

Ficha para praticar 13

Pág. 74

1. Recorrendo à fórmula $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$, onde

$$C_0 = 4000 ; n = 8 \text{ e } r = 2,8, \text{ tem-se:}$$

$$C_8 = 4000 \left(1 + \frac{2,8}{100}\right)^8 \approx 4988,90$$

Como $4988,90 - 4000 = 988,90$, significa que o montante de juro que o António poderá obter com este depósito será, aproximadamente, igual a 988,90 euros.

- 2.1. Recorrendo à fórmula $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n$, onde

$$C_0 = 12\,500 ; r = 2,5\% \text{ e } n = \frac{12}{3} = 4 \text{ (num ano há 4 trimestres), vem:}$$

$$C = 12\,500 \left(1 + \frac{2,5}{100 \times 4}\right)^4 \approx 12\,814,44$$

Ao fim de um ano o capital acumulado com capitalizações trimestrais seria de 12 815,44 euros.

- 2.2. Recorrendo à fórmula $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n$, onde

$$C_0 = 12\,500 ; r = 2,5\% \text{ e } n = \frac{12}{6} = 2 \text{ (num ano há 2 semestres), vem:}$$

$$C = 12\,500 \left(1 + \frac{2,5}{100 \times 2}\right)^2 \approx 12\,814,45$$

Ao fim de um ano o capital acumulado com capitalizações semestrais seria de 12 814,45 euros.

3. Tem-se que $C_0 = 1000$; $n = 12$ e $C = 10\,304,16$

$$\text{Recorrendo à fórmula } C = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n, \text{ vamos}$$

determinar r .

$$10\,304,16 = 10\,000 \left(1 + \frac{r}{100 \times 12}\right)^{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10\,304,16}{10\,000} = \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[12]{\frac{10\,304,16}{10\,000}} = 1 + \frac{r}{1200} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[12]{\frac{10\,304,16}{10\,000}} - 1 = \frac{r}{1200} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 1200 \left(\sqrt[12]{\frac{10\,304,16}{10\,000}} - 1\right) \Rightarrow r \approx 3,00$$

Portanto, $r \approx 3,00\%$

$$4.1. \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$4.2. \lim \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{4}} = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$$

$$4.3. \lim \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \lim \left[\left(\frac{n+2}{n}\right)^{-1}\right]^n = \left[\lim \left(\frac{n+2}{n}\right)^n\right]^{-1} =$$

$$= \left[\lim \left(\frac{n}{n+2}\right)^n\right]^{-1} = \left[\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right]^{-1} = (e^2)^{-1} = e^{-2}$$

$$4.4. \lim \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \lim \left(\frac{n\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)}\right)^n = \lim \left[\frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}\right] =$$

$$= \frac{\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e^3}{e^2} = e$$

$$4.5. \lim \left(1 - \frac{1}{n+5}\right)^n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+5}\right)^{n+5-5} =$$

$$= \lim \left[\left(1 - \frac{1}{n+5}\right)^{n+5} \times \left(1 - \frac{1}{n+5}\right)^{-5}\right] =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{-1}{n+5}\right)^{n+5} \times \lim \left(1 - \frac{1}{n+5}\right)^{-5} =$$

$$= e^{-1} \times (1-0)^{-5} =$$

$$= e^{-1} \times 1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$4.6. \lim \left(1 + \frac{5}{2n}\right)^{-3n} = \lim \left[\left(1 + \frac{5}{2n}\right)^n\right]^{-3} = \left[\lim \left(1 + \frac{5}{2n}\right)^n\right]^{-3} =$$

$$= \left(e^{\frac{5}{2}}\right)^{-3} = e^{-\frac{15}{2}} = \sqrt{e^{-15}} = \sqrt{\left(\frac{1}{e}\right)^{15}}$$

$$4.7. \lim \left(\frac{3n-4}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left[\frac{3n\left(1 - \frac{4}{3n}\right)}{3n\left(1 + \frac{2}{3n}\right)}\right]^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{\lim \left(1 - \frac{4}{3n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{e^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(e^{-\frac{4-2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(e^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{e}$$

$$4.8. \lim \left(\frac{3n-8}{2n-3}\right)^n = \lim \left[\frac{3n\left(1 - \frac{8}{3n}\right)}{2n\left(1 - \frac{3}{2n}\right)}\right]^n =$$

$$= \lim \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{\lim \left(1 - \frac{8}{3n}\right)^n}{\lim \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^n} =$$

$$= +\infty \times \frac{e^{-\frac{8}{3}}}{e^{-\frac{3}{2}}} = +\infty$$

$$\begin{aligned}
5.1. \quad \lim \left(1 - \frac{5}{9n^2}\right)^n &= \lim \left[\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3n}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3n}\right) \right]^n = \\
&= \lim \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3n}\right)^n \lim \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3n}\right)^n = \\
&= \lim \left(1 + \frac{-\sqrt{5}}{3n}\right)^n \lim \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3n}\right)^n = \\
&= e^{\frac{\sqrt{5}}{3}} \times e^{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

$$5.2. \quad \lim \left(\frac{n^2 - 2}{n^2}\right)^{n^2} = \lim \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{n^2} = e^{-2}$$

$$\begin{aligned}
5.3. \quad \lim \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{\sqrt{n}} &= \lim \left[\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \right]^{\sqrt{n}} = \\
&= \lim \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \times \lim \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{3}} \times e^{\sqrt{3}} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4. \quad \lim \left(\frac{3^n - 4}{3^n - 1}\right)^{3^n} &= \lim \left(\frac{3^n \left(1 - \frac{4}{3^n}\right)}{3^n \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}\right)^{3^n} = \\
&= \frac{\lim \left(1 - \frac{4}{3^n}\right)^{3^n}}{\lim \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)^{3^n}} = \frac{e^{-4}}{e^{-1}} = e^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.5. \quad \lim \left(\frac{9^n - 2}{9^n + 3}\right)^{3^{2n+1}} &= \lim \left[\left(\frac{9^n - 2}{9^n + 3}\right)^{3^{2n}} \times \left(\frac{9^n - 2}{9^n + 3}\right)^3 \right] = \\
&= \lim \left[\frac{9^n \left(1 - \frac{2}{9^n}\right)^{3^{2n}}}{9^n \left(1 + \frac{3}{9^n}\right)^{3^{2n}}} \times \left(\frac{9^n - 2}{9^n + 3}\right)^3 \right] = \\
&= \frac{\lim \left(1 - \frac{2}{9^n}\right)^{9^n}}{\lim \left(1 + \frac{3}{9^n}\right)^{9^n}} \times \frac{\lim \left(1 - \frac{2}{9^n}\right)^3}{\lim \left(1 + \frac{3}{9^n}\right)^3} = \\
&= \frac{e^{-2}}{e^3} \times \frac{1^3}{1^3} = e^{-5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.6. \quad \lim \left(\frac{n+4}{3n+3}\right)^n &= \lim \left(\frac{n \left(1 + \frac{4}{n}\right)}{3n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right)^n = \\
&= \frac{\lim \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \times \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = \\
&= \frac{e^4}{e^1} \times 0 = e^3 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.7. \quad \lim \left(\frac{4n+2}{n+5}\right)^n &= \lim \left[\frac{4n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{n \left(1 + \frac{5}{n}\right)} \right]^n = \\
&= \lim (4^n) \times \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n} = +\infty \times \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^5} = +\infty \times e^{-\frac{9}{2}} = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.8. \quad \lim \left(\frac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+3)!}\right)^n &= \\
&= \lim \left(\frac{(n+3)(n+2)! - (n+2)!}{(n+3)(n+2)!}\right)^n = \\
&= \lim \left(\frac{(n+2)!((n+3)-1)}{(n+3)(n+2)!}\right)^n = \lim \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \\
&= \lim \left(\frac{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)}\right)^n = \frac{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{e^3} = e^{-1} = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.9. \quad \lim \left(\frac{(n-1)! n^{n+1}}{(n-1)^n n!}\right) &= \lim \frac{(n-1)! n^{n+1} \times n}{(n-1)^n n(n-1)!} = \\
&= \lim \frac{n^n}{(n-1)^n} = \lim \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \\
&= \frac{1}{\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.10. \quad \lim \left(\frac{{}^{n+1}C_4}{{}^nC_4}\right)^n &= \lim \left(\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1-4)!4!}}{\frac{n!}{(n-4)!4!}}\right)^n = \\
&= \lim \left[\frac{(n+1)!(n-4)!4!}{(n-3)!4!n!}\right]^n = \lim \left[\frac{(n+1)n!(n-4)!}{(n-3)(n-4)!n!}\right]^n = \\
&= \lim \left(\frac{n+1}{n-3}\right)^n = \lim \left(\frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(1 - \frac{3}{n}\right)}\right)^n = \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\lim \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n} = \\
&= \frac{e}{e^{-3}} = e^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad \lim u_n = \lim w_n &\Leftrightarrow \lim \left(1 - \frac{2}{3an}\right)^n = \lim \left(\frac{6n+5}{6n}\right)^{bn+2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lim \left(1 - \frac{2}{3a}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{5}{6n}\right)^{bn+2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow e^{-\frac{2}{3a}} = \lim \left(1 + \frac{5}{6n}\right)^{bn} \times \lim \left(1 + \frac{5}{6n}\right)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow e^{-\frac{2}{3a}} = \left[\lim \left(1 + \frac{5}{6n}\right)^n \right]^b \times 1^2 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{2}{3a}} = \left(e^{\frac{5}{6}}\right)^b \Leftrightarrow e^{-\frac{2}{3a}} = e^{\frac{5b}{6}} \Leftrightarrow -\frac{2}{3a} = \frac{5b}{6}$$

$$\Leftrightarrow 5b = -\frac{2 \times 6}{3a} \Leftrightarrow 5b = \frac{-4}{a} \Leftrightarrow b = -\frac{4}{5a}$$

Portanto, se $\lim u_n = \lim w_n$, então, $b = -\frac{4}{5a}$

7.1.
$$\lim \left(1 + \frac{u_n}{2}\right)^{\frac{1}{u_n}} = \lim \left(1 + \frac{1}{2n!}\right)^{\frac{1}{n!}} = \lim \left(1 + \frac{1}{2n!}\right)^{n!} =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{n!} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

7.2. Tem-se que $u_n \times v_n = \frac{1}{n!}(\cos n)^n = \frac{(\cos n)^n}{n!}$

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1$, pelo que

$$-1^n \leq (\cos n)^n \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n!} \leq \frac{(\cos n)^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$$

Como $\lim \frac{-1}{n!} = 0$ e $\lim \frac{1}{n!} = 0$, e $-\frac{1}{n!} \leq \frac{(\cos n)^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$,

podemos concluir pelo teorema das sucessões encastradas

que $\lim \frac{(\cos n)^n}{n!} = 0$

Logo, $\lim(u_n \times v_n) = 0$, pelo que, a sucessão $(u_n \times v_n)$ é convergente.

8. Pretende-se provar que $\lim u_n = e$.

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{1-2n}{3-2n}\right)^n = \lim \left(\frac{-2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{-2n\left(1-\frac{3}{2n}\right)}\right)^n =$$

$$= \frac{\lim \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}{\lim \left(1-\frac{3}{2n}\right)^n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}} = e^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = e$$

9.1. $4^{\sqrt{2}} = (2^2)^{\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{8}}$

Como $\sqrt{3} < \sqrt{8}$ então $2^{\sqrt{3}} < 2^{\sqrt{8}}$, isto é, $2^{\sqrt{3}} < 4^{\sqrt{2}}$, portanto o menor dos dois números é $2^{\sqrt{3}}$.

9.2. $125^{\sqrt{2}} = (5^3)^{\sqrt{2}} = 5^{3\sqrt{2}}$ e $5^{\sqrt{8}} = 5^{2\sqrt{2}}$

Como $2\sqrt{2} < 3\sqrt{2}$ então $5^{2\sqrt{2}} < 5^{3\sqrt{2}}$, isto é, $5^{\sqrt{8}} < 125^{\sqrt{2}}$, portanto o menor dos dois números é $5^{\sqrt{8}}$.

9.3. $\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{8}} = (8^{-1})^{\sqrt{8}} = 8^{-\sqrt{8}}$ e $2^{-3\pi} = (2^3)^{-\pi} = 8^{-\pi}$

Como $-\pi < -\sqrt{8}$ então $8^{-\pi} < 8^{-\sqrt{8}}$, isto é, $2^{-3\pi} < \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{8}}$,

portanto o menor dos dois números é $2^{-3\pi}$.

9.4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{27}} = (4^{-1})^{\sqrt{27}} = 4^{-\sqrt{27}} = 4^{-3\sqrt{3}} = e$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\sqrt{3}} = (16^{-1})^{\sqrt{3}} = \left((4^2)^{-1}\right)^{\sqrt{3}} = 4^{-2\sqrt{3}}$$

Como $-3\sqrt{3} < -2\sqrt{3}$ então $4^{-3\sqrt{3}} < 4^{-2\sqrt{3}}$, isto é,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{27}} < \left(\frac{1}{16}\right)^{\sqrt{3}}$$
, portanto o menor dos dois números é

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{27}}$$
.

Pág. 76

10.1. $3^{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 1 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

10.2. $16^x = \sqrt{8} \Leftrightarrow (2^4)^x = 8^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{4x} = (2^3)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$$

10.3. $\frac{27^{x+2}}{3^x} = 81^{1-x} \Leftrightarrow \frac{(3^3)^{x+2}}{3^x} = (3^4)^{1-x} \Leftrightarrow \frac{3^{3x+6}}{3^x} = 3^{4-4x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{3x+6-x} = 3^{4-4x} \Leftrightarrow 3^{2x+6} = 3^{4-4x}$$

$$\Leftrightarrow 2x+6 = 4-4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+4x = 4-6 \Leftrightarrow 6x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

10.4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 32 \Leftrightarrow 4^{-2x} = 32 \Leftrightarrow (2^2)^{-2x} = 2^5 \Leftrightarrow 2^{-4x} = 2^5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -4x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

10.5. $5^{x^2} + 2 = 27 \Leftrightarrow 5^{x^2} = 25 \Leftrightarrow 5^{x^2} = 5^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

10.6. $4^{x^2-1} - 8^x = 0 \Leftrightarrow 4^{x^2-1} = 8^x \Leftrightarrow (2^2)^{x^2-1} = (2^3)^x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2-2} = 2^{3x} \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3+5}{4} \vee x = \frac{3-5}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

10.7. $\sqrt{3^x} = \frac{1}{9^{x-2}} \Leftrightarrow (3^x)^{\frac{1}{2}} = 9^{2-x} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = (3^2)^{2-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{4-2x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 4-2x \Leftrightarrow x = 8-4x \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$$

10.8. $2^{|x-3|} - 16 = 0 \Leftrightarrow 2^{|x-3|} = 16 \Leftrightarrow 2^{|x-3|} = 2^4 \Leftrightarrow |x-3| = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x-3 = 4 \vee x-3 = -4 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = -1$$

10.9. $4^x \times x^3 - 4^x \times x^2 = 0 \Leftrightarrow 4^x(x^3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4^x = 0 \vee x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x^2(x-1) = 0, \text{ pois } \forall x \in \mathbb{R}, 4^x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x-1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

10.10. $4^x - 2 = 2^x \Leftrightarrow 4^x - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{1+3}{2} \vee 2^x = \frac{1-3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2 \vee 2^x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^1 \vee x \in \emptyset, \text{ pois } \forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

10.11. $8^{x+1} + 3 \times 8^x = 22 \Leftrightarrow 8 \times 8^x + 3 \times 8^x = 22 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 11 \times 8^x = 22 \Leftrightarrow 8^x = \frac{22}{11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8^x = 2 \Leftrightarrow (2^3)^x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

10.12. $2^{2x} + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{-1+5}{2} \vee 2^x = \frac{-1-5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2 \vee 2^x = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x \in \emptyset, \text{ pois } \forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

10.13. $16^x + 3 \times 4^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 + 3 \times 4^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (4^x)^2 + 3 \times 4^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^x = \frac{-3+5}{2} \vee 4^x = \frac{-3-5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^x = 1 \vee 4^x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^x = 4^0 \vee x \in \emptyset, \text{ pois } \forall x \in \mathbb{R}, 4^x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

10.14. $3^{2x+2} + 3^{x+2} - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} \times 3^2 + 3^x \times 3^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 9 \times (3^x)^2 + 9 \times 3^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 9 \times (-4)}}{2 \times 9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{-9+15}{18} \vee 3^x = \frac{-9-15}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \vee 3^x = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \vee x \in \emptyset, \text{ pois } \forall x \in \mathbb{R}, 3^x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

10.15. $3^x + 3^{1-x} = 4 \Leftrightarrow 3^x + \frac{3}{3^x} = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 + 3 = 4 \times 3^x \wedge 3^x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 4 \times 3^x + 3 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}, \text{ pois}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{4+2}{2} \vee 3^x = \frac{4-2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 3^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$$

10.16. $4^{\frac{1}{x}} = 8^{-x} \Leftrightarrow (2^2)^{\frac{1}{x}} = (2^3)^{-x} \Leftrightarrow 2^{\frac{2}{x}} = 2^{-3x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} = -3x \Leftrightarrow \frac{2}{x} + 3x = 0 \Leftrightarrow \frac{2+3x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+3x^2 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

11.1. $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq 9^{1-x} \Leftrightarrow (\sqrt{3})^{-1} \leq (3^2)^{1-x} \Leftrightarrow (3^{\frac{1}{2}})^{-1} \leq 3^{2-2x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{-\frac{1}{2}} \leq 3^{2-2x} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq 2-2x \Leftrightarrow 2x \leq 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$$

Portanto, $x \in]-\infty, \frac{5}{4}]$

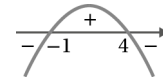
11.2. $10^{-x^2+3x} > 0,0001 \Leftrightarrow 10^{-x^2+3x} > 10^{-4} \Leftrightarrow -x^2+3x > -4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^2+3x+4 > 0$$

Cálculo auxiliar:

$$-x^2+3x+4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-1) \times 4}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+5}{-2} \vee x = \frac{-3-5}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$$



Portanto, $-x^2+3x+4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 4[$

11.3. $(\frac{1}{4})^{x-3} < 8^{-x} \Leftrightarrow 4^{3-x} < 8^{-x} \Leftrightarrow (2^2)^{3-x} < (2^3)^{-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{6-2x} < 2^{-3x} \Leftrightarrow 6-2x < -3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x+3x < -6 \Leftrightarrow x < -6$$

Portanto, $x \in]-\infty, -6[$

11.4. $0,2^x \geq 5^{2x+4} \Leftrightarrow (\frac{1}{5})^x \geq 5^{2x+4} \Leftrightarrow 5^{-x} \geq 5^{2x+4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x \geq 2x+4 \Leftrightarrow -4 \geq 3x \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{3}$$

Portanto, $x \in]-\infty, -\frac{4}{3}]$

11.5. $3^{\frac{1}{x}} \leq 9 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x}} \leq 3^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} \leq 0$

Cálculo auxiliar:

$$1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-2x}{x}$	$-$	$+$	$+$	0	$-$

Portanto, $x \in]-\infty, 0[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

11.6. $4^{x^2-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow (2^2)^{x^2-1} < 2^{-3x} \Leftrightarrow 2^{2x^2-2} < 2^{-3x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 < -3x \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 < 0$

Cálculo auxiliar:

$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3+5}{4} \vee x = \frac{-3-5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$



Portanto, $x \in]-2, \frac{1}{2}[$

11.7. $\bullet 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

$\bullet 4^x - 8^x = 0 \Leftrightarrow 4^x = 8^x \Leftrightarrow (2^2)^x = (2^3)^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{3x} \Leftrightarrow 2x = 3x \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$3^x - 9$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$4^x - 8^x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{3^x - 9}{4^x - 8^x}$	$-$	$+$	0	0	$-$

Portanto, $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

11.8. $\bullet 5^x - x^2 \times 5^x = 0 \Leftrightarrow 5^x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^x = 0 \vee 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -1 \vee x = 1,$

pois $\forall x \in \mathbb{R}, 5^x > 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

$\bullet 2^x - 8 \times 2^{-x} - 7 = 0 \Leftrightarrow 2^x - \frac{8}{2^x} - 7 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 8 - 7 \times 2^x = 0 \wedge 2^x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times (1) \times (-8)}}{2 \times 1} \wedge x \in \mathbb{R},$

pois, $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$

$\Leftrightarrow 2^x = \frac{7+9}{2} \vee 2^x = \frac{7-9}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 8 \vee 2^x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 2^3 \vee x \in \emptyset, \text{ pois } \forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	-1		1	3	$+\infty$
$5^x - x^2 \times 5^x$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$2^x - 8 \times 2^{-x} - 7$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{5^x - x^2 \times 5^x}{2^x - 8 \times 2^{-x} - 7}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$

Portanto, $x \in]-\infty, -1[\cup]1, 3[$

12.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

12.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} =$

$= 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 3 \times 1 = 3$ $\left\{ \begin{array}{l} y = 3x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

12.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{4x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}$ $\left\{ \begin{array}{l} y = 2x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

12.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+4} - e^4}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^4(e^x - 1)}{2x} = \frac{e^4}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^4}{2} \times 1 = \frac{e^4}{2}$

12.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^x - 1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x-1} = 1 \times 1 = 1$

12.6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x-2} =$ $\left\{ \begin{array}{l} y = x-2 \\ \text{Se } x \rightarrow 2, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

12.7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e(e^{x-1} - 1)}{x-1} = -e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}$

$= -e \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -e \times 1 = -e$ $\left\{ \begin{array}{l} y = x-1 \\ \text{Se } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

12.8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x-3} - 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x-3} - 1}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x-3} - 1}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3}$

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y+3+3} =$ $\left\{ \begin{array}{l} y = x-3 \\ \text{Se } x \rightarrow 3, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$= 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

12.9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(e^x - 1)}{\sqrt{x}} =$

$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x}$

$= -1 \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = -1 \times 0 = 0$

12.10. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+5} - e^3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^3(e^{x+2} - 1)}{x+2} = e^3 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2}$

$= e^3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^3 \times 1 = e^3$ $\left\{ \begin{array}{l} y = x+2 \\ \text{Se } x \rightarrow -2, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

12.11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)x \right] = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[- \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)x \right] =$

$= - \lim_{y \rightarrow 0} \left[(e^y - 1) \times \frac{1}{y} \right] = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -1$ $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$12.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x + x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{e^x - 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^x - 1)}{e^x - 1} + \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x + \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} = 2$$

$$12.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{x}{e^x - 1} \times \frac{2}{-1} \right] =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{2y} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} = -2 \times 1 \times \frac{1}{1} = -2 \quad \left| \begin{array}{l} y = 2x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$12.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{-3}{2} \right] =$$

$$= -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} =$$

$$= -\frac{3}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \times \frac{1}{\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin v}{v}} = -\frac{3}{2} \times 1 \times \frac{1}{1} = -\frac{3}{2} \quad \left| \begin{array}{l} u = 3x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, u \rightarrow 0 \\ v = 2x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, v \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$12.15. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x - e^{-1}}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{-1}(e^{x+1} - 1)}{x(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - 1}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{-1}}{x} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \frac{e^{-1}}{-1} = \quad \left| \begin{array}{l} y = x+1 \\ \text{Se } x \rightarrow -1, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$= 1 \times (-e^{-1}) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$12.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\sin(3x)} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(e^x - 1) - x}{x} \times \frac{x}{\sin(3x)} \right] =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) - x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \right) \times \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)} =$$

$$= (1 - 1) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}} = \quad \left| \begin{array}{l} y = 3x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$= 0 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = 0$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2 - \sqrt{4-x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{4 - (4-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + \sqrt{4-x}) = 2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{3x}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{x} = 1 + 3 = 4$$

$$f(0) = 4$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ pelo que a função f é contínua no ponto de $x = 0$.

$$14. 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{ax} - 1} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{ax}{e^{ax} - 1} \times \frac{1}{a} \right) =$$

$$= 2 \times \frac{1}{a} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax}} =$$

$$= 2 \times \frac{1}{a} \times 1 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{2}{a} \times 1 \times \frac{1}{1} = \frac{2}{a} \quad \left| \begin{array}{l} y = 3x \\ \text{Se } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx}(e^{x-bx} - 1)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{bx} \times \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{x(1-b)} - 1}{x(1-b)} \times (1-b) \right] =$$

$$= e^0 \times (1-b) \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \quad \left| \begin{array}{l} y = x(1-b) \\ \text{Se } x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$= 1 \times (1-b) \times 1 =$$

$$= 1 - b$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{ax} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{bx}}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a} = 1 - b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = a(1 - b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = a - ab$$

Portanto, $a - ab = 2$.

Ficha para praticar 14

Pág. 78

1.1. Seja $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

1.2. Seja $\log_2 64 = x = \log_2 2^6 = 6$

1.3. Seja $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}} 2^4 = \log_2 (2^{-1})^4 = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = -4$

1.4. Seja $\log_4 8 = x$

$$\log_4 8 = x \Leftrightarrow 4^x = 8 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Portanto, $\log_4 8 = \frac{3}{2}$

1.5. Seja $\log_4 \sqrt{2} = x$

$$\log_4 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 4^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Portanto, $\log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}$.

1.6. Seja $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = x$

$$\log_4\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = x \Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow (2^2)^x = (\sqrt{8})^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} = 8^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x} = (2^3)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Portanto, $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = -\frac{3}{4}$

1.7. Seja $\log_2 0,125 = x$

$$\log_2 0,125 = x \Leftrightarrow 2^x = 0,125 \Leftrightarrow 2^x = \frac{125}{1000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 8^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$$

Portanto, $\log_2 0,125 = -3$

1.8. Seja $\log_{10} \sqrt[4]{0,01} = x$

$$\log_{10} \sqrt[4]{0,01} = x \Leftrightarrow 10^x = \sqrt[4]{0,01} \Leftrightarrow 10^x = (0,01)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^x = (10^{-2})^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 10^x = 10^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Portanto, $\log_{10} \sqrt[4]{0,01} = -\frac{1}{2}$

1.9. Seja $\log_{\sqrt{3}} 1 = 0$

1.10. Seja $\log_8 \sqrt{256} = x$

$$\log_8 \sqrt{256} = x \Leftrightarrow 8^x = \sqrt{256} \Leftrightarrow 8^x = 256^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8^x = (2^8)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow (2^3)^x = 2^4 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Portanto, $\log_8 \sqrt{256} = \frac{4}{3}$

1.11. Seja $\log_4 \sqrt[3]{2} = x$

$$\log_4 \sqrt[3]{2} = x \Leftrightarrow 4^x = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

Portanto, $\log_4 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{6}$

1.12. Seja $\log_5 0,008 = x$

$$\log_5 0,008 = x \Leftrightarrow 5^x = 0,008 \Leftrightarrow 5^x = \frac{8}{1000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{125} \Leftrightarrow 5^x = 125^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 5^{-3} \Leftrightarrow x = -3$$

Portanto, $\log_5 0,008 = -3$

2.1. $\ln(e^{\sqrt[3]{e^2}}) + \log(0,01) + \log_5 0,04 =$

$$= \ln\left(e \times e^{\frac{2}{3}}\right) + \log(10^{-2}) + \log_5\left(\frac{1}{25}\right) =$$

$$= \ln\left(e^{1+\frac{2}{3}}\right) + (-2) + \log_5 25^{-1} =$$

$$= \ln e^{\frac{5}{3}} + (-2) + \log_5 5^{-2} =$$

$$= \frac{5}{3} + (-2) + (-2) =$$

$$= \frac{5}{3} - 4 =$$

$$= -\frac{7}{3}$$

2.2. $\log_2(4^{\sqrt{3}} : 2^{\sqrt{3}+2}) - \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) + \log \sqrt[4]{10} =$

$$= \log_2\left((2^2)^{\sqrt{3}} : 2^{\sqrt{3}+2}\right) - \ln(e^{-3}) + \log 10^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \log_2(2^{2\sqrt{3}} : 2^{\sqrt{3}+2}) - (-3) + \frac{1}{4} =$$

$$= \log_2(2^{2\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)}) + 3 + \frac{1}{4} =$$

$$= \log_2(2^{\sqrt{3}-2}) + \frac{13}{4} =$$

$$= \sqrt{3} - 2 + \frac{13}{4} =$$

$$= \sqrt{3} + \frac{5}{4}$$

2.3. $\log(\sqrt{0,01} \times 10^4) - \log_3(21^{\sqrt{2}} : 7^{\sqrt{2}}) + \ln(e^{\sqrt{8}} \times e^{\sqrt{2}}) =$

$$= \log\left(0,01^{\frac{1}{2}} \times 10^4\right) - \log_3\left(\frac{(21:7)^{\sqrt{2}}}{1}\right) + \ln(e^{\sqrt{8}+\sqrt{2}}) =$$

$$= \log\left((10^{-2})^{\frac{1}{2}} \times 10^4\right) - \log_3 3^{\sqrt{2}} + \ln(e^{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}) =$$

$$= \log(10^{-1} \times 10^4) - \sqrt{2} + \ln e^{3\sqrt{2}} =$$

$$= \log(10^{-1+4}) - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$$

$$= \log(10^3) + 2\sqrt{2} =$$

$$= 3 + 2\sqrt{2}$$

3.1. $3^{x+2} - 5 = 0 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 5 \Leftrightarrow x+2 = \log_3 5 \Leftrightarrow x = -2 + \log_3 5$

3.2. $5^{2x+1} = 8 \Leftrightarrow 2x+1 = \log_5 8 \Leftrightarrow 2x = -1 + \log_5 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \log_5 8}{2}$$

3.3. $x \times 4^{x+1} = 2x \Leftrightarrow x \times 4^{x+1} - 2x = 0 \Leftrightarrow x(4^{x+1} - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4^{x+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4^{x+1} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee (2^2)^{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^{2x+2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$

3.4. $e^{x+1} = 3 \Leftrightarrow x+1 = \ln 3 \Leftrightarrow x = -1 + \ln 3$

$$\begin{aligned}
 3.5. \quad 6 - 2 \times 3^{2-x} = 2 &\Leftrightarrow -2 \times 3^{2-x} = 2 - 6 \Leftrightarrow -2 \times 3^{2-x} = -4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3^{2-x} = \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow 3^{2-x} = 2 \Leftrightarrow 2 - x = \log_3 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -x = -2 + \log_3 2 \Leftrightarrow x = 2 - \log_3 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.6. \quad 4e^{-x} = 3e^{2x} &\Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{e^{2x}}{e^{-x}} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = e^{3x} \Leftrightarrow 3x = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{3}
 \end{aligned}$$

$$3.7. \quad 6 \times 2^x = 5 \times e^x \Leftrightarrow \frac{6}{5} = \frac{e^x}{2^x} \Leftrightarrow \frac{6}{5} = \left(\frac{e}{2}\right)^x \Leftrightarrow x = \log_{\frac{e}{2}}\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
 3.8. \quad 9 - 2 \times e^{x+1} = 6 &\Leftrightarrow -2 \times e^{x+1} = 6 - 9 \Leftrightarrow -2 \times e^{x+1} = -3 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow e^{x+1} = \frac{-3}{-2} \Leftrightarrow e^{x+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x + 1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.9. \quad 2 \times e^{\frac{3}{x}} = 5 &\Leftrightarrow e^{\frac{3}{x}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{3}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.10. \quad 3^{x+1} = 5 \times 2^{4x} &\Leftrightarrow \frac{3^{x+1}}{2^{4x}} = 5 \Leftrightarrow \frac{3^{x+1}}{(2^4)^x} = 5 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{3^x \times 3}{16^x} = 5 \Leftrightarrow \frac{3^x}{16^x} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{16}\right)^x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{16}}\left(\frac{5}{3}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.11. \quad e^{2-2x} = 8 \times e^x &\Leftrightarrow \frac{e^{2-2x}}{e^x} = 8 \Leftrightarrow e^{2-3x} = 8 \Leftrightarrow 2 - 3x = \ln 8 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -3x = -2 + \ln 8 \Leftrightarrow 3x = 2 - \ln 8 \Leftrightarrow x = \frac{2 - \ln 8}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.12. \quad -3 \times e^{5x} = -2 \times \ln(e\sqrt{e}) &\Leftrightarrow -3 \times e^{5x} = -2 \times \ln\left(e \times e^{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -3 \times e^{5x} = -2 \times \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow -3 \times e^{5x} = -2 \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -3 \times e^{5x} = -3 \Leftrightarrow e^{5x} = 1 \Leftrightarrow e^{5x} = e^0 \Leftrightarrow 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.13. \quad \frac{2}{e^{2x} - e^x} = 1 &\Leftrightarrow 2 = e^{2x} - e^x \wedge e^{2x} - e^x \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 2 = 0 \wedge e^{2x} \neq e^x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 = 0 \wedge 2x \neq x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(e^x = \frac{1+3}{2} \vee e^x = \frac{1-3}{2}\right) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (e^x = 2 \vee e^x = -1) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (e^x = 2 \vee x \neq \emptyset) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow e^x = 2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \ln 2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.14. \quad \frac{6}{8^x} = 4^{-x} &\Leftrightarrow 6 = 4^{-x} \times 8^x \Leftrightarrow 6 = \left(\frac{1}{4}\right)^x \times 8^x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 6 = \left(\frac{1}{4} \times 8\right)^x \Leftrightarrow 6 = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 6
 \end{aligned}$$

Pág. 79

$$4.1. \quad 3^{2-\log_3 4} = \frac{3^2}{3^{\log_3 4}} = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned}
 4.2. \quad e^{\frac{1}{2} \ln 4} + e^{-\ln \frac{1}{2}} &= e^{\ln 2} + e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = e^{\ln \sqrt{4}} + e^{\ln 2} = \\
 &= \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.3. \quad e^{\frac{\ln 3}{2}} + \log_{\sqrt{2}}(8 \times \sqrt{2}) &= e^{\frac{1}{2} \ln 3} + \log_{\sqrt{2}}(2^3 \times \sqrt{2}) = \\
 &= e^{\ln 3^{\frac{1}{2}}} + \log_{\sqrt{2}}\left[\left((\sqrt{2})^2\right)^3 \times \sqrt{2}\right] = \\
 &= e^{\ln \sqrt{3}} + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}^6 \times \sqrt{2}) = \sqrt{3} + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^7 = \sqrt{3} + 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.4. \quad \log_2(8a) - \log_2(a) + 2^{3-\log_2 \sqrt{8}} &= \log_2\left(\frac{8a}{a}\right) + \frac{2^3}{2^{\log_2 \sqrt{8}}} = \\
 &= \log_2 8 + \frac{8}{\sqrt{8}} = \log_2 2^3 + \frac{8}{2\sqrt{2}} = 3 + \frac{4}{\sqrt{2}} = 3 + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \\
 &= 3 + 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$4.5. \quad \log_a b^2 \times \log_b a^2 = \log_a b^2 \times \frac{\log_a a^2}{\log_a b} = 2 \log_a b \times \frac{2}{\log_a b} = 4$$

$$\begin{aligned}
 4.6. \quad 3^{2 \log_3 a - 3 \log_3 b} - e^{2 \ln a} &= 3^{\log_3 a^2 - \log_3 b^3} - e^{\ln a^2} = \\
 &= \frac{3^{\log_3 a^2}}{3^{\log_3 b^3}} - a^2 = \frac{a^2}{b^3} - a^2 = \\
 &= \frac{a^2 - a^2 b^3}{b^3} = \frac{a^2(1 - b^3)}{b^3}
 \end{aligned}$$

$$5.1. \quad \ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$$

$$5.2. \quad \ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3$$

$$5.3. \quad \ln(-9)^2 = \ln 9^2 = 2 \ln 9 = 2(2 \ln 3) = 4 \ln 3$$

$$5.4. \quad \ln 36 = \ln(4 \times 9) = \ln 4 + \ln 9 = 2 \ln 2 + 2 \ln 3$$

$$5.5. \quad \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3$$

$$5.6. \quad \ln \frac{8}{27} = \ln 8 - \ln 27 = \ln 2^3 - \ln 3^3 = 3 \ln 2 - 3 \ln 3$$

$$\begin{aligned}
 5.7. \quad \ln(48e^2) = \ln 48 + \ln e^2 &= \ln(2^4 \times 3) + 2 = \ln 2^4 + \ln 3 + 2 = \\
 &= 4 \ln 2 + \ln 3 + 2 = 2 + 4 \ln 2 + \ln 3
 \end{aligned}$$

$$5.8. \quad \log_{\frac{1}{e}} 9 = \frac{\ln 9}{\ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln 3^2}{\ln e^{-1}} = \frac{2 \ln 3}{-1} = -2 \ln 3$$

$$\begin{aligned}
 5.9. \quad \ln\left(\frac{\sqrt{6}}{e}\right) &= \ln \sqrt{6} - \ln e = \ln 6^{\frac{1}{2}} - 1 = -1 + \frac{1}{2} \ln 6 = \\
 &= -1 + \frac{1}{2} \ln(2 \times 3) = -1 + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) = -1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3
 \end{aligned}$$

$$6.1. \quad \log_a(a^3 b) = \log_a a^3 + \log_a b = 3 + \log_a b = 3 + (-4) = -1$$

$$6.2. \log_c \left(\frac{c}{\sqrt[3]{b^2}} \right) = \log_c c - \log_c \sqrt[3]{b^2} = 1 - \log_c b^{\frac{2}{3}} =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \log_c b = 1 - \frac{2}{3} \times 2 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$6.3. \log_b a - \log_a \left(\frac{b^2}{\sqrt{a}} \right) = \frac{\log_a a}{\log_a b} - (\log_a b^2 - \log_a \sqrt{a}) =$$

$$= \frac{1}{\log_a b} - (2 \log_a b - \log_a a^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{-4} - [2 \times (-4) - \frac{1}{2}] =$$

$$= -\frac{1}{4} - (-8 - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} - (-\frac{17}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{17}{2} = \frac{33}{4}$$

$$6.4. \log_c \left(\frac{\sqrt[3]{c} \times \sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}} \right) = \log_c (\sqrt[3]{c} \times \sqrt{b}) - \log_c (\sqrt[4]{b}) =$$

$$= \log_c (\sqrt[3]{c}) + \log_c (\sqrt{b}) - \log_c (\sqrt[4]{b}) =$$

$$= \log_c \left(c^{\frac{1}{3}} \right) + \log_c b^{\frac{1}{2}} - \log_c b^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log_c b - \frac{1}{4} \log_c b =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{5}{6}$$

$$6.5. \log_a c + \log_a \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right) = \frac{\log_c c}{\log_c b} + \log_a 1 - \log_a \sqrt{b} =$$

$$= \frac{1}{\log_c b} + 0 - \log_a b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_a b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-4) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$6.6. \log_{\frac{1}{e}} e^3 - 20 \log_a \left(\sqrt{\frac{b^2}{a}} \right) =$$

$$= \frac{\ln e^3}{\ln \frac{1}{e}} - 20 \log_a \left(\frac{b^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{3}{\ln e^{-1}} - 20 \times \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{b^2}{a} \right) = \frac{3}{-1} - 10 \log_a \left(\frac{b^2}{a} \right) =$$

$$= -3 - 10 (\log_a b^2 - \log_a a) = -3 - 10 (2 \log_a b - 1) =$$

$$= -3 - 10 (2 \times (-4) - 1) = -3 - 10 \times (-9) = -3 + 90 = 87$$

$$7.1. D = \{x \in \mathbb{R} : -3 + 4x > 0 \wedge x > 0\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x > \frac{3}{4} \wedge x > 0 \right\} =$$

$$= \left] \frac{3}{4}, +\infty \right[$$

$$\ln(-3 + 4x) = 2 \ln x \wedge x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(-3 + 4x) = \ln x^2 \wedge x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + 4x = x^2 \wedge x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \wedge x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 3}}{2} \wedge x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{4+2}{2} \vee x = \frac{4-2}{2} \right) \wedge x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \vee x = 1) \wedge x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

$$7.2. D = \{x \in \mathbb{R} : 5x - 2 > 0\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x > \frac{2}{5} \right\} =$$

$$= \left] \frac{2}{5}, +\infty \right[$$

$$\log_3(5x - 2) = 2 \wedge x > \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 2 = 3^2 \wedge x > \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 2 = 9 \wedge x > \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11}{5} \wedge x > \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \frac{11}{5}$$

$$7.3. D = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 > 0 \wedge x^2 > 0\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{2} \wedge x \neq 0 \right\} =$$

$$= \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[\setminus \{0\}$$

$$2 \ln(2x + 1) = \ln x^2 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x + 1)^2 = \ln x^2 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)^2 = x^2 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)^2 - x^2 = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(2x + 1) - x][(2x + 1) + x] = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(3x + 1) = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1 = 0 \vee 3x + 1 = 0) \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -1 \vee x = -\frac{1}{3} \right) \wedge x \in D \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$7.4. D = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0 \wedge 2x > 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \wedge x > 0\} =$$

$$=]0, +\infty[$$

$$\ln(x - 3) - \ln 5 = \ln(2x) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x - 3) = \ln(2x) + \ln 5 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x - 3) = \ln(2x \times 5) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x - 3) = \ln(10x) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 10x \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 = 9x \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$7.5. D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > 0 \wedge x > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x > 0\} = \\ =]0, +\infty[$$

$$\log_2 x^3 - x \log_2 x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \log_2 x - x \log_2 x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\log_2 x)x(3-x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\log_2 x = 0 \vee 3-x=0) \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x=2^0 \vee x=3) \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x=1 \vee x=3) \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$$

$$7.6. D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \\ =]0, +\infty[$$

$$\ln^2 x + 4 \ln x = -4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln^2 x + 4 \ln x + 4 = 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\ln x + 2)^2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln x + 2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln x = -2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = e^{-2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$$

$$7.7. D = \{x \in \mathbb{R} : 3-x > 0 \wedge x+1 > 0 \wedge x-2 > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \wedge x > -1 \wedge x > 2\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \wedge x < 3\} = \\ =]2, 3[$$

$$2 \log(3-x) - \log(x+1) = \log(x-2) \wedge 2 < x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log(3-x)^2 = \log(x-2) + \log(x+1) \wedge 2 < x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log(3-x)^2 = \log[(x-2)(x+1)] \wedge 2 < x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3-x)^2 = (x-2)(x+1) \wedge 2 < x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9-6x+x^2 = x^2-x-2 \wedge 2 < x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -5x = -11 \wedge 2 < x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{11}{5} \wedge 2 < x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{11}{5}$$

$$7.8. D = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 4 > 0 \wedge 3x > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2 \wedge x > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\} = \\ =]0, 2[$$

$$\ln(-x^2+4) = \ln(3x) \wedge 0 < x < 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x^2+4 = 3x \wedge 0 < x < 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2+3x-4 = 0 \wedge 0 < x < 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \wedge 0 < x < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{-3+5}{2} \vee x = \frac{-3-5}{2}\right) \wedge 0 < x < 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x=1 \vee x=-4) \wedge 0 < x < 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x=1$$

$$7.9. D = \{x \in \mathbb{R} : 3x > 0 \wedge x > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \\ =]0, +\infty[$$

$$\log_9(3x) + 2 = \log_3 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_3(3x)}{\log_3 9} + 2 = \log_3 x \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_3(3x)}{2} + 2 = \log_3 x \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3(3x) + 4 = 2 \log_3 x \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3(3x) - \log_3 x^2 = -4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{3x}{x^2}\right) = -4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3}{x} = 3^{-4} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{1}{81} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 243$$

$$7.10. D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq 1\} = \\ =]0, +\infty[\setminus \{1\}$$

$$\log_{10} x + 1 = 2 \log_x 10 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{10} x + 1 = \log_x 10^2 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{10} x + 1 = \frac{\log_{10} 10^2}{\log_{10} x} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{10} x + 1 = \frac{2}{\log_{10} x} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\log_{10} x)^2 + \log_{10} x = 2 \wedge \log_{10} x \neq 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\log_{10} x)^2 + \log_{10} x - 2 = 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{10} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\log_{10} x = \frac{-1+3}{2} \vee \log_{10} x = \frac{-1-3}{2}\right) \wedge (x > 0 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\log_{10} x = 1 \vee \log_{10} x = -2) \wedge (x > 0 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = 10 \vee x = 10^{-2}) \wedge (x > 0 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x = 10 \vee x = \frac{1}{100}\right) \wedge (x > 0 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 10 \vee x = \frac{1}{100}$$

$$8.1. D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 1-x > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x < 1\} = \\ =]0, 1[$$

$$\begin{aligned} \log_2 x < 2 - \log_2(1-x) \wedge 0 < x < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2(1-x) < 2 \wedge 0 < x < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2[x(1-x)] < 2 \wedge 0 < x < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - x^2 < 2^2 \wedge 0 < x < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x^2 + x - 4 < 0 \wedge 0 < x < 1 &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$-x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{-2} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Assim, $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 + x - 4 < 0$

Portanto,

$$\begin{aligned} -x^2 + x - 4 < 0 \wedge 0 < x < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < x < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in]0, 1[&\Leftrightarrow \end{aligned}$$

8.2. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \wedge x > 0\} =]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \ln(x^2) + \ln(x) \leq 0 \wedge x > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(x^2 \times x) \leq 0 \wedge x > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(x^3) \leq 0 \wedge x > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \ln x \leq 0 \wedge x > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \wedge x > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \leq e^0 \wedge x > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < x \leq 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in]0, 1] &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

8.3. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 > 0\} =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$



$$\begin{aligned} 1 - \log_2(x^2 - 3) > 0 \wedge x \in D &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 3) < 1 \wedge x \in D &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 3 < 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 5 < 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \wedge (x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{5}, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, \sqrt{5}[&\Leftrightarrow \end{aligned}$$



8.4. $D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4}{x + 1} > 0\right\}$

Cálculos auxiliares

- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$
- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-2	-1		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	-	-	0	+
$x + 1$	-	-	-	0	+	+
$\frac{x^2 - 4}{x + 1}$	-	0	+		0	+

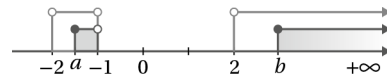
Portanto, $D =]-2, -1[\cup]2, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1}\right) \geq 0 \wedge x \in D &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x + 1} \geq 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x + 1} - 1 > 0 \wedge x \in D &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4 - x - 1}{x + 1} > 0 \wedge x \in D &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 5}{x + 1} > 0 \wedge x \in D &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

- $x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 20}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$
- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $a = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}, b = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$

x	$-\infty$	a	-1		b	$+\infty$
$x^2 - x - 5$	+	0	-	-	0	+
$x + 1$	-	-	-	0	+	+
$\frac{x^2 - x - 5}{x + 1}$	-	0	+		-	+



Portanto:

$$\ln\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, -1\right[\cup \left[\frac{1 + \sqrt{21}}{2}, +\infty\right[$$

8.5. $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 3x - 2 > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x > \frac{2}{3}\right\} = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$

$$\begin{aligned} \log_2 x > \log_8(3x - 2) \wedge x > \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 x > \frac{\log_2(3x - 2)}{\log_2 8} \wedge x > \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 x > \frac{\log_2(3x - 2)}{\log_2 2^3} \wedge x > \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 x > \frac{\log_2(3x - 2)}{3} \wedge x > \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \log_2 x > \log_2(3x - 2) \wedge x > \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 x^3 > \log_2(3x - 2) \wedge x > \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3 > 3x - 2 \wedge x > \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 > 0 \wedge x > \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar: É imediato que $x = 1$ é zero do polinômio $x^3 - 3x + 2$.

Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

1	1	0	-3	2
	1	1	1	-2
	1	1	-2	0

Portanto, $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + 3}{2} \vee x = \frac{-1 - 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

Logo, $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$x^3 - 3x + 2$	-	0	+	0	+

Assim, $x^3 - 3x + 2 > 0 \wedge x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-2 < x < 1 \vee x > 1) \wedge x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \wedge \frac{2}{3} < x < 1$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{2}{3}, 1 \right[\cup]1, +\infty[$$

8.6. $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$

$$2 \leq \log x (\log x - 1) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \log^2 x - \log x \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x - \log x - 2 \geq 0 \wedge x > 0$$

Cálculo auxiliar:

$$\log^2 x - \log x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x = \frac{1 + 3}{2} \vee \log x = \frac{1 - 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x = 2 \vee \log x = -1$$

Portanto,

$$\log^2 x - \log x - 2 \geq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log x \leq -1 \vee \log x \geq 2) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \leq 10^{-1} \vee x \geq 10^2) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \leq \frac{1}{10} \vee x \geq 100 \right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{10} \vee x \geq 100$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] 0, \frac{1}{10} \right] \cup [100, +\infty[$$

8.7. $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x > 0 \wedge x > 0 \wedge 1 - \ln x \neq 0\} =$

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq e\} =$$

$$=]0, +\infty[\setminus \{e\}$$

• $\ln(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = e^0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

• $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e$

x	0		$\frac{1}{2}$		e	$+\infty$
$\ln(2x)$		-	0	+		+
$1 - \ln x$		+	+	+		-
$\frac{\ln(2x)}{1 - \ln x}$		-	0	+		-

Portanto, $\frac{\ln(2x)}{1 - \ln x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, e \right[$.

8.8. $D = \{x \in \mathbb{R} : x - 4 > 0\} =$

$$=]4, +\infty[$$

$$(\log_2(x-4))^2 + \log_2(x-4) < 2 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2(x-4))^2 + \log_2(x-4) - 2 < 0 \wedge x > 4$$

Cálculo auxiliar:

$$(\log_2(x-4))^2 + \log_2(x-4) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-4) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-4) = \frac{1 + 3}{2} \vee \log_2(x-4) = \frac{1 - 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-4) = 1 \vee \log_2(x-4) = -2$$

Assim,

$$(\log_2(x-4))^2 + \log_2(x-4) - 2 < 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2 < \log_2(x-4) < 1) \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} < x - 4 < 2 \right) \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{17}{4} < x < 6 \right) \wedge x > 4$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{17}{4}, 6 \right[$$

9.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9^x}{2^{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9^x}{(2^3)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9^x}{8^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{8} \right)^x = +\infty,$

pois $\frac{9}{8} > 1$

9.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 4e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(e^x - 4)] =$

$$= +\infty \times (+\infty - 4) =$$

$$= +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

9.3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} =$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = - \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x}}$$

$$= - \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = - \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -x \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 9.4. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + xe^{3x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{3x} = \\
 &= 2 + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{3x}) = \\
 &= 2 + \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = \quad \left| \begin{array}{l} y = -3x \Leftrightarrow 3x = -y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right. \\
 &= 2 \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = \\
 &= 2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{+\infty} = 2 - \frac{1}{3} \times 0 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 4}{3 + e^x} &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{4}{e^x}}{\frac{3}{e^x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \frac{4}{e^x}}{\frac{3}{e^x} + 1} = \frac{+\infty + 0}{0 + 1} = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.6. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{2x} &= \\
 &= \frac{1 - e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{1 - 0}{-\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.7. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y^{-1})}{y} = \quad \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right. \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.8. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} &= \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \left| \begin{array}{l} y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y \\ \text{Se } x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.9. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} &= \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y + 1 - 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \quad \left| \begin{array}{l} y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x - 1 \Leftrightarrow x = e^y + 1 \\ \text{Se } x \rightarrow 2 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right. \\
 &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.10. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(4+x)}{-9+x^2} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(4+x)}{(x-3)(x+3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(4+x)}{x+3} = \\
 &= \frac{1}{3+3} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 4 + 3} = \quad \left| \begin{array}{l} y = \ln(4+x) \Leftrightarrow 4+x = e^y \Leftrightarrow x = e^y - 4 \\ \text{Se } x \rightarrow -3 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right. \\
 &= -\frac{1}{6} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \\
 &= -\frac{1}{6} \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)^3}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(x+1)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \left| \begin{array}{l} y = \ln(x+1) \Leftrightarrow x+1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y - 1 \\ \text{Se } x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln 2^x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x \ln 2} - 1}{x \ln 2} \times \ln 2 \right) = \ln 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x \ln 2} \\
 &= \ln 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \ln 2 \times 1 = \ln 2 \quad \left| \begin{array}{l} y = x \ln 2 \\ \text{Se } x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.13. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - \ln x^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \\
 &= 4 - 2 \times 0 = 4 - 0 = 4
 \end{aligned}$$

$$9.14. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{+\infty}{1 + 0} = +\infty$$

$$\begin{aligned}
 9.15. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{\ln x + 5^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \left(\frac{e^x}{5^x} + \frac{x}{5^x} \right)}{5^x \left(\frac{\ln x}{5^x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{5^x} + \frac{x}{5^x}}{\frac{\ln x}{5^x} + 1} = \\
 &= \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0, \text{ dado que}
 \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{5^x} = \ln \left(\frac{e}{5} \right)^x = 0$ porque $\frac{e}{5} < 1$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{x}} = \frac{1}{\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln 5}}{x} \ln 5 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 5}}{x \ln 5}} = \frac{1}{\ln 5 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = \frac{1}{\ln 5 \times (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$ | $y = x \ln 5$
| $\text{Se } x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{5^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5^x} = 0 \times 0 = 0$ (ponto anterior)

$$\begin{aligned}
 9.16. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x) &= \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} e^y \right) = \quad \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right. \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty
 \end{aligned}$$

10.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1) - x \ln x + ex}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[\ln(x+1) - \ln x + e]}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln x + e] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x)] + e =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] + e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] + e =$$

$$= \ln(1 + 0^+) + e =$$

$$= 0 + e = e$$

10.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x+1) - x \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln(x+1) - \ln(x))] =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]^{(\infty \cdot 0)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^y - 1} \times y \right) = \begin{cases} y = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^y - 1} \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

10.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\log(x^2 - 4) - 2 \log x)] =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\log(x^2 - 4) - \log(x^2))] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \log\left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log\left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right)^x \right] =$$

$$= \log \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right)^x \right] =$$

$$= \log \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)^x \right] =$$

$$= \log \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \right] =$$

$$= \log \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \right] =$$

$$= \log(e^{-2} \times e^2) = \log 1 = 0$$

11.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^{\frac{x+3}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+3}{x^2} \times \ln(2x) \right]} = e^0 = 1$

dado que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+3}{x^2} \times \ln(2x) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+3}{x} \times \frac{\ln(2x)}{x} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x} \times 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \times 2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \begin{cases} y = 2x \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$= 1 \times 2 \times 0 = 0$$

11.2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \ln x \right]} = e^{-\infty} = 0$

dado que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

11.3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x} \ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right) \right]} = e^{+\infty} = +\infty$

dado que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x} \ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right) \right] = 1 \times \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

11.4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x \ln(\sin x)]} = e^0 = 1$

dado que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x \ln(\sin x)] = \begin{cases} y = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow 0^+, y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y^{-1}}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$$

11.5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2}{\ln x} \ln x \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} 2} = e^2$

11.6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} \ln(1 - \cos x) \right]} = e^{-1}$

dado que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} \ln(1 - \cos x) \right]^{(\infty \cdot 0)} = \begin{cases} y = \ln(1 - \cos x) \\ \Leftrightarrow e^y = 1 - \cos x \\ \Leftrightarrow \cos x = 1 - e^y \\ \text{Se } x \rightarrow \frac{\pi}{2}, y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - e^y} \times y \right) = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} =$$

$$= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = - \frac{1}{1} = -1$$

12.1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{4n-2}{5n+1} \right)^{\frac{2n-3}{n+4}} \right] = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2n-3}{n+4} \ln\left(\frac{4n-2}{5n+1}\right) \right]} =$

$$= e^{2 \times \ln \frac{4}{5}} = e^{\ln\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-3}{n+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n} = 2 \text{ e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n-2}{5n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{5n} = \frac{4}{5}$$

12.2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{3n+1}{2n-3} \right)^{\frac{2n+3}{n^2+5}} \right] = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2n+3}{n^2+5} \ln\left(\frac{3n+1}{2n-3}\right) \right]} =$

$$= e^{0 \times \ln\left(\frac{3}{2}\right)} = e^0 = 1$$

dado que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n^2+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

$$12.3. \lim \left[\left(\frac{3n^2 - 1}{n^2 + 3} \right)^{\frac{1-2n}{3n+1}} \right] = e^{\lim \left[\frac{1-2n}{3n+1} \ln \left(\frac{3n^2 - 1}{n^2 + 3} \right) \right]} =$$

$$= e^{-\frac{2}{3} \ln 3} = e^{\ln 3^{-\frac{2}{3}}} = 3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} =$$

$$= \frac{1 \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$

dado que

$$\lim \frac{1-2n}{3n+1} = \lim \frac{-2n}{3n} = -\frac{2}{3} \quad e$$

$$\lim \frac{3n^2 - 1}{n^2 + 3} = \lim \frac{3n^2}{n^2} = 3$$

$$12.4. \lim \left[\left(\frac{n^3 + n}{2n^2 + 4} \right)^{\frac{3-n}{2n+1}} \right] = e^{\lim \left[\frac{3-n}{2n+1} \ln \left[\frac{n^3 + n}{2n^2 + 4} \right] \right]} =$$

$$e^{\frac{1}{2} \ln(+\infty)} = e^{\frac{1}{2} (+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

dado que

$$\lim \frac{3-n}{2n+1} = \lim \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2} \quad e$$

$$\lim \frac{n^3 + n}{2n^2 + 4} = \lim \frac{n^3}{2n^2} = \lim \frac{n}{2} = +\infty$$

$$12.5. \lim \left[\left(\frac{2n^2 + 1}{n^3 + 4} \right)^{\frac{3-n}{2n+1}} \right] = e^{\lim \left[\frac{3-n}{2n+1} \ln \left[\frac{2n^2 + 1}{n^3 + 4} \right] \right]} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \ln(0^+)} e^{-\frac{1}{2} (-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

dado que

$$\lim \frac{3-n}{2n+1} = \lim \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2} \quad e$$

$$\lim \frac{2n^2 + 1}{n^3 + 4} = \lim \frac{2n^2}{n^3} = \lim \frac{2}{n} = 0^+$$

$$12.6. \lim \left[\left(\frac{5n^2 + 4n}{2n^3 + n^2 + n + 1} \right)^{\frac{2n+1}{2-3n}} \right] = e^{\lim \left[\frac{2n+1}{2-3n} \ln \left(\frac{5n^2 + 4n}{2n^3 + n^2 + n + 1} \right) \right]} =$$

$$= e^{-\frac{2}{3} \ln(0^+)} = e^{-\frac{2}{3} (-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim \frac{2n+1}{2-3n} = \lim \frac{2n}{-3n} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim \frac{5n^2 + 4n}{2n^3 + n^2 + n + 1} = \lim \frac{5n^2}{2n^3} = \lim \frac{5}{2n} = 0^+$$

$$12.7. \lim \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right] = e^{\lim \left[n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]} = e^{-\infty} = 0$$

dado que

$$\lim \left[n^3 \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \begin{cases} x = \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \Leftrightarrow e^x = 1 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} = 1 - e^x \Leftrightarrow n = \frac{1}{1 - e^x} \\ \text{Se } n \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\left(\frac{1}{1 - e^x} \right)^3 \times x \right] =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\left(\frac{1}{e^x - 1} \right)^2 \times \frac{x}{e^x - 1} \right] =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{e^x - 1} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^x - 1} =$$

$$= -\left(\frac{1}{0^-} \right)^2 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}} = -(-\infty)^2 \times \frac{1}{1} = -\infty$$

$$12.8. \lim \left[\left(n^2 + \frac{3 - n^3 + n^4}{n} \right)^{\frac{-2n-1}{-n+3}} \right] = e^{\lim \left[\frac{-2n-1}{-n+3} \ln \left[\left(n^2 + \frac{3 - n^3 + n^4}{n} \right) \right] \right]} =$$

$$= e^{2 \ln(+\infty)} = e^{2 \times (+\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

dado que

$$\lim \frac{-2n-1}{-n+3} = \lim \frac{-2n}{-n} = 2 \quad e$$

$$\lim \left(n^2 + \frac{3 - n^3 + n^4}{n} \right) = \lim \frac{n^3 + 3 - n^3 + n^4}{n} =$$

$$= \lim \frac{3 + n^4}{n} = \lim \frac{n^4}{n} = \lim n^3 = +\infty$$

Ficha de teste 7

1. Recorrendo à fórmula $C = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n} \right)^n$, onde $C_0 = 25\,000$; $n = 52$ e $C = 25\,600$, vem:

$$25\,600 = 25\,000 \left(1 + \frac{r}{100 \times 52} \right)^{52} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25\,600}{25\,000} = \left(1 + \frac{r}{5200} \right)^{52} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{128}{125} = \left(1 + \frac{r}{5200} \right)^{52} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[52]{\frac{128}{125}} = 1 + \frac{r}{5200} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 5200 \left(\sqrt[52]{\frac{128}{125}} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \approx 2,37$$

Portanto, $r \approx 2,4\%$

Resposta: (C)

2.
$$\lim \left(\frac{3n+1,5}{3n+1} \right)^{2n} = \left[\lim \left(\frac{1 + \frac{1,5}{3n}}{1 + \frac{1}{3n}} \right)^n \right]^2 =$$

$$= \left[\frac{\lim \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{3n} \right)^n} \right]^2 = \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{3}}} \right)^2 = \left(e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \right)^2 =$$

$$= \left(e^{\frac{1}{6}} \right)^2 = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

Resposta: (B)

3.
$$\log_b \left(\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b^2} \right) = \log_b \left(\sqrt{a} \right) + \log_b \left(\sqrt[3]{b^2} \right) =$$

$$= \log_b a^{\frac{1}{2}} + \log_b b^{\frac{2}{3}} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \log_b a + \frac{2}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\log_a a}{\log_a b} + \frac{2}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\log_a b} + \frac{2}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{-3} + \frac{2}{3} = \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Resposta: (D)

4. $g(x+1) - 2 \leq g(x) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{1}{x+1} \right) - 2 \leq \log_2 \left(\frac{1}{x} \right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{1}{x+1} \right) \leq \log_2 \left(\frac{1}{x} \right) + 2 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{1}{x+1} \right) \leq \log_2 \left(\frac{1}{x} \right) + \log_2 (2^2) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{1}{x+1} \right) \leq \log_2 \left(\frac{1}{x} \times 2^2 \right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{1}{x+1} \right) \leq \log_2 \left(\frac{4}{x} \right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq \frac{4}{x} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x} \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 4x - 4}{x(x+1)} \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x - 4}{x(x+1)} \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$$

Dado que $\forall x \in \mathbb{R}^+$
 $-3x - 4 < 0 \wedge x(x+1) > 0$

Logo,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{-3x - 4}{x(x+1)} < 0$$

Resposta: (A)

5. Se a função h é contínua em \mathbb{R} , então é contínua em $x = 0$.

A função h é contínua em $x = 0$ quando existe $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$,

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = k + 0 - 1 = k - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 2^x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 1}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\ln 2^x} - 1}{x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x \ln 2} \times \ln 2 =$$

$$= - \ln 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x \ln 2}$$

$$= - \ln 2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = - \ln 2 \times 1 = - \ln 2$$

$\left\{ \begin{array}{l} y = x \ln 2 \\ \text{Se } x \rightarrow 0^+, y \rightarrow 0^+ \end{array} \right.$

Portanto:

$$k - 1 = - \ln 2 \Leftrightarrow k = 1 - \ln 2 \Leftrightarrow k = \ln e - \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \ln \left(\frac{e}{2} \right)$$

Resposta: (C)

6. $\lim \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n+1} = \lim \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^n \times \lim \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^1 =$

$$= \lim \left(\frac{2n \left(1 + \frac{1}{2n} \right)}{2n \left(1 + \frac{3}{2n} \right)} \right)^{n+1} \times \lim \frac{2n}{2n} =$$

$$= \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{3}{2n} \right)^n} \times 1 = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = e^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = e^{-1}$$

$$\lim \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{e^3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-1} = \frac{1}{e^{\frac{3}{k}}} \Leftrightarrow e^{-1} = e^{-\frac{3}{k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 = -\frac{3}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 3$$

Portanto, $k = 3$

7.1. $5^{x+1} + 5^{-x+2} = 126 \Leftrightarrow 5 \times 5^x + \frac{5^2}{5^x} = 126 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 \times 5^x + \frac{25}{5^x} = 126 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \times (5^x)^2 + 25 = 126 \times 5^x \wedge 5^x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \times (5^x)^2 - 126 \times 5^x + 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \times (5^x)^2 - 126 \times 5^x + 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^x = \frac{126 \pm \sqrt{(-126)^2 - 4 \times 5 \times 25}}{2 \times 5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^x = \frac{126 + 124}{10} \vee 5^x = \frac{126 - 124}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 25 \vee 5^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 5^2 \vee 5^x = 5^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

7.2. $1 - \log_{10}(x+1) = \log_{10}(x-2) \wedge x+1 > 0 \wedge x-2 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 = \log_{10}(x-2) + \log_{10}(x+1) \wedge x > -1 \wedge x > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 10 = \log_{10} [(x-2)(x+1)] \wedge x > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 = (x-2)(x+1) \wedge x > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 = x^2 + x - 2x - 2 \wedge x > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \wedge x > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2} \wedge x > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1+7}{2} \vee x = \frac{1-7}{2} \right) \wedge x > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -3) \wedge x > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

8. • Conjunto A

$$\ln(3-x) \geq -1 \wedge 3-x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-x \geq e^{-1} \wedge x < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x \geq \frac{1}{e} - 3 \wedge x < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3 - \frac{1}{e} \wedge x < 3$$

Portanto, $A = \left] -\infty, 3 - \frac{1}{e} \right]$

• Conjunto B

$$\log_2(x^2+x) - \log_2 x \leq 1 \wedge x^2+x > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+x) \leq 1 + \log_2 x \wedge x(1+x) > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+x) \leq \log_2(2) + \log_2(x) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

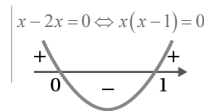
$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+x) \leq \log_2(2x) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x \leq 2x \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$



Portanto, $B =]0, 1]$

Assim, $A \cap B = \left] -\infty, 3 - \frac{1}{e} \right] \cap]0, 1]$, ou seja,

$$A \cap B =]0, 1]$$

9. • Assíntotas verticais

A função f é contínua em $]0, +\infty[$ pois é definida pelo produto de duas funções contínuas: uma é uma função afim ($x \curvearrowright x$) e a outra é a composta de uma função exponencial com uma função afim

$$\left(x \curvearrowright e^{\frac{1}{x}} \right).$$

A função f é contínua com a possível exceção dos pontos -1 e 0 .

Assim, apenas as retas de equação $x=0$ e $x=-1$ podem ser assíntotas verticais do gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)^{(0 \times \infty)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} e^y \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty \quad \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow 0^+, y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

A reta de equação $x=0$ é assíntota ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad e$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} [x + \ln(-x)] = -1 + \ln 1 = -1 + 0 = -1$$

A reta de equação $x=-1$ é assíntota ao gráfico de f .

• Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

Quando $x \rightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \quad (\text{limite notável}) \quad \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Assim, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$

Quando $x \rightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(-x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x}$$

$$= 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{-y} = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \quad \left| \begin{array}{l} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + \ln(-x) - x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, podemos concluir que o gráfico de f não tem assíntotas não verticais, quando $x \rightarrow -\infty$.

10.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^{\frac{x+3}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+3}{x^2} \ln(2x) \right]} = e^0 = 1$

dado que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+3}{x^2} \ln(2x) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \times 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} =$$

$$= 1 \times 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} =$$

$$= 2 \times 0 = 0$$

10.2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln x]} = e^{4 \ln(0^+)} =$

$$= e^{+\infty(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

Ficha para praticar 15

Pág. 84

$$1.1. f'(x) = (e^x + 3x - \sqrt{x})' = (e^x)' + (3x)' - (\sqrt{x})' = \\ = e^x + 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Portanto, } f'(x) = e^x + 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$1.2. f'(x) = (e^{3x}x^2)' = (e^{3x})' \times x^2 + (e^{3x})(x^2)' = \\ = (3x)' e^{3x} \times x^2 + e^{3x} \times 2x = 3x^2 e^{3x} + 2xe^{3x} = \\ = e^{3x}(3x^2 + 2x)$$

$$\text{Portanto, } f'(x) = e^{3x}(3x^2 + 2x)$$

$$1.3. f'(x) = [e^{1-x}(2x-1)^2]' = \\ = (e^{1-x})'(2x-1)^2 + e^{1-x}((2x-1)^2)' = \\ = (1-x)' e^{1-x}(2x-1)^2 + e^{1-x}(2(2x-1)(2x-1)') = \\ = -e^{1-x}(2x-1)^2 + e^{1-x}(2(2x-1) \times 2) = \\ = -e^{1-x}(2x-1)^2 + e^{1-x}(4(2x-1)) = \\ = -e^{1-x}(2x-1)[(2x-1) - 4] = \\ = -e^{1-x}(2x-1)(2x-5)$$

$$\text{Portanto, } f'(x) = -e^{1-x}(2x-1)(2x-5)$$

$$1.4. f'(x) = [(2^{2x} + e^{-x})^2]' = 2(e^{2x} + e^{-x})(e^{2x} + e^{-x})' = \\ = 2(e^{2x} + e^{-x})[(e^{2x})' + (e^{-x})'] = \\ = 2(e^{2x} + e^{-x})[(2x)' e^{2x} + (-x)' e^{-x}] = \\ = 2(e^{2x} + e^{-x})(2e^{2x} - e^{-x})$$

$$\text{Portanto, } f'(x) = 2(e^{2x} + e^{-x})(2e^{2x} - e^{-x})$$

$$1.5. f'(x) = \left(\frac{e^{-0,2x}}{x+e^x}\right)' = \frac{(e^{-0,2x})'(x+e^x) - (e^{-0,2x})(x+e^x)'}{(x+e^x)^2} = \\ = \frac{(-0,2x)' e^{-0,2x}(x+e^x) - (e^{-0,2x})(1+e^x)'}{(x+e^x)^2} = \\ = \frac{-0,2e^{-0,2x}(x+e^x) - e^{-0,2x}(1+e^x)'}{(x+e^x)^2} = \\ = \frac{e^{-0,2x}(-0,2(x+e^x) - (1+e^x)')}{(x+e^x)^2} = \\ = \frac{e^{-0,2x}(-0,2x - 0,2e^x - 1 - e^x)'}{(x+e^x)^2} = \\ = \frac{e^{-0,2x}(-1 - 0,2x - 1,2e^x)'}{(x+e^x)^2}$$

$$\text{Portanto, } f'(x) = \frac{e^{-0,2x}(-1 - 0,2x - 1,2e^x)'}{(x+e^x)^2}$$

$$1.6. f'(x) = \left(\frac{e^x - x^2 e^{-x}}{\cos x}\right)' = \\ = \frac{(e^x - x^2 e^{-x})' \cos x - (e^x - x^2 e^{-x})(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ = \frac{[(e^x)' - ((x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})')] \cos x - (e^x - x^2 e^{-x})(-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ = \frac{(e^x - x^2 e^{-x})(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{(e^x - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}) \cos x + (e^x - x^2 e^{-x}) \sin x}{\cos^2 x}$$

$$1.7. f'(x) = [e^x(x^2 + 3x - 4)]' = \\ = (e^x)'(x^2 + 3x - 4) + e^x(x^2 + 3x - 4)' = \\ = e^x(x^2 + 3x - 4) + e^x(2x + 3) = \\ = e^x[(x^2 + 3x - 4) + (2x + 3)] = \\ = e^x(x^2 + 5x - 1)$$

$$\text{Portanto, } f'(x) = e^x(x^2 + 5x - 1)$$

$$1.8. f'(x) = \left(\frac{3}{e^x - x} + \frac{1}{e^x}\right)' = \left(\frac{3}{e^x - x}\right)' + \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \\ = \frac{(3)'(e^x - x) - 3(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} + \frac{(1)' e^x - 1 \times (e^x)'}{(e^x)^2} = \\ = \frac{0 - 3(e^x - 1) + 0 - e^x}{(e^x - x)^2} + \frac{3 - 3e^x}{(e^x - x)^2} - \frac{1}{e^x}$$

$$\text{Portanto, } f'(x) = \frac{3 - 3e^x}{(e^x - x)^2} - \frac{1}{e^x}$$

$$1.9. f'(x) = (e^{\cos x} - e^{\sin x})' = \\ = (e^{\cos x})' - (e^{\sin x})' = (\cos x)' e^{\cos x} - (\sin x)' e^{\sin x} = \\ = -\sin x e^{\cos x} - \cos x e^{\sin x}$$

$$\text{Portanto, } f'(x) = -\sin x e^{\cos x} - \cos x e^{\sin x}$$

$$1.10. f'(x) = \left[\left(\frac{x}{2} - x^2\right) e^x\right]' = \\ = \left[\left(\frac{x}{2} - x^2\right)'\right] e^x + \left(\frac{x}{2} - x^2\right) (e^x)' = \\ = \left[2\left(\frac{x}{2} - x^2\right)\left(\frac{x}{2} - x^2\right)'\right] e^x + \left(\frac{x}{2} - x^2\right) e^x =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\left(\frac{x}{2} - x^2\right)\left(\frac{1}{2} - 2x\right)e^x + \left(\frac{x}{2} - x^2\right)^2 e^x = \\
 &= e^x\left(\frac{x}{2} - x^2\right)\left[2\left(\frac{1}{2} - 2x\right) + \left(\frac{x}{2} - x^2\right)\right] = \\
 &= e^x\left(\frac{x}{2} - x^2\right)\left(1 - 4x + \frac{x}{2} - x^2\right) = \\
 &= e^x\left(\frac{x}{2} - x^2\right)\left(1 - \frac{7x}{2} - x^2\right)
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = e^x\left(\frac{x}{2} - x^2\right)\left(1 - \frac{7x}{2} - x^2\right)$.

1.11. $f'(x) = (3^x + x)' = (3^x)' + (x)' = 3^x \ln 3 + 1$

Portanto, $f'(x) = 3^x \ln 3 + 1$.

1.12. $f'(x) = \left(\frac{2^x - 1}{e^x}\right)' = \frac{(2^x - 1)'e^x - (2^x - 1)(e^x)'}{(e^x)^2} =$
 $= \frac{(2^x \ln 2)e^x - (2^x - 1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{2^x \ln 2 - (2^x - 1)}{e^x} =$
 $= \frac{2^x \ln 2 - 2^x + 1}{e^x}$

Portanto, $f'(x) = \frac{2^x \ln 2 - 2^x + 1}{e^x}$.

1.13. $f'(x) = [3^{\sin x}]' = (\sin x^2)' 3^{\sin x^2} \ln 3 =$

$$= 2x \cos x^2 \times 3^{\sin x^2} \ln 3 = 2x \ln 3 \cos x^2 \times 3^{\sin x^2}$$

Portanto, $f'(x) = 2x \ln 3 \cos(x^2) \times 3^{\sin(x^2)}$

1.14. $f'(x) = \left(\frac{e^{5x}}{3^{-x}}\right)' = \frac{(e^{5x})' 3^{-x} - e^{5x} (3^{-x})'}{(3^{-x})^2} =$
 $= \frac{5e^{5x} \times 3^{-x} - e^{5x} (-3^{-x} \ln 3)}{(3^{-x})^2} =$
 $= \frac{5e^{5x} \times 3^{-x} + \ln 3 \times e^{5x} \times 3^{-x}}{(3^{-x})^2} =$
 $= \frac{5e^{5x} + \ln 3 \times e^{5x}}{3^{-x}} = \frac{e^{5x} (5 + \ln 3)}{3^{-x}}$

Portanto, $f'(x) = \frac{e^{5x} (5 + \ln 3)}{3^{-x}}$

1.15. $f'(x) = [\ln(x^2 + 1)]' =$

$$= \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

1.16. $f'(x) = [3x - \ln(x)]' = (3x)' - (\ln x)' = 3 - \frac{1}{x}$

Portanto, $f'(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

1.17. $f'(x) = [x \ln(-x)]' = (x)' \ln(-x) + x(\ln(-x))' =$

$$= \ln(-x) + x \times \frac{(-x)'}{-x} = \ln(-x) + x \times \frac{-1}{-x} =$$

$$= \ln(-x) + 1$$

Portanto, $f'(x) = \ln(-x) + 1$

1.18. $f'(x) = (\ln^2(4x))' = [(\ln(4x))^2]' =$

$$= 2 \ln(4x)(\ln(4x))' = 2 \ln(4x) \times \frac{(4x)'}{4x} =$$

$$= 2 \ln(4x) \times \frac{4}{4x} = \frac{2}{x} \ln(4x)$$

Portanto, $f'(x) = \frac{2}{x} \ln(4x)$

1.19. $f'(x) = (e^{2x} \ln x^3)' = (e^{2x})' \ln x^3 + e^{2x} (\ln x^3)' =$

$$= 2e^{2x} \ln x^3 + e^{2x} \times \frac{(x^3)'}{x^3} =$$

$$= 2e^{2x} \ln x^3 + e^{2x} \times \frac{3x^2}{x^3} =$$

$$= 2e^{2x} \ln x^3 + e^{2x} \times \frac{3}{x} = e^{2x} \left(2 \ln x^3 + \frac{3}{x}\right)$$

Portanto, $f'(x) = e^{2x} \left(2 \ln x^3 + \frac{3}{x}\right)$

1.20. $f'(x) = \left(\frac{\ln(x+1)e^x}{x}\right)' =$

$$= \frac{(\ln(x+1)e^x)' x - \ln(x+1)e^x (x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{[(\ln(x+1))' e^x + \ln(x+1)(e^x)'] x - \ln(x+1)e^x}{x^2} =$$

$$= \frac{\left[\frac{(x+1)'}{x+1} e^x + \ln(x+1)e^x\right] x - \ln(x+1)e^x}{x^2} =$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{x+1} e^x + \ln(x+1)e^x\right] x - \ln(x+1)e^x}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{x}{x+1} e^x + x \ln(x+1)e^x - \ln(x+1)e^x}{x^2} =$$

$$= \frac{e^x \left(\frac{x}{x+1} + x \ln(x+1) - \ln(x+1)\right)}{x^2}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{e^x \left(\frac{x}{x+1} + x \ln(x+1) - \ln(x+1)\right)}{x^2}$

$$\begin{aligned}
 1.21. f'(x) &= (x \ln^3(2x))' = \\
 &= (x)' \ln^3(2x) + x(\ln^3(2x))' = \\
 &= \ln^3(2x) + x((\ln(2x))^3)' = \\
 &= \ln^3(2x) + x(3\ln^2(2x)(\ln(2x))') = \\
 &= \ln^3(2x) + x\left(3\ln^2(2x) \times \frac{(2x)'}{2x}\right) = \\
 &= \ln^3(2x) + x\left(3\ln^2(2x) \times \frac{2}{2x}\right) = \\
 &= \ln^3(2x) + x\left(3\ln^2(2x) \times \frac{1}{x}\right) = \\
 &= \ln^3(2x) + 3\ln^2(2x) = \ln^2(2x)[\ln(2x) + 3]
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \ln^2(2x)[\ln(2x) + 3]$

$$\begin{aligned}
 1.22. f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{\ln x}\right)' = \frac{(\sqrt{x}e^{-x})' \ln x - \sqrt{x}e^{-x}(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \\
 &= \frac{\left[(\sqrt{x})' e^{-x} + \sqrt{x}(e^{-x})'\right] \ln x - \sqrt{x}e^{-x} \times \frac{x'}{x}}{\ln^2(x)} = \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x}\right) \ln x - \sqrt{x}e^{-x} \times \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \\
 &= \frac{\frac{e^{-x} \ln x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-x} \ln x - \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{x}}{\ln^2(x)} = \\
 &= \frac{e^{-x} \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \ln x - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\ln^2(x)}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{e^{-x} \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \ln x - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\ln^2(x)}$

$$\begin{aligned}
 1.23. f'(x) &= \left(\frac{x^2-1}{1-\ln x}\right)' = \\
 &= \frac{(x^2-1)'(1-\ln x) - (x^2-1)(1-\ln x)'}{(1-\ln x)^2} = \\
 &= \frac{2x(1-\ln x) - (x^2-1)\left(-\frac{1}{x}\right)}{(1-\ln x)^2} = \\
 &= \frac{2x - 2x \ln x + x - \frac{1}{x} - 2x \ln x + 3x - \frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2} = \\
 &= \frac{-2x^2 \ln x + 3x^2 - 1}{x(1-\ln x)^2}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{-2x^2 \ln x + 3x^2 - 1}{x(1-\ln x)^2}$

$$\begin{aligned}
 1.24. f'(x) &= \left(\frac{e^x x}{\ln(x-1)}\right)' = \frac{(e^x x)' \ln(x-1) - e^x x (\ln(x-1))'}{(\ln(x-1))^2} = \\
 &= \frac{\left[(e^x)' x + e^x(x)'\right] \ln(x-1) - e^x x \times \frac{(x-1)'}{x-1}}{\ln^2(x-1)} = \\
 &= \frac{(e^x x + e^x) \ln(x-1) - e^x x \times \frac{1}{x-1}}{\ln^2(x-1)} = \\
 &= \frac{e^x x \ln(x-1) + e^x \ln(x-1) - e^x \times \frac{x}{x-1}}{\ln^2(x-1)} = \\
 &= \frac{e^x \left(x \ln(x-1) + \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}\right)}{\ln^2(x-1)}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{e^x \left(x \ln(x-1) + \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}\right)}{\ln^2(x-1)}$

Pág. 85

$$2.1. f'(x) = (\log(x^2+2))' = \frac{(x^2+2)'}{(x^2+2)\ln 10} = \frac{2x}{(x^2+2)\ln 10}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+2)\ln 10}$

$$\begin{aligned}
 2.2. f'(x) &= (\log_3(\sqrt{x^2+1}))' = \frac{(\sqrt{x^2+1})'}{\sqrt{x^2+1} \ln 3} = \\
 &= \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} \ln 3} = \\
 &= \frac{x}{(\sqrt{x^2+1})^2 \ln 3} = \frac{x}{(x^2+1)\ln 3}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{x}{(x^2+1)\ln 3}$

$$\begin{aligned}
 2.3. f'(x) &= (\log_2(\sqrt{x}))' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x} \ln 2} = \\
 &= \frac{\frac{x'}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \ln 2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \ln 2} = \\
 &= \frac{1}{2(\sqrt{x})^2 \ln 2} = \frac{1}{2x \ln 2}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{1}{2x \ln 2}$

$$\begin{aligned}
 2.4. \quad f'(x) &= \left[\log_2 \left(\frac{x+1}{2-x} \right) \right]' = \frac{\left(\frac{x+1}{2-x} \right)'}{\left(\frac{x+1}{2-x} \right) \ln 2} = \\
 &= \frac{(x+1)'(2-x) - (x+1)(2-x)'}{(2-x)^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{x+1}{2-x} \right) \ln 2}{\left(\frac{x+1}{2-x} \right) \ln 2} = \\
 &= \frac{2-x - (x+1) \times (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{x+1}{2-x} \right) \ln 2}{\left(\frac{x+1}{2-x} \right) \ln 2} = \\
 &= \frac{3}{(2-x)^2} = \frac{3(2-x)}{(x+1)(2-x)^2 \ln 2} = \\
 &= \frac{3}{(x+1)(2-x) \ln 2}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{3}{(x+1)(2-x) \ln 2}$

$$\begin{aligned}
 2.5. \quad f'(x) &= \left[\frac{1}{\log x} - \log x \right]' = \left(\frac{1}{\log x} \right)' - (\log x)' = \\
 &= \frac{(1)' \log x - 1 \times (\log x)'}{(\log x)^2} - \frac{x'}{x \ln 10} = \\
 &= \frac{0 - \frac{x'}{x \ln 10}}{\log^2 x} - \frac{1}{x \ln 10} = \\
 &= \frac{-\frac{1}{x \ln 10}}{\log^2 x} - \frac{1}{x \ln 10} = \\
 &= -\frac{1}{x \ln 10 \log^2 x} - \frac{1}{x \ln 10} = \\
 &= -\frac{1}{x \ln 10} \left[\frac{1}{\log^2 x} + 1 \right]
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = -\frac{1}{x \ln 10} \left[\frac{1}{\log^2(x)} + 1 \right]$

$$\begin{aligned}
 2.6. \quad f'(x) &= \left[\log_4^2(3x) \right]' = \left[(\log_4(3x))^2 \right]' = \\
 &= 2 \log_4(3x) (\log_4(3x))' = 2 \log_4(3x) \left(\frac{(3x)'}{3x \ln 4} \right) = \\
 &= 2 \log_4(3x) \left(\frac{3}{3x \ln 4} \right) = 2 \log_4(3x) \left(\frac{1}{x \ln 4} \right) = \\
 &= \frac{2 \log_4(3x)}{x \ln 4}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{2 \log_4(3x)}{x \ln 4}$

$$\begin{aligned}
 2.7. \quad f'(x) &= \left[\frac{\log_3(x^4+1)}{x} \right]' = \\
 &= \frac{(\log_3(x^4+1))' x - \log_3(x^4+1)(x)'}{x^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{x^4+1}{x^4+1} \right)' \times x - \log_3(x^4+1)}{x^2} = \\
 &= \frac{4x^3}{(x^4+1) \ln 3} \times x - \log_3(x^4+1)}{x^2} = \\
 &= \frac{4x^4}{(x^4+1) \ln 3} - \log_3(x^4+1)}{x^2} = \\
 \text{Portanto, } f'(x) &= \frac{\frac{4x^4}{(x^4+1) \ln 3} - \log_3(x^4+1)}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.8. \quad f'(x) &= (2 \log_5(\cos x) - x^3)' = (2 \log_5(\cos x))' - (x^3)' = \\
 &= 2 \times \frac{(\cos x)'}{\cos x \ln 5} - 3x^2 = 2 \times \frac{-\sin x}{\cos x \ln 5} - 3x^2 = \\
 &= -2 \times \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\ln 5} - 3x^2 = -2 \times \tan x \times \frac{1}{\ln 5} - 3x^2 = \\
 &= \frac{-2 \tan x}{\ln 5} - 3x^2
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{-2 \tan x}{\ln 5} - 3x^2$

$$\begin{aligned}
 2.9. \quad f'(x) &= (e^{3x} \log_2 x)' = (e^{3x})' \log_2 x + e^{3x} (\log_2 x)' = \\
 &= 3e^{3x} \log_2 x + e^{3x} \times \frac{x'}{x \ln 2} = \\
 &= 3e^{3x} \log_2 x + e^{3x} \times \frac{1}{x \ln 2} = \\
 &= e^{3x} \left(3 \log_2 x + \frac{1}{x \ln 2} \right)
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = e^{3x} \left(3 \log_2(x) + \frac{1}{x \ln 2} \right)$

$$\begin{aligned}
 2.10. \quad f'(x) &= \left(\frac{2^x}{\log_2(3x)} \right)' = \frac{(2^x)' \log_2(3x) - 2^x (\log_2(3x))'}{(\log_2(3x))^2} = \\
 &= \frac{(2^x \ln 2) \log_2(3x) - 2^x \times \frac{(3x)'}{3x \ln 2}}{\log_2^2(3x)} = \\
 &= \frac{2^x \ln 2 \log_2(3x) - 2^x \times \frac{1}{x \ln 2}}{\log_2^2(3x)} = \\
 &= \frac{2^x \left[\ln 2 \log_2(3x) - \frac{1}{x \ln 2} \right]}{\log_2^2(3x)}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{2^x \left[\ln 2 \log_2(3x) - \frac{1}{x \ln 2} \right]}{\log_2^2(3x)}$

$$2.11. f'(x) = \left[(3x)^{\sqrt{2}} \right]' = \sqrt{2} (3x)' (3x)^{\sqrt{2}-1} = \\ = \sqrt{2} \times 3 \times (3x)^{\sqrt{2}-1} = 3\sqrt{2} (3x)^{\sqrt{2}-1}$$

Portanto, $f'(x) = 3\sqrt{2} (3x)^{\sqrt{2}-1}$

$$2.12. f'(x) = \left[(x-x^2)^\pi \right]' = \pi (x-x^2)' (x-x^2)^{\pi-1} = \\ = \pi (1-2x) (x-x^2)^{\pi-1}$$

Portanto, $f'(x) = \pi (1-2x) (x-x^2)^{\pi-1}$

$$2.13. f'(x) = \left[(\ln x)^{\sqrt{3}} \right]' = \sqrt{3} (\ln x)' (\ln x)^{\sqrt{3}-1} = \\ = \sqrt{3} \times \frac{1}{x} (\ln x)^{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}}{x} (\ln x)^{\sqrt{3}-1}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{x} (\ln x)^{\sqrt{3}-1}$

$$2.14. f'(x) = \left[(\log_2(3x))^e \right]' = e (\log_2(3x))' (\log_2(3x))^{e-1} = \\ = e \times \frac{(3x)'}{3x \ln 2} (\log_2(3x))^{e-1} = e \times \frac{3}{3x \ln 2} (\log_2(3x))^{e-1} = \\ = \frac{e}{x \ln 2} (\log_2(3x))^{e-1}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{e}{x \ln 2} (\log_2(3x))^{e-1}$

$$2.15. f'(x) = \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2}} \right]' = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)' \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2}-1} = \\ = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2}-1} = -\frac{\sqrt{2}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2}-1}$$

Portanto, $f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2}-1}$

$$2.16. f'(x) = \left[-(5 \sin x)^{\sqrt{2}} \right]' = -\left[(5 \sin x)^{\sqrt{2}} \right]' = \\ = -\sqrt{2} (5 \sin x)' (5 \sin x)^{\sqrt{2}-1} = \\ = -\sqrt{2} (5 \cos x) (5 \sin x)^{\sqrt{2}-1} = \\ = -5\sqrt{2} \cos x (5 \sin x)^{\sqrt{2}-1}$$

Portanto, $f'(x) = -5\sqrt{2} \cos x (5 \sin x)^{\sqrt{2}-1}$

$$2.17. f'(x) = (x^x)' = (e^{\ln x^x})' =$$

$$= (e^{x \ln x})' = (x \ln x)' e^{x \ln x} =$$

$$= \left[(x)' \ln x + x (\ln x)' \right] e^{x \ln x} =$$

$$= \left[\ln x + x \left(\frac{1}{x}\right) \right] x^x = (\ln x + 1) x^x =$$

$$= (\ln x + 1) x^x$$

Portanto, $f'(x) = (\ln x + 1) x^x$

$$2.18. f'(x) = \left[\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{\sqrt{5}} \right]' = \sqrt{5} \left(\frac{\cos x}{x}\right)' \left(\frac{\cos x}{x}\right)^{\sqrt{5}-1} =$$

$$= \sqrt{5} \left(\frac{(\cos x)' x - \cos x (x)'}{x^2} \right) \left(\frac{\cos x}{x}\right)^{\sqrt{5}-1} =$$

$$= \sqrt{5} \left(\frac{(-\sin x)x - \cos x}{x^2} \right) \left(\frac{\cos x}{x}\right)^{\sqrt{5}-1} =$$

$$= \frac{-\sqrt{5}x \sin x - \sqrt{5} \cos x}{x^2} \left(\frac{\cos x}{x}\right)^{\sqrt{5}-1}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{-\sqrt{5}x \sin x - \sqrt{5} \cos x}{x^2} \left(\frac{\cos x}{x}\right)^{\sqrt{5}-1}$

$$2.19. f'(x) = \left[(\log_2(-x))^{\sqrt{2}+1} \right]' =$$

$$= (\sqrt{2}+1) (\log_2(-x))' (\log_2(-x))^{\sqrt{2}+1-1} =$$

$$= (\sqrt{2}+1) \times \frac{(-x)'}{-x \ln 2} (\log_2(-x))^{\sqrt{2}} =$$

$$= (\sqrt{2}+1) \times \frac{-1}{-x \ln 2} (\log_2(-x))^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{x \ln 2} (\log_2(-x))^{\sqrt{2}}$$

Portanto, $f'(x) = \frac{\sqrt{2}+1}{x \ln 2} (\log_2(-x))^{\sqrt{2}}$

$$2.20. f'(x) = \left[(e^x + e^{-x})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right]' =$$

$$= (\sqrt{3}+\sqrt{2}) (e^x + e^{-x})' (e^x + e^{-x})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} =$$

$$= (\sqrt{3}+\sqrt{2}) (e^x - e^{-x}) (e^x + e^{-x})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$$

Portanto, $f'(x) = (\sqrt{3}+\sqrt{2}) (e^x - e^{-x}) (e^x + e^{-x})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$

$$2.21. f'(x) = \left[(2x)^{\sqrt{2}} e^x \right]' = \left[(2x)^{\sqrt{2}} \right]' e^x + (2x)^{\sqrt{2}} (e^x)' =$$

$$= \left[\sqrt{2} (2x)' (2x)^{\sqrt{2}-1} \right] e^x + (2x)^{\sqrt{2}} e^x =$$

$$= 2\sqrt{2} (2x)^{\sqrt{2}-1} e^x + (2x)^{\sqrt{2}} e^x =$$

$$= (2x)^{\sqrt{2}} e^x \left[2\sqrt{2} (2x)^{-1} + 1 \right] =$$

$$= (2x)^{\sqrt{2}} e^x \left[2\sqrt{2} \times \frac{1}{2x} + 1 \right] = (2x)^{\sqrt{2}} e^x \left(\frac{\sqrt{2}}{x} + 1 \right)$$

Portanto, $f'(x) = (2x)^{\sqrt{2}} e^x \left(\frac{\sqrt{2}}{x} + 1 \right)$

$$2.22. f'(x) = \left[(4x)^{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}}(2x) \right]' =$$

$$= \left(\log_{\frac{1}{3}}(2x) \right)' \left((4x)^{\sqrt{2}} \right)' + \left(\log_{\frac{1}{3}}(2x) \right) (4x)^{\sqrt{2}}' =$$

$$\begin{aligned}
 &= \log_{\frac{1}{3}}(2x) \left[\sqrt{2}(4x)'(4x)^{\sqrt{2}-1} \right] + \frac{(2x)'}{(2x)\ln\left(\frac{1}{3}\right)}(4x)^{\sqrt{2}} = \\
 &= \log_{\frac{1}{3}}(2x) \left[4\sqrt{2}(4x)^{\sqrt{2}-1} \right] + \frac{2}{2x\ln\frac{1}{3}}(4x)^{\sqrt{2}} = \\
 &= \log_{\frac{1}{3}}(2x) \left(4\sqrt{2} \times 4^{\sqrt{2}-1} \times x^{\sqrt{2}-1} \right) + \frac{(4x)^{\sqrt{2}}}{x\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = \\
 &= \log_{\frac{1}{3}}(2x) \left(4^{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \times x^{\sqrt{2}-1} \right) + \frac{(4x)^{\sqrt{2}}}{x\ln\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2x) \left(4^{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \times x^{\sqrt{2}-1} \right) + \frac{(4x)^{\sqrt{2}}}{x\ln\frac{1}{3}}$

3.1. $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2(1+h)} - e^2}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2+2h} - e^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^2(e^{2h} - 1)}{h} = e^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 1}{h} =$
 $= 2e^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 1}{2h} =$ $\left| \begin{array}{l} y=2h \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$
 $= 2e^2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 2e^2 \times 1 = 2e^2$

Assim, $f'(1) = 2e^2$

3.2. $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(3+h) - \ln 3}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{3+h}{3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)}{h}$

Fazendo $y = \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)$, tem-se que: $\left| \begin{array}{l} y = \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{h}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{h}{3} = e^y - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow h = 3(e^y - 1) \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y}{3(e^y - 1)} = \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(3) = \frac{1}{3}$

3.3. $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h+1} - e}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(e^{2h} - 1)}{h} = e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 1}{h} = 2e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 1}{2h} =$
 $= 2e \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 2e \times 1 = 2e$ $\left| \begin{array}{l} y=2h \\ \text{Se } h \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

Portanto, $f'(0) = 2e$.

3.4. $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_2(2+h) - \log_2 2}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_2\left(\frac{2+h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_2\left(1 + \frac{h}{2}\right)}{h}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)}{h \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)}{h} \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{2(e^y - 1)} = \frac{1}{2 \ln 2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \left. \begin{array}{l} y = \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{h}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow h = 2(e^y - 1) \\ \text{Se } h \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{2 \ln 2} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{2 \ln 2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2 \ln 2}
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(2) = \frac{1}{2 \ln 2}$

Pág. 86

4. • Para $x < 0$, tem-se que: $g'(x) = (e^x - 1)' = e^x$
 • Para $x > 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right)' = \frac{(\ln(x+1))' x - \ln(x+1)(x)'}{x^2} = \\
 &= \frac{(x+1)'}{x+1} \times x - \ln(x+1) \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x+1} \times x - \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \\
 &= \frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}
 \end{aligned}$$

- No ponto $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 g'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1 - 0}{x} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) - 0}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) \left(\frac{0}{0}\right)}{x^2} = \left. \begin{array}{l} y = \ln(x+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = e^y - 1 \\ \text{Se } x \rightarrow 0^+, y \rightarrow 0^+ \end{array} \right\} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{(e^y - 1)^2} = \\
 &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} (e^y - 1)} = \\
 &= \frac{1}{1 \times 0^+} = +\infty
 \end{aligned}$$

Logo, não existe $g'(0)$.

Assim, g' pode ser caracterizada do modo seguinte:

$$g' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.1. a) Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x(x^2+x-5))' = \\ &= (e^x)'(x^2+x-5) + e^x(x^2+x-5)' = \\ &= e^x(x^2+x-5) + e^x(2x+1) = \\ &= e^x(x^2+x-5+2x+1) = \\ &= e^x(x^2+3x-4) \end{aligned}$$

Logo, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x(x^2+3x-4)$

b) Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1+x^3e^x)' = \\ &= 0 + (x^3)'e^x + x^3(e^x)' = \\ &= 3x^2e^x + x^3e^x = e^x(3x^2+x^3) \end{aligned}$$

Logo, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x(3x^2+x^3)$

c) Para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^2 \ln x + 2)' = (x^2 \ln x)' + (2)' = \\ &= (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' + 0 = \\ &= 2x \ln x + x^2 \times \frac{x'}{x} = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = \\ &= 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) \end{aligned}$$

Logo, $\forall x \in \mathbb{R}^+, h'(x) = x(2 \ln x + 1)$

5.2. zeros de f' :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x(x^2+3x-4) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^x = 0 \vee x^2+3x-4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3+5}{2} \vee x = \frac{-3-5}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4 \end{aligned}$$

zeros de g' :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x(3x^2+x^3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^x = 0 \vee 3x^2+x^3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x^2(3+x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 3+x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \end{aligned}$$

zeros de h' :

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &\Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \vee 2 \ln x + 1 = 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee \ln x = -\frac{1}{2} \right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-\frac{1}{2}} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \frac{\sqrt{e}}{e} \right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{e} \end{aligned}$$

Assim, tem-se:

zeros de f' : -4 e 1 ; zeros de g' : -3 e 0

zeros de h' : $\frac{\sqrt{e}}{e}$

6.1. a) Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2}{e^x} \right)' = \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x-x^2)}{(e^x)^2} = \frac{2x-x^2}{e^x} = \\ &= \frac{x(2-x)}{e^x} \end{aligned}$$

Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$

b) Para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}^+, g''(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

6.2. Uma equação da reta tangente ao gráfico de f' no ponto de abscissa $x = 0$ é:

$$y - f'(0) = f''(0)(x - 0)$$

Tem-se que:

$$f'(0) = \frac{0^2}{e^0} = \frac{0}{1} = 0 \text{ e } f''(0) = \frac{0(2-0)}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$$

Portanto, $y - 0 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$

Assim, $y = 0$ é a equação pedida.

6.3. $g''(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e$$

Portanto, o zero de $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

7. zeros de f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{3x} \sin(4x))' = \\ &= (e^{3x})' \sin(4x) + e^{3x} (\sin(4x))' = \\ &= 3e^{3x} \sin(4x) + e^{3x} (4 \cos(4x)) = \\ &= e^{3x} (3 \sin(4x) + 4 \cos(4x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet f''(x) &= \left[e^{3x} (3 \sin(4x) + 4 \cos(4x)) \right]' = \\
 &= (e^{3x})' (3 \sin(4x) + 4 \cos(4x)) + \\
 &\quad + e^{3x} (3 \sin(4x) + 4 \cos(4x))' = \\
 &= 3e^{3x} (3 \sin(4x) + 4 \cos(4x)) + \\
 &\quad + e^{3x} (3 \times 4 \cos(4x) - 4 \times 4 \sin(4x)) = \\
 &= e^{3x} (9 \sin(4x) + 12 \cos(4x)) + \\
 &\quad + e^{3x} (12 \cos(4x) - 16 \sin(4x)) = \\
 &= e^{3x} (9 \sin(4x) + 12 \cos(4x) + \\
 &\quad + 12 \cos(4x) - 16 \sin(4x)) = \\
 &= e^{3x} (-7 \sin(4x) + 24 \cos(4x))
 \end{aligned}$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned}
 f''(x) - 6f'(x) + 25f(x) &= \\
 = e^{3x} (-7 \sin(4x) + 24 \cos(4x)) - \\
 &\quad - 6e^{3x} (3 \sin(4x) + 4 \cos(4x)) + \\
 &\quad + 25e^{3x} \sin(4x) = \\
 = e^{3x} (-7 \sin(4x) + 24 \cos(4x) - 18 \sin(4x) - \\
 &\quad - 24 \cos(4x) + 25 \sin(4x)) = \\
 = e^{3x} (-25 \sin(4x) + 25 \sin(4x) + 24 \cos(4x) - 24 \cos(4x)) = \\
 = e^{3x} \times 0 = \\
 = 0
 \end{aligned}$$

8. $g'(x) = (2e^{-0,6x})' = 2(-0,6e^{-0,6x}) = -1,2e^{-0,6x}$

Logo,

$$\begin{aligned}
 g(x) = 1 - g'(x) &\Leftrightarrow 2e^{-0,6x} = 1 - (-1,2e^{-0,6x}) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2e^{-0,6x} = 1 + 1,2e^{-0,6x} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2e^{-0,6x} - 1,2e^{-0,6x} = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 0,8e^{-0,6x} = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow e^{-0,6x} = \frac{1}{0,8} \Leftrightarrow e^{-0,6x} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -0,6x = \ln\left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{-0,6} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{-\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \ln\left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \ln\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^5}
 \end{aligned}$$

A solução da equação é $\ln\sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^5}$.

9. $h'(x) = (x \ln^2 x)' = (x)' \ln^2 x + x(\ln^2 x)' =$
 $= \ln^2 x + x(2 \ln x)' =$
 $= \ln^2 x + x(2 \ln x (\ln x)') =$
 $= \ln^2 x + x\left(2 \ln(x) \times \frac{1}{x}\right) =$
 $= \ln^2 x + 2 \ln x =$
 $= \ln x (\ln x + 2)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x (\ln x + 2) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln x = 0 \vee \ln x + 2 = 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee \ln x = -2) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = e^{-2}) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{e^2}$$

Portanto, há dois pontos no gráfico de h onde a reta tangente tem declive nulo, ou seja, é paralela ao eixo Ox ,

são eles os pontos de abscissa 1 e $\frac{1}{e^2}$.

10. $f(x) = \begin{cases} \log \sqrt{x+1} & \text{se } x \geq 2 \\ 3^{x+1} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

10.1. $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \sqrt{3+h+1} - \log \sqrt{4}}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \sqrt{h+4} - \log \left(\frac{0}{0}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{4+h} - \ln \ln 10}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \sqrt{h+4} - \log \left(\frac{0}{0}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(4+h)^{\frac{1}{2}} - \ln 4^{\frac{1}{2}}}{h} =$
 $= \frac{1}{\ln 10} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \ln(4+h) - \frac{1}{2} \ln 4}{h} =$
 $= \frac{1}{\ln 10} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \ln(4+h) - \frac{1}{2} \ln 4}{h} =$
 $= \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{4+h}{4}\right)}{h} =$
 $= \frac{1}{2 \ln 10} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{4}\right)}{h} =$
 $= \frac{1}{2 \ln 10} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{4(e^y - 1)} =$
 $= \frac{1}{2 \ln 10} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} =$
 $= \frac{1}{8 \ln 10} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{8 \ln 10}$

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{aligned}
 y &= \ln\left(1 + \frac{h}{4}\right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow e^y &= 1 + \frac{h}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow h &= 4(e^y - 1) \\
 \text{Se } h \rightarrow 0, & y \rightarrow 0
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

10.2. $y = mx + b$

Ponto de tangência

$(0, 3)$ dado que $f(0) = 3^{0+1} = 3$

$m = f'(0)$

$= 3^{0+1} \times 3^0 \times \ln 3 =$

$= 3 \ln 3$

Logo, $y = (3 \ln 3)x + 3$ é a equação pedida.

11. $g(x) = \ln(x+a), a \in \mathbb{R}^+$
 $t.m.v._{(g, 0, 2)} = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{\ln(2+a) - \ln(a)}{2} =$
 $= \frac{1}{2} \ln \frac{2+a}{a} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{a} + 1 \right)$
 $t.m.v._{(g, 0, 2)} = \ln 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{a} + 1 \right) = \ln 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln \left(\frac{2}{a} + 1 \right) = 2 \ln 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln \left(\frac{2}{a} + 1 \right) = \ln 4^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{2}{a} + 1 = 16 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{2}{a} = 15 \Leftrightarrow a = \frac{2}{15}$

Ficha para praticar 16

Pág. 88

1.1. $f(x) = (x-1)^2 e^x, D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = [(x-1)^2 e^x]' = [(x-1)^2]' e^x + (x-1)^2 (e^x)' =$
 $= 2(x-1)(x-1)' e^x + (x-1)^2 e^x =$
 $= 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x =$
 $= (x-1)e^x (2 + (x-1)) = e^x (x-1)(x+1)$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^x = 0 \vee x-1 = 0 \vee x+1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = 1 \vee x = -1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗
		Máx.		Mín.	

A função f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1, 1]$. Tem um máximo relativo para $x = -1$ e tem um mínimo relativo para $x = 1$.

1.2. $f(x) = 3x \ln x, D_f = \mathbb{R}^+$
 $f'(x) = (3x \ln x)' = (3x)' \ln x + 3x(\ln x)' =$
 $= 3 \ln x + 3x \left(\frac{1}{x} \right) = 3 \ln x + 3$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \ln x + 3 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'		-	0	+
f		↘		↗
			Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ e é estritamente crescente em $[\frac{1}{e}, +\infty[$. Tem um mínimo relativo para $x = \frac{1}{e}$.

1.3. $f(x) = \frac{e^x}{x}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $f'(x) = \left(\frac{e^x}{x} \right)' = \frac{(e^x)' x - e^x (x)'}{x^2} = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2}$
 $f'(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{e^x (x-1)}{x^2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (e^x (x-1) = 0 \wedge x^2 \neq 0) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (e^x = 0 \vee x-1 = 0) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x \in \emptyset \vee x = 1) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f	-		-	0	+
f	↘		↘		↗
				Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1]$ e é estritamente crescente em $[1, +\infty[$. Tem um mínimo relativo para $x = 1$.

1.4. $f(x) = \ln \left(x + \frac{1}{x} \right); D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} > 0 \right\} = \mathbb{R}^+$
 $x + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ porque $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$

$$f'(x) = \left[\ln \left(x + \frac{1}{x} \right) \right]' = \frac{\left(x + \frac{1}{x} \right)'}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x(x^2 + 1) \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1	$+\infty$
f'		-	0	+
f		↘		↗
			Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]0, 1]$ e é estritamente crescente em $[1, +\infty[$. Tem um mínimo relativo para $x = 1$.

1.5. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	\searrow		\nearrow
		Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$. Tem um mínimo relativo para $x = 0$.

1.6. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

x	0		e	$+\infty$
f'		+	0	-
f		\nearrow		\searrow
			Máx.	

A função f é estritamente crescente em $]0, e]$ e é estritamente decrescente em $[e, +\infty[$. Tem um máximo relativo para $x = e$.

1.7. $f(x) = 1 + 2x^2e^{-x}$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (1 + 2x^2e^{-x})' = (1)' + (2x^2e^{-x})' =$$

$$= (2x^2)'e^{-x} + 2x^2(e^{-x})' = 4xe^{-x} + 2x^2(-e^{-x}) =$$

$$= 4xe^{-x} - 2x^2e^{-x} = e^{-x}(4x - 2x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(4x - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = 0 \vee 4x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee 2x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	-	0	+	0	-
f	\searrow		\nearrow		\searrow
		Mín.		Máx.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$ e em $[0, 2]$. Tem um máximo relativo para $x = 0$ e tem um máximo relativo para $x = 2$.

1.8. $f(x) = 1 - \ln x^2$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = (1 - \ln x^2)' = 0 - \frac{(x^2)'}{x^2} = 0 - \frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

A função f' não tem zeros.

$$f'(x) < 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+ \text{ e } f'(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^-.$$

Portanto, a função f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$.

f não tem extremos relativos.

1.9. $f(x) = (2x + 4)e^x$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = ((2x + 4)e^x)' = (2x + 4)'e^x + (2x + 4)(e^x)' =$$

$$= 2e^x(2x + 4)e^x = e^x(2 + (2x + 4)) = e^x(2x + 6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2x + 6) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -3 \Leftrightarrow x = -3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	-	0	+
f	\searrow		\nearrow
		Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -3]$ e é estritamente crescente em $[-3, +\infty[$. Tem um mínimo relativo para $x = -3$.

1.10. $f(x) = \frac{2^{3x}}{x}$

$$f'(x) = \left(\frac{2^{3x}}{x}\right)' = \frac{(2^{3x})'x - 2^{3x}(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{[(3x)'2^{3x} \ln 2]x - 2^{3x}}{x^2} = \frac{(3 \ln 2 \times 2^{3x})x - 2^{3x}}{x^2} =$$

$$= \frac{2^{3x}(3x \ln 2 - 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{3x}(3x \ln 2 - 1)}{x^2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^{3x}(3x \ln 2 - 1) = 0 \wedge x^2 \neq 0) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^{3x} = 0 \vee (3 \ln 2)x - 1 = 0) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \emptyset \vee x = \frac{1}{3 \ln 2}\right) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3 \ln 2}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3 \ln 2}$	$+\infty$
f'	-		-	0	+
f	\searrow		\searrow		\nearrow
				Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, \frac{1}{3\ln 2}]$ e é estritamente crescente em $[\frac{1}{3\ln 2}, +\infty[$.

Tem um mínimo relativo para $x = \frac{1}{3\ln 2}$

1.11. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{1-x}, D_f =]1, +\infty[$

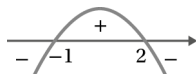
$$f'(x) = \left[\frac{\ln(x-1)}{1-x} \right]' = \frac{(\ln(x-1))'(1-x) - [\ln(x-1)](1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{(x-1)' \times (1-x) - [\ln(x-1)](-1)}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1}{x-1} \times (1-x) + \ln(x-1)}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1-x}{x-1} + \ln(x-1)}{(1-x)^2} = \frac{-1 + \ln(x-1)}{(1-x)^2}$$

$f'(x) = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow \frac{-1 + \ln(x-1)}{(1-x)^2} = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow -1 + \ln(x-1) = 0 \wedge (1-x)^2 \neq 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow \ln(x-1) = 1 \wedge x \neq 1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x-1 = e \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 1+e$

x	1		1+e	$+\infty$
f'		-	0	+
f		\searrow		\nearrow
			Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]1, 1+e[$ e é estritamente crescente em $[1+e, +\infty[$. Tem um mínimo relativo para $x = 1+e$.

1.12. $f(x) = \ln(2+x-x^2); D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2+x-x^2 > 0\} =]-1, 2[$



$$2+x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1+3}{-2} \vee x = \frac{-1-3}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

$$f'(x) = \left[\ln(2+x-x^2) \right]' = \frac{(2+x-x^2)'}{2+x-x^2} = \frac{1-2x}{2+x-x^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{2+x-x^2} = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow 1-2x = 0 \wedge 2+x-x^2 \neq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow 1-2x = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	-1		$\frac{1}{2}$		2
f'		+	0	-	
f		\nearrow		\searrow	
			Máx.		

A função f é estritamente crescente em $]-1, \frac{1}{2}]$ e é estritamente decrescente em $[\frac{1}{2}, 2[$. Tem um máximo relativo para $x = \frac{1}{2}$.

2.1. $f(x) = \frac{x}{\ln x}; D_f = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \ln x \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x} \right)' = \frac{(x)' \ln x - x(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - x \left(\frac{1}{x} \right)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \right)' = \frac{(\ln x - 1)' (\ln x)^2 - (\ln x - 1) ((\ln x)^2)'}{[(\ln x)^2]^2} = \frac{\frac{1}{x} (\ln x)^2 - (\ln x - 1) (2 \ln x) \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{\frac{1}{x} (\ln x)^2 - (\ln x - 1) \left(\frac{2 \ln x}{x} \right)}{(\ln x)^4} = \frac{\frac{\ln x}{x} (\ln x - 2 \ln x - 2)}{(\ln x)^4} = \frac{\frac{1}{x} (-\ln x + 2)}{(\ln x)^3} = \frac{-\ln x + 2}{x(\ln x)^3}$$

$f''(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow \frac{-\ln x + 2}{x(\ln x)^3} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow -\ln x + 2 = 0 \wedge x(\ln x)^3 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow \ln x = 2 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow x = e^2$

x	0		1		e^2	$+\infty$
f''		-		+	0	-
f		\cap		\cup		\cap
					P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]1, e^2[$ e voltada para baixo em $]0, 1[$ e em $]e^2, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de abscissa $x = e^2$.

2.2. $f(x) = (x-2)e^x$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = ((x-2)e^x)' = (x-2)'e^x + (x-2)(e^x)' = e^x + (x-2)e^x = e^x(1+(x-2)) = e^x(x-1)$$

$$f''(x) = (e^x(x-1))' = (e^x)'(x-1) + e^x(x-1)' = e^x(x-1) + e^x = e^x((x-1)+1) = e^x x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x x = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee x = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-	0	+
f	\cap		\cup
		P.I.	

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e tem concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de abcissa $x = 0$.

Pág. 89

2.3. $f(x) = e^x(x^2 + x)$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (e^x(x^2 + x))' = (e^x)'(x^2 + x) + e^x(x^2 + x)' = e^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1) = e^x[(x^2 + x) + (2x + 1)] = e^x(x^2 + 3x + 1)$$

$$f''(x) = (e^x(x^2 + 3x + 1))' = (e^x)'(x^2 + 3x + 1) + e^x(x^2 + 3x + 1)' = e^x(x^2 + 3x + 1) + e^x(2x + 3) = e^x[(x^2 + 3x + 1) + (2x + 3)] = e^x(x^2 + 5x + 4)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-5 + 3}{2} \vee x = \frac{-5 - 3}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 + 3}{2} \vee x = \frac{-5 - 3}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -4$$

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
f''	+	0	-	0
f	\cup		\cap	\cup
		P.I.	P.I.	

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, -4[$ e em $]-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-4, -1[$. Tem dois pontos de inflexões de abscissas $x = -4$ e $x = -1$.

2.4. $f(x) = x^2 + \ln x$; $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = (x^2 + \ln x)' = 2x + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)' = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 1}{x^2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (2x^2 - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f		\cap		\cup
			P.I.	

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ e voltada para cima em $]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de abcissa $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.5. $f(x) = \frac{-2 + \ln x}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \left(\frac{-2 + \ln x}{x}\right)' = \frac{(-2 + \ln x)'x - (-2 + \ln x)(x)'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - (-2 + \ln x)}{x^2} = \frac{1 + 2 - \ln x}{x^2} = \frac{3 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{3 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(3 - \ln x)'x^2 - (3 - \ln x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)x^2 - (3 - \ln x)(2x)}{x^4} = \frac{-x - (6x - 2x \ln x)}{x^4} = \frac{-7x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-7 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{-7 + 2 \ln x}{x^3} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow -7 + 2 \ln x = 0 \wedge x^3 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \ln x = \frac{7}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^{\frac{7}{2}} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \sqrt{e^7} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^3 \sqrt{e}$$

$$\Leftrightarrow -7 + 2 \ln x = 0 \wedge x^3 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \ln x = \frac{7}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^{\frac{7}{2}} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \sqrt{e^7} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^3 \sqrt{e}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{7}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^{\frac{7}{2}} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \sqrt{e^7} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^3 \sqrt{e}$$

x	0		$e^3 \sqrt{e}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f		\cap		\cup
			P.I.	

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]0, e^3 \sqrt{e}[$ e voltada para cima em $]e^3 \sqrt{e}, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de abcissa $x = e^3 \sqrt{e}$.

2.6. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f'(x) = (e^{x+3}x)' = (e^{x+3})'x + e^{x+3}(x)' = (x+3)e^{x+3}x + e^{x+3} = e^{x+3}(x+4)$$

$$f''(x) = [e^{x+3}(x+1)]' = (e^{x+3})'(x+1) + e^{x+3}(x+1)' = e^{x+3}(x+1) + e^{x+3} = e^{x+3}((x+1)+1) = e^{x+3}(x+2)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+3}(x+2) = 0 \Leftrightarrow e^{x+3} = 0 \vee x+2 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -2 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	\cap		\cup
		P.I.	

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e voltada para cima em $]-2, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de abscissa $x = -2$.

3.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

▪ Assíntotas verticais

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Assim, apenas a reta de equação $x = 2$ pode ser assíntota vertical do gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(1 + e^{\frac{3}{x-2}}\right) = 1 + e^{0^-} = 1 + e^{-\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 + e^{\frac{3}{x-2}}\right) = 1 + e^{0^+} = 1 + e^{+\infty} = 1 + (+\infty) = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico de f .

▪ Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + e^{\frac{3}{x-2}}\right) = 1 + e^{\frac{3}{+\infty}} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + e^{\frac{3}{x-2}}\right) = 1 + e^{\frac{3}{-\infty}} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

Logo a reta de equação, $y = 2$ é assíntota ao gráfico de f , quer quando $x \rightarrow +\infty$, quer quando $x \rightarrow -\infty$.

3.2. A função f admite inversa.

Têm-se que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, portanto, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Por outro lado,

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 1 + e^{\frac{3}{x-2}} \Leftrightarrow e^{\frac{3}{x-2}} = y - 1 \Leftrightarrow \ln(y-1) = \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = \frac{3}{\ln(y-1)} \Leftrightarrow x = 2 + \frac{3}{\ln(y-1)}$$

Assim, $f^{-1}(x) = 2 + \frac{3}{\ln(x-1)}$ é uma expressão analítica

da função inversa de f .

$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0 \wedge \ln(x-1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \wedge x - 1 \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \wedge x \neq 2\} =]1, +\infty[\setminus \{2\}$$

Portanto, uma expressão para a função inversa de f é

$$f^{-1}(x) = 2 + \frac{3}{\ln(x-1)}$$

é $]1, +\infty[\setminus \{2\}$

3.3. $f'(x) = \left(1 + e^{\frac{3}{x-2}}\right)' = 0 + \left(\frac{3}{x-2}\right)' e^{\frac{3}{x-2}} = \frac{(3)'(x-2) - 3(x-2)'}{(x-2)^2} e^{\frac{3}{x-2}} = \frac{0 - 3}{(x-2)^2} e^{\frac{3}{x-2}} = -\frac{3}{(x-2)^2} e^{\frac{3}{x-2}}$

A função f' não tem zeros e $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Assim, a função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$.

Não tem extremos.

3.4. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+3} > 0\right\}$

x	$-\infty$	3	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x-2}{x+3}$	$+$		$-$	$+$

Portanto, $D_g =]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$

3.5. A função g é contínua em $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$.

Assim, as retas de equação $x = -3$ e $x = 2$ são as únicas possíveis assíntotas verticais do gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = \ln\left(\frac{-5}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty,$$

portanto, a reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{5}\right) = \ln(0^+) = -\infty,$$

portanto, a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

3.6. $g(x) \geq 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) \geq 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3} \geq 1 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3} - 1 \geq 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-(x+3)}{x+3} \geq 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{x+3} \geq 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 < 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -3 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow x < -3$$

Assim, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[$

4.1. $f(x) = xe^x$; $D_f = \mathbb{R}$

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee 1+x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	$-\frac{1}{e}$	\nearrow
		Min.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e é

estritamente crescente em $[-1, +\infty[$. Tem um mínimo

relativo igual a $-\frac{1}{e}$ para $x = -1$.

• Concavidades e inflexões

$$f''(x) = (e^x(1+x))' = (e^x)'(1+x) + e^x(1+x)' =$$

$$= e^x(1+x) + e^x = e^x((1+x)+1) = e^x(2+x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2+x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee 2+x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -2 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	\cap		\cup
		P.I.	

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em

$]-\infty, -2[$ e concavidade voltada para cima em

$]-2, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de abscissa

$x = -2$.

• Assíntotas verticais

O gráfico de f não tem assíntotas verticais por ser

contínua em \mathbb{R}

• Assíntotas não verticais

Em $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) \stackrel{(-\infty \times 0)}{=} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} =$$

$$= - \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = - \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de

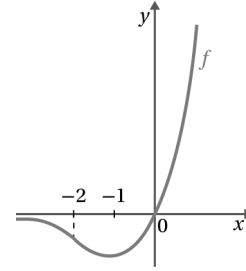
f em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

O gráfico de f não tem assíntota em $+\infty$.

• Esboço do gráfico



4.2. $f(x) = 3^{-x} + 3^x$; $D_f = \mathbb{R}$

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = (3^{-x} + 3^x)' = -3^{-x} \ln 3 + 3^x \ln 3 = (3^x - 3^{-x}) \ln 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3^x - 3^{-x}) \ln 3 = 0 \Leftrightarrow 3^x - 3^{-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	2	\nearrow
		Min.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é

estritamente crescente em $[0, +\infty[$. Tem um mínimo

relativo igual a 2 para $x = 0$.

• Concavidades e inflexões

$$f''(x) = [(3^x - 3^{-x}) \ln 3]' = \ln 3 (3^x - 3^{-x})' =$$

$$= \ln 3 (\ln 3 \times 3^x - (-\ln 3 \times 3^{-x})) = \ln^2 3 (3^x + 3^{-x})$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln^2 3 (3^x + 3^{-x}) = 0$$

Equação impossível porque $3^x + 3^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

A função f'' não tem zeros.

Como $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o gráfico de f tem a

concavidade voltada para cima em \mathbb{R} e não existem pontos de inflexão.

• Assíntotas

• Assíntotas verticais

f é contínua em \mathbb{R} pelo que o gráfico não tem assíntotas verticais.

• Não verticais ($y = mx + b$)

Em $-\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x} + 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x}}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x}}{-x} + \frac{3^{-\infty}}{-\infty} = \left| \begin{array}{l} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3^y}{y} + \frac{0}{-\infty} =$$

$$= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{y \ln 3}}{y} + 0 = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{y \ln 3}}{y} = \left| \begin{array}{l} h = y \ln 3 \\ \text{Se } y \rightarrow +\infty, h \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= - \ln 3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{y \ln 3}}{y \ln 3} = - \ln 3 \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{e^h}{h} =$$

$$= - \ln 3 \times (+\infty) = -\infty$$

Logo, não existe assíntota em $-\infty$.

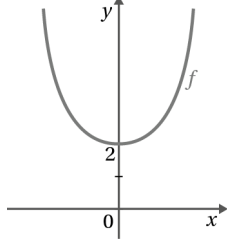
Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{-x} + 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{-x}}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x} = \frac{0}{+\infty} + (+\infty) = +\infty \quad (\text{de acordo com os cálculos anteriores})$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

Portanto, não existe assíntota em $+\infty$.

- Esboço do gráfico:



4.3. $f(x) = xe^{\frac{1}{x+2}}$; $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

- Monotonia e concavidades

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(xe^{\frac{1}{x+2}} \right)' = (x)' e^{\frac{1}{x+2}} + x \left(e^{\frac{1}{x+2}} \right)' \\ &= e^{\frac{1}{x+2}} + x \left(\frac{1}{x+2} \right)' e^{\frac{1}{x+2}} \\ &= e^{\frac{1}{x+2}} + x \left(-\frac{1}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x+2}} \right) \\ &= e^{\frac{1}{x+2}} \left(1 - \frac{x}{(x+2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x+2}} \left(1 - \frac{x}{(x+2)^2} \right) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{x+2}} = 0 \vee 1 - \frac{x}{(x+2)^2} = 0 \right) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \emptyset \vee \frac{(x+2)^2 - x}{(x+2)^2} = 0 \right) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2 - x}{(x+2)^2} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times 4}}{2} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Equação impossível, logo a função f' não tem zeros.

Como $f'(x) > 0, \forall x \in D_f$, podemos concluir que a função f é estritamente crescente em $]-\infty, -2[$ e em $]-2, +\infty[$. Não tem extremos.

- Concavidades e inflexões

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[e^{\frac{1}{x+2}} \left(1 - \frac{x}{(x+2)^2} \right) \right]' = \\ &= \left(e^{\frac{1}{x+2}} \right)' \left(1 - \frac{x}{(x+2)^2} \right) + e^{\frac{1}{x+2}} \left(1 - \frac{x}{(x+2)^2} \right)' = \\ &= -\frac{1}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x+2}} \left(1 - \frac{x}{(x+2)^2} \right) + \\ &\quad + e^{\frac{1}{x+2}} \left(0 - \frac{(x)'(x+2)^2 - x((x+2)')}{((x+2)^2)^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x+2}} \left(1 - \frac{x}{(x+2)^2} \right) + \\ &\quad + e^{\frac{1}{x+2}} \left(-\frac{(x+2)^2 - 2x(x+2)(x+2)'}{(x+2)^4} \right) = \\ &= -\frac{1}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x+2}} \left(1 - \frac{x}{(x+2)^2} \right) + \\ &\quad + e^{\frac{1}{x+2}} \left(\frac{2x(x+2) - (x+2)^2}{(x+2)^4} \right) = \\ &= e^{\frac{1}{x+2}} \left(-\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{x}{(x+2)^4} \right) + \\ &\quad + e^{\frac{1}{x+2}} \left(\frac{2x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4}{(x+2)^4} \right) = \\ &= e^{\frac{1}{x+2}} \left(\frac{-(x+2)^2 + x}{(x+2)^4} \right) + e^{\frac{1}{x+2}} \left(\frac{x^2 - 4}{(x+2)^4} \right) = \\ &= e^{\frac{1}{x+2}} \left(\frac{-(x+2)^2 + x + x^2 - 4}{(x+2)^4} \right) = \\ &= e^{\frac{1}{x+2}} \left(\frac{-x^2 - 4x - 4 + x + x^2 - 4}{(x+2)^4} \right) = \\ &= e^{\frac{1}{x+2}} \left(\frac{-3x - 8}{(x+2)^4} \right) \\ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x+2}} \left(\frac{-3x - 8}{(x+2)^4} \right) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{x+2}} = 0 \vee \frac{-3x - 8}{(x+2)^4} = 0 \right) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x \in \emptyset \vee (-3x - 8 = 0 \wedge (x+2)^4 \neq 0) \right) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\frac{8}{3}$		-2	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$		$-$
f	\cup		\cap		\cap
		P.I.			

O gráfico de f tem concavidade volta para baixo em $]-\frac{8}{3}, -2[$ e em $]-2, +\infty[$ e voltada para cima em $]-\infty, -\frac{8}{3}[$.

Tem um ponto de inflexão de abcissa $x = -\frac{8}{3}$.

Assíntotas:

Verticais

f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(x e^{\frac{1}{x+2}} \right) = -2 \times e^{\frac{1}{0^-}} = -2 \times e^{-\infty} = -2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(x e^{\frac{1}{x+2}} \right) = -2 \times e^{\frac{1}{0^+}} = -2 \times e^{+\infty} = -2 \times (+\infty) = -\infty$$

A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota ao gráfico de f

Não verticais ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x+2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x+2}} = e^0 = 1$$

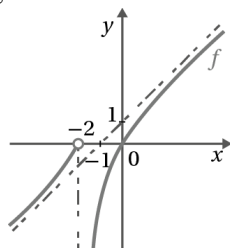
$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x+2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x+2}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{x+2} (x+2) \left(e^{\frac{1}{x+2}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) \left(e^{\frac{1}{x+2}} - 1 \right) = 1 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} (e^y - 1) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Em $+\infty$:

De igual modo, os limites anteriores são válidos com o mesmo resultado quando $x \rightarrow +\infty$.

A reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $\pm\infty$.

Esboço do gráfico



4.4. $f(x) = 2^{1-x^2}$; $D_f = \mathbb{R}$

Monotonia e extremos

$$f'(x) = (2^{1-x^2})' = (1-x^2)' 2^{1-x^2} \ln 2 = (-2x) 2^{1-x^2} \ln 2 = (-2 \ln 2) x \times 2^{1-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2 \ln 2) x \times 2^{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2 \ln 2) x = 0 \vee 2^{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	\nearrow	2	\searrow
		Máx.	

A função f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$. Tem um máximo relativo igual a 2 para $x = 0$.

Concavidades e inflexões

$$f''(x) = ((-2 \ln 2) x \times 2^{1-x^2})' = ((-2 \ln 2) x)' \times 2^{1-x^2} + (-2 \ln 2) x \times (2^{1-x^2})' = -2 \ln 2 \times 2^{1-x^2} + (-2 \ln 2) x \times ((-2 \ln 2) x \times 2^{1-x^2}) = -2 \ln 2 \times 2^{1-x^2} [1 - 2x^2 \ln 2]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \ln 2 \times 2^{1-x^2} [1 - 2x^2 \ln 2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \ln 2 \times 2^{1-x^2} = 0 \vee 1 - 2x^2 \ln 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x^2 = \frac{1}{2 \ln 2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2 \ln 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2 \ln 2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{1}{2 \ln 2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2 \ln 2}}$	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	\cup		\cap		\cup
		P.I.		P.I.	

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em

$$]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2 \ln 2}}[\text{ e em }]\sqrt{\frac{1}{2 \ln 2}}, +\infty[\text{ e tem}$$

concavidade voltada para baixo em

$$]-\sqrt{\frac{1}{2 \ln 2}}, \sqrt{\frac{1}{2 \ln 2}}[.$$

Tem dois pontos de inflexão de abcissas $x = -\sqrt{\frac{1}{2 \ln 2}}$

$$\text{e } x = \sqrt{\frac{1}{2 \ln 2}}.$$

Assíntotas

Como f é contínua em \mathbb{R} , o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

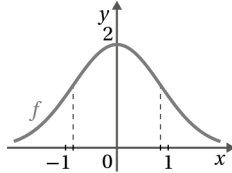
Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2^{1-x^2}) = 2^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{1-x^2}) = 2^{-\infty} = 0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

- Esboço do gráfico



Pág. 90

4.5. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+$

- Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\frac{\ln^2 x}{x} \right)' = \frac{(\ln^2 x)' x - \ln^2 x (x)'}{x^2} = \frac{[2 \ln x (\ln x)'] x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{(2 \ln x) \left(\frac{1}{x} \right) x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln x - \ln^2 x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x (2 - \ln x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln x = 0 \vee 2 - \ln x = 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^2$$

x	0		1		e^2	$+\infty$
f'		-	0	+	0	-
f		↘		↗		↘
			Min.		Máx.	

A função f é estritamente decrescente em $]0, 1]$ e em $[e^2, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[1, e^2]$. Tem um mínimo relativo igual a 0 para $x=1$ e um máximo relativo igual a $\frac{4}{e^2}$ para $x=e^2$.

- Concavidades e inflexões

$$f''(x) = \left(\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} \right)' = \frac{[2 \ln x - \ln^2 x]' x^2 - [2 \ln x - \ln^2 x] (x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\left[2 \left(\frac{1}{x} \right) - (2 \ln x) \frac{1}{x} \right] x^2 - (2 \ln x - \ln^2 x) (2x)}{x^4} = \frac{2x - 2x \ln x - 4x \ln x + 2x \ln^2 x}{x^4} = \frac{2x - 6x \ln x + 2x \ln^2 x}{x^4} = \frac{2 - 6 \ln x + 2 \ln^2 x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 6 \ln x + 2 \ln^2 x}{x} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 - 6 \ln x + 2 \ln^2 x = 0 \wedge x \neq 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln^2 x - 3 \ln x + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \vee \ln x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \vee x = e^{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$		$e^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$	$+\infty$
f''		+	0	-	0	+
f		∪		∩		∪
			P.I.		P.I.	

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em

$$\left] 0, e^{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \right[\text{ e em } \left] e^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, +\infty \right[\text{ e voltada para baixo em}$$

$$\left] e^{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \right[.$$

Tem dois pontos de inflexão de abscissas $x = e^{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$ e

$$x = e^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$$

- Assíntotas

f é contínua em \mathbb{R}^+ .

Verticais

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{(-\infty)^2}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $y=0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Não verticais

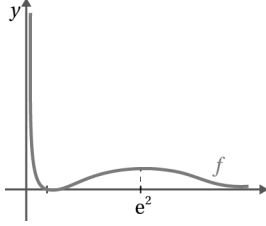
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^y} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y=0$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

▪ Esboço do gráfico



4.6. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$; $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} - 1 > 0\right\} =]0, 1[$

Cálculo auxiliar:

$$\frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0 ; 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-x}{x}$	$-$		$+$	0	$-$

Portanto, $\frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$

▪ Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left[\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) \right]' = \left(\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} - 1} \right)' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1-x}{x}} = -\frac{1}{x-x^2}$$

A função f' não tem zeros e $\forall x \in D_f, f'(x) < 0$, pelo que a função f é estritamente decrescente em $]0, 1[$.

Não tem extremos.

▪ Concavidades e inflexões

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x-x^2} \right)' = -\left(\frac{1}{x-x^2} \right)' = -\left(\frac{(1)'(x-x^2) - 1(x-x^2)'}{(x-x^2)^2} \right) = -\frac{0 - (1-2x)}{(x-x^2)^2} = \frac{1-2x}{(x-x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{(x-x^2)^2} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2x = 0 \wedge (x-x^2)^2 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f''		$+$	0	$-$	
f		\cup		\cap	
			P.I.		

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em

$$\left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ e concavidade voltada para baixo em } \left]\frac{1}{2}, 1\right[.$$

Tem um ponto de inflexão de abscissa $x = \frac{1}{2}$.

▪ Assíntotas

Verticais

f é contínua em $D_f =]0, 1[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \ln 0^+ = -\infty$$

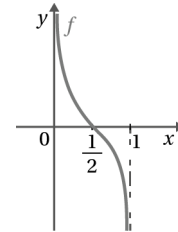
As retas de equações $x = 0$ e $x = 1$ são assíntotas do gráfico de f .

Não verticais

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais porque

D_f é limitado.

▪ Esboço do gráfico



4.7. $f(x) = \frac{x}{3 - \ln x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3 - \ln(x^2) \neq 0 \wedge x^2 > 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \ln(x^2) \neq 3 \wedge x \neq 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq e^3 \wedge x \neq 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{e^3} \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{e^3}, 0, \sqrt{e^3}\}$$

▪ Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3 - \ln x^2} \right)' = \frac{(x)'(3 - \ln x^2) - x(3 - \ln x^2)'}{(3 - \ln x^2)^2} = \frac{3 - \ln x^2 - x\left(0 - \frac{2x}{x^2}\right)}{(3 - \ln x^2)^2} =$$

$$= \frac{3 - \ln x^2 + 2}{(3 - \ln x^2)^2} = \frac{5 - \ln x^2}{(3 - \ln x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \ln x^2}{(3 - \ln x^2)^2} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5 - \ln(x^2) = 0 \wedge (3 - \ln(x^2))^2 \neq 0) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - \ln(x^2) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2) = 5 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = e^5 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \sqrt{e^5} \vee x = -\sqrt{e^5}$$

Recorrendo a uma tabela em que $a = -\sqrt{e^5}$, $b = -\sqrt{e^3}$, $c = \sqrt{e^3}$ e $d = \sqrt{e^5}$, vem:

x	$-\infty$	a		b		0		c		d	$+\infty$	
f'	-	0	+		+		+		+	0	-	
f	\searrow		\nearrow		\nearrow		\nearrow		\nearrow		\searrow	
		Mín						Máx.				

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -\sqrt{e^5}[$

e em $[\sqrt{e^5}, +\infty[$ e é estritamente crescente em

$[-\sqrt{e^5}, -\sqrt{e^3}[$, em $]-\sqrt{e^3}, 0[$, em $]0, \sqrt{e^3}[$ e em $]\sqrt{e^3}, \sqrt{e^5}[$.

Tem um mínimo relativo igual a $f(-\sqrt{e^5})$ e um

máximo relativo igual a $f(\sqrt{e^5})$.

• Concavidades e inflexões

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{5 - \ln x^2}{(3 - \ln x^2)^2} \right)'}{=} = \frac{(5 - \ln x^2)'(3 - \ln x^2)^2 - (5 - \ln x^2)((3 - \ln x^2)')}{[(3 - \ln x^2)^2]^2} = \frac{-\frac{2x}{x^2}(3 - \ln x^2)^2 - (5 - \ln x^2) \times 2(3 - \ln x^2) \left(-\frac{2x}{x^2} \right)}{(3 - \ln x^2)^4} = \frac{-\frac{2}{x}(3 - \ln x^2)^2 + (5 - \ln x^2) \left(\frac{4}{x}(3 - \ln x^2) \right)}{(3 - \ln x^2)^4} = \frac{\frac{2}{x}(3 - \ln x^2)[-(3 - \ln x^2) + 2(5 - \ln x^2)]}{(3 - \ln x^2)^4} = \frac{\frac{2}{x}(-3 + \ln x^2 + 10 - 2 \ln x^2)}{(3 - \ln x^2)^3} = \frac{2(7 - \ln x^2)}{x(3 - \ln x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(7 - \ln x^2)}{x(3 - \ln x^2)^3} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(7 - \ln x^2) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = e^7 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{e^7} \vee x = \sqrt{e^7}$$

Recorrendo a uma tabela em que $a = -\sqrt{e^7}$, $b = -\sqrt{e^3}$, $c = \sqrt{e^3}$ e $d = \sqrt{e^7}$, vem:

x	$-\infty$	a		b		0		c		d	$+\infty$	
f''	-	0	+		-		+		-	0	+	
f	\cap		\cup		\cap		\cup		\cap		\cup	
		P.I.						P.I.				

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em

$]-\infty, -\sqrt{e^7}[$, em $]-\sqrt{e^3}, 0[$ e em $]\sqrt{e^3}, \sqrt{e^7}[$ e

voltada para cima em $]-\sqrt{e^7}, -\sqrt{e^3}[$, em $]0, \sqrt{e^3}[$ e

em $]\sqrt{e^7}, +\infty[$.

Tem dois pontos de inflexão de abscissas $x = -\sqrt{e^7}$ e

$x = \sqrt{e^7}$.

• Assíntotas

Verticais

f é contínua em $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{e^3}, 0, \sqrt{e^3}\}$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{e^3})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{e^3})^-} \frac{x}{3 - \ln x^2} = \frac{-\sqrt{e^3}}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{e^3})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{e^3})^+} \frac{x}{3 - \ln x^2} = \frac{-\sqrt{e^3}}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 - \ln x^2} = \frac{0}{3 - \ln(0^+)} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{e^3})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{e^3})^-} \frac{x}{3 - \ln x^2} = \frac{\sqrt{e^3}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{e^3})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{e^3})^+} \frac{x}{3 - \ln x^2} = \frac{\sqrt{e^3}}{0^-} = -\infty$$

As retas de equações $x = -\sqrt{e^3}$ e $x = \sqrt{e^3}$ são assíntotas ao gráfico de f .

Não verticais ($y = mx + b$)

Em $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 - \ln x^2} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3 - \ln x^2} = \frac{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{\left| \ln x^2 = 2 \ln x \right.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{3}{x} - 2 \times \frac{\ln x}{x}} = \left| \text{Quando } x \rightarrow +\infty \right.$$

$$= \frac{1}{0 - 2 \times 0} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Não existe assíntota em $+\infty$

Em $-\infty$

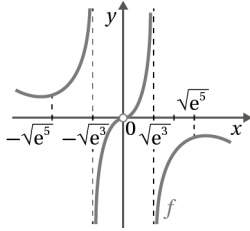
Como,

$$\forall x \in D_f, f(-x) = \frac{-x}{3 - \ln [(-x)^2]} = -\frac{x}{3 - \ln x^2} = -f(x),$$

se não existe assíntota em $+\infty$ também não existe em

$(-\infty)$. E, como f é ímpar, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

- Esboço do gráfico



4.8. $f(x) = e^x \cos x$; $D_f = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- Monotonia e extremos

$$f'(x) = (e^x \cos x)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 0 \vee \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee \cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, vem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	-	-	0	+	0	-	-
f		\searrow		\nearrow		\searrow	
	Máx.		Mín.		Máx.		Mín.

Assim, f é estritamente decrescente em $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}\right]$ e

em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ e é estritamente crescente em $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Tem máximo relativo em $x = -\frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{4}$ e tem

mínimo relativo nos pontos $x = -\frac{3\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

- Concavidades e inflexões

$$f''(x) = [e^x (\cos x - \sin x)]' = (e^x)' (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' = e^x [(\cos x - \sin x) + (-\sin x - \cos x)] = e^x (-2 \sin x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (-2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee -2 \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$$

Em $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\pi \vee x = 0$

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		0		$\frac{\pi}{2}$
f''	-	-	0	+	0	-	-
f		\cap		\cup		\cap	
			P.I.		P.I.		

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo

em $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[$ e em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e voltada para cima em $\left]-\pi, 0\right[$.

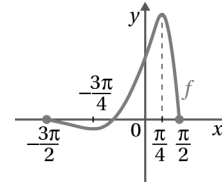
Os pontos de abcissa $-\pi$ e 0 são pontos de inflexão.

- Assíntotas

$$f \text{ é continua em } D_f = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Logo, o gráfico de f não tem assíntotas.

- Esboço do gráfico



- 5.1. Sabemos que $P(0) = 20$, pelo que:

$$20 = c \times a^{k \times 0} \Leftrightarrow 20 = c \times a^0 \Leftrightarrow 20 = c \times 1 \Leftrightarrow c = 20$$

Logo, $P(t) = 20 \times 2^{kt}$

Utilizando o facto de $P(1,25) = 2c$, pois a população de microrganismos duplica a cada 1 h 15 min (1,25 h), tem-se:

$$P(1,25) = 2c \Leftrightarrow P(1,25) = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40 = 20 \times 2^{k \times 1,25} \Leftrightarrow \frac{40}{20} = 2^{1,25k} \Leftrightarrow 2 = 2^{1,25k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1,25k \Leftrightarrow \frac{1}{1,25} = k \Leftrightarrow k = 0,8$$

Portanto, $P(t) = 20 \times 2^{0,8t}$ ($t \in \mathbb{R}_0^+$)

- 5.2. Tem-se que $P(7) = 20 \times 2^{0,8 \times 7} \approx 970$

Ao fim de 7 horas, após o instante inicial, o número aproximado de microrganismos é de 970.

- 5.3. A população de microrganismos atingirá 2000 microrganismos quando $P(t) = 2000$, ou seja,

$$P(t) = 2000 \Leftrightarrow 20 \times 2^{0,8t} = 2000 \Leftrightarrow 2^{0,8t} = \frac{2000}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{0,8t} = 100 \Leftrightarrow 2^{0,8t} = 2^{\log_2 100} \Leftrightarrow 0,8t = \log_2(100) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\log_2(100)}{0,8} \Rightarrow t \approx 8,305$$

Por outro lado, $t \approx 8,305 \text{ h} \approx 8 \text{ h} + 0,305 \times 60 \text{ min}$

$$\approx 8 \text{ h} + 18,3 \text{ min} \approx 8 \text{ h } 18 \text{ min}$$

Assim, o instante pedido ocorre 8 h 18 min após o instante inicial.

- 6.1. O sismo atingiu 7,5 de magnitude na escala de Richter, então:

$$\frac{2}{3} \log(E) - 2,93 = 7,5 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \log(E) = 10,43 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log(E) = 10,43 \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log(E) = 15,645 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = 10^{15,645} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = 4,416 \times 10^{15}$$

Portanto, a energia libertada por um sismo que atingiu magnitude 7,5 na escala de Richter foi de $4,416 \times 10^{15}$ Joule.

- 6.2. Admite-se que a energia do sismo mais forte é E_1 e a energia do sismo menos forte é E_2 . Nesse caso:

$$M(E_1) = M(E_2) + 1$$

$$\frac{2}{3} \log(E_1) - 2,93 = \frac{2}{3} \log(E_2) - 2,93 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \log(E_1) = \frac{2}{3} \log(E_2) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \log(E_1) - \frac{2}{3} \log(E_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1 \Leftrightarrow \log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{3}{2}}, \text{ portanto, } \frac{E_1}{E_2} \approx 32$$

Interpretação: Quando a diferença entre as magnitudes de dois sismos é de uma unidade, a energia libertada no sismo de maior magnitude é 32 vezes maior do que a energia no sismo de menor magnitude.

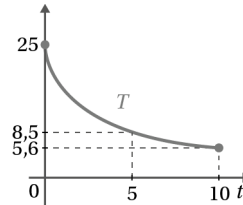
Pág. 91

- 7.1. $P(0) = 200 - 120 \times 2^{-0,5 \times 0} = 200 - 120 \times 2^0 =$
 $= 200 - 120 \times 1 = 200 - 120 = 80$
 Portanto, esse funcionário produz 80 peças.
- 7.2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (200 - 120 \times 2^{-0,5t}) = 200 - 120 \times 2^{-0,5(+\infty)} =$
 $= 200 - 120 \times 2^{-\infty} = 200 - 120 \times 0 = 200$
 Com o decorrer do tempo, a produção diária de um funcionário desta empresa, tende a estabilizar em 200 peças por semana.
- 7.3. $P = 200 - 120 \times 2^{-0,5t} \Leftrightarrow 120 \times 2^{-0,5t} = 200 - P \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{-0,5t} = \frac{200 - P}{120} \Leftrightarrow -0,5t = \log_2\left(\frac{200 - P}{120}\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = \frac{\log_2\left(\frac{200 - P}{120}\right)}{-0,5} \Leftrightarrow t = -2 \times \log_2\left(\frac{200 - P}{120}\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = 2 \times \log_2\left(\frac{200 - P}{120}\right)^{-1} \Leftrightarrow t = 2 \times \log_2\left(\frac{120}{200 - P}\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = \log_2\left(\frac{120}{200 - P}\right)^2$

Exprime o número de semanas de experiência, t , em função do número de peças produzidas por semana.

- 8.1. Substituindo T_a por 25 e T_i por 5 na expressão $T(t)$:
 $T(t) = 5 + (25 - 5) \times 2^{-bt}$, ou seja, $T(t) = 5 + 20 \times 2^{-bt}$
 Por outro lado, sabe-se que a lata permaneceu duas horas no frigorífico, tendo atingido, ao fim desse tempo, 15 °C, ou seja, $T(2) = 15$.
 $T(2) = 15 \Leftrightarrow 5 + 20 \times 2^{-2b} = 15 \Leftrightarrow 20 \times 2^{-2b} = 10 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{-2b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{-2b} = 2^{-1} \Leftrightarrow -2b = -1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$
 Logo, $b = \frac{1}{2}$

- 8.2. $T(t) = 5 + 20 \times 2^{-0,5t}$
 $T(0) = 25$
 $T'(t) = 20 \times (-0,5) \times 2^{-0,5t} \times \ln 2 = -10 \times 2^{-0,5t} \ln 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$
 Logo, T é estritamente decrescente
 $T''(t) = -10 \times (-0,5) \times 2^{-0,5t} \times \ln 2 \times \ln 2 =$
 $= 5 \times 2^{-0,5t} (\ln 2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$
 O gráfico de T tem a concavidade voltada para cima
 $T(5) \approx 8,5$ e $T(10) \approx 5,6$



- 8.3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (5 + 20 \times 2^{-0,5t}) = 5 + 20 \times 2^{-\infty} = 5 + 0 = 5$
 Com o decorrer do tempo, a temperatura da lata tende a estabilizar nos 5 °C, sem contudo atingir este valor, isto é, por muito tempo que a lata permaneça dentro do frigorífico, a sua temperatura tende a coincidir com a temperatura que se encontra no interior do frigorífico.

9. $f(x) = \ln \frac{3+x}{3-x}, D_f =]-3, 3[$
 $f'(x) = \frac{\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'}{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{1(3-x) - (3+x)(-1)}{(3-x)^2} =$
 $= \frac{6}{(3-x)^2} = \frac{6(3-x)}{(3+x)(3-x)^2} =$
 $= \frac{6}{(3+x)(3-x)} = \frac{6}{9-x^2} > 0, \forall x \in]-3, 3[$

Logo, f é estritamente crescente e

- p é verdadeira

$$f''(x) = \frac{-6 \times (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{12x}{(9-x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	-3	0	3
f''	-	0	+
f	∩	0	∪
		P.I.	

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

- q é verdadeira
- r é falsa

$$[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(V \vee V) \Rightarrow F] \Leftrightarrow (V \Rightarrow F) \Leftrightarrow F$$

A proposição é falsa.

Ficha de teste 8

Pág. 92

1. O declive da reta tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa $x = 1$ é igual a $f'(1)$.

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x^2}{x+1} \right)' = \frac{(\ln x^2)'(x+1) - (\ln x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(x^2)'}{x^2}(x+1) - \ln x^2 \times 1}{(x+1)^2} = \frac{\frac{2x}{x^2}(x+1) - \ln x^2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{2}{x}(x+1) - \ln x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x+2 - \ln x^2}{x(x+1)^2}$$

Assim, $f'(1) = \frac{2 \times 1 + 2 - \ln(1^2)}{(1+1)^2} = \frac{4-0}{4} = 1$

Resposta: (C)

2. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	\nearrow		\searrow
		Máx.	

Resposta: (D)

3. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1) - f(h-1)}{2h} = -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} =$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -\frac{1}{2} f'(-1)$$

$$f'(x) = (e^{1-4x^2})' = (1-4x^2)' e^{1-4x^2} = -8xe^{1-4x^2}$$

Portanto, tem-se que

$$-\frac{1}{2} f'(-1) = -\frac{1}{2} [-8 \times (-1) e^{1-4 \times (-1)^2}] = -\frac{1}{2} (8e^{-3}) =$$

$$= -\frac{1}{2} (8e^{-3}) = -4e^{-3} = -\frac{4}{e^3}$$

Resposta: (B)

4. $f'(x) = (2 - x + \ln(1+3x))' = (2)' - (x)' + (\ln(1+3x))' =$

$$= 0 - 1 + \frac{(1+3x)'}{1+3x} = -1 + \frac{3}{1+3x}$$

A abscissa do ponto A é a solução da equação $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{3}{1+3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{1+3x} = 1 \Leftrightarrow 3 = 1+3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \quad \left| x \neq -\frac{1}{3} \right.$$

A ordenada de f é $f\left(\frac{2}{3}\right)$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} + \ln\left(1 + 3 \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} + \ln(3)$$

Portanto, $A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} + \ln 3\right)$

Seja r o raio da circunferência

$$r = d(0, A) = \sqrt{\left(\frac{4}{3} + \ln 3\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{8}{3} \ln 3 + \ln^2 3 + \frac{4}{9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{9} + \frac{8}{3} \ln 3 + \ln^2 3}$$

Portanto, $x^2 + y^2 = \frac{20}{9} + \frac{8}{3} \ln 3 + \ln^2 3$ é a equação reduzida da circunferência de centro na origem do referencial e que passa pelo ponto A .

Resposta: (C)

Pág. 93

5.1. A função f é contínua no seu domínio com a possível exceção do ponto 0.

Assim, apenas as retas de equação $x=0$ e $x=1$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x}{\ln x} \right) = \frac{0}{\ln(0^+)} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^{2+x}) = 0 \times e^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x}{\ln x} \right) = \frac{2}{\ln(1^-)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical do gráfico de f .

Vamos agora, investigar a existência de assíntotas não verticais do gráfico de f ($y = mx + b$).

Como $D_f =]-\infty, -1[$, vem:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2+x} = e^{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2+x}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \times e^2 \times e^x) = e^2 \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) =$$

$$= e^2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) =$$

$$\left| \begin{array}{l} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= -e^2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} =$$

$$= -e^2 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} =$$

$$= -e^2 \times \frac{1}{+\infty} = -e^2 \times 0 = 0$$

Assim, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f em $-\infty$.

5.2. Para $x \in]0, 1[$, tem-se:

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{\ln x} \right)' = \frac{(2x)' \ln x - 2x(\ln x)'}{(\ln x)^2} =$$

$$= \frac{2 \ln x - 2x \left(\frac{x'}{x} \right)}{(\ln x)^2} = \frac{2 \ln x - 2x \left(\frac{1}{x} \right)}{(\ln x)^2} = \frac{2 \ln x - 2}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln(x) - 2}{(\ln(x))^2} = 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln(x) - 2 = 0 \wedge (\ln(x))^2 \neq 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$, a função f' não tem zeros em $]0, 1[$.

Como $f'(x) < 0$ para todo $x \in]0, 1[$, tem-se que a função f é estritamente decrescente no intervalo $]0, 1[$ e não tem extremos neste intervalo.

5.3. Para $x \in]-\infty, 0[$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xe^{2+x})' = (x)' e^{2+x} + x(e^{2+x})' = \\ &= e^{2+x} + x(2+x)' e^{2+x} = e^{2+x} + xe^{2+x} = \\ &= e^{2+x}(1+x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^{2+x}(1+x))' = (e^{2+x})'(1+x) + e^{2+x}(1+x)' = \\ &= (2+x)' e^{2+x}(1+x) + e^{2+x} = 2e^{2+x}(1+x) + e^{2+x} = \\ &= e^{2+x}((1+x)+1) = e^{2+x}(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{2+x}(x+2) = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2^{2+x} = 0 \vee x+2 = 0) \wedge x < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in \emptyset \vee x = -2) \wedge x < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -2 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		0
f''	$-$	0	$+$	
f	\cap		\cup	
		P.I.		

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e voltada para cima em $]-2, 0[$.

Por outro lado, $f(-2) = -2e^{2+(-2)} = -2e^0 = -2 \times 1 = -2$, portanto $(-2, -2)$ são as coordenadas do único ponto de inflexão do gráfico de f no intervalo $]-\infty, 0[$.

5.4. Uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = -3$ é:

$$y - f(-3) = f'(-3)(x + 3)$$

$$\text{Tem-se } f(-3) = -3e^{2+(-3)} = -3e^{-1} = -\frac{3}{e} \text{ e}$$

$$f'(-3) = e^{2+(-3)}(1+(-3)) = e^{-1}(-2) = -\frac{2}{e}, \text{ portanto,}$$

$$y - f(-3) = f'(-3)(x + 3) \Leftrightarrow y - \left(-\frac{3}{e}\right) = -\frac{2}{e}(x + 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{3}{e} = -\frac{2}{e}x - \frac{6}{e} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{e}x - \frac{6}{e} - \frac{3}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{e}x - \frac{9}{e}$$

Assim, $y = -\frac{2}{e}x - \frac{9}{e}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = -3$.

6.1. Trata-se de um modelo exponencial, pelo que, a função P é do tipo $P(t) = P_0 e^{kt}$, onde P_0 é a população mundial, em milhares de milhões, no instante inicial da contagem e t é o tempo decorrido em anos.

Assim, $1,66\% = 0,0166$

$$P(t+1) = 1,0166P(t) \Leftrightarrow \frac{P_0 e^{k(t+1)}}{P_0 e^{kt}} = 1,0166 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{kt} \times e^k}{e^{kt}} = 1,0166 \Leftrightarrow e^k = 1,0166 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \ln(1,0166) \Rightarrow k \approx 0,1646$$

$$P(t) = 5,5e^{0,01646t}$$

6.2. Tem-se que $P(t) = 11$

$$P(t) = 11 \Leftrightarrow 5,5e^{0,01646t} = 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{0,01646t} = \frac{11}{5,5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{0,01646t} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,01646t = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,01646} \Rightarrow t \approx 42,111$$

A população mundial será de 11 mil milhões de pessoas cerca de 42 anos após o ano de 1993, isto é, em 2035.

7.1. $h(x+1) - h(x) \geq 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-1 + (x+1) + \log_2(x+1)) - (-1 + x + \log_2 x) \geq 2 \wedge$$

$$\wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + x + 1 + \log_2(x+1) + 1 - x - \log_2 x \geq 2 \wedge$$

$$\wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2(x+1) - \log_2 x \geq 2 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) \geq 2 + \log_2 x - 1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) \geq 1 + \log_2 x \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) \geq \log_2 2 + \log_2(x) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) \geq \log_2(2x) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 \geq 2x \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x \geq -1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x \in]0, 1]$$

7.2. Para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$h'(x) = (-1 + x + \log_2(x))' = (-1)' + (x)' + (\log_2(x))' =$$

$$= 0 + 1 + \frac{x'}{x \ln 2} = 1 + \frac{1}{x \ln 2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x \ln 2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \ln 2 + 1}{x \ln 2} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \ln 2 + 1 = 0 \wedge x \ln 2 \neq 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\ln 2} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Portanto, a função h' não tem zeros, e como

$\forall x \in \mathbb{R}^+, h'(x) > 0$, podemos concluir que a função h é estritamente crescente em \mathbb{R}^+ e não tem extremos.