

1.1. Dado um espaço de resultados E , finito, se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento $A \in \mathcal{P}(E)$, é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento A e o número de casos possíveis. O número de casos possíveis é igual a 6A_2 , isto é, é o número de maneiras diferentes de escolher um par de cores diferentes de entre as seis cores disponíveis para pintar as faces $[BCE]$ e $[FGH]$. O número de casos favoráveis é igual a 1, ou seja, só há uma maneira de pintar a face $[BCE]$ de verde e a face $[FGH]$ de branco.

Atendendo à regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{1}{{}^6A_2}$.

1.2. Número de casos favoráveis:

$$2 \times {}^3C_3 + 2 \times {}^4C_3 + 2 \times {}^5C_3 = 2 \times 1 + 2 \times 4 + 2 \times 10 = 30$$

\rightarrow Duas faces triangulares
 \rightarrow Duas faces quadrangulares
 \rightarrow Duas faces pentagonais

Número de casos possíveis: ${}^8C_3 = 56$

Atendendo à regra de Laplace, a probabilidade pedida é igual a $\frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.

2.1. Designando por A o acontecimento «o funcionário reside a menos de 5 km do local onde a empresa se situa» e por B o acontecimento “O funcionário é uma mulher”, vem que a probabilidade pedida é $P(A \cap B)$.

Do enunciado, sabemos que, dos funcionários desta empresa,

- a quarta parte reside a menos de 5 km do local onde a empresa se situa, ou seja, $P(A) = \frac{1}{4}$.
- metade são mulheres, ou seja, $P(B) = \frac{1}{2}$
- dos homens, um quarto reside a menos de 5 km do local onde a empresa se situa, pelo que, $P(A|\bar{B}) = \frac{1}{4}$.

Tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(\bar{B} \cap A) + P(B \cap A) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{4} &= P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B}) + P(A \cap B) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{4} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + P(A \cap B) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade pedida é igual a $\frac{1}{8}$.

2.2. Dos funcionários desta empresa, a quarta parte reside a menos de 5 km do local onde a empresa se situa. Como a empresa tem 120 funcionários, o número de funcionários que reside a menos de 5 km do local onde a empresa se situa é 30, pois

$$\frac{1}{4} \times 120 = 30, \text{ e o número de funcionários que reside a 5 km ou}$$

mais do local onde a empresa se situa é 90.

O número de maneiras diferentes de se formar uma comissão com, pelo menos, quatro dos funcionários a residirem a menos de 5 km do local onde a empresa se situa é

$${}^{30}C_4 \times {}^{90}C_2 + {}^{30}C_5 \times {}^{90}C_1 + {}^{30}C_6 \times {}^{90}C_0 = 123\,176\,340.$$

3.1. Pretende-se mostrar que $\exists x \in [-1, 0]: f(x) = 0$.

Seja h a restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 0]$. Assim,

$$h(x) = xe^x + 1 \text{ e } D_h =]-\infty, 0]$$

A função h é contínua por ser definida pelo produto e soma de funções contínuas (função exponencial e funções polinomiais).

Logo, h é contínua no intervalo $[-1, 0] \subset D_h$.

Por outro lado, tem-se que:

$$h(-1) = -1e^{-1} + 1 = -\frac{1}{e} + 1 \approx 0,632$$

$$h(0) = 0 \times e^0 + 1 = 1$$

Como $h(-1) < 0,8 < h(0)$ e h é contínua em $[0, 1]$, pelo

Teorema de Bolzano, podemos garantir, que a equação

$$h(x) = 0,8 \text{ tem pelo menos uma solução no intervalo }]-1, 0[.$$

Portanto, como h é uma restrição da função f ao intervalo

$]-\infty, 0] \cap]-1, 0[\subset [-1, 0] \subset]-\infty, 0]$, podemos concluir que a

equação $f(x) = 0,8$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-1, 0]$.

3.2. A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que apenas a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) = \ln(0^+) = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

Em $-\infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + 1) \stackrel{(-\infty \times 0)}{=} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \\
 &= 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = \left. \begin{array}{l} y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ \text{Se } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \\
 &= 1 - \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} = 1 + \frac{\ln(1-0)}{+\infty} = 1 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(e^x - 1) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(e^x - 1) - \ln e^x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) \right] = \ln\left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) = \ln(1-0) = \ln 1 = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = x$ é assíntota ao gráfico de f , em $+\infty$.

$$4.1. \quad f'(x) = (x^3 e^{-x})' = (x^3)' e^{-x} + x^3 (e^{-x})' = 3x^2 e^{-x} + x^3 (-e^{-x}) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = e^{-x} (3x^2 - x^3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} (3x^2 - x^3) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0 \vee 3x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x^2 (3 - x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$	$-$
f	\nearrow		\nearrow	\searrow

Máx.

A função f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[0, 3]$ e é estritamente decrescente em $[3, +\infty[$. Tem um máximo relativo igual a $f(3) = \frac{27}{e^3}$.

4.2. $D_g =]0, +\infty[$ e a função g é contínua. Assim, a única possível assíntota vertical é a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4 \ln x}{x} = \frac{0 + 4 \ln(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota ao gráfico da função g .

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$) :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4 \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1 + 4 \times 0 \times \frac{1}{+\infty} = 1 + 4 \times 0 \times 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 4 \ln x}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4 \ln x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 4 \times 0 = 0$$

Como $D_g = \mathbb{R}^+$, a única assíntota não vertical do gráfico de g é a reta de equação $y = x$.

$$5.1. \quad f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(3+h) - \ln 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{3+h}{3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)}{\frac{h}{3}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$$

$\left\{ \begin{array}{l} y = \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{h}{3} \Leftrightarrow \frac{h}{3} = e^y - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{h}{3} = e^y - 1 \\ \text{Se } h \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$

Portanto, $f'(3) = \frac{1}{3}$

5.2. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0. Para $x \leq 2$, tem-se que:

$$f'(x) = (e^{2x} - x)' = (e^{2x})' - (x)' = 2e^{2x} - 1$$

O declive de r é $f'(0) = 2e^{2 \cdot 0} - 1 = 1$.

$$f(0) = e^{2 \cdot 0} - 0 = 1.$$

O ponto de coordenadas $(0, 1)$ pertence à reta r

Um vetor diretor tem coordenadas $(1, 1)$ já que o declive de r é igual a 1.

Assim, $(x, y) = (0, 1) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta r

5.3. Para $x \leq 2$, $f'(x) = 2e^{2x} - 1$.

$$2e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(2^{-1})}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\ln 2}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\ln 2}{2}$		2
f'	$-$	0	$+$	$+$
f	\searrow		\nearrow	
		Min.		Máx.

A função f é estritamente decrescente em $\left] -\infty, -\frac{\ln 2}{2} \right]$ e é estritamente crescente em $\left[-\frac{\ln 2}{2}, 2 \right]$. Tem um mínimo relativo igual a para $x = -\frac{\ln 2}{2}$ e um máximo relativo igual para $x = 2$.

Pág. 116

$$6.1. \quad z_1 = \left(i^{15} + \frac{1}{1-i} \right)^5 \Leftrightarrow z_1 = \left(i^{4 \times 3 + 3} + \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} \right)^5$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(i^3 + \frac{1+i}{1-i^2} \right)^5 \Leftrightarrow z_1 = \left(-i + \frac{1+i}{2} \right)^5$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{-2i+1+i}{2} \right)^5 \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{1-i}{2} \right)^5$$

Vamos escrever o número complexo $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ na forma trigonométrica.

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Seja $\theta = \text{Arg} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)$, vem $\tan \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \wedge \theta \in 4^\circ \text{Q}$, ou

seja, $\tan \theta = 1 \wedge \theta \in 4^\circ \text{Q}$, pelo que, $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Assim,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)^5 \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^5 \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 e^{-i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-i\frac{5\pi}{4}} \Leftrightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i$$

Portanto, z_1 na forma trigonométrica é igual a $\frac{\sqrt{2}}{8} e^{-i\frac{5\pi}{4}}$ e na

forma algébrica é igual a $-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i$.

$$6.2. \quad z_3 = 4 - z_2, \text{ como } z_2 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}, \text{ vem que:}$$

$$z_3 = 4 - 2e^{\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z_3 = 4 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_3 = 4 - 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Leftrightarrow z_3 = 4 - 1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_3 = 3 - \sqrt{3}i$$

$$|z_3| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Seja $\text{Arg}(z_3) = \theta$, tem-se $\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 4^\circ \text{Q}$,

portanto, $\theta = -\frac{\pi}{6}$. Assim, $z_3 = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}$, logo:

$$z^3 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z^3 + 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 = -2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{3} e^{-i\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{7\pi}{6}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} e^{-i\frac{7\pi}{6}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} e^{i\left(\frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k = 0, 1, 2$$

$$z = \sqrt[3]{12} e^{-i\frac{7\pi}{18}} \vee z = \sqrt[3]{12} e^{i\frac{5\pi}{18}} \vee z = \sqrt[3]{12} e^{i\frac{17\pi}{18}}$$

7.1. Tendo em conta que o triângulo $[RQS]$ é retângulo em Q dado que o ângulo RQS é inscrito numa semicircunferência:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{RQ}}{\overline{RS}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{RQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{RQ} = 2 \cos \alpha$$

Atendendo a que o triângulo $[PQR]$, retângulo em P , vem:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{RP}}{2 \cos \alpha} \Leftrightarrow \overline{RP} = 2 \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{PQ}}{2 \cos \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \overline{PQ} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \overline{PQ} = \sin(2\alpha)$$

$$\text{Área do triângulo } [PQR] = \frac{\overline{RP} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{2 \cos^2 \alpha \times \sin(2\alpha)}{2}$$

Portanto, $A(\alpha) = \cos^2 \alpha \sin(2\alpha)$, onde $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

7.2. Para $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

$$A'(\alpha) = [\cos^2 \alpha \sin(2\alpha)]' =$$

$$= (\cos^2 \alpha)' \sin(2\alpha) + \cos^2 \alpha (\sin(2\alpha))'$$

$$= 2 \cos \alpha (\cos \alpha)' \sin(2\alpha) + \cos^2 \alpha (2 \cos(2\alpha))$$

$$= 2 \cos \alpha (-\sin \alpha) \sin(2\alpha) + 2 \cos^2 \alpha \cos(2\alpha)$$

$$= -2 \sin \alpha \cos \alpha \sin(2\alpha) + 2 \cos^2 \alpha \cos(2\alpha)$$

$$= -2 \sin \alpha \cos \alpha \times 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$= -4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$= 2 \cos^2 \alpha (-2 \sin^2 \alpha + 1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$= 2 \cos^2 \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha)$$

$$\begin{aligned}
 A'(\alpha) = 0 \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[&\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha (1 - 4\sin^2 \alpha) = 0 \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[&\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (2\cos^2 \alpha = 0 \vee 1 - 4\sin^2 \alpha = 0) \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[&\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left(\cos \alpha = 0 \vee \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \right) \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[&\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left(\cos \alpha = 0 \vee \sin \alpha = -\frac{1}{2} \vee \sin \alpha = \frac{1}{2} \right) \wedge \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[&\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} &
 \end{aligned}$$

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
A'		+	0	-	
A		\nearrow	0	\searrow	

Máx.

A área do triângulo $[PQR]$ é máxima quando $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

8.1. Para $x \in [\pi, 2\pi]$, tem-se que:

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e$, pois a função exponencial, $y = e^x$, é estritamente crescente.

$$e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e \Leftrightarrow e^{-1} - 1 \leq e^{\cos x} - 1 \leq e - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e} - 1 \leq f(x) \leq e - 1$$

Portanto, $D'_f = \left[\frac{1}{e} - 1, e - 1 \right]$.

8.2. Para $x \in [\pi, 2\pi]$, tem-se que:

$$f'(x) = (e^{\cos x} - 1)' = (e^{\cos x})' - (1)' =$$

$$= (\cos x)' e^{\cos x} - 0 = -\sin x e^{\cos x}$$

$$f'(x) - \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \wedge x \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Leftrightarrow -\sin x e^{\cos x} - (-\sin x) = 0 \wedge x \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Leftrightarrow -\sin x e^{\cos x} + \sin x = 0 \wedge x \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \sin x (-e^{\cos x} + 1) = 0 \wedge x \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\sin x = 0 \vee -e^{\cos x} + 1 = 0) \wedge x \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\sin x = 0 \vee e^{\cos x} = 1) \wedge x \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\sin x = 0 \vee \cos x = 0) \wedge x \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Leftrightarrow x = \pi \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = 2\pi$$

8.3. $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} [f(x) \times \tan x] = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} [\tan x (e^{\cos x} - 1)] \stackrel{(\infty \times 0)}{=}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \left[\frac{\sin x}{\cos x} (e^{\cos x} - 1) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \left[\sin x \left(\frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \sin x \times \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} =$$

$$= -1 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -1 \times 1 = -1$$

$$\begin{cases} y = \cos x \\ \text{Se } x \rightarrow \frac{3\pi}{2}, y \rightarrow 0 \end{cases}$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} [f(x) \times \tan x] = -1$

Pág. 117

9. Vamos escrever $-1 + \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica.

$$|-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Sendo $\theta = \text{Arg}(-1 + \sqrt{3}i)$, tem-se que

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \wedge \theta \in 2^\circ\text{Q}, \text{ pelo que } \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Assim, temos que z :

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{(re^{i\theta})^2} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{r^2 e^{i2\theta}} = \frac{2}{r^2} e^{i(\frac{2\pi}{3} - 2\theta)}$$

Escrevendo w na forma trigonométrica, temos

$$w = -2\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$z = w \Leftrightarrow \frac{2}{e^2} e^{i(\frac{2\pi}{3} - 2\theta)} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{r^2} = 2\sqrt{3} \\ \frac{2\pi}{3} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \frac{2}{2\sqrt{3}} \\ 2\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 2\theta = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}} \\ \theta = -\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ \theta = -\frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

Assim, se $z = w$, temos que $r = \sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ e $\theta = -\frac{5\pi}{12}$.

10.1. Sabe-se que no instante inicial havia 40 coiotes, pelo que

$$P(0) = 40.$$

$$P(0) = 40 \Leftrightarrow \frac{200}{1 + Ae^{-3 \times 0}} = 40$$

$$\Leftrightarrow \frac{200}{1 + Ae^0} = 40 \Leftrightarrow \frac{200}{1 + A} = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 200 = 40(1 + A) \Leftrightarrow \frac{200}{40} = 1 + A$$

$$\Leftrightarrow 5 = 1 + A \Leftrightarrow A = 4$$

Portanto, $A = 4$.

10.2. Tem-se que 30 meses corresponde a 2,5 anos, portanto, pretende-se determinar $P(2,5) - P(0)$.

Assim, vem:

$$P(2,5) - P(0) = \frac{200}{1 + 4e^{-\frac{3 \times 2,5}{5}}} - 40 =$$

$$= \frac{200}{1 + 4e^{-1,5}} - 40 \approx 65,679$$

O aumento foi de 66 coiotes.

10.3. Pretende-se determinar t tal que $P(t) = 3 \times 40$.

$$P(t) = 3 \times 40 \Leftrightarrow P(t) = 120 \Leftrightarrow \frac{200}{1 + 4e^{-\frac{3t}{5}}} = 120$$

$$\Leftrightarrow 200 = 120 \left(1 + e^{-\frac{3t}{5}} \right), \text{ pois } \forall t \in \mathbb{R}_0^+, 1 + 4e^{-\frac{3t}{5}} \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{200}{120} = 1 + 4e^{-\frac{3t}{5}} \Leftrightarrow \frac{5}{3} = 1 + 4e^{-\frac{3t}{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} - 1 = 4e^{-\frac{3t}{5}} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = 4e^{-\frac{3t}{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = e^{-\frac{3t}{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = e^{-\frac{3t}{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3t}{5} = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{3}{5}} \Rightarrow t \approx 3$$

Portanto, o número de coiotes triplicou ao fim de, aproximadamente, 3 anos.

11.1. Tem-se que $D + \overline{DA} = A$, como $\overline{DA} = \overline{CB}$, vem:

$$D + \overline{DA} = A \Leftrightarrow D + \overline{CB} = A$$

$$\Leftrightarrow (3, 0, 4) + (B - C) = A$$

$$\Leftrightarrow (3, 0, 4) + [(-3, 6, 4) - (-1, 2, 8)] = A$$

$$\Leftrightarrow (3, 0, 4) + (-2, 4, -4) = A$$

$$\Leftrightarrow A = (1, 4, 0)$$

Portanto $A(1, 4, 0)$.

11.2. Volume da pirâmide $[ABCDV] = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$

$$= \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{MV}}{3}$$

M é o ponto médio de $[BD]$, determinemos as suas coordenadas.

$$M\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{6+0}{2}, \frac{4+4}{2}\right) \Leftrightarrow M(0, 3, 4)$$

$$\overline{MV} = V - M = (4 - 0, 7 - 3, 6 - 4) = (4, 4, 2)$$

$$\|\overline{MV}\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-3+1)^2 + (6-2)^2 + (4-8)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Assim, volume da pirâmide $[ABCDV]$ é $V = \frac{6^2 \times 6}{3} = 72$

11.3. $\overline{MV} = (4, 4, 2)$ é um vetor normal de ABC

$$ABC: 4x + 4y + 2z + d = 0$$

Como $A(1, 4, 0) \in ABC$, temos

$$4 + 4 \times 4 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -20$$

$$ABC: 4x + 4y + 2z - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + z - 10 = 0$$

11.4. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_5$ (número de maneiras de escolher 5 cores, de entre 10)

Número de casos favoráveis: 9C_4 (depois de selecionada a cor vermelha, é necessário escolher mais 4 cores, de entre as 9 restantes).

Portanto, a probabilidade pedida é, por aplicação, da regra de Laplace:

$$\frac{{}^9C_4}{{}^{10}C_5} = \frac{1}{2}$$