja  $d(Q, P) = d(x)$ .

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (8x-x^2-0)^2}, 0 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 64x^2 - 16x^3 + x^4}, 0 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(x) = \sqrt{x^4 - 16x^3 + 65x^2 - 6x + 9}, 0 < x < 8$$

**12.2.** Para  $0 < x < 8$ , tem-se:

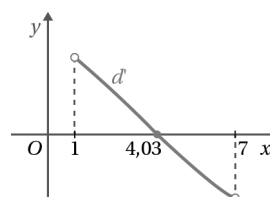
$$d'(x) = \left(\sqrt{x^4 - 16x^3 + 65x^2 - 6x + 9}\right)'$$

$$= \frac{(x^4 - 16x^3 + 65x^2 - 5x + 9)'}{2\sqrt{x^4 - 16x^3 + 65x^2 - 6x + 9}}$$

$$= \frac{4x^3 - 48x^2 + 130x - 6}{2\sqrt{x^4 - 16x^3 + 65x^2 - 6x + 9}}$$

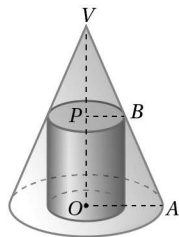
$$= \frac{2x^3 - 24x^2 + 65x - 3}{\sqrt{x^4 - 16x^3 + 65x^2 - 6x + 9}}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se o gráfico da função  $d'$  no intervalo  $]1, 7[$ .



Neste intervalo, o único zero de  $d$  é aproximadamente igual a 4,03.

13.1. Considere-se a figura:



Atendendo à semelhança dos triângulos  $[OAV]$  e  $[PBV]$ :

$$\frac{VP}{VO} = \frac{PB}{OA} \Leftrightarrow \frac{20-h}{20} = \frac{PB}{10} \Leftrightarrow PB = \frac{10(20-h)}{20} \Leftrightarrow \Leftrightarrow PB = \frac{20-h}{2} \Leftrightarrow PB = 10 - 0,5h.$$

Como  $PB$  = raio do cilindro, tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{Volume do cilindro} &= \text{Área da base} \times \text{altura} = \\ &= \pi(10 - 0,5h)^2 \times h = \\ &= \pi(100 - 10h + 0,25h^2) \times h = \\ &= \pi(0,25h^3 - 10h^2 + 100h) \end{aligned}$$

A altura do cone é igual a 20 e como  $P$  se desloca ao longo de  $[OP]$ , nunca coincidindo com  $O$ , nem com  $P$ , temos que  $h$  varia entre 0 e 20 e, portanto,

$$V(h) = \pi(0,25h^3 - 10h^2 + 100h), \quad 0 < h < 20$$

13.2.  $V'(h) = [\pi(0,25h^3 - 10h^2 + 100h)]', \quad 0 < h < 20 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V'(h) = \pi(0,75h^2 - 20h + 100), \quad 0 < h < 20$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow : \pi(0,75h^2 - 20h + 100) = 0 \wedge 0 < h < 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,75h^2 - 20h + 100 = 0 \wedge 0 < h < 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 300}}{2 \times 0,75} \wedge 0 < h < 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( h = \frac{20}{3} \vee h = 20 \right) \wedge 0 < h < 20 \Leftrightarrow h = \frac{20}{3}$$

$x$	0		$\frac{20}{3}$		20
$V'$		+	0	-	
$V$		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

O volume do cilindro é máximo quando  $h = \frac{20}{3}$  cm.

### Ficha de teste 5

Pág. 32

- $f'(a) = 0$
  - $\forall x \in ]-\infty, a[$ ,  $f'(x) > 0$ , pelo que  $f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, a[$
  - $\forall x \in ]a, +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$ , pelo que  $f$  é estritamente decrescente em  $]a, +\infty[$ .  
Logo  $f$  tem um máximo para  $x = a$ .  
Como  $f$  é decrescente em  $]a, +\infty[$  e  $a < 3$  então  $f$  é decrescente em  $]0, 3[$ .

Resposta: (D)

2. A função  $f$  é duas vezes diferenciável em  $\mathbb{R}$ , portanto, e por

$$\text{definição tem-se que: } f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

Resposta: (C)

3.  $g''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x + 4)^2(9 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 = 0 \vee (x + 4)^2 = 0 \vee 9 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -4 \vee x = -3 \vee x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = -3 \vee x = 3$$

Dado que  $(x + 4)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , o sinal da segunda derivada apenas muda em  $-3$  e  $3$ . Logo, o gráfico de  $g$  tem, apenas, dois pontos de inflexão, de abcissas  $-3$  e  $3$ .

Resposta: (B)

4. O declive pedido é igual a  $f''(-1)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{1}{1+x^2} \right)' = \frac{1'(1+x^2) - 1(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{0 - 2x}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \left( \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right)' = \frac{(-2x)'(1+x^2)^2 - (-2x)((1+x^2)')^2}{((1+x^2)^2)^2} =$$

$$= \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x(2(1+x^2)(1+x^2)')}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x(2(1+x^2)(2x))}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{(1+x^2)(-2(1+x^2) + 8x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2 - 2x^2 + 8x^2}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{6(-1)^2 - 2}{(1+(-1)^2)^3} = \frac{6 - 2}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Resposta: (A)

5. A velocidade do projétil no instante  $t = 2$  s é igual a  $a'(2)$

$$a'(t) = (70t - 5t^2)' = 70 - 10t, \text{ portanto, } a'(2) = 50.$$

Resposta: (B)

Pág. 53

6.1. Para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , tem-se:

$$h'(x) = \left( \frac{x^2 + 3x}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(x^2 + 3x)'(x+1)^2 - (x^2 + 3x)((x+1)')^2}{((x+1)^2)^2} =$$

$$= \frac{(2x+3)(x+1)^2 - (x^2+3x)(2(x+1))}{(x+1)^4} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2x+3)(x+1)^2 - (x^2+3x)(2(x+1))}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{(x+1)(2x+3)(x+1) - 2(x^2+3x)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{2x^2+2x+3x+3-2x^2-6x}{(x+1)^3} = \frac{-x+3}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

Portanto,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h'(x) = \frac{-x+3}{(x+1)^3}$ .

6.2. Para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left( \frac{-x+3}{(x+1)^3} \right)' = \frac{(-x+3)'(x+1)^3 - (-x+3)((x+1)^3)'}{((x+1)^3)^2} = \\ &= \frac{-(x+1)^3 - (-x+3)(3(x+1)^2(x+1)')}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{-(x+1)^3 - (-x+3)(3(x+1)^2)}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{(x+1)^2(-x+1) - 3(-x+3)}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{-x-1+3x-9}{(x+1)^4} = \frac{2x-10}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x-10}{(x+1)^4} = 0 \Leftrightarrow 2x-10 = 0 \wedge (x+1)^4 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-1$		$5$	$+\infty$
$h''$	$-$		$-$	$0$	$+$
$h$	$\cap$		$\cap$		$\cup$

P.I.

O gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada pra baixo em  $]-\infty, -1[$  e em  $]-1, 5[$  e voltada para cima em  $]5, +\infty[$ . Tem um ponto de inflexão de abscissa  $x = 5$ .

7.1.  $p(1) = 4 \times 1^3 + 20 \times 1^2 = 24$  e  $p(3) = 4 \times 3^3 + 20 \times 3^2 = 288$

Velocidade média em  $[1, 3] = \frac{p(3) - p(1)}{3 - 1} = \frac{288 - 24}{2} = 132$

A velocidade média da partícula entre os instantes  $t = 1$  e  $t = 3$  é igual a 132 cm/s

7.2. A velocidade da partícula no instante  $t$  é dada por  $p'(t)$ .

$$p'(t) = (4t^3 + 20t^2)' = 12t^2 + 40t$$

$$p''(t) = 24t + 40$$

$$p''(t) = 0 \wedge t \in ]0, 12[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24t + 40 = 0 \wedge t \in ]0, 12[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \in \emptyset$$

Como  $p''(t) > 0, \forall t \in [0, 12]$ , a função velocidade,  $v'(t)$ , é estritamente crescente neste intervalo. Logo, a velocidade máxima atingida, neste intervalo, é  $p'(12)$ , ou seja,

$$p'(12) = 12 \times 12^2 + 40 \times 12 = 2208$$

Portanto, a velocidade pedida é 2208 cm/s.

8. 
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{a^2 + bx + 13}{x+3} \right)' = \\ &= \frac{(ax^2 + bx + 13)'(x+3) - (ax^2 + bx + 13)(x+3)'}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{(2ax+b)(x+3) - (ax^2 + bx + 13)}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{2ax^2 + 6ax + bx + 3b - ax^2 - bx - 13}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{ax^2 + 6ax + 3b - 13}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

$f$  é diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

- Se  $f$  tem um extremos em  $x = -7$ , então  $f'(-7) = 0$ .
- Se a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $x = -1$  tem declive igual a  $-3$ , então  $f'(-1) = -3$ .

$$\begin{cases} f'(-7) = 0 \\ f'(-1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a(-7)^2 + 6a(-7) + 3b - 13}{(-7+3)^2} = 0 \\ \frac{a(-1)^2 + 6a(-1) + 3b - 13}{(-1+3)^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{49a - 42a + 3b - 13}{16} = 0 \\ \frac{a - 6a + 3b - 13}{4} = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 3b - 13 = 0 \\ -5a + 3b - 13 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 13 - 7a \\ 3b = 1 + 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 5a = 13 - 7a \\ 3b = 1 + 5a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12a = 12 \\ 3b = 1 + 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3b = 1 + 5 \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

9. Seja  $x$  a abscissa do ponto  $P$ . Como este ponto se desloca no primeiro quadrante ao longo do gráfico de  $f$ , tem-se que as suas coordenadas são  $\left(x, -\frac{1}{4}x + 10\right)$ , como  $x \in ]0, 40[$ , já que o zero de  $f$  é  $x = 40$ .

Seja  $A$  a área do retângulo  $[OAPB]$ , em função de  $x$ .

$$A(x) = x \left( -\frac{1}{4}x + 10 \right), 0 < x < 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 10x, 0 < x < 40$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 10 \Leftrightarrow x = 20$$

$x$	$0$		$20$		$40$
$A'$		$+$	$0$	$-$	
$A$		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

O retângulo de área máxima tem dimensões  $x = 20$  e  $y = -\frac{1}{4} \times 20 + 10$ , ou seja,  $x = 20$  e  $y = 5$ .

Portanto, o retângulo de área máxima ocorre quando  $P(20, 5)$  e as suas dimensões são:  $\overline{OA} = 20$  e  $\overline{AP} = 5$ .