

Teste de avaliação 1

Pág. 3

1. Existem duas situações, a saber:
- A Cristina não vai, portanto, o António também não vai. Os quatro bilhetes serão distribuídos pelos restantes quatro jovens, assim, o número de grupos é igual a um.
 - A Cristina vai; os restantes três bilhetes serão distribuídos por três dos restantes cinco jovens, portanto, o número de grupos diferentes, neste caso, é igual a ${}^5C_3 = 10$.

O número total de grupos diferentes que se podem formar nas condições exigidas no enunciado é $1+10=11$.

Resposta: (B)

2. Tem-se que $4096 = 2^{12}$.

Um conjunto com 2^{12} subconjuntos, tem 12 elementos, pelo que tem exatamente ${}^{12}C_5 = 792$ subconjuntos com cinco elementos.

Resposta: (C)

3. $A \cup \bar{B}$ é um acontecimento certo, portanto, $P(A \cup \bar{B}) = 1$

Assim, tem-se:

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(\overline{A \cup B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - [1 - P(\bar{A} \cup B)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - 1 + P(\bar{A} \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup \bar{B}) = P(A) + 1 - P(B) - 1 + P(\bar{A} \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup \bar{B}) = P(A) - P(B) + P(\bar{A} \cup B)$$

Substituindo nesta última equação, $P(A)$ por

$0,5+a$, $P(B)$ por $0,3-a$, $P(\bar{A} \cup B)$ por $2a$ e

$P(A \cup \bar{B})$ por 1, vem:

$$1 = 0,5 + a - (0,3 - a) + 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 0,5 + a - 0,3 + a + 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 0,2 + 4a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,8 = 4a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0,2$$

Resposta: (B)

4. • $P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$, exclui (A)

• $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ e como A e B são contrários,

$A \cap B = \emptyset$, pelo que $P(A \cap B) = 0$, ou seja,

$P(B \cap A) = 0$, portanto,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0, \text{ exclui (B)}$$

• A e B são dois acontecimentos contrários, pelo que, $P(A) = 1 - P(B)$, ou seja, $P(A) + P(B) = 1$, exclui (D)

• Tem-se que $P(A) + P(B) = 1$ por A e B serem dois acontecimentos contrários e como $P(A) = 2P(B)$, vem:

$$P(A) + P(B) = 1 \Leftrightarrow 2P(B) + P(B) = 1 = 3P(B) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

Logo, $P(A) = \frac{2}{3}$. Portanto, $P(A)$ pode ser igual a $\frac{2}{3}$ e

$P(B)$ pode ser igual a $\frac{1}{3}$.

Resposta: (C)

5. ${}^{12}C_5 \times {}^7C_5 \times 2^3 = 221\,760$

Resposta: (C)

Pág. 4

- 6.1. O termo geral do desenvolvimento de $A(x)$ é

$$T_{p+1} = {}^nC_p (x\sqrt{x})^{n-p} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^p = {}^nC_p \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{n-p} (-3)^p \left(\frac{1}{x^2}\right)^p =$$

$$= {}^nC_p (-3)^p x^{\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}p} x^{-2p} =$$

$$= {}^nC_p (-3)^p x^{\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}p - 2p} = {}^nC_p (-3)^p x^{\frac{3}{2}n - \frac{7}{2}p}$$

O 6.º termo do desenvolvimento de $A(x)$ obtém-se para

$p = 5$, pelo que

$$T_6 = {}^nC_5 (-3)^5 x^{\frac{3}{2}n - \frac{7}{2} \times 5} \Leftrightarrow T_6 = {}^nC_5 (-3)^5 x^{\frac{3}{2}n - \frac{35}{2}}$$

Por outro lado, sabe-se que o 6.º termo tem grau -4 ,

portanto, terá de ser verdadeira a igualdade $\frac{3}{2}n - \frac{35}{2} = -4$.

Assim, vem:

$$\frac{3}{2}n - \frac{35}{2} = -4 \Leftrightarrow 3n - 35 = -8 \Leftrightarrow 3n = 27 \Leftrightarrow n = 9$$

Portanto, $n = 9$

- 6.2. O 8.º termo do desenvolvimento de $A(x)$ obtém-se substituindo por 7 no termo geral deste desenvolvimento.

Sabemos que $T_{p+1} = {}^nC_p (-3)^p x^{\frac{3}{2}n - \frac{7}{2}p}$

Para $p = 7$ e $n = 9$, vem:

$$T_8 = {}^9C_7 (-3)^7 x^{\frac{3}{2} \times 9 - \frac{7}{2} \times 7} \Leftrightarrow T_8 = {}^9C_7 (-3)^7 x^{-11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_8 = -78\,732x^{-11} \Leftrightarrow T_8 = \frac{-78\,732}{x^{11}}$$

- 7.1. Número de casos possíveis: ${}^6C_3 = 20$

Número de casos favoráveis:

$${}^3C_1 \times {}^3C_2 + {}^3C_2 \times {}^3C_1 = 18 \text{ ou } 20 - 2 = 18$$

Atendendo à regra de Laplace, a probabilidade pedida

é $\frac{18}{20} = 0,9$.

- 7.2. Número de casos possíveis: ${}^{11}C_3 = 165$

Número de casos favoráveis:

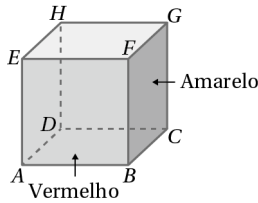
$$165 - 1 - {}^4C_3 = 160$$

↳ 3 pontos escolhidos entre A, I, L e B
↳ F, J, G

Atendendo à regra de Laplace, a probabilidade pedida

é $\frac{160}{165} = \frac{32}{33}$.

- 7.3.



As restantes 4 faces podem ser pintadas de ${}^9A_4 = 3024$ maneiras diferentes.

8. Relativamente à experiência aleatória “Escolha, ao acaso, de um dos jovens que participou neste encontro cultural” considera-se os acontecimentos:

A: “O jovem é estrangeiro”

B: “O jovem é do género feminino”

Tem-se, então, que: $P(A) = \frac{3}{4}$; $P(B|A) = 0,2$ e

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

Pretende-se determinar $P(B)$, assim,

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(\bar{A}) \times P(B|\bar{A}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{4} \times 0,2 + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{11}{40} = 27,5\%$$

Portanto, 27,5% dos jovens que participaram neste encontro cultural são mulheres.

Teste de avaliação 2

Pág. 5

1.
$$\lim \frac{3 - n^3 u_n}{n^3} = \lim \left(\frac{3}{n^3} - \frac{n^3 u_n}{n^3} \right) = \lim \left(\frac{3}{n^3} - u_n \right) =$$

$$= \lim \frac{3}{n^3} - \lim u_n = \frac{3}{+\infty} - (-\infty) = 0 + (+\infty) = +\infty =$$

Se $\lim \frac{3 - n^3 u_n}{n^3} = +\infty$ e $v_n > \frac{3 - n^3 u_n}{n^3}$, para $n \geq 250$ então $v_n \rightarrow +\infty$.

Resposta: (D)

2. • $g(x) = f(x) + 4$
- $$g(-2) = f(-2) + 4 = -3 + 4 = 1 > 0$$
- $$g(5) = f(5) + 4, \text{ ora } f(5) > 0, \text{ pelo que } f(5) + 4 > 4, \text{ logo, } g(5) > 0$$
- Como $g(-2)$ e $g(5)$ tem o mesmo sinal, nada se pode concluir, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, acerca da existência de zeros de g no intervalo $]-2, 5[$.
- $g(x) = f(x) - 2$
- $$g(-2) = f(-2) - 2 = -3 - 2 = -5 < 0$$
- $$g(5) = f(5) - 2, \text{ ou } f(5) - 2 \text{ é maior que zero se e somente se } f(5) > 2, \text{ pelo que nada se pode concluir, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, acerca da existência de zeros de } g \text{ no intervalo }]-2, 5[.$$
- $g(x) = x - f(x)$
- $$g(-2) = -2 - f(-2) = -2 - (-3) = 1 > 0$$

$g(5) = 5 - f(5)$, então $5 - f(5) < 0$ se e somente se $f(5) > 5$, pelo que nada se pode concluir, pelo

Teorema de Bolzano-Cauchy, acerca da existência de zeros de g no intervalo $]-2, 5[$.

- $g(x) = x + f(x)$
- g é contínua em $[-2, 5]$ pois é definida pela soma de duas funções contínuas:
- $$g(-2) = -2 + f(-2) = -2 + (-3) = -5 < 0$$
- $$g(5) = 5 + f(5), \text{ como } f(5) > 0, \text{ então } 5 + f(5) > 5, \text{ portanto, } g(5) > 0$$
- Assim, e como g é contínua no intervalo $[-2, 5]$ e $g(-2) \times g(5) < 0$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy (ou o seu corolário), podemos garantir a existência de pelo menos um zero de g no intervalo $]-2, 5[$.

Resposta: (D)

3. A função f é contínua no seu domínio, ou seja, $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, pelo que a reta de equação $x = -2$ é assíntota ao gráfico de f , e é a única assíntota vertical. Por outro lado, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, portanto, a reta de equação $y = 2$ é assíntota ao gráfico de f , em $+\infty$.
- Já, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 3] = 0 \Leftrightarrow$
- $$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + 3)] = 0, \text{ pelo que a reta de equação } y = -x + 3 \text{ é assíntota ao gráfico de } f, \text{ em } -\infty.$$
- Assim, as equações das assíntotas do gráfico de f são: $x = -2, y = 2$ e $y = -x + 3$

Resposta: (C)

4. • Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, a função f tem um máximo no ponto de abscissa a e não um mínimo.
- Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, a função f tem um mínimo no ponto de abscissa a e não um máximo.
- O anulamento da segunda derivada não é condição suficiente para a existência de ponto de inflexão, tem que haver mudança de sinal.

Apenas a afirmação (C) é correta.

Resposta: (C)

5. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x + 4)^4(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow$
- $$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 0 \vee (x + 4)^4 = 0 \vee x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
- $$\Leftrightarrow x^2 = -2 \vee x + 4 = 0 \vee x^3 = -1 \Leftrightarrow$$
- $$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -4 \vee x = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow$$
- $$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1$$

Como $(x + 4)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a segunda derivada apenas muda de sinal em -1 .

O gráfico de f tem somente um ponto de inflexão cuja abscissa é $x = -1$.

Resposta: (A)

$$6. \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{10}{k + e^{2n}} = \frac{10}{1 + e^{2n}} + \frac{10}{2 + e^{2n}} + \frac{10}{3 + e^{2n}} + \dots + \frac{10}{(n-1) + e^{2n}} + \frac{10}{n + e^{2n}}$$

Portanto:

$$\sum_{k=1}^n \frac{10}{n + e^{2n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{10}{k + e^{2n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{10}{1 + e^{2n}}$$

ou seja,

$$\frac{10n}{n + e^{2n}} \leq u_n \leq \frac{10n}{1 + e^{2n}}$$

As somas têm n parcelas iguais.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{n + e^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{1 + \frac{e^{2n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{1 + \frac{e^n}{n} \times e^n} = \frac{10}{1 + (+\infty) \times (+\infty)} = \frac{10}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{1 + e^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{\frac{1}{n} + \frac{e^{2n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{\frac{1}{n} + \frac{e^n}{n} \times e^n} = \frac{10}{0 + (+\infty) \times (+\infty)} = \frac{10}{+\infty} = 0$$

Logo, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim u_n = 0$.

$$7.1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{+\infty}{2 + 0} = +\infty, \text{ dado que}$$

como $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, vem que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos x \times \frac{1}{x} \right) = 0 \text{ por ser produto de uma}$$

função limitada por uma função de limite nulo.

$$7.2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0 \text{ por ser o produto de uma função}$$

limitada por uma função de limite nulo.

8.1. Sabe-se que a função f é contínua em \mathbb{R} , pelo que, em particular f é contínua no ponto 4. Tal acontece quando e apenas quando existir $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

Assim, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) = \frac{2 \times 4 + k}{\sqrt{4^2 + 9}} = \frac{8 + k}{\sqrt{25}} = \frac{8 + k}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 3x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 3x + 2})}{(\sqrt{x^2 - 3x - 2})(\sqrt{x^2 - 3x + 2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 3x + 2})}{(\sqrt{x^2 - 3x})^2 - 2^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 3x + 2})}{x^2 - 3x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 3x + 2})}{(x - 4)(x + 1)} =$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x + 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{4^2 - 3 \times 4 + 2}}{4 + 1} = \frac{\sqrt{4 + 2}}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Logo, } \frac{8 + k}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 8 + k = 4 \Leftrightarrow k = 4 - 8 \Leftrightarrow k = -4$$

Portanto, $k = -4$.

$$8.2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 + 9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{9}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{|x| \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{4}{x}\right)}{-x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = \frac{2 - \frac{4}{-\infty}}{-\sqrt{1 + 0}} = \frac{2 - 0}{-\sqrt{1 + 0}} = \frac{2}{-1} = -2$$

Portanto, a reta de equação $y = -2$ é assíntota ao gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 4]$.

9.1. Para $x \in]0, 5[$, tem-se:

$$f''(x) = \left(\frac{x - 2}{4 + x^2} \right)' = \frac{(x - 2)'(4 + x^2) - (x - 2)(4 + x^2)'}{(4 + x^2)^2} = \frac{1(4 + x^2) - (x - 2)(2x)}{(4 + x^2)^2} = \frac{4 + x^2 - 2x^2 + 4x}{(4 + x^2)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 4}{(4 + x^2)^2}$$

Zeros de f'' :

$$f''(x) = 0 \wedge x \in]0, 5[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x + 4}{(4 + x^2)^2} = 0 \wedge x \in]0, 5[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 4 = 0 \wedge (4 + x^2)^2 \neq 0 \wedge x \in]0, 5[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times 4}}{2 \times (-1)} \wedge x \in]0, 5[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{-2} \wedge x \in]0, 5[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{-2} \wedge x \in]0, 5[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 - 2\sqrt{2} \vee x = 2 + 2\sqrt{2}) \wedge x \in]0, 5[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{2}, \text{ pois } 2 - 2\sqrt{2} \notin]0, 5[$$

Construindo uma tabela:

x	0		$2+2\sqrt{2}$		5
f''		+	0	-	
f		∪		∩	

P.I.

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]2+2\sqrt{2}, 5[$ e voltada para cima em $]0, 2+2\sqrt{2}[$.

Tem um único ponto de inflexão, de abscissa $2+2\sqrt{2}$.

9.2. A função f' é contínua em $]0, 5[$ por ser uma função racional.

Como $[1; 4,9] \subset]0, 5[$, a função f' é contínua em $[1; 4,9]$.

Logo, tendo em conta o Teorema de Weierstrass, f admite, neste intervalo, um máximo e um mínimo absolutos.

Teste de avaliação 3

Pág. 7

1. Tem-se que $a+b = \frac{3\pi}{2}$, pelo que $b = \frac{3\pi}{2} - a$. Assim:

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \sin\left(a - \left(\frac{3\pi}{2} - a\right)\right) = \sin\left(a - \frac{3\pi}{2} + a\right) = \\ &= \sin\left(2a - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2a\right) = \cos(2a) = \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \end{aligned}$$

Resposta: (D)

2. $\lim w_n = \lim \left[\tan\left(-\frac{\pi}{2} + e^{-n}\right) \right] = \lim \left[\tan\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{e^n}\right) \right] = -\infty$

pois $-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{e^n} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Resposta: (A)

3. Vamos determinar as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e de g .

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \sin(x) - 1 = -1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x = -\sin\frac{x}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 0 \vee 2\cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 0 \vee \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{x}{2} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \vee x = -\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Determinemos, agora, e em particular as duas menores abscissas positivas.

Para $k=0$, $x=0 \vee x = -\frac{4\pi}{3}$

Para $k=1$, $x = 2\pi \vee x = \frac{16\pi}{3} \vee x = \frac{8\pi}{3}$

Portanto, estas duas abscissas são: $x = \frac{4\pi}{3}$ e $x = 2\pi$

Assim, uma condição que define a região colorida pode ser:

$$f(x) \leq y \leq g(x) \wedge \frac{4\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$$

Resposta: (B)

4. O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa $\frac{5\pi}{24}$ é igual a $g'\left(\frac{5\pi}{24}\right)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\sin(2x))' = (2x)' \cos(2x) = 2 \cos(2x), \text{ portanto,} \\ g'\left(\frac{5\pi}{24}\right) &= 2 \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{24}\right) = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 2 \left(\cos\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Resposta: (C)

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \\ &= \frac{1}{2+2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} y = x - 2 \\ \text{Se } x \rightarrow 2, y \rightarrow 0 \end{array} \right\}$

Resposta: (B)

Pág. 8

6.1. Área do triângulo $[OAP] =$

$$= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\overline{OA} \times \text{ordenada de } P}{2}$$

O triângulo $[OAP]$ é isósceles, pois $[OA]$ e $[OP]$ são raios da circunferência trigonométrica. Assim, se $\widehat{OPA} = \theta$, então $\widehat{PAO} = \theta$, pois são ângulos do triângulo $[OAP]$ que se opõem a lados iguais.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a π radianos, tem-se que $\widehat{AOP} = \pi - \widehat{OPA} - \widehat{PAO}$, ou seja, $\widehat{AOP} = \pi - 2\theta$.

Seja Q o ponto do eixo Ox tal que $[PQ] \perp Ox$, então $\widehat{POQ} = \pi - (\pi - 2\theta)$, isto é, $\widehat{POQ} = 2\theta$. Assim:

$$\sin(2\theta) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{\overline{PQ}}{1} \Leftrightarrow \sin(2\theta) = \overline{PQ}$$

portanto, a ordenada de P é igual a $\sin(2\theta)$.

Logo, área do triângulo $[OAP] =$

$$= \frac{1 \times \sin(2\theta)}{2} = \frac{\sin(2\theta)}{2}$$

6.2. $2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4}$
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4} \vee \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$
 Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, $\cos \alpha > 0$, portanto, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Por outro lado, tem-se que:

$$A(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \sin \alpha \cos \alpha$$

Substituindo $\sin \alpha$ por $\frac{1}{4}$ e $\cos \alpha$ por $\frac{\sqrt{15}}{4}$, vem que:

$$A(\alpha) = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{16}$$

6.3. $A(1, 0)$ e $P(\cos(2\theta), \sin(2\theta))$

$$d(A, P) = \sqrt{(1 - \cos(2\theta))^2 + (0 - \sin(2\theta))^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos(2\theta) + 1} =$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos(2\theta)}$$

Por exemplo, $d(A, P) = \sqrt{2 - 2\cos(2\theta)}$

7.1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+2)}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x+3} = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{3x} \stackrel{(0)}{=} \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{2}{3} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \quad \left| \begin{array}{l} y = 2x \\ \text{Se } x \rightarrow 0^+, y \rightarrow 0^+ \end{array} \right.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, então existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, neste caso, é igual a $\frac{2}{3}$.

7.2. Tem-se que,

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, -1 \leq \sin(2x) \leq 1$$

Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3x}\right) = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(2x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sin(2x) \times \frac{1}{3x}\right] = 0$, por ser

o produto de uma função limitada por uma função de limite nulo.

A reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de g em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
, portanto, a reta de

equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de g em $+\infty$.

7.3. Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa $x = -\frac{\pi}{2}$ é:

$$y - g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{3\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin(-\pi)}{-\frac{3\pi}{2}} = \frac{0}{-\frac{3\pi}{2}} = 0.$$

Para, $x < 0$: $g'(x) = \left(\frac{\sin(2x)}{3x}\right)' =$

$$= \frac{[\sin(2x)]' 3x - \sin(2x)(3x)'}{(3x)^2} =$$

$$= \frac{(2x)' \cos(2x) 3x - \sin(2x) \times 3}{(3x)^2} =$$

$$= \frac{6x \cos(2x) - 3 \sin(2x)}{9x^2}$$

Assim:

$$g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - 3 \sin\left(2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{9\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3\pi \cos(-\pi) - 3 \sin(-\pi)}{\frac{9\pi^2}{4}} = \frac{-3\pi \times (-1) - 3 \times 0}{\frac{9\pi^2}{4}} =$$

$$= \frac{3\pi}{\frac{9\pi^2}{4}} = 3\pi \times \frac{4}{9\pi^2} = \frac{4}{3\pi}$$

Portanto:

$$y - g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow y - 0 = \frac{4}{3\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{3\pi}x + \frac{2}{3}$$

A equação reduzida pedida é $y = \frac{4}{3\pi}x + \frac{2}{3}$

7.4. Tem-se que

$$g\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{3\left(-\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}$$

$$1,1 \times g\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{11}{10} \times \frac{2}{\pi} = \frac{11}{5\pi}$$

Pretende-se provar que:

$$\exists c \in \left]\frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right[: g(c) = \frac{11}{5\pi}$$

A função g é contínua em $]0, +\infty[$ pois é definida neste intervalo por uma função racional.

Logo, a função g é contínua em $\left[\frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right]$.

Por outro lado:

$$g\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{10}\right)} = \frac{23}{33} \approx 0,697$$

$$g\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{12}{17} \approx 0,706$$

$$\frac{11}{5\pi} \approx 0,700, \text{ portanto } g\left(\frac{3}{10}\right) < \frac{11}{5\pi} < g\left(\frac{2}{5}\right)$$

Como g é contínua no intervalo $\left[\frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right]$, pelo Teorema

de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que

$$\exists c \in \left] \frac{3}{10}, \frac{2}{5} \right[: g(c) = 1, 1g\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

8.1. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos(2x) - (0 + \cos(2 \times 0))}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos(2x) - (0 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos(2x) - 1}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + (\cos^2 x - \sin^2 x) - 1}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + (1 - \sin^2 x - \sin^2 x) - 1}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - 2\sin^2 x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2\sin^2 x}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x} = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} =$
 $= 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin x =$
 $= 1 - 2 \times 1 \times 0 = 1 - 0 = 1$

Portanto, $f'(0) = 1$

8.2. Para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, tem-se:

$$f'(x) = (x + \cos(2x))' = (x)' + (\cos(2x))' =$$

$$= 1 + (-2x)' \sin(2x) = 1 - 2 \sin(2x)$$

$$f''(x) = (1 - 2 \sin(2x))' = (1)' - (2 \sin(2x))' =$$

$$= 0 - 2(\sin(2x))' = -2((2x)' \cos(2x)) =$$

$$= -2(2 \cos(2x)) = -4 \cos(2x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 \cos(2x) = 0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} \vee 2x = \frac{\pi}{2} \vee 2x = \frac{3\pi}{2} \vee 2x = \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$$

Recorrendo a uma tabela:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$
f''		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
f		∪		∩		∪		∩		∪	
			P.I.		P.I.		P.I.		P.I.		

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em

$$\left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right[, \text{ em } \left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[\text{ e em } \left] \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[\text{ e tem}$$

concavidade voltada para baixo em $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[\text{ e em}$

$$\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right[.$$

Tem quatro ponto de inflexão, de abcissas

$$-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ e } \frac{5\pi}{4} .$$

Teste de avaliação 4

Pág. 9

1. Recorrendo à fórmula $C = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n$, onde

$$C_0 = 30\,000, r = 3,25\% \text{ e } n = 24, \text{ vem:}$$

$$C = 30\,000 \left(1 + \frac{3,25}{100 \times 24}\right)^{24} \approx 30\,990,34$$

Resposta: (C)

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$

Pois a sucessão (x_n) definida por $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é

monótona crescente e é limitada e o seu limite é igual ao

número de Neper, pelo que que, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^-$

Resposta: (A)

3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + k > 0\}$

A expressão $x^2 + 3x + k$ é sempre positiva se e só se nunca se anular, isto é, se o binómio discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, for menor que zero. Assim, vem

$$3^2 - 4 \times 1 \times k < 0 \Leftrightarrow 9 - 4k < 0 \Leftrightarrow -4k < -9 \Leftrightarrow k > \frac{9}{4}$$

Portanto, $k \in \left] \frac{9}{4}, +\infty \right[$

Resposta: (B)

4. Tem-se que

$$\sum_{i=1}^n g(i) = g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(n-1) + g(n)$$

$$= 3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + \dots + 3^{-n+1} + 3^{-n}$$

As parcelas são termos de uma progressão geométrica de

razão 3^{-1} , isto é, $\frac{1}{3}$, cujo primeiro termo é,

também, $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Portanto, a soma destas parcelas é dada por:

$S_n = n_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$, onde r é a razão, logo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n g(i) &= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donde, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{i=1}^n g(i) \right] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Resposta: **(B)**

5. Seja $g^{-1}(16) = a$, então o valor de a é a solução da equação $g(a) = 16$, pelo que:

$$g(a) = 16 \Leftrightarrow 8 + 4 \log_3(a+1) = 16 \wedge a > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \log_3(a+1) = 8 \wedge a > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(a+1) = 2 \wedge a > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+1 = 3^2 \wedge a > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 8 \wedge a > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 8$$

Portanto, $g^{-1}(16) = 8$

Resposta: **(D)**

Pág. 10

- 6.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x - x^2 > 0 \wedge 2x > 0 \wedge \log_9(2x) + 3 \neq 0\}$

$$3x - x^2 > 0 \wedge 2x > 0 \wedge \log_9(2x) + 3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(3-x) > 0 \wedge x > 0 \wedge \log_9(2x) \neq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-x > 0 \wedge x > 0 \wedge 2x \neq 9^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < 3 \wedge x > 0 \wedge 2x \neq \frac{1}{9^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 3 \wedge x > 0 \wedge 2x \neq \frac{1}{729} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 3 \wedge x \neq \frac{1}{1458}$$

$$D_f = \left] 0, \frac{1}{1458} \right[\cup \left] \frac{1}{1458}, 3 \right[$$

- 6.2. A função f é contínua. Portanto, as retas de equação

$x = 0$, $x = \frac{1}{1458}$ e $x = 3$ são possíveis assintotas

verticais do gráfico de f . Vejamos se o são:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x - x^2)}{\log_9(3x) + 3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[x(3-x)]}{\frac{\ln(3x)}{\ln(9)} + 3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + \ln(3-x)}{\frac{\ln x + \ln 3}{\ln 9} + 3} = \\ &= \ln 9 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - \ln(3-x)}{\ln(x) + \ln 3 + 3 \ln 9} = \\ &= \ln 9 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\ln(3-x)}{\ln x}}{1 + \frac{\ln 3}{\ln x} + \frac{3 \ln 9}{\ln x}} = \\ &= \ln 9 \times \frac{1 - \frac{\ln 3}{-\infty}}{1 + \frac{\ln 3}{-\infty} + \frac{3 \ln 9}{-\infty}} = \ln 9 \times \frac{1 - 0}{1 + 0 + 0} = \ln 9 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ é um número real, então, a reta de equação $x = 0$, não é assíntota vertical do gráfico de f .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{1458}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{1458}^-} \frac{\ln(3x - x^2)}{\log_9(2x) + 3} = \\ &= \frac{\ln\left(3 \times \frac{1}{1458} - \left(\frac{1}{1458}\right)^2\right)}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{1458}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{1458}^+} \frac{\ln(3x - x^2)}{\log_9(2x) + 3} = \\ &= \frac{\ln\left(3 \times \frac{1}{1458} - \left(\frac{1}{1458}\right)^2\right)}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

A reta de equação $x = \frac{1}{1458}$ é assíntota bilateral do gráfico de f .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\ln(3x - x^2)}{\log_9(2x) + 3} = \frac{\ln(0^+)}{\log_9(6) + 3} = \\ &= \frac{-\infty}{\log_9(6) + 3} = -\infty \end{aligned}$$

A reta de equação $x = 3$ é assíntota ao gráfico de f .

O gráfico de f não tem assíntota não verticais já que o domínio de f é um conjunto limitado.

Assim, as assíntotas ao gráfico de f são as retas de

equações $x = \frac{1}{1458}$ e $x = 3$.

7.1. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^{y+1} - e} = \left. \begin{array}{l} y = \ln x - 1 \\ \Leftrightarrow y + 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e^y + 1 \\ \text{Se } x \rightarrow e, y \rightarrow 0 \end{array} \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e(e^y - 1)} = \\ &= \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x(x+2)}{2-5^x} &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x x + 2 \times 3^x}{2-5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{2}{3^x \times x} - \frac{5^x}{3^x \times x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{2}{3^x \times x} - \left(\frac{5}{3}\right)^x} = \frac{1+0}{\frac{2}{+\infty \times (+\infty)} - (+\infty)} = \\
 &= \frac{1}{0 - \infty} = 0
 \end{aligned}$$

dado que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln\left(\frac{5}{3}\right)^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln \frac{5}{3}}}{x} = \\
 &= \ln \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln \frac{5}{3}}}{x \ln \frac{5}{3}} = \\
 &= \ln \frac{5}{3} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = \left. \begin{array}{l} y = x \ln \frac{5}{3} \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \\
 &= \ln \frac{5}{3} \times (+\infty) = (+\infty)
 \end{aligned}$$

8.1. Uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa $x = e^2$ é:

$$\begin{aligned}
 y - g(e^2) &= g'(e^2)(x - e^2) \\
 g(e^2) &= (e^2)^2 \ln e^2 = e^4 \times 2 = 2e^4 \\
 g'(x) &= (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = \\
 &= 2x \ln x + x^2 \left(\frac{1}{x}\right) = \\
 &= 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } g'(e^2) = e^2(2 \ln(e^2) + 1) = e^2(2 \times 2 + 1) = 5e^2$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 y - g(e^2) &= g'(e^2)(x - e^2) \\
 \Leftrightarrow y - 2e^4 &= 5e^2(x - e^2) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow y &= 5e^2x - 5e^4 - 2e^4 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow y &= 5e^2x - 3e^4
 \end{aligned}$$

A equação reduzida pedida é $y = 5e^2x - 3e^4$

8.2. Para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se que $g'(x) = x(2 \ln x + 1)$

$$\begin{aligned}
 g'(x) = 0 &\Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x = 0 \vee 2 \ln x + 1 = 0) &\wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left(x = 0 \vee \ln x = -\frac{1}{2}\right) &\wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = e^{-\frac{1}{2}}\right) &\wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{e}
 \end{aligned}$$

Recorrendo a uma tabela, vem:

x	0		$\frac{\sqrt{e}}{e}$	$+\infty$
g'		-	0	+
g		\searrow		\nearrow

Mín.

A função g é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{\sqrt{e}}{e}\right]$ e é

estritamente crescente em $\left[\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty\right[$. Tem um mínimo

relativo igual a $f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) = \left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right)^2 \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) = -\frac{1}{2e}$.

$$\begin{aligned}
 9.1. \quad c(t) = 180 &\Leftrightarrow 337 - 276e^{-0,178t} = 180 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 337 - 180 &= 276e^{-0,178t} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 157 &= 276e^{-0,178t} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{157}{276} &= e^{-0,178t} \Leftrightarrow -0,178t = \ln\left(\frac{157}{276}\right) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{157}{276}\right)}{-0,178} \Leftrightarrow t \approx 3,17$$

Um tubarão-tigre atinge 1,8 metro ao fim de, aproximadamente, três anos de vida.

9.2. Temos que $c(0) = 337 - 276e^{-0,178 \times 0} = 337 - 276 \times 1 = 61$ e

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} (337 - 276e^{-0,178t}) &= 337 - 276e^{-0,178(+\infty)} \\
 &= 337 - 276e^{-\infty} = 337 - 276 \times 0 = 337
 \end{aligned}$$

Como a função c é estritamente crescente e $c(0) = 61$ e

$\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 337$, podemos concluir que o comprimento de um tubarão-tigre pode variar entre os 61 centímetros e os 337 centímetros, ou seja, será uma valor do intervalo $[61, 337[$, aproximadamente.

Teste de avaliação 5

Pág. 11

$$\begin{aligned}
 1. \quad z &= \frac{1}{1+i \tan \alpha} = \frac{1}{1+i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \\
 &= \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{e^{i\alpha}} = \cos \alpha \times \frac{1}{e^{i\alpha}} = \\
 &= \cos \alpha e^{-i\alpha}
 \end{aligned}$$

Resposta: (D)

$$\begin{aligned}
 2. \quad \bullet \frac{2}{i} &= \frac{2i}{i^2} = \frac{2i}{-1} = -2i \\
 \bullet i^{123} &= i^{4 \times 30 + 3} = i^3 = -i \\
 \bullet \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} &= \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{0 + i(-1)}{2} = \frac{-i}{2}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{e^{-i\pi}}{2} = \frac{\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)}{2} = \frac{-1 + i(0)}{2} = -\frac{1}{2} \text{ é}$$

imaginário puro não nulo. Portanto, não é um imaginário puro.

Resposta: (D)

3. A circunferência tem raio 2 e centro em $(2, -2)$, pelo que pode ser definida pela equação $|z - (2 - 2i)| = 2$, ou seja, $|z - 2 + 2i| = 2$.

A reta r é a bissetriz dos quadrantes pares.

A reta s é paralela ao eixo real e intersecta a reta r no ponto de coordenadas $(2, -2)$. Uma condição que pode definir a região sombreada, incluindo a fronteira é:

$$|z - 2 + 2i| \leq 4 \wedge \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z - 2 + 2i) \leq \pi$$

Resposta: (B)

4. $\bullet \left(\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{15}}\right)^5 = (\sqrt{3})^5 e^{i\left(\frac{2\pi}{15} \times 5\right)} = 9\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} \neq z$
 $\bullet \left(3\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^5 = (3\sqrt{3})^5 e^{i\left(\frac{5\pi}{3} \times 5\right)} = 2187\sqrt{3}e^{i\frac{25\pi}{3}} =$
 $= 2187\sqrt{3}e^{i\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = 2187\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \neq z$
 $\bullet \left(\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^5 = (\sqrt{3})^5 e^{i\left(\frac{5\pi}{3} \times 5\right)} = 9\sqrt{3}e^{i\left(\frac{25\pi}{3}\right)} = 9\sqrt{3}e^{i\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)} =$
 $= 9\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = z$
 $\bullet \left(3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{15}}\right)^5 = (3\sqrt{3})^5 e^{i\left(\frac{\pi}{15} \times 5\right)} = 2187\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \neq z$

Resposta: (C)

5. $z_1 = (k - 2i)(4 - i)$
 $= 4k - ki - 8i + 2i^2 =$
 $= 4k - ki - 8i - 2 =$
 $= (4k - 2) + (-k - 8)i$

O número complexo z_1 é um número real se e só se

$$-k - 8 = 0, \text{ ou seja, } k = -8.$$

Resposta: (A)

Pág. 12

6. $z_1 = (3 - i)\left(3 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = (3 - i)(3 + i) = 9 - i^2 = 10$
 $z_2 = \frac{(1 + 2i)(3 + i) - 11i^{10} + i^3}{3i} = \frac{3 + i + 6i + 2i^2 - 11i^2 + i^3}{3i}$
 $= \frac{1 + 7i + 11 - i}{3i} = \frac{12 + 6i}{3i} = \frac{(12 + 6i)i}{3i^2} = \frac{12i + 6i^2}{-3}$
 $= \frac{12i - 6}{-3} = 2 - 4i$

Assim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{2 - 4i} = \frac{5}{1 - 2i} = \frac{5(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{5(1 + 2i)}{1 - 4i^2} =$$

$$= \frac{5(1 + 2i)}{5} = 1 + 2i$$

7. $z - 1 = e^{i\theta} - 1 =$
 $= \cos\theta + i\sin\theta - 1 =$
 $= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 1 =$
 $= -\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 1 =$
 $= -\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} =$
 $= -2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} =$
 $= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right) =$
 $= 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right] =$
 $= 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}$

8.1. $z^3 = (z_1)^2 \Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3} + 3i}{2i}\right)^2$

Vamos escrever $-\sqrt{3} + 3i$ na forma trigonométrica.

$$|-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Sendo $\arg(-\sqrt{3} + 3i) = \theta$, tem-se que

$$\tan\theta = \frac{3}{-\sqrt{3}} \wedge \theta \in 2.^\circ \text{ quadrante, ou seja,}$$

$$\tan\theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in 2.^\circ \text{ quadrante, então, } \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Logo, $-\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Voltando à equação, tem-se:

$$z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3} + 3i}{2i}\right)^2 \Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \left[\sqrt{3}e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 \Leftrightarrow z^3 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{3e^{i\frac{\pi}{3}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{3}e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k = 0, 1, 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{9}} \vee z = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{7\pi}{9}} \vee z = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{13\pi}{9}}$$

- 8.2. Pretende-se determinar $w = x + iy$, tal que $w^2 = 8 - 6i$, onde x e y são números reais.

Assim:

$$(x + iy)^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 8 - 6i$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 8 - 6i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 9 = 8x^2 \\ y = -\frac{3}{x}, x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times (-9)}}{2} \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{8+10}{2} \vee x^2 = \frac{8-10}{2} \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \vee x^2 = -1 \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

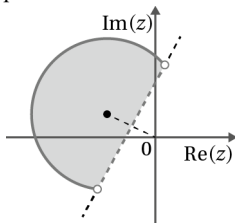
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \vee x \in \emptyset \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Então, $w = 3 - i$ ou $w = -3 + i$.

Portanto, as raízes quadradas de z_2 são $1 - 3i$ e $-1 + 3i$.

- 9.1. $|z - z_1| \leq 3 \Leftrightarrow |z - (-2 + i)| \leq 3$, define o círculo de centro em $(-2, 1)$ e raio 3

$|z - z_1| < |z| \Leftrightarrow |z - (-2 + i)| < |z - 0|$, define o semiplano aberto (exclui a fronteira) determinado pela mediatriz do segmento de reta $[OA]$, onde $A(-2, 1)$ é o afixo z_1 e O é a origem, e que contém A :



- 9.2. $|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Sendo $\arg(z_1) = \theta$, tem-se $\tan \theta = \frac{1}{-2} \wedge \theta \in 2.^\circ$ quadrante.

Assim, o ângulo cuja tangente é igual a $-\frac{1}{2}$ “não é conhecido”, pelo que, o caminho mais adequado para escrever w na forma algébrica é recorrer ao Binómio de Newton. Assim:

conhecido”, pelo que, o caminho mais adequado para escrever w na forma algébrica é recorrer ao Binómio de Newton. Assim:

$$\begin{aligned} w &= (z_1)^6 = (-2 + i)^6 = {}^6C_0 (-2)^6 i^0 + {}^6C_1 (-2)^5 i^1 + \\ &+ {}^6C_2 (-2)^4 i^2 + {}^6C_3 (-2)^3 i^3 + \\ &+ {}^6C_4 (-2)^2 i^4 + {}^6C_5 (-2)^1 i^5 + \\ &+ {}^6C_6 (-2)^0 i^6 = \\ &= 64 + (-192i) + (-240) + 160i + 60 + (-12i) - 1 = \\ &= -117 - 44i \end{aligned}$$

Portanto, $w = -117 - 44i$

10. $z_1 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{9}}$, $\log z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{9}}$

A diferença entre os argumentos de \bar{z}_1 e z_1 é igual a

$$\frac{\pi}{9} - \left(-\frac{\pi}{9}\right) = \frac{2\pi}{9}$$

Assim, $\frac{2\pi}{9} = \frac{2\pi}{n}$, pelo que $n = 9$.

Por outro lado:

$$w = (z_1)^9 = \left(\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{9}}\right)^9 = (\sqrt{3})^9 e^{i\left(\frac{\pi}{9} \times 9\right)} = 81\sqrt{3}e^{i\pi} = -81\sqrt{3}$$

Conclusão: $n = 9$, $w = -81\sqrt{3}$ e o polígono é um eneágono regular.

Teste de avaliação 6

Pág. 13

1. $\int f(x) dx = \int \frac{x\sqrt[3]{x^{-2}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x \times x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx =$

$$= \int x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} dx = \int x^{-\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{6} + 1}}{-\frac{1}{6} + 1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + c, c \in \mathbb{R} = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + c, c \in \mathbb{R} = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + c, c \in \mathbb{R}$$

Das opções dadas, apenas na opção (B) se encontra uma função que pode ser primitiva de f .

Resposta: (B)

2. $f(x) = \int (x^2 - 3x + 4) dx = \int x^2 dx - 3 \int x dx + 4 \int 1 dx =$
- $$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + c, c \in \mathbb{R}$$

Portanto, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + c, c \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, sabe-se que o gráfico de f contém o

ponto de coordenadas $(-1, 2)$, ou seja, $f(-1) = 2$.

$$f(-1) = 2 \Leftrightarrow \frac{(-1)^3}{3} - \frac{3(-1)^2}{2} + 4(-1) + c = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 4 + c = 2 \Leftrightarrow -\frac{35}{6} + c = 2 \Leftrightarrow c = 2 + \frac{35}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{47}{6}$$

Logo, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + \frac{47}{6}$.

Resposta: (C)

3. $\int_{e^{-2}}^{e^3} \frac{1}{t} dt = |\ln t|_{e^{-2}}^{e^3}, t > 0 =$

$$= \ln e^3 - \ln e^{-2} = 3 - (-2) = 5$$

Resposta: (D)

4. A área, A , é dada por:

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2 - x^2) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \left(2 \times 0 - \frac{0}{3} \right) = \frac{5}{3}$$

Resposta: (A)

5. $a(t) = v'(t) = (6t + 3,5t^2)' = 6 + 7t$

$$a(3) = 6 + 7 \times 3 = 27$$

Portanto, a aceleração do móvel, em cm/s^2 , no instante $t = 3 \text{ s}$ é igual a 27.

Resposta: (C)

Pág. 14

6.1. $\int \left(4x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x - 2 \right) dx =$

$$\begin{aligned} &= 4 \int x^3 dx + \int x^2 dx - \frac{3}{2} \int x dx - 2 \int 1 dx = \\ &= 4 \times \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} \times \frac{x^2}{2} - 2x + c, c \in \mathbb{R} = \\ &= x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 - 2x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6.2. $\int \frac{e^{3x}}{2 + e^{3x}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{2 + e^{3x}} dx = \frac{1}{3} \ln |2 + e^{3x}| + c, c \in \mathbb{R}$

6.3. $\int \frac{2x+1}{\cos^2(x^2+x)} dx = \tan(x^2+x) + c, c \in \mathbb{R}$

6.4. $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{\cos x} dx = \int \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{\cos x}}{2} dx = \int \frac{\sin x e^{\cos x}}{2} dx = -\frac{1}{2} \int -\sin x e^{\cos x} dx = -\frac{e^{\cos x}}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

7.1. $\int_{-1}^1 (15t^4 - 8t^3) dt = \left[15 \frac{t^5}{5} - 8 \frac{t^4}{4} \right]_{-1}^1 = [3t^5 - 2t^4]_{-1}^1 = (3 \times 1^5 - 2 \times 1^4) - (3 \times (-1)^5 - 2 \times (-1)^4) = (3 - 2) - (-3 - 2) = 1 - (-5) = 6$

7.2. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(4t) dt = \left[-\frac{\cos(4t)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{4} - \left(-\frac{\cos\left(4 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{4} \right) = -\frac{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{4} + \frac{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$

8. Determinemos as abscissas dos pontos de interseção do gráfico de f e de g .

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}x + 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times 8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6+2}{2} \vee x = \frac{6-2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$$

Sabemos que $-\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}x - 3 \geq \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 1, \forall x \in [2, 4]$:

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 (g(x) - f(x)) dx = \\ &= \int_2^4 \left[\left(-\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}x - 3 \right) - \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \right) \right] dx = \\ &= \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 \right) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 4x \right]_2^4 = \\ &= \left(-\frac{4^3}{6} + \frac{3 \times 4^2}{2} - 4 \times 4 \right) - \left(-\frac{2^3}{6} + \frac{3 \times 2^2}{2} - 4 \times 2 \right) = \\ &= -\frac{8}{3} + \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Portanto, a medida da área da região do plano delimitada pelos gráficos de f e g é igual a $\frac{2}{3}$ u.a..

9. $p(t) - p_0 = \int_0^t v(t) dt$

$$p(t) - p_0 = \int_0^t (3 - 1,5t) dt$$

$$p(t) - p_0 = \left[3t - 1,5 \frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

$$p(t) = P_0 = 3t - 0,75t^2$$

$$p(t) = 3t - 0,75t^2 + p_0$$

Como $p_0 = 1,2$, tem-se que $p(t) = -0,75t^2 + 3t + 1,2$ é a função posição do ponto material pedida.